

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BULANIK SAYI DİZİLERİNİN β -DERECEDEN
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Damla BARLAK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

ŞUBAT-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN β -DERECEDEN
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ

Damla BARLAK

(121121203)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 Ocak 2017

Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Şubat 2017

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Hıfı ALTINOK (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Ayhan ESİ (ADY.Ü)

Prof.Dr. Mikail ET (F.Ü)

Prof.Dr. Ayşegül GÖKHAN (F.Ü)

Doç.Dr. Mahmut IŞIK (HR.Ü)

ŞUBAT-2017

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübelerinden her zaman faydalandığım saygıdeğer hocam Doç.Dr. Hıfısı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Ayrıca, zaman zaman karşılaştığımız problemlerde tecrübe ve desteklerini bizden esirgemeyen, engin bilgi ve birikimlerinden faydalandığım sayın hocalarım Prof.Dr. Mikâil ET ve Doç.Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Damla BARLAK

ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Tanımlar	3
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık	8
2.3. Kuvvetli Cesàro Toplanabilme	10
2.4. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	12
2.5. Fark Dizi Uzayları	13
3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ	17
3.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar	17
3.2. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri	22
4. BULANIK FARK DİZİLERİNDE β -DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	28
4.1. $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ ve $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m)$ Dizi Kümeleri ve Bazı Topolojik Özellikleri	28
4.2. Bir Modülüs Fonksiyonu İle Tanımlı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	37
4.3. Bir Orlicz Fonksiyonu İle Tanımlı Lacunary İstatistiksel Yakın- saklık	39
5. SONUÇLAR	44
6. KAYNAKLAR	45

ÖZET

Beş ana bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde istatistiksel yakınsaklık ve bulanık sayıların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde ilk olarak çalışmamızın içerisinde geçen bazı temel tanımlara yer verilmiş olup ardından reel veya kompleks terimli bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı, kuvvetli Cesàro toplanabilirliği ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı gibi bazı yakınsaklık türlerine ve fark dizi uzaylarına kısaca değinilmiştir. Üçüncü bölümde bulanık sayı, bulanık küme ve bulanık sayı dizisi tanımları verilerek bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, sınırlılığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p –Cesàro toplanabilme gibi bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak $\beta \in (0, 1]$ ve $p > 0$ olmak üzere bir θ lacunary dizisi ve Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak bulanık sayı dizileri için $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$, $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ ve $w_p^\beta(F, \Delta^m)$ dizi kümeleri tanımlanmış ve aralarında bazı bağıntılar elde edilmiştir. Buna ilaveten, bir f modülüs fonksiyonuna göre $w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ dizi kümesi tanımlanarak $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ kümesiyle arasındaki bazı kapsama teoremleri verilmiştir. Son kısımda bir M Orlicz fonksiyonu kullanılarak kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilir dizilerin kümesi tanımlanmış ve $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesiyle aralarındaki bağıntı verilmiştir. Ayrıca $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ gibi farklı iki lacunary dizisi alınarak bu uzayların yapıları incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Modülüs fonksiyonu, Orlicz Fonksiyonu, Lacunary dizisi, Fark dizisi.

SUMMARY

Statistical Convergence of order β in Sequences of Fuzzy Numbers

This study consists of the five main chapters. In the first chapter, we give some informations about the historical development of statistical convergence and fuzzy numbers. In the second chapter, we give some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study and then touch on notions of difference sequence spaces and statistical convergence, strongly Cesàro summability and lacunary statistical convergence of a sequence of real or complex. In the third chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and sequence of fuzzy numbers and mention convergence, boundedness, statistical convergence and strongly p -Cesàro summability of the sequences of fuzzy numbers.

In the fourth chapter, we define the spaces $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m)$, $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ and $w_p^{\beta}(F, \Delta^m)$ for sequences of fuzzy numbers using generalized difference operator Δ^m and a lacunary sequence θ and give some relations between them, where $\beta \in (0, 1]$ and $p > 0$. Furthermore, some inclusion theorems are presented related to the spaces $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ and $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ according to modulus function f . In the next section, we introduce the concept of strongly $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ -summable with respect to the Orlicz function M and obtain the relation between the classes of $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ and $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$. Moreover, we examine these classes for different two lacunary sequences like $\theta = (k_r)$ and $\theta' = (s_r)$. In the fifth and last chapter, we give the results obtained from the thesis.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Cesàro summability, Modulus function, Orlicz function, Lacunary sequence, Difference sequence

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları	6
Şekil 3.1. Bir bulanık sayı	19
Şekil 3.2. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması	22
Şekil 3.3. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi	25
Şekil 3.4. (X_k) dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir	27
Şekil 4.1. Farklı m değerlerine göre $(\Delta^m X_k)$ bulanık fark dizisinin limitleri	34

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$C(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ nin kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$L(\mathbb{R}^n)$	: n –boyutlu reel bulanık sayılar kümesi
X^α	: X bulanık kümesinin α –seviye kümesi
M	: Orlicz fonksiyonu
f	: Modülüs fonksiyonu
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
$c(F)$	: Yakınsak bulanık sayı diziler kümesi
$S(F)$	: İstatistiksel yakınsak bulanık sayı diziler kümesi
$\ell_\infty(F)$	: Sınırlı bulanık sayı diziler kümesi

1. GİRİŞ

İlk defa Zygmund [1] tarafından ortaya atılan istatistiksel yakınsaklık düşüncesinin matematiksel tanımını 1951 yılında Steinhaus [2] ve Fast [3] birbirlerinden bağımsız olarak vermiş ve daha sonraki yıllarda yine bunlardan bağımsız olarak Schoenberg [4] yeniden tanımlamıştır. İlerleyen zamanlarda istatistiksel yakınsaklık kavramı farklı isimler altında Fourier analizi, Ergodik teori, Sayı teorisi, Ölçüm teorisi, Trigonometrik seriler, Turnpike teorisi ve Banach uzaylarının yapısında kullanılmış olup sonradan dizi uzaylarında incelenmiş ve toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiştir (bkz. [5],[6],[7],[8]). Freedman vd. [9] lacunary dizilerini kullanarak bazı Cèsaro-tipi toplanabilme uzaylarını tanımlamış ve daha sonra Fridy ve Orhan [10] reel sayı dizileri için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Gadjiev ve Orhan [11] bir reel sayı dizisinin istatistiksel yakınsaklığı için derece kavramını vermiş ve sonraki zamanlarda Çolak [12], $\alpha \in (0, 1]$ bir reel sayı olmak üzere istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirip reel sayı dizileri için α -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $p > 0$ için α -dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilme tanımlarını yapmış ve bazı kapsama bağıntılarını vermiştir.

Bulanık sayı dizi tanımını ilk olarak Matloka [13] vermiştir. Matloka [13] bulanık sayı dizilerinin yakınsaklık ve sınırlılığını tanımlamış, bu dizilerin bazı özelliklerini çalışmış ve her yakınsak bulanık sayı dizisinin sınırlı olduğunu göstererek reel sayı dizilerinde geçerli olan pek çok özelliğin bulanık sayı dizilerinde de geçerli olduğunu ifade etmiştir. Matloka'nın bu çalışmasından sonra bulanık sayı dizileri, toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiş ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. 1989'da Nanda [14] sınırlı ve yakınsak bulanık sayı dizi uzaylarını çalışmış ve bu uzayların tam metrik uzay olduğunu göstermiştir. 1990'da Kawamura vd. [15] deprem zemini hareketlerinin deprem dalgalarını tahmin etmek için μ 'nün üyelik fonksiyonu tarafından tanımlanan birinci ve ikinci dereceden farklarının bulanık olmayan parametreleri ΔX_i ve $\Delta^2 X_i$ ile birlikte çok basit şartlı bulanık küme kurallarına sahip olduğunu göstermiştir. 1995'te Nuray ve Savaş [16] istatistiksel yakınsaklık tanımını bulanık sayı dizileri için vermiş, 1998'de ise Nuray [17] bulanık sayı dizilerinde lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlayarak istatistiksel yakınsak ve lacunary istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri

arasındaki ilişkiyi vermiştir. Daha sonra Kwon [18], bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile kuvvetli Cesàro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Reel sayı dizilerinde α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını Şengül ve Et [19] tanımlamıştır. Altınok vd. [20] bulanık sayı dizilerinde Δ -fark operatörünü ve bir θ lacunary dizisini kullanarak $bv_\theta(\Delta, F)$ dizi kümesini tanımlamış, solidlik ve simetriklik gibi özelliklerini çalışmıştır. Son zamanlarda Altınok vd. [21] bulanık reel sayı dizilerinde β -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve β -dereceden kuvvetli p -Cèsaro toplanabilme kavramlarını tanımlamıştır. Günümüzde α -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p -Cèsaro toplanabilme konularıyla ilgili pek çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir (bkz. [19],[21],[22],[23],[24]).

Bu çalışmanın amacı Şengül ve Et [19] in reel sayı dizilerinde yapmış olduğu çalışmayı bulanık sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklık teorisinde oluşan boşlukları dolduracak şekilde genelleştirmektir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. ([25]) $V \neq \emptyset$ bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere eğer

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V, \\ \cdot & : F \times V \rightarrow V \end{aligned}$$

fonksiyonları her $a, b, c \in V$ ve her $\lambda, \mu \in F$ için

- (i) $a + b = b + a$
- (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (iii) Her $a \in V$ için $a + \theta = a$ olacak biçimde bir $\theta \in V$ vardır.
- (iv) Her $a \in V$ için $a + (-a) = \theta$ olacak biçimde bir $(-a) \in V$ vardır.
- (v) $1 \cdot a = a$
- (vi) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- (vii) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- (viii) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

şartlarını sağlıyorsa, V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir.

Tanım 2.1.2. ([26]) V bir vektör uzayı ve U kümesi V nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer U kümesinin kendisi de bir vektör uzayı ise U kümesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.3. ([27]) Elemanları kompleks terimli $x = (x_k)$ şeklindeki diziler olan ω kümesini göz önüne alalım. $x, y \in \omega$ ve μ bir skaler olmak üzere ω kümesi

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

ve

$$\mu x = (\mu x_k)$$

şeklinde tanımlı işlemler altında bir vektör uzayıdır. ω vektör uzayının herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir.

Tanım 2.1.4. ([28]) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $a, b, c \in X$ elemanları için aşağıda verilen şartları sağlarsa d 'ye X kümesi üzerinde bir metrik denir. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

- (i) $d(a, b) \geq 0$
- (ii) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- (iii) $d(a, b) = d(b, a)$
- (iv) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Tanım 2.1.5. ([28]) Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir $a = (a_n)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ olduğunda

$$d(a_n, a) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ε 'ye bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $a = (a_n)$ dizisi a elemanına yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.6. ([28]) Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir $a = (a_n)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n > n_0$ iken

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ε 'ye bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $a = (a_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.7. ([28]) Eğer bir (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.8. ([28]) X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere eğer

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\rightarrow \|a\| \end{aligned}$$

dönüşümü her $a, b \in X$ için

- (i) $\|a\| \geq 0$

$$(ii) \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$$

$$(iii) \|\mu a\| = |\mu| \|a\| \text{ } (\mu \text{ skaler})$$

$$(iv) \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne X vektör uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikili-sine de bir normlu uzay denir.

Tanım 2.1.9. ([28]) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, yani $(X, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise X normlu uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.10. ([28]) X bir vektör uzayı ve $Y \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir.

Tanım 2.1.11. ([29]) Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse A kümesine bir kompakt küme denir. Yani A kümesi kompakt bir küme olduğunda A nın her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün n tane açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathcal{A} : i = 1, \dots, n\}$ alt sınıfı vardır ve bu durumda $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ yazılabilir.

Tanım 2.1.12. ([30]) X bir dizi uzayı ve aynı zamanda bir Banach uzayı olsun. Eğer bu uzayda tanımlanan

$$\begin{aligned} \kappa_n & : X \rightarrow \mathbb{C}, \\ \kappa_n(x) & = x_n \end{aligned}$$

dönüşümü sürekli ise bu durumda X Banach uzayına bir BK–uzayı denir.

Tanım 2.1.13. ([25]) (p_k) pozitif ve sınırlı bir reel sayı dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

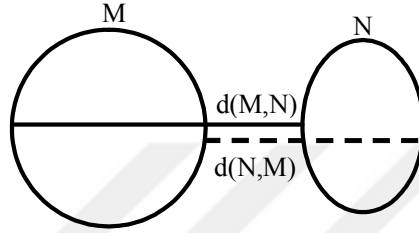
$$|x_k + y_k|^{p_k} \leq D \{|x_k|^{p_k} + |y_k|^{p_k}\}$$

eşitsizliği sağlar.

Tanım 2.1.14. ([29]) (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $\mathfrak{h}(X)$, X metrik uzayının boş kümeden farklı tüm kompakt alt kümelerinin sınıfını gösterebilir. $\mathfrak{h}(X)$ sınıfında herhangi iki M ve N kümeleri için M nin N ye olan uzaklığı

$$d(M, N) = \sup_{a \in M} d(a, N)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $d(a, N) = \inf_{b \in N} d(a, b)$ dir ve genellikle $d(M, N) \neq d(N, M)$ dir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları

Burada $d(M, M) = 0$ dir. Ayrıca her $M, N, P \in \mathfrak{h}(X)$ kümeleri için

$$d(M, N) \leq d(M, P) + d(P, N)$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü, her $c \in P$ noktası için

$$\begin{aligned} d(M, N) &= \sup_{a \in M} \inf_{b \in N} d(a, b) \leq \sup_{a \in M} \inf_{b \in N} [d(a, c) + d(c, b)] \\ &\leq \sup_{a \in M} d(a, c) + \inf_{b \in N} d(c, b), \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu bağıntı sağ taraftaki her iki terimde de P kümesinin her c noktasını yerleştirdiğimizde geçerli olduğuna göre birinci terimde $d(a, c)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(c, b)$ uzaklığını maksimum yapan c noktalarını kullanırsak

$$d(M, N) \leq \sup_{a \in M} \inf_{c \in P} d(a, c) + \sup_{c \in P} \inf_{b \in N} d(c, b) = d(M, P) + d(P, N)$$

buluruz.

Şimdi de $\mathfrak{h}(X)$ üzerinde her $M, N \in \mathfrak{h}(X)$ için bir $h : \mathfrak{h}(X) \times \mathfrak{h}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

$$h(M, N) = \max\{d(M, N), d(N, M)\}$$

şeklinde tanımlansın. h fonksiyonu $\mathfrak{h}(X)$ sınıfı üzerinde bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır.

Tanım 2.1.15. ([31]) Eğer bir $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

- (i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) her $x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- (iii) $f, x = 0$ noktasında sağdan süreklidir,
- (iv) f fonksiyonu artandır,

özelliklerini sağlarsa f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı yada sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ fonksiyonu sınırlı olmasına rağmen $0 < p \leq 1$ için $f(x) = x^p$ fonksiyonu sınırsızdır.

Tanım 2.1.16. ([32]) Bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyona bir Orlicz fonksiyonu denir:

- (i) $M(0) = 0$,
- (ii) Her $x > 0$ için $M(x) > 0$,
- (iii) $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$,
- (iv) M sürekli, azalmayan ve konveks,

Bir Orlicz fonksiyonunun, $a > 0$ olmak üzere daima

$$M(x) = \int_a^x p(t) dt$$

şeklinde bir integral gösterimi vardır. Burada $p(t)$, M nin çekirdeğidir ve $t \geq 0$ için pozitif olup

$$p(0) = 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ iken } p(t) \rightarrow \infty$$

şartlarını sağlayan, azalmayan bir fonksiyondur [33].

Şimdi, $M(t)$ Orlicz fonksiyonunun $p(t)$ çekirdeğini göz önüne alalım ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu durumda q, p ile aynı özelliklere sahiptir. q kullanılarak

$$N(x) = \int_a^x q(s) ds$$

şeklinde tanımlanan N fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur. M ve N fonksiyonlarına tamamlayıcı Orlicz fonksiyonları adı verilir [32].

Lindenstrauss ve Tzafriri [34], bir M Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$\ell_M = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını inşa etmiş ve bu uzayın

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

normuyla bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir. Bu uzay Orlicz dizi uzayı adını alır.

$M(x) = x^p$, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_M uzayı klasik ℓ_p dizi uzayına dönüşür.

1994'de Parashar ve Choudhary [35] pozitif terimli ve sınırlı bir $p = (p_k)$ reel sayı dizisini kullanarak

$$\ell_M(p) = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right)^{p_k} < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını tanımlamış ve bu uzayın bazı temel özelliklerini vermişlerdir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.2.1. ([36]) K kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. Buna göre bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda verilen $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K nın n sayısından büyük olmayan eleman sayısını göstermektedir. Özel olarak $\delta(K) = 0$ olması durumunda K 'ya sıfır yoğunluklu bir küme denir.

Tanım 2.2.2. ([7]) $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri herhangi bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k sayıları için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve bu durumda "h.h.k" biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklığın tanımı yukarıda verilen doğal yoğunluk kavramından yararlanılarak aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.2.3. ([7]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

limiti varsa veya buna denk olarak h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ oluyorsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L 'ye istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda kısaca $S - \lim x = L$ ya da $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı, yani S_0 uzayı elde edilir. S ve S_0 dizi uzayları aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\} \\ S_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Açıktır ki yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi genelde sağlanmaz.

Örneğin, $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \neq j^3, (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k = j^3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt[3]{n}$$

yazılabileceğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = 0$$

bulunur. Buradan $S - \lim x = 0$ olduğu anlaşılır. Diğer taraftan sınırlı diziler uzayı ile istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı birbirlerini kapsamazlar, fakat iki uzayın ortak elemanları vardır. Örneğin, $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \neq j^2, (j = 1, 2, 3, \dots) \\ \sqrt{k}, & k = j^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi istatistiksel yakınsak olup istatistiksel limiti 1 'dir, ancak dizi sınırlı bir dizi değildir.

Bununla birlikte $(x_k) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ dizisi sınırlı olmasına rağmen istatistiksel yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin limiti tektir.

Teorem 2.2.4. ([3]) $S - \lim x = L_1$, $S - \lim y = L_2$ ve α bir reel sayı olsun. Buna göre

(i) $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$,

(ii) $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$ 'dir.

(i) ve (ii) 'den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.2.5. ([7]) $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.2.6. ([7]) Aşağıda verilen önermeler birbirlerine denktir:

(i) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy'dir.

(iii) $y = (y_k)$ yakınsak bir dizi olmak üzere h.h.k. için $x_k = y_k$ sağlanacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisi vardır

Sonuç 2.2.7. Eğer $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda (x_k) 'nın limiti L olan bir (y_k) alt dizisi vardır.

2.3. Kuvvetli Cesàro Toplanabilme

Tanım 2.3.1. ([37]) $x = (x_k)$ kompleks sayıların herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| = 0 \quad \exists \ell \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Bu uzay, $\ell = 0$ olması halinde $|\sigma_1^0|$ sembolü ile gösterilir.

Teorem 2.3.2. ([37]) Eğer kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına yakınsak ise aynı zamanda ℓ sayısına kuvvetli Cesàro yakınsaktır.

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir, yani kuvvetli Cesàro yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Örnek olarak $(x_k) = (1 + (-1)^k)$ dizisi alınırsa $\sigma_1 - \lim x = 1$ olduğu görülür. Fakat $x = (x_k)$ dizisi yakınsak bir dizi değildir.

Tanım 2.3.3. ([38]) Kompleks sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0 \quad \exists \ell \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilecektir. Eğer $x \in w_p$ ise $w_p - \lim x = \ell$ yazacağız.

Teorem 2.3.4. ([5]) $x = (x_k)$ bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

- (i) Eğer $w_p - \lim x = \ell$ ise $S - \lim x_k = \ell$ dir.
- (ii) Eğer $S - \lim x_k = \ell$ ve $x \in \ell_\infty$ ise bu takdirde $w_p - \lim x = \ell$ dir.

İspat.

(i) $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli p -Cesàro yakınsak bir dizi olsun ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - \ell| \geq \varepsilon}} |x_k - \ell|^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - \ell| < \varepsilon}} |x_k - \ell|^p \\ &\geq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir ki böylece ℓ ye kuvvetli p -Cesàro yakınsak bir dizi ℓ ye istatistiksel yakınsak olur.

(ii) $x = (x_k)$ dizisi sınırlı bir dizi ve ℓ sayısına da istatistiksel yakınsak olsun. $K = \|x\|_\infty + \ell$ alalım ve $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε doğal sayısını

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - \ell| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim ve L_n kümesini

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - \ell| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre her $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - \ell|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - \ell|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için $w_p - \lim x = \ell$ sonucuna ulaşılır.

2.4. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.4.1. ([9]) $\theta = (k_r)$ artan bir pozitif tamsayı dizisi olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine bir lacunary dizisi denir. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi yardımıyla belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ şeklinde gösterilecektir. Çalışmamız boyunca

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile gösterilecektir. Diğer yandan q_r terimi ile $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı gösterilecektir.

Tanım 2.4.2. ([10]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaksa $S_\theta - \lim x = \ell$ ya da $x_k \rightarrow \ell (S_\theta)$ ifadeleri ile gösterilir.

Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.3. ([9]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \ell| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa (x_k) dizisi ℓ sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \ell| = 0, \exists \ell \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak $\ell = 0$ alınırsa N_θ dizi uzayı N_θ^0 ile gösterilir.

Teorem 2.4.4. ([9]) Kuvvetli Cesàro yakınsak bir (x_k) dizisinin kuvvetli lacunary yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

Teorem 2.4.5. ([9]) Kuvvetli lacunary yakınsak bir (x_k) dizisinin kuvvetli Cesàro yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

Teorem 2.4.6. ([10]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde

(i) $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına kuvvetli lacunary yakınsak ise aynı ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve ℓ sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise aynı ℓ sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır.

(iii) $\ell_\infty \cap N_\theta = \ell_\infty \cap S_\theta$ dir.

Teorem 2.4.7. ([10]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde, lacunary istatistiksel yakınsak bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

Teorem 2.4.8. ([10]) $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde, istatistiksel yakınsak bir dizinin lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

Teorem 2.4.9. ([10]) $x = (x_k)$ hem istatistiksel yakınsak hem de lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi ise her iki durumda da limitler aynı kalır, yani (x_k) dizisinin lacunary istatistiksel limiti tektir.

2.5. Fark Dizi Uzayları

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları Kızmaz [39] tarafından 1981 yılında tanımlanmış ve daha sonra Et ve Çolak [40] tarafından genelleştirilmiştir.

Tanım 2.5.1. ([39]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned} c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}, \\ \ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz [39], bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK–uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [40], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}, \\ \ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bunların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK–uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Diğer yandan Et ve Nuray [41], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz:

Teorem 2.5.2. ([41]) Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır.

Teorem 2.5.3. ([41]) Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir.

Teorem 2.5.4. ([42]) X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayında konvektir.

Teorem 2.5.5. ([41]) X dizi uzayı $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^n |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.5.6. ([41]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır denir. $S(\Delta^m)$ sembolü ile Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı gösterilir. Özel olarak $\ell = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$ uzayı, yani sıfıra Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

Sonuç 2.5.7. ([41]) $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır.

Tanım 2.5.8. ([41]) p pozitif bir reel sayı ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - \ell|^p = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ ye kuvvetli Δ_p^m -Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - \ell|^p = 0, p > 0, \exists \ell \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilecektir ve $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta^m))$ yazılır.

Teorem 2.5.9. ([41]) $0 < p < \infty$ olsun.

(i) $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow \ell(S(\Delta^m))$ dir.

(ii) $x \in \ell_{\infty}(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow \ell(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta^m))$ dir.

Sonuç 2.5.10. ([41])

(i) $S \cap \ell_{\infty} \subset S(\Delta^m) \cap \ell_{\infty}(\Delta^m)$

(ii) $S(\Delta^m) \cap \ell_{\infty}(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_{\infty}(\Delta^m)$.

Tanım 2.5.11. ([41]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.5.12. ([41]) Δ^m -istatistiksel yakınsak her dizi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 2.5.13. ([41]) $y = (y_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise bu dizi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizidir.

3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında bulanık küme ve bulanık sayı kavramlarına yer verildi. İkinci kısımda bulanık sayı dizilerinin bazı temel özellikleri verilerek bu dizilerde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro yakınsaklıktan bahsedildi.

3.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar

Tanım 3.1.1. X boştan farklı herhangi bir küme ve $B \subset X$ olsun. Bu durumda

$$f_B(t) = \begin{cases} 0, & t \notin B \text{ ise} \\ 1, & t \in B \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f_B : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna B kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Bu tanıma göre bir $B \subset X$ alt kümesi bir f_B karakteristik fonksiyonu kullanılarak

$$B = \{t \in X : f_B(t) = 1\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

X kümesine ait bir elemanın B kümesine ait olup olmadığı bir karakteristik fonksiyonu yardımıyla anlaşılabilir.

Tanım 3.1.2. ([43]) Elemanları t ile belirtilen bir nesneler kümesi χ olsun. χ kümesinde bir B bulanık kümesi, $X_B : \chi \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlı bir $X_B(t)$ karakteristik fonksiyonu yardımıyla karakterize edilir. Burada $X_B : \chi \rightarrow [0, 1]$ karakteristik fonksiyonu her zaman vardır. Bu karakteristik fonksiyon $t \in B$ durumunda $X_B(t) \in (0, 1]$ şeklinde $t \notin B$ durumunda ise $X_B(t) = 0$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Çalışmamız boyunca $X_B(t)$ karakteristik fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denilecektir.

Bir B bulanık kümesi, $X_B(t)$ üyelik fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$B = \{t \in \chi : X_B(t) \in (0, 1]\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada $X_B(t)$ üyelik fonksiyonunun değeri B bulanık kümesindeki t elemanın üyelik derecesine karşılık gelmektedir. Buna göre, B bulanık

kümesindeki t elemanın en yüksek üyelik derecesi, $X_B(t)$ üyelik fonksiyonunun 1 sayısına en yakın değeridir. Diğer yandan B kümesinin klasik bir küme olması durumunda $X_B(t)$ sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_B(t)$ üyelik fonksiyonunun değerinin 1 veya 0 olması t elemanın B kümesine ait olması ya da olmaması anlamına gelir. Böylece $X_B(t)$ üyelik fonksiyonu B kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 3.1.3. ([43]) Bir $B \subset \chi$ bulanık kümesi verilsin. Eğer $X(t_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $t_0 \in \chi$ elemanı varsa B bulanık kümesine normaldir denir.

Örnek 3.1.4. Üyelik fonksiyonu

$$X(t) = \begin{cases} t - 7, & t \in [7, 8] \text{ ise} \\ -t + 9, & t \in [8, 9] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde verilen bir bulanık küme normal bir kümedir. Çünkü $t = 8$ için 1 değerini almaktadır.

Tanım 3.1.5. ([43]) $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere bir B bulanık kümesi verilsin. Bir B bulanık kümesinin α -seviye (α -kesim) kümesi B^α ile gösterilir ve

$$B^\alpha = \{t \in \chi : X_B(t) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha = 0$ özel durumunda 0-seviye kümesi $cl \{t \in \mathbb{R} : X_B(t) > 0\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.6. ([43]) B bir bulanık küme olsun. B nın desteği (support)

$$\text{supp}(B) = \{t \in \chi : X_B(t) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bulanık sayının tanımında kullanılan özelliklerden biri olan konvekslik kavramının birbirine denk iki tanımı aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.7. ([43]) χ , n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı olsun. Bir B bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0, 1]$ için B^α kümesinin konveks olmasıdır.

Tanım 3.1.8. ([43]) Bir B bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $t_1, t_2 \in \chi$ için

$$X_B(\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) \geq \min \{X_B(t_1), X_B(t_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 3.1.9. ([44]) Aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna reel terimli bir bulanık sayı denir:

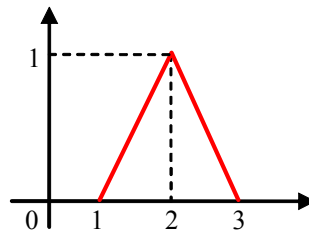
- (i) X bulanık kümesi normaldir,
- (ii) X bulanık kümesi konvektir,
- (iii) X bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu üst-yarı süreklidir,
- (iv) $X^0 = \{t \in \mathbb{R}^n : X(t) > 0\}$ seviye kümesinin kapanışı kompakt bir kümedir.

$L(\mathbb{R}^n)$ ile tüm reel bulanık sayılar kümesi gösterilecektir.

Örnek 3.1.10. Üyelik fonksiyonu

$$X(t) = \begin{cases} t - 1, & t \in [1, 2] \text{ ise} \\ -t + 3, & t \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir X bulanık kümesi bir bulanık sayıdır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Bir bulanık sayı

$L(\mathbb{R})$ kümesinde X ve Y gibi iki bulanık sayının α -seviye kümelerine göre toplamı ve farkı şu şekilde tanımlanır:

$\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere X ve Y bulanık sayılarının α -seviye kümeleri $[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} [X + Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \\ [X - Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha], \end{aligned}$$

dir.

Bir X bulanık sayısının bir k reel sayısı ile çarpımı da

$$[k \cdot X]^\alpha = \begin{cases} [k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha], & k \geq 0 \text{ ise} \\ [k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçimindedir. Buna göre $[X \pm Y]^\alpha = [X]^\alpha \pm [Y]^\alpha$ ve $[k \cdot X]^\alpha = k[X]^\alpha$ yazılabilir.

Her bir $a \in \mathbb{R}$ reel sayısı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebildiği için her bir karakteristik fonksiyon bir bulanık sayı olur. Ayrıca her bir a reel sayısı için $\bar{a} = [a, a]$ şeklinde bir gösterim vardır. Gerçekten, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\bar{a}$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} 1, & t = a \text{ ise} \\ 0, & t \neq a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde bir fonksiyondur. Buna göre reel sayılar kümesi, bulanık sayılar kümesinin içine gömülebilir [45].

Reel aralıklar arasında verilen sıralama bağıntısındaki mantığın bir benzeri bulanık sayı kümeleri arasında da vardır ve X ile Y iki bulanık küme olmak üzere bu kümeler arasındaki " $\preceq$ " kısmi sıralama bağıntısı her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \underline{X}^\alpha \preceq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \preceq \overline{Y}^\alpha$$

biçimindedir [46].

Tanım 3.1.11. ([14]) B bir bulanık küme olsun. Eğer her $X \in B$ bulanık sayısı için $X \preceq N$ olacak şekilde bir N bulanık sayısı varsa B bulanık kümesine üstten sınırlı bir küme ve N sayısına da B bulanık kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer B bulanık kümesinin her η üst sınırı için $N \preceq \eta$ ise N bulanık sayısına B bulanık kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir B bulanık kümesinin alttan sınırlılığı ve infimumu benzer şekilde tanımlanır.

Çalışmamız boyunca, X ve Y bulanık sayıları arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\begin{aligned} \bar{d} &: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı metrik kullanılacaktır. Yukarıda verilen d_H Hausdorff metriği olup bu metrik

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|)$$

biçiminde tanımlanır. Puri ve Ralescu [47] $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ uzayının bir tam metrik uzay olduğunu göstermiştir.

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks tüm alt kümelerinin ailesini $C(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. Her $U, V \in C(\mathbb{R}^n)$ kümeleri için toplama işlemi

$$U + V = \{z : z = u + v, u \in U \text{ ve } v \in V\}$$

ve her $U \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ için skalerle çarpma işlemi

$$\mu U = \{z : z = \mu u, u \in U\}$$

şeklinde tanımlanır. $C(\mathbb{R}^n)$ kümesi üzerinde verilen bu toplama ve çarpma işlemleri bir lineer yapı üretir.

U ve V bulanık kümeleri arasındaki metrik

$$\delta_\infty(U, V) = \max \left\{ \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} \|u - v\|, \sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \|u - v\| \right\}$$

şeklinde verilen Hausdorff metriğiyle tanımlanır. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ uzayının metrik aksiyomlarını sağladığı ve tam olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi U^α seviye kümesini göz önüne alalım. Tanım gereği $U^\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu aşıkardır. Verilen herhangi iki n -boyutlu U ve V bulanık kümeleri ve her bir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(U, V) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(U^\alpha, V^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(U^\alpha, V^\alpha)$$

şeklindeki metrikleri tanımlayalım. $s \leq r$ için $d_s \leq d_r$ olmak üzere

$$d_\infty(U, V) = \lim_{s \rightarrow \infty} d_s(U, V)$$

olduğu aşıkardır. $(C(\mathbb{R}^n), d_s)$ uzayı bir tam metrik uzaydır [48].

Özel olarak $n = 1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesi ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir. Çalışmamızın bundan sonraki kısımlarında “ d_s ” yerine sadece “ d ” sembolünü kullanacağız.

3.2. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri

Bulanık sayı dizisinin tanımı ilk defa 1986 yılında Matloka [13] tarafından yapılmış ve bu dizilerin bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.2.1. Reel terimli bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi, $X : \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Buna göre her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ bulanık sayısı karşılık gelir. $X(k)$ yerine genelde X_k ifadesi kullanılır.

Tanım 3.2.2. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k_0 doğal sayısı varsa (X_k) bulanık sayı dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 bulanık sayısıdır denir. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır.

$c(F)$ ile tüm yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesi ile gösterilecektir.

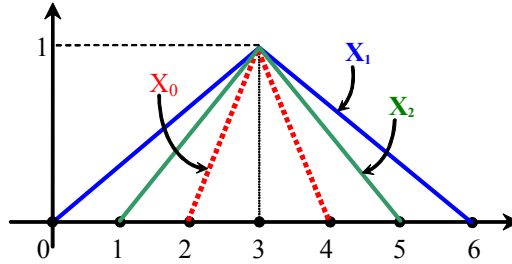
Örnek 3.2.3. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(t) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}t + \frac{2-2k}{k+2}, & \frac{2k-2}{k} \leq t \leq 3 \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}t + \frac{4k+2}{k+2}, & 3 \leq t \leq \frac{4k+2}{k} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi

$$X_0(t) = \begin{cases} t - 2, & 2 \leq t \leq 3 \text{ ise} \\ -t + 4, & 3 \leq t \leq 4 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayısına yakınsaktır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması

Teorem 3.2.4. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi yakınsak ise limiti tektir.

Teorem 3.2.5. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizileri verilsin ve bu diziler sırasıyla X_0 ve Y_0 bulanık sayılarına yakınsasınlar. Bu takdirde aşağıdaki verilen özellikler sağlanır.

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \pm Y_k) = X_0 \pm Y_0$,
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$,
- (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 \notin \text{supp } Y_k$ ve $0 \notin \text{supp } Y_0$ ise).

Tanım 3.2.6. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $X_k \leq V$ olacak şekilde bir V bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine üstten sınırlıdır denir. Benzer şekilde, Eğer her $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $U \leq X_k$ olacak şekilde bir U bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine alttan sınırlıdır denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı bir bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. $\ell_\infty(F)$ ile tüm sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesi gösterilir.

Sınırlı bir bulanık sayı dizisine Örnek 3.2.3 de tanımlanan (X_k) dizisini örnek olarak verebiliriz.

Tanım 3.2.7. ([17]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda gösterim olarak $S(F) - \lim X_k = X_0$ ya da $X_k \rightarrow X_0 (S(F))$ ifadelerinden birisi kullanılır.

Bütün istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesi $S(F)$ ile gösterilecektir. $X_0 = \bar{0}$ özel durumunda $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazılacaktır.

Sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan dolayı yakınsak bir bulanık sayı dizisi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır, yani $c(F) \subset S(F)$ dir. Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 3.2.8.

$$X_k(t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &2t - (2k - 1), & t \in [k - \frac{1}{2}, k] \text{ ise} \\ &-2t + (2k + 1), & t \in [k, k + \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\}, & \begin{aligned} &k = n^3 \text{ ise} \\ &(n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} &2t - 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ &-2t + 3, & t \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} := X_0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı (X_k) bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{8, 27, 64, \dots\}$$

yazılabileceğinden dolayı sol taraftaki kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Böylece $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak olur. Diğer taraftan bu küme sonlu olmadığı için (X_k) bulanık sayı dizisi yakınsak değildir. Yani, $X = (X_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesi ile sınırlı bulanık sayı dizilerin kümesi birbirlerini kapsamazlar. Yukarıda verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi istatistiksel yakınsak olmasına rağmen sınırlı değildir. Aşağıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi sınırlı olup istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 3.2.9. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(t) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada U_1 ve U_2 bulanık sayıları

$$U_1(t) = \begin{cases} t + 3, & t \in [-3, -2] \text{ ise} \\ -t - 1, & t \in [-2, -1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$U_2(t) = \begin{cases} t - 1, & t \in [1, 2] \text{ ise} \\ -t + 3, & t \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

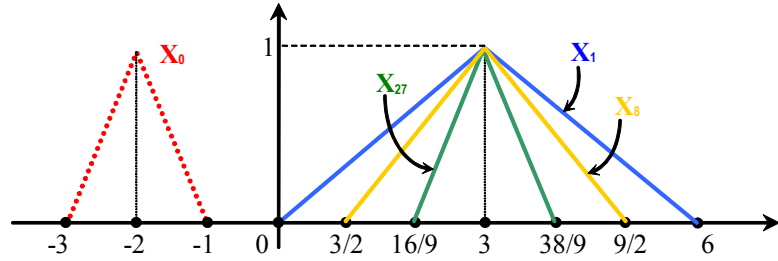
şeklinde tanımlıdır. Buna göre (X_k) dizisi sınırlı bir dizi olduğu halde istatistiksel yakınsak değildir.

Sonuç olarak, bir (X_k) bulanık sayı dizisi yakınsak ise hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olup $S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kesişim kümesi boş değildir ve $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ şeklinde bir kapsama bağıntısı mevcuttur. Aşağıdaki örnekte sınırlı ve istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak olmayan bir dizi verilmiştir:

Örnek 3.2.10.

$$X_k(t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{k}{k+2}t + \frac{2-2k}{k+2}, & \frac{2k-2}{k} \leq t \leq 3 \text{ ise} \\ &-\frac{k}{k+2}t + \frac{4k+2}{k+2}, & 3 \leq t \leq \frac{4k+2}{k} \text{ ise} \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\}, & k = n^3 \text{ ise} \\ \left. \begin{aligned} &t + 3, & t \in [-3, -2] \text{ ise} \\ &-t - 1, & t \in [-2, -1] \text{ ise} \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} := X_0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklinde tanımlı $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi sınırlı ve X_0 sayısına istatistiksel yakınsak olmasına rağmen yakınsak değildir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

Teorem 3.2.11. ([49]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu takdirde eğer h.h.k. için $X_k = Y_k$ olacak biçimde bir $Y = (Y_k)$ yakınsak dizisi mevcutsa (X_k) bulanık sayı dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.2.12. ([18]) $p > 0$ bir reel sayı ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu takdirde eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

limiti mevcut olacak biçimde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir (yakınsaktır) denir. $w(F, p)$ ile

kuvvetli p -Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerin kümesi gösterilecektir. Bu küme

$$w(F, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olması durumunda $X_k \rightarrow X_0 (w(F, p))$ yazılır.

Teorem 3.2.13. ([18]) $p > 0$ bir reel sayı ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2.14. ([18]) $p > 0$ bir reel sayı ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi hem sınırlı hem de bir X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır.

Örnek 3.2.15. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(t) = \begin{cases} kt + 1, & -\frac{1}{k} \leq t \leq 0 \text{ ise} \\ -kt + 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{k} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \bar{0}, \quad \text{diğer durumlarda} \end{matrix}$$

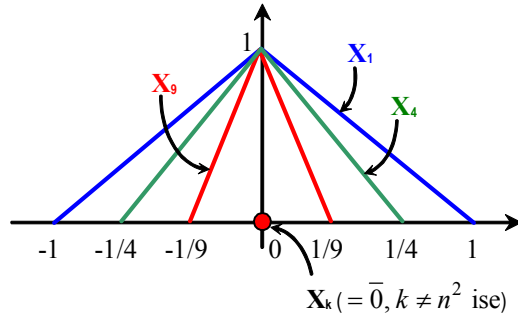
biçiminde tanımlayalım. Bu dizinin α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{\alpha-1}{k}, \frac{1-\alpha}{k} \right], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada özel olarak $p = 1$ alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olup kuvvetli p -Cesàro yakınsaklığın tanımı gereği $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. (X_k) bulanık sayı dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilir

4. BULANIK FARK DİZİLERİNDE β -DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bulanık sayı dizileri için genelleştirilmiş Δ^m fark operatörünü kullanarak β -dereceden bazı dizi kümelerini tanımlayıp aralarındaki kapsama bağıntılarını verdik.

4.1. $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ ve $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ Dizi Kümeleri ve Bazı Topolojik Özellikleri

Bu kısımda $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ ve $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ dizi kümelerini tanımlayıp bu kümelerle $w_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ kümesi arasındaki bazı kapsama bağıntılarını verdik.

Tanım 4.1.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun ve $\beta \in (0, 1]$ verilsin. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k) \in w(F)$ dizisi X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ -istatistiksel yakınsaktır (ya da β -dereceden lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsaktır) denir. Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ dir ve h_r^β , h_r nin β . kuvveti $(h_r)^\beta$ yı gösterir yani $h^\beta = (h_r^\beta) = (h_1^\beta, h_2^\beta, \dots, h_r^\beta, \dots)$ dir. Bu durumda $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim X_k = X_0$ yazabiliriz. Bütün $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ ile göstereceğiz. $\theta = (2^r)$ için $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ yerine $S^\beta(F, \Delta^m)$, $\beta = 1$ ve $\theta = (2^r)$ özel durumunda $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ yerine $S(F, \Delta^m)$ yazılır.

Lemma 4.1.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $K \subset \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için $S_\theta^\gamma(K) \leq S_\theta^\beta(K)$ dir.

İspat. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. $h_r^\beta \leq h_r^\gamma$ olduğundan

$$\frac{1}{h_r^\gamma} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}| \leq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}|$$

yazabiliriz. Böylece $S_\theta^\gamma(K) \leq S_\theta^\beta(K)$ dir.

Uyarı 4.1.3. $\beta \in (0, 1]$ için β -dereceden Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır fakat $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu göstermek için $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi alalım:

$$X_k(t) = \begin{cases} \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & := X', & k = 2r \text{ ise} \\ \begin{cases} t - 3, & 3 \leq t \leq 4 \\ -t + 5, & 4 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & := X'', & k \neq 2r \text{ ise} \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

(X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin α -seviye kümeleri bazı aritmetik işlemler sonucu aşağıdaki gibi bulunur.

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha, 2 - \alpha], & k = 2r \text{ ise} \\ [3 + \alpha, 5 - \alpha], & k \neq 2r \text{ ise} \end{cases}.$$

ve

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [2^m \alpha - 2^{m-1}.5, -2^m \alpha - 2^{m-1}] := X', & k = 2r \text{ ise} \\ [2^m \alpha + 2^{m-1}, -2^m \alpha + 2^{m-1}.5] := X'', & k \neq 2r \text{ ise} \end{cases}, (m = 1, 2, \dots)$$

böylece $\beta > 1$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X') \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\beta} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2h_r^\beta} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X'') \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\beta} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{2h_r^\beta} = 0$$

yazabiliriz. (X_k) dizisi hem X' hem de X'' bulanık sayısına β -dereceden Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır yani $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim X_k = X'$ ve $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim X_k = X''$ dür. Fakat bu imkansızdır.

Teorem 4.1.4. $0 < \beta \leq 1$ ve $X = (X_k)$, $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizileri olsun. Bu takdirde

- (i) Eğer $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim (cx_k) = cx_0$,
- (ii) Eğer $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim X_k = X_0$ ve $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim Y_k = Y_0$ ise $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) - \lim (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dır.

İspat. (i) $c = 0$ için ispat açıktır. $c \neq 0$ olsun. Bu takdirde (i) in ispatı

$$\frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(c\Delta^m X_k, cX_0) \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{h_r^\beta} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

eşitliğinden ve (ii) nin ispatı

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m (X_k + Y_k), (X_0 + Y_0)) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{h_r^\beta} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{h_r^\beta} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|. \end{aligned}$$

eşitsizliğinden elde edilir.

Tanım 4.1.5. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa X bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilir (ya da β -dereceden kuvvetli $N_\theta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilir) denir. Bu durumda $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) - \lim X_k = X_0$ yazarız. Kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilirlik $\beta = 1$ için kuvvetli $N_\theta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilirliğe indirgenir. Bütün kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilir dizilerin kümesini $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ ile göstereceğiz.

Eğer $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ dizi kümesinde $\theta = (2^r)$ alırsak β -dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi

$$w_p^\beta(F, \Delta^m) = \left\{ X = (X_k) : \exists X_0, \lim_n \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p = 0 \right\}$$

elde edilir. $X_0 = \bar{0}$ olması durumunda bu kümeyi $w_{p,0}^\beta(F, \Delta^m)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.6. Eğer $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ise $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.

İspat. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ kapsama bağıntısı

$$\frac{1}{h_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliğinden elde edilir.

$\theta = (2^r)$ olarak $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ kapsamasının kesinliğini gösterelim.

Bunun için

$$X_k(t) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} 2t - (2k - 1), & k - \frac{1}{2} \leq t \leq k \\ -2t + (2k + 1), & k \leq t \leq k + \frac{1}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, & k = n^3 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} 2t - 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ -2t + 3, & 1 \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. (X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin α -seviye kümelerini hesapladıktan sonra

$$S_\theta^\gamma(F, \Delta^m) - \lim X_k = [2^{m-1}(\alpha - 1), 2^{m-1}(1 - \alpha)]$$

olduğu yani $\frac{1}{3} < \gamma \leq 1$ için $X \in S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$, $0 < \beta \leq \frac{1}{3}$ için $X \notin S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ olduğu görüldü. Bu $\beta \in (0, \frac{1}{3}]$ ve $\gamma \in (\frac{1}{3}, 1]$ olacak şekilde $\beta, \gamma \in (0, 1]$ için $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.7. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ - istatistiksel yakınsak ise o zaman X_0 bulanık sayısına $S_\theta(F, \Delta^m)$ - istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.1.8. β ve γ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olacak şekilde sabit reel sayılar, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde, $0 < p < \infty$ iken $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ dır ve bu kapsama bazı β ve γ lar için kesindir.

İspat. Bulanık sayıların bir $X = (X_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &= \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p + \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\ &\geq |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &\geq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{h_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eğer $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ -toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ -istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir.

$\beta = \gamma$, $\theta = (2^r)$ ve $p = 1$ özel durumunda $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) \subset S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ kapsamasının kesinliğini gösterelim. Bunun için aşağıdaki gibi bir bulanık sayı dizisini seçelim.

$$X_k(t) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t}{k} + 1, & -k \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{k} + 1, & 0 \leq t \leq k \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, & k = n^2 \text{ ise} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t}{2} - 1, & 2 \leq t \leq 4 \\ -\frac{t}{2} + 3, & 4 \leq t \leq 6 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} := X_0 & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin α -seviye kümelerini hesapladıktan sonra (X_k) dizisinin $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için X_0 bulanık sayısına γ -dereceden Δ^m -istatistiksel yakınsak olduğunu fakat X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ toplanabilir olmadığını görürüz. Burada $[X_0]^\alpha = [2^{m+1}(\alpha - 1), 2^m(1 - \alpha)]$ dir. Böylece $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) \subset S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ dir.

Sonuç 4.1.9. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

- (i) Eğer $X \in N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ ise $X \in S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ dir ve limitler aynıdır.
- (ii) Eğer $X \in N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ ise $X \in S_\theta(F, \Delta^m)$ dir ve limitler aynıdır.

Teorem 4.1.10. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\liminf_r q_r > 1$ ise $S^\beta(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ dir.

İspat. $\liminf_r q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \implies \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^\beta \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)^\beta \implies \frac{1}{k_r^\beta} \geq \frac{\delta^\beta}{(1 + \delta)^\beta} \frac{1}{h_r^\beta}$$

yazılabilir. Şimdi $X_k \rightarrow X_0 (S^\beta (F, \Delta^m))$ olduğunu kabul edelim. Her $\varepsilon, \delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r^\beta} |\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta^\beta}{(1+\delta)^\beta} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta^\beta (F, \Delta^m))$ elde edilir.

Teorem 4.1.11. Eğer $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{h_r^\beta}{k_r} > 0$ ise $S(F, \Delta^m) \subset S_\theta^\beta (F, \Delta^m)$ dır.

İspat. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}.$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{h_r^\beta}{k_r} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. $r \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{h_r^\beta}{k_r} > 0$ ifadesi kullanılırsa

$$X_k \rightarrow X_0 (S(F, \Delta^m)) \implies X_k \rightarrow X_0 (S_\theta^\beta (F, \Delta^m))$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 4.1.12. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $0 < \beta \leq 1$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise $S_\theta^\beta (F, \Delta^m) \subset S(F, \Delta^m)$ dır.

Teorem 4.1.13. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. Bu takdirde $N_\theta^\beta (p, F, \Delta^m) \subset N_\theta^\gamma (p, F, \Delta^m)$ kapsaması kesindir.

İspat. $X = (X_k) \in N_\theta^\beta (p, F, \Delta^m)$ olsun. O zaman $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olacak şekilde verilen β, γ ve $p > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\gamma} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \leq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p$$

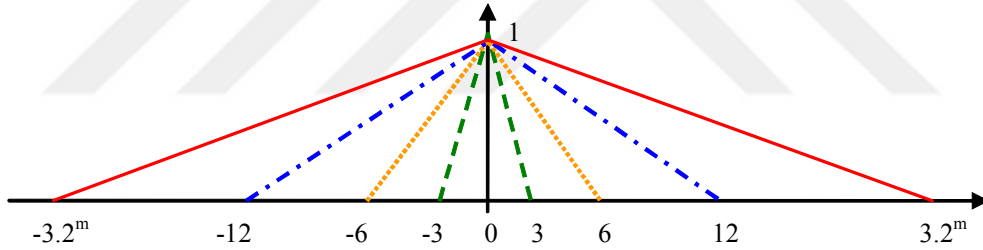
eşitsizliğini yazabiliriz ve buradan $N_\theta^\beta (p, F, \Delta^m) \subset N_\theta^\gamma (p, F, \Delta^m)$ elde edilir.

Kapsamanın kesinliğini göstermek için bir $\theta = (2^r)$ lacunary dizisini alalım ve $p = 1$ olsun. Aşağıdaki gibi bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım:

$$X_k(t) = \begin{cases} \begin{cases} t-2, & 2 \leq t \leq 3 \\ -t+4, & 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k = n^3 \text{ ise} \\ \begin{cases} \frac{t}{3} - \frac{5}{3}, & 5 \leq t \leq 8 \\ -\frac{t}{3} + \frac{11}{3}, & 8 \leq t \leq 11 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$X_k(t) = \begin{cases} \begin{cases} t-2, & 2 \leq t \leq 3 \\ -t+4, & 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k = n^3 \text{ ise} \\ \begin{cases} \frac{t}{3} - \frac{5}{3}, & 5 \leq t \leq 8 \\ -\frac{t}{3} + \frac{11}{3}, & 8 \leq t \leq 11 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} := X_0$$

(X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin α -seviye kümelerini hesapladıktan sonra $X \in N_\theta^\gamma(p, F, \Delta^m)$ elde edilir çünkü (X_k) , $\frac{1}{3} < \gamma \leq 1$ için X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ - toplanabilir. Burada $[X_0]^\alpha = [2^m(3\alpha - 3), 2^m(3 - 3\alpha)]$ dır. Fakat $0 < \beta \leq \frac{1}{3}$ için $X \notin N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ dır yani (X_k) , X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ - toplanabilir değildir. Bu kapsamanın kesinliğini gösterir. Şekil 4.1 de $(\Delta^m X_k)$ dizisinin limitlerini gösterdik.



Şekil 4.1. Farklı m değerlerine göre $(\Delta^m X_k)$ bulanık fark dizisinin limitleri

Sonuç 4.1.14. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $p > 0$ olsun. Bu durumda

- (i) Eğer $\beta = \gamma$ ise $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) = N_\theta^\gamma(p, F, \Delta^m)$ dir.
- (ii) Her $\beta \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m) \subseteq N_\theta(p, F, \Delta^m)$ dir.

Teorem 4.1.15. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\liminf_r q_r > 1$ ise $0 < \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^\beta(F, \Delta^m) \subseteq N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ dir.

İspat. Eğer $\liminf_r q_r > 1$ ise o zaman her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $0 < \beta \leq 1$ olsun. Genelliği bozmaksızın $X \in w_{p,0}^\beta(F, \Delta^m)$ alabiliriz. Bu

takdirde

$$\begin{aligned}\tau_r^\beta &= \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{i=1}^{k_r} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p - \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \\ &= \frac{k_r^\beta}{h_r^\beta} \left(\frac{1}{k_r^\beta} \sum_{i=1}^{k_r} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \right) - \frac{k_{r-1}^\beta}{h_r^\beta} \left(\frac{1}{k_{r-1}^\beta} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \right)\end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğu için

$$\frac{k_r^\beta}{h_r^\beta} \leq \frac{(1+\delta)^\beta}{\delta^\beta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}^\beta}{h_r^\beta} \leq \frac{1}{\delta^\beta}$$

elde edilir. $\frac{1}{k_r^\beta} \sum_{i=1}^{k_r} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p$ ve $\frac{1}{k_{r-1}^\beta} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p$ terimlerinin her ikisi de sifıra yakınsar ve τ_r^β da sifıra yakınsar. Böylece $X \in N_{\theta,0}^\beta(p, F, \Delta^m)$ yani $w_p^\beta(F, \Delta^m) \subseteq N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m)$ olur.

Teorem 4.1.16. Eğer $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\beta} < \infty$ ise $0 < \beta \leq 1$ için $N_\theta(p, F, \Delta^m) \subseteq w_p^\beta(F, \Delta^m)$ dir.

İspat. Eğer $\limsup_r \frac{k_r}{k_{r-1}^\beta} < \infty$ ise her $r \geq 1$ için $\frac{k_r}{k_{r-1}^\beta} < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $X \in N_{\theta,0}^\beta(p, F, \Delta^m)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\sup_{i \geq R} \tau_i < \varepsilon$ ve $\tau_i < K$ olacak şekilde $R > 0$ ve $K > 0$ sayılarını bulabiliriz. $k_{r-1} < t \leq k_r$ ve $r > R$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^\beta} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p &\leq \frac{1}{k_{r-1}^\beta} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \\ &= \frac{1}{k_{r-1}^\beta} \left(\sum_{I_1} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p + \sum_{I_2} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p + \dots + \sum_{I_r} d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \right) \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}^\beta} \tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}^\beta} \tau_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}^\beta} \tau_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}^\beta} \tau_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}^\beta} \tau_r \\ &\leq \left(\sup_{i \geq 1} \tau_i \right) \frac{k_R}{k_{r-1}^\beta} + \left(\sup_{i \geq R} \tau_i \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}^\beta} < K \frac{k_R}{k_{r-1}^\beta} + \varepsilon M\end{aligned}$$

yazılabileceğinden ve $k_{r-1} \rightarrow \infty$ iken $t \rightarrow \infty$ olduğundan $\frac{1}{t^\beta} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, \bar{0})^p \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece $X \in w_{p,0}^\beta(F, \Delta^m)$ dir.

Teorem 4.1.17. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere

$$(i) \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^\beta}{l_r^\gamma} > 0 \quad (4.1)$$

ise $S_{\theta'}^\gamma(F, \Delta^m) \subseteq S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$,

$$(ii) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{l_r}{h_r^\gamma} = 1 \quad (4.2)$$

ise $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta'}^\gamma(F, \Delta^m)$ dır. Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $J_r = (s_{r-1}, s_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $l_r = s_r - s_{r-1}$ dir.

İspat. (i) Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1) sağlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in J_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

ve

$$\frac{1}{l_r^\gamma} |\{k \in J_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{h_r^\beta}{l_r^\gamma h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $r \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (4.1) kullanılırsa $S_{\theta'}^\gamma(F, \Delta^m) \subseteq S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ olur.

(ii) $X = (X_k) \in S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ olsun ve (4.2) sağlansın. $I_r \subset J_r$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_r^\gamma} |\{k \in J_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{l_r^\gamma} |\{s_{r-1} < k \leq k_{r-1} : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &+ \frac{1}{l_r^\gamma} |\{k_r < k \leq s_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &+ \frac{1}{l_r^\gamma} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{k_{r-1} - s_{r-1}}{l_r^\gamma} + \frac{s_r - k_r}{l_r^\gamma} + \frac{1}{l_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{l_r - h_r^\gamma}{h_r^\gamma} + \frac{1}{h_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \left(\frac{l_r}{h_r^\gamma} - 1 \right) + \frac{1}{h_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{l_r}{h_r^\gamma} = 1$ ve $X = (X_k) \in S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ olduğundan $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta'}^\gamma(F, \Delta^m)$ elde edilir.

Teorem 4.1.17 den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.18. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1) sağlansın. Bu takdirde

$$(i) S_{\theta'}^\beta(F, \Delta^m) \subseteq S_\theta^\beta(F, \Delta^m),$$

$$(ii) S_{\theta'}(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m),$$

$$(iii) S_{\theta'}(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta}(F, \Delta^m)$$

dir.

Sonuç 4.1.19. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.2) sağlansın. Bu takdirde

$$(i) S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta'}^{\beta}(F, \Delta^m),$$

$$(ii) S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta}(F, \Delta^m),$$

$$(iii) S_{\theta}(F, \Delta^m) \subseteq S_{\theta'}(F, \Delta^m)$$

dir.

4.2. Bir Modülüs Fonksiyonu İle Tanımlı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bulanık sayı dizileri için modulus fonksiyonu kavramı ilk olarak Sarma [50] tarafından verildi. Daha sonra Talo ve Başar [51] tarafından geliştirildi. Bu kısımda f modulus fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ dizi kümesi ile $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ dizi kümesi arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 4.2.1. f bir modulus fonksiyonu, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ dizi kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} = 0, \exists X_0 \text{ için} \right\}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $f(x) = x$ özel durumunda $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ yerine $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m)$ yazacağız.

Aşağıdaki teoremlerde $p = (p_k)$ sınırlı ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olarak kabul edeceğiz.

Teorem 4.2.2. $\beta, \gamma \in (0, 1]$, $\beta \leq \gamma$, f bir modulus fonksiyonu $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m) \subset S_{\theta}^{\gamma}(F, \Delta^m)$ dir.

İspat. $X \in w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Ayrıca, $\sum_1$ ve $\sum_2$ toplamaları sırasıyla $k \in I_r$, $d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon$ ve $k \in I_r$, $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ üzerindeki toplamalar olsun. Her bir r için $h_r^{\beta} < h_r^{\gamma}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\beta} \left[\sum_1 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \right] \\
&\geq \frac{1}{h_r^\gamma} \left[\sum_1 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \right] \\
&\geq \frac{1}{h_r^\gamma} \sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r^\gamma} \sum_1 \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) \\
&\geq \frac{1}{h_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $X \in w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsak olup böylece $X \in S_\theta^\gamma(F, \Delta^m)$ dir.

Teorem 4.2.3. f modulus fonksiyonu sınırlı, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r}{h_r^\beta} = 1$ ise o zaman $S_\theta^\beta(F, \Delta^m) \subset w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ dir.

İspat. f sınırlı bir modülüs fonksiyonu, $X \in S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. f sınırlı olduğundan $f(x) \leq K$ olacak şekilde bir K tamsayısı vardır. Her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{h_r^\beta} \sum_2 [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{h_r^\beta} \sum_1 \max(K^h, K^H) + \frac{1}{h_r^\beta} \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\leq \max(K^h, K^H) \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : f(d(\Delta^m X_k, X_0)) \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \frac{h_r}{h_r^\beta} \max(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten $r \in \mathbb{N}$ için $X \in w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ elde edilir.

Teorem 4.2.4. Eğer $\lim p_k > 0$ ve $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ –toplanabilir ise limit bir tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$, $w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ – $\lim X_k = X_0$ ve $w_p^\beta(\theta, f, F, \Delta^m)$ – $\lim X_k = X'_0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X'_0))]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan f artan ve $f(X + Y) \leq f(X) + f(Y)$ olduğundan $p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(X_0, X'_0))]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} ([f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} + [f(d(\Delta^m X_k, X'_0))]^{p_k}) \\ &\leq \frac{D}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\ &\quad + \frac{D}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta^m X_k, X'_0))]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitizliğin sol tarafı $r \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğinden ve $\lim p_k = s$ olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(X_0, X'_0))]^{p_k} = [f(d(X_0, X'_0))]^s$$

elde edilir. Böylece $X_0 = X'_0$ olup limit tektir.

4.3. Bir Orlicz Fonksiyonu İle Tanımlı Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir M Orlicz fonksiyonunu kullanarak bulanık sayı dizileri için kuvvetli $N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilir diziler kümesini tanımladık ve bu kümeyle $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ dizi kümesi arasındaki bazı kapsama bağıntılarını verdik.

Tanım 4.3.1. M bir Orlicz fonksiyonu, $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, $0 < p_k \leq \sup p_k = H$, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi, $\beta \in (0, 1]$, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Şimdi

$$N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M) = \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } X_0 \text{ ve } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}$$

dizi kümesini tanımlayalım.

Eğer $X \in N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ ise (X_k) dizisi Orlicz fonksiyonu M ye göre kuvvetli $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilirdir denir. $M(X) = X$ özel durumunda $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilirlik [52] de tanımlanan kuvvetli $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m)$ –toplanabilirliğe indirgenir.

Teorem 4.3.2. $0 < \beta \leq 1$ ve $X = (X_k)$, $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizileri olsun. Bu takdirde

(i) Eğer $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –lim $X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise, $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –lim $(cx_k) = cX_0$,

(ii) Eğer $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –lim $X_k = X_0$ ve $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –lim $Y_k = Y_0$ ise, $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –lim $(X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dır.

İspat. Aşıkardır.

Teorem 4.3.3. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere

(i) Eğer (4.1) sağlanırsa $N_{\theta'}^{\gamma}(p, F, \Delta^m, M) \subset N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$

(ii) $X = (X_k) \in \ell_{\infty}(F, \Delta^m)$, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ olsun ve (4.2) sağlansın. O zaman $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M) \subset N_{\theta'}^{\gamma}(p, F, \Delta^m, M)$ olur.

İspat. (i) Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1) sağlansın.

$$\frac{1}{l_r^{\gamma}} \sum_{k \in J_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} > \frac{h_r^{\beta}}{l_r^{\gamma}} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

olduğundan $N_{\theta'}^{\gamma}(p, F, \Delta^m, M) \subset N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ elde edilir.

(ii) $X = (X_k) \in \ell_{\infty}(F, \Delta^m)$ olsun ve (4.2) sağlansın. $X = (X_k)$ bir Δ^m –sınırlı dizi olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq T$ olacak şekilde bir $T > 0$ reel sayısı vardır. Diğer taraftan her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olduğundan $h_r \leq l_r$ yazabiliriz ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ dir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_r^{\gamma}} \sum_{k \in J_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p &= \frac{1}{l_r^{\gamma}} \sum_{k \in J_r - I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p \\ &\quad + \frac{1}{l_r^{\gamma}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{l_r - h_r}{l_r^\gamma} \right) T^p + \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - h_r^\gamma}{h_r^\gamma} \right) T^p + \frac{1}{h_r^\gamma} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p \\
&\leq \left(\frac{l_r - h_r^\gamma}{h_r^\gamma} \right) T^p + \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $\ell_\infty(F, \Delta^m) \cap N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M) \subset N_{\theta'}^\gamma(p, F, \Delta^m, M)$ olur.

Sonuç 4.3.4. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $N_{\theta'}^\beta(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M)$,
- (ii) $N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M)$,
- (iii) $N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_\theta(p, F, \Delta^m, M)$ dir.

Sonuç 4.3.5. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.2) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $\ell_\infty(F, \Delta^m) \cap N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_{\theta'}^\beta(p, F, \Delta^m, M)$,
- (ii) $\ell_\infty(F, \Delta^m) \cap N_\theta^\beta(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M)$,
- (iii) $\ell_\infty(F, \Delta^m) \cap N_\theta(p, F, \Delta^m, M) \subseteq N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M)$ dir.

Teorem 4.3.6. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$, $0 < p_k \leq \sup p_k = H$, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun.

(i) (4.1) in sağlanması halinde bir $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_{\theta'}^\gamma(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ –istatistiksel yakınsaktır.

(ii) (4.2) sağlansın ve $X = (X_k)$ sınırlı bir dizi olsun. Eğer bir (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ –istatistiksel yakınsak ise X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_{\theta'}^\gamma(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilirdir.

İspat. (i) Kabul edelim ki (4.1) sağlansın ve $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_{\theta'}^\gamma(p, F, \Delta^m, M)$ –toplanabilir olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{k \in J_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in J_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in J_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}
\end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{k \in J_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\geq \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{l_r^\gamma} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon}} \min \left\{ [M(\epsilon_1)]^{\inf p_k}, [M(\epsilon_1)]^{\sup p_k} \right\}, \quad \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\rho} \\
&\geq \frac{1}{l_r^\gamma} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon\}| \cdot \min \left\{ [M(\epsilon_1)]^{\inf p_k}, [M(\epsilon_1)]^{\sup p_k} \right\} \\
&\geq \frac{h_r^\beta}{l_r^\gamma} \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \epsilon\}| \cdot \min \left\{ [M(\epsilon_1)]^{\inf p_k}, [M(\epsilon_1)]^{\sup p_k} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerden $X = (X_k)$ dizisinin X_0 bulanık sayısına $S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$ -istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

(ii) İspat (i) de verilen metot kullanılarak kolayca yapılabilir.

Sonuç 4.3.7. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.1) sağlansın. Bu takdirde

- (i) $N_{\theta'}^\beta(p, F, \Delta^m, M) \subseteq S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$,
- (ii) $N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M) \subseteq S_\theta^\beta(F, \Delta^m)$,

$$(iii) N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M) \subseteq S_{\theta}(F, \Delta^m)$$

dir.

Sonuç 4.3.8. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, $\beta \in (0, 1]$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve (4.2) sağlansın. Bu takdirde

$$(i) \ell_{\infty}(F, \Delta^m) \cap S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m) \subseteq N_{\theta'}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M),$$

$$(ii) \ell_{\infty}(F, \Delta^m) \cap S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m) \subseteq N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M),$$

$$(iii) \ell_{\infty}(F, \Delta^m) \cap S_{\theta}(F, \Delta^m) \subseteq N_{\theta'}(p, F, \Delta^m, M)$$

dir.

Teorem 4.3.9. Eğer $\lim p_k > 0$ ve $X = (X_k)$ dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 bulanık sayısına kuvvetli $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ –toplantabilir ise $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ – $\lim X_k$ limiti bir tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$, $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ – $\lim X_k = X_0$ ve $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ – $\lim X_k = X'_0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} = 0, \quad \rho_1 > 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X'_0)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} = 0, \quad \rho_2 > 0$$

elde edilir. $\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ olsun. M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left(\left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \right. \\ &\quad \left. + \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X'_0)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \right) \\ &\leq \frac{D}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + \frac{D}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X'_0)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $\sup p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olup $\lim p_k = s$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^{\beta}} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^s$$

elde edilir. Böylece $X_0 = X'_0$ olup limit tektir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş fark operatörü ve lacunary dizisi kullanılarak $0 < \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olmak üzere $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m)$, $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ ve $w_p^{\beta}(F, \Delta^m)$ dizi kümeleri tanımlanmış aralarındaki bazı kapsama teoremleri elde edilmiştir. Daha sonra bir modülüs fonksiyonu yardımıyla $w_p^{\beta}(\theta, f, F, \Delta^m)$ dizi kümesi tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ dizi kümesi ile bir Orlicz fonksiyonu kullanılarak tanımlanan $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ dizi kümesi arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ şeklinde iki aralık üzerinde tanımlı olan farklı (k_r) ve (s_r) lacunary dizileri alınarak $S_{\theta}^{\beta}(F, \Delta^m)$ ve $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ dizi kümelerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak $\lim p_k > 0$ olmak üzere $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin M Orlicz fonksiyonuna göre X bulanık sayısına kuvvetli $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M)$ -toplanabilir olması durumunda ise $N_{\theta}^{\beta}(p, F, \Delta^m, M) - \lim X_k$ limitinin bir tek olduğu gösterilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Zygmund, A.** 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] **Steinhaus, H.** 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2**, 73-74.
- [3] **Fast, H.**, 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244.
- [4] **Schoenberg, I. J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.
- [5] **Connor, J. S.** 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, **8**, 47-63.
- [6] **Et, M.** 2003, Strongly almost summable difference sequences of order m defined by a modulus, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **40(4)**, 463-476.
- [7] **Fridy, J.A.**, 1985, On the statistical convergence, *Analysis*, **5**, 301-313.
- [8] **Mursaleen, M.** 2000, λ -statistical convergence, *Math. Slovaca*, **50(1)**, 111-115.
- [9] **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M.**, 1978, Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37(3)**, 508-520.
- [10] **Fridy, J.A. and Orhan, C.**, 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.*, **160(1)**, 43-51.
- [11] **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.** 2002, Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.* **32(1)**, 129-138.
- [12] **Çolak, R.** 2010, Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121-129.
- [13] **Matloka, M.** 1986, Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL*, **28**, 28-37.

- [14] **Nanda, S.**, 1989, On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, **33**, 123-126.
- [15] **Kawamura, H.; Tani, A.; Yamada, M.; Tsunoda, K.** 1990, Real time prediction of earthquake ground motions and structural responses by statistic and fuzzy logic, First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis, *Proceedings.*, USA, 3-5 Dec., 534-538.
- [16] **Nuray, F. and Savaş, E.** 1995, Statistical convergence of sequences of fuzzy real numbers, *Math. Slovaca*, **45(3)**, 269-273.
- [17] **Nuray, F.**, 1998, Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, **99**, 353-355.
- [18] **Kwon, J.S.** 2000, On statistical and p -Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput. & Appl. Math.*, **7(1)**, 195-203.
- [19] **Şengül, H. and Et, M.** 2014, On lacunary statistical convergence of order α , *Acta Mathematica Scientia*, **34B(2)**, 473-482.
- [20] **Altınok, H.; Et, M. and Çolak, R.** 2014, Some remarks on generalized sequence space of bounded variation of sequences of fuzzy numbers, *Iranian J. of Fuzzy Systems*, **11(5)**, 39-46.
- [21] **Altınok, H.; Altın, Y. and Işık, M.** 2012, Statistical Convergence and Strong p -Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, *Iranian J. of Fuzzy Systems*, **9(2)**, 65-75.
- [22] **Altın, Y.; Altınok, H. and Çolak, R.** 2015, Statistical Convergence of Order α for Difference Sequences, *Quaestiones Mathematicae*, **38(4)**, 505-514.
- [23] **Altınok, H.** 2014, Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **26**, 847-856.
- [24] **Çolak, R. and Bektaş, C.A.** 2011, λ -statistical convergence of order α . *Acta Math. Sci.* **31(3)**, 953-959.
- [25] **Maddox, I.J.** 1967, Spaces of strongly summable sequences, *Quart J. Math. Oxford*, **18(2)**, 345-355.

- [26] **Soykan, Y.** 2008, Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları, Ankara.
- [27] **Goes, G. and Goes, S.,** 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, **118**, 93-102.
- [28] **Kreyszig, E.** 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [29] **Şuhubi, E.,** 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yay., No: 38, İstanbul.
- [30] **Boos, J. and Cass, P.,** 2000, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.
- [31] **Nakano, H.** 1953, Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, **5**, 29–49.
- [32] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.** 1981, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- [33] **Krasnoselskii, M. A. and Rutickii, Y. B.** 1961, Convex Functions and Orlicz Spaces, Groningen, Netherlands.
- [34] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.** 1971, On Orlicz sequence spaces, *Israel J. Math.*, **10**, 379-390.
- [35] **Parashar, S. D. and Choudhary, B.** 1994, Sequence spaces defined by Orlicz functions, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **25(4)**, 419-428.
- [36] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.** 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [37] **Powell, R.E. and Shah, S.M.** 1972, Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhod Company, London.
- [38] **Maddox, I.J.** 1978, A new type of convergence, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **83**, 61-64.
- [39] **Kızmaz, H.** 1981, On certain sequence spaces, *Canadian Math. Bull.*, **24**, 169-176.

- [40] **Et, M. and Çolak, R.** 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.
- [41] **Et, M. and Nuray, F.** 2001, Δ^m –Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32(6)**, 961-969.
- [42] **Et, M.** 2000, On some topological properties of generealized difference sequence spaces, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, **24(11)**, 785-791.
- [43] **Zadeh, L.A.** 1965, Fuzzy sets, *Inform and Control*, **8**, 338-353.
- [44] **Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A.** 1972, On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, **2**, 30-34.
- [45] **Kaufmann, A. and Gupta, M.M.** 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
- [46] **Diamond, P. and Kloeden, P.**, 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [47] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.**, 1983, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91**, 552-558.
- [48] **Puri, M.L. and Ralescu, D.A.**, 1986, Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl.*, **114**, 409-422.
- [49] **Mursaleen, M. and Başarır, M.**, 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34** (9), 1351-1357.
- [50] **Sarma, B.** 2007, On a class of sequences of fuzzy numbers defined by modulus function, *International Journal of Science & Technology*, **2(1)**, 25-28.
- [51] **Talo, Ö. and Başar, F.** 2010, Certain spaces of sequences of fuzzy numbers defined by a modulus function, *Demonstratio Math.* **43(1)**, 139–149.
- [52] **Altınok, H. and Yağdırın, D.** 2016, Lacunary statistical convergence of order β in difference sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **31** 227–235.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2006 yılında giriş yaptığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun olarak aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimime başladım. Yüksek lisans öğrenimimi 2012 yılında tamamlayıp yine aynı anabilim dalında doktora eğitimine başladım.

