

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ
Gülcan ATICI

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

HAZİRAN - 2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ
Gülcan ATICI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08 Haziran 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Haziran 2011

(07221204)

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ (Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (Fırat Üniversitesi)

Doç. Dr. Ayhan EŞİ (Adıyaman Üniversitesi)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (Fırat Üniversitesi)

Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN (Fırat Üniversitesi)

HAZİRAN - 2011

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince, değerli zamanlarını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli danışman hocam Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ'a ve her konuda desteğini gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Rifat ÇOLAK, Prof. Dr. Mikail ET, Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK, Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN ve Yrd. Doç. Dr. Hıfı ALTINOK'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Gülcan ATICI

ELAZIĞ - 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI, ORLİCZ FONKSİYONU VE MODULAR DİZİ UZAYI	7
3.1. Fark Dizi Uzayları	7
3.2. Konveks Fonksiyonlar	8
3.3. Orlicz Fonksiyonu	11
3.4. $\ell_M(p)$ Dizi Uzayı	14
3.5. Modular Dizi Uzayı	15
4. ORLİCZ FONKSİYON DİZİLERİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞ- TİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI	18
4.1. $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ Dizi Uzayının Tanımı ve Bazı Topolojik Özellikleri	18
5. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ DİZİ UZAYLARI	24
5.2. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ Dizi Uzaylarının Tanımı ve Bazı Topolojik Özellikleri	24
5.3. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$ Dizi Uzayları Arasındaki İlişki	32
6. DUAL UZAYLAR	37
6.1. $h(\mathcal{M})$ Dizi Uzayının Duali	37
6.2. $\ell\{\mathcal{M}, \lambda\}$ ve $\ell\{\mathcal{N}, \lambda\}$ Dizi Uzaylarının Tanımı ve α -Duali	38
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu çalışmada Orlicz fonksiyonları kullanılarak yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

İlk bölüm giriş kısmı olup, bu çalışma ile ilgili ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, konuya ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde fark dizileri, konveks fonksiyonlar, Orlicz fonksiyonu, $\ell_M(p)$ dizi uzayı ve modular dizi uzayı kavramları ve bunların bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve Δ_v^m - genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ dizi uzayı tanımlanmış ve bu dizi uzayının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyon dizileri alınarak $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dizi uzayları tanımlanmış ve bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise $h(\mathcal{M})$ dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri ile $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ ve $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dizi uzaylarının $\alpha-$ duali bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fark Dizi Uzayları, Orlicz Fonksiyonu, Modular Dizi Uzayı, $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ Dual.

SUMMARY

ON GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES OF DEFINED BY ORLICZ FUNCTIONS

In this study, which is prepared as six chapters, we define some new generalized difference sequence spaces using Orlicz functions and we examine some properties of these sequence spaces.

In the first chapter preliminary informations use given. In the second chapter, we give the fundamental definitions and theorems.

In the third chapter, we give the concepts of difference sequences, convex functions, Orlicz function, $\ell_M(p)$ sequence spaces and modular sequence space and some of their properties.

In the fourth chapter, we define the sequence space $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ using a sequence of Orlicz functions $\mathcal{M} = (M_k)$ and Δ_v^m - generalized difference operator and examine some topological properties of this space.

In the fifth chapter, we define the sequence spaces $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$ and $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ where sequences of Orlicz function $\mathcal{M} = (M_k)$ and $\mathcal{N} = (N_k)$ such that M_k and N_k be mutually complementary for each k and examine some topological properties of these spaces.

In the sixth chapter, we give the α -, β - ve γ - duals of the sequence space $h(\mathcal{M})$ and the α - dual of the sequence spaces $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ and $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$.

Keywords: Difference sequence spaces, Orlicz Function, Modular sequence space, α -, β - and γ - Dual.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
s	: Bütün diziler uzayı
c	: Yakınsak diziler uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı diziler uzayı
BK	: Banach Koordinatsal süreklilik
λ^α	: λ uzayının α - duali
λ^β	: λ uzayının β - duali
λ^γ	: λ uzayının γ - duali
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
$\tilde{\ell}_M$	: Orlicz dizi sınıfı
ℓ_M	: Orlicz dizi uzayı
$\tilde{\ell}(\mathcal{M})$	: Modular dizi sınıfı
$\ell(\mathcal{M})$	: Modular dizi uzayı

1. GİRİŞ

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızılmaz [19] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızılmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ ve $X = \ell_\infty$, c ve c_0 olmak üzere

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladı. Et ve Çolak [8], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$ olmak üzere

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in X\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. Et ve Esi [9], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$ olmak üzere bu uzayları $X(\Delta_v^m) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in X\}$ şeklindeki uzaylara genelleştirdiler.

Bir Orlicz fonksiyonu, sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyondur.

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t) dt$$

integral formunda gösterilebilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen p , azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0$, $t > 0$ için $p(t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ şeklinde bir fonksiyondur.

Bir $M(t)$ Orlicz fonksiyonunun çekirdeği $p(t)$ ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu taktirde

$$N(x) = \int_0^x q(s) ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$, $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahip olan N nin çekirdeğidir. Yani N de bir Orlicz fonksiyondur. Bu şekildeki M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır.

1973'te Woo [38] $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere

$$\ell(\mathcal{M}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan $\ell(\mathcal{M})$ modular dizi uzayını tanımlamış ve bu dizi uzayının

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq 1\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir.

Parashar ve Choudhary [30], M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere

$$\ell_M(p) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

dizi uzayını tanımladılar ve bu dizi uzayının bazı cebirsel-topolojik özelliklerini incelediler.

Orlicz fonksiyonu veya Orlicz fonksiyon dizileri kullanılarak yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve pek çok bilim adamı bu dizi uzayları üzerine çalışmalar yapmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

- i) $x + y = y + x$
- ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- v) $1.x = x$
- vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [24].

Tanım 2.1.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

$\forall x, y \in X$ için

- i) $g(\theta) = 0$
- ii) $g(x) = g(-x)$
- iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$
- iv) $\mu \rightarrow \mu_0, x \rightarrow x_0$ iken $\mu x \rightarrow \mu_0 x_0$

dir. (iv) şartını $\mu \rightarrow \mu_0, g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\mu x - \mu_0 x_0) \rightarrow 0$ şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [24].

Tanım 2.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$\text{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N3)} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\lambda \text{ skaler})$$

$$\text{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir. Eğer N2) $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şeklinde olursa X ' e yarınorm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de yarınormlu uzay adı verilir [21].

Tanım 2.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [21].

Tanım 2.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [21].

Tanım 2.1.6. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [21].

Tanım 2.1.7. Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin cümlesini s ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere s , $x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. s nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [15].

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.8. λ bir dizi uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in \lambda \text{ için}\}, \\ \lambda^\beta &= \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in \lambda \text{ için}\}, \\ \lambda^\gamma &= \{a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \forall x \in \lambda \text{ için}\} \end{aligned}$$

olsun. λ^α , λ^β ve λ^γ ya, sırasıyla, λ nın α -, β - ve γ -duali denir. α -dualine Köthe - Toeplitz duali, β -dualine genelleştirilmiş Köthe - Toeplitz duali adı verilir [18].

$\emptyset \subset \lambda^\alpha \subset \lambda^\beta \subset \lambda^\gamma$ olduğu kolayca gösterilebilir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olsun. $\lambda \subset \mu$ ise $\lambda^\eta \subset \mu^\eta$ dir.

Tanım 2.1.9. λ bir dizi uzayı olsun.

i) $i \geq 1$ ve en az bir $x \in \lambda$ için $|y_i| \leq |x_i|$ iken $y \in \lambda$ ise λ ya normal veya solid denir.

ii) λ tüm basamak uzaylarının kanonik ön resimlerini kapsıyorsa, λ ya monoton dizi uzayı denir.

iii) $\lambda = \lambda^{\alpha\alpha}$ ise λ ya perfektir denir [18].

Önerme 2.1.10. λ bir dizi uzayı olsun. Eğer λ monoton ise $\lambda^\alpha = \lambda^\beta$ ve eğer λ normal ise $\lambda^\alpha = \lambda^\gamma$ dir [18].

Sonuç 2.1.11. λ perfektir $\Rightarrow \lambda$ normaldir $\Rightarrow \lambda$ monotondur [18].

Tanım 2.1.12. X boş olmayan bir cümle ve τ , X in alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

T1) $X, \theta \in \tau$

T2) τ nun herhangi sayıdaki elamanlarının birleşimi τ nun elemanıdır.

T3) τ ya ait sonlu sayıdaki elamanların arakesiti yine τ ya aittir.

Tanım 2.1.13. λ lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olsun. Her bir $i \geq 1$ için $P_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $P_i : \lambda \rightarrow F$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) dönüşümleri sürekli ise λ dizi uzayına $K-$ uzayı denir. λ bir Banach uzayı ise $K-$ uzayına $BK-$ uzayı denir.

(λ, τ) bir $K-$ uzayı ve bir $x \in \lambda$ için

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \rightarrow x \quad (\tau \text{ topolojisine göre})$$

ise $x \in \lambda$ ya $AK-$ özelliğine sahiptir denir. Eğer her bir $x \in \lambda$ $AK-$ özelliğine sahip ise λ dizi uzayına $AK-$ uzayı denir [18].

Tanım 2.1.14. Eğer her $i \geq 1$ ve $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in \lambda$ için $|x_i| \leq |y_i|$ iken $\|x\|_\lambda \leq \|y\|_\lambda$ ise λ nın S topolojisine göre üretilen $\|\cdot\|_\lambda$ normuna monotondur denir [16].

Lemma 2.1.15. q_1 ve q_2 , X üzerinde iki yarınorm olsun. Bu taktirde q_1 in q_2 den daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $q_2(x) \leq Kq_1(x)$ olacak şekilde sabit bir $K > 0$ sayısının var olmasıdır [37].

Aşağıdaki eşitsizlik bu çalışmada sık sık kullanılacaktır.

$a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $G = \sup_k p_k < \infty$ ve $D = \max(1, 2^{G-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\} \quad (2.1)$$

dir [24].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI, ORLİCZ FONKSİYONU VE MODULAR DİZİ UZAYI

3.1. Fark Dizisi Uzayları

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz [19] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak [8], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$ ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. Et ve Esi [9], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$$

olmak üzere bu uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

şeklindeki uzaylara genelleştirdiler. Aynı zamanda $\Delta_v^m(\ell_\infty)$, $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Teorem 3.1.1. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [10].

Teorem 3.1.2. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [10].

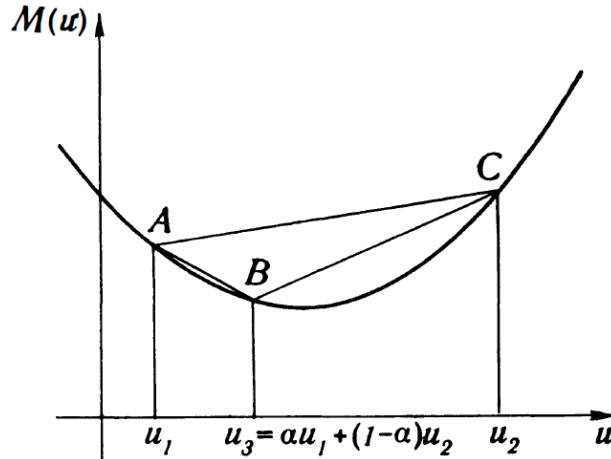
3.2 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1. $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)] \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvekstir denir [20].

Bu kısımda, sadece sürekli konveks fonksiyonlara bakacağız. (3.1) şartı, $M(u)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde iki noktayı birleştiren kirişin orta noktasının, grafiğin bu noktaya karşılık gelen noktasının üstünde kalacağı anlamına gelir.



Şekil 1.1

Şekil 1.1 incelendiğinde, her kirişin, grafiğin üzerinde kalacağı geometrik olarak açıktır. Bu, $0 \leq \alpha \leq 1$ olacak şekildeki her α için

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha) M(u_2) \quad (3.2)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı anlamına gelir. Bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir.

Jensen eşitsizliği analitik olarak da ispat edilebilir. Kabul edelim ki Jensen eşitsizliği $\forall \alpha \in [0, 1]$ için sağlanmasın. Bu durumda, $[0, 1]$ üzerinde

$$f(\alpha) = M[\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2] - \alpha M(u_1) - (1 - \alpha) M(u_2) \quad (3.3)$$

sürekli fonksiyonunun M_0 maksimum değeri pozitif olur. $\alpha_0, f(\alpha) = M_0$ olacak şekildeki en küçük argumamı göstereyim ve $\delta > 0, [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \subset [0, 1]$ olacak şekilde bir sayı olsun. Bu durumda (3.1) eşitsizliği

$$\begin{aligned} u_1^* &= (\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) u_2 \\ u_2^* &= (\alpha_0 + \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) u_2 \end{aligned}$$

noktalarına uygulanıp, (3.3) eşitliği gözönünde tutulursa

$$f(\alpha_0) \leq \frac{f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)}{2} < M_0$$

elde edilir. $f(\alpha_0) = M_0$ yukarıdaki eşitsizlikle çelişeceğinden (3.2) eşitsizliği her $\alpha \in [0, 1]$ için sağlanır.

$u_1 \neq u_2$ ise ya sadece $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için ya da her $\alpha \in [0, 1]$ için (3.2) eşitlik olarak sağlanır. Kabul edelim ki (3.2), en az bir $\alpha_0 \in (0, 1)$ için eşitlik olarak sağlansın. Bu, $f(\alpha_0) = 0$ olması anlamına gelir. Bu durumda, her $\alpha \in [0, 1]$ için $f(\alpha) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Sürekli $f(\alpha)$ fonksiyonu konveks olduğundan Jensen eşitsizliğini sağlar. Kabul edelim ki, en az bir $\alpha_1 \in (0, 1)$ için $f(\alpha_1) < 0$ olsun. (Daha önce ispat edildiği gibi $f(\alpha) > 0$ olamaz). $\alpha_1 < \alpha_0$ alalım.

$$\alpha_0 = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

olduğundan, Jensen eşitsizliği bize

$$f(\alpha_0) \leq \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} f(1) = \frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_1} f(\alpha_1) < 0$$

eşitsizliğini verir ki bu $f(\alpha_0) = 0$ ile çelişir. O halde her $\alpha \in [0, 1]$ için (3.2) eşitlik olarak sağlanır.

(3.1) eşitsizliği başka genelleştirmelere de izin verir: Keyfi $u_1, u_2, \dots, u_n$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n)] \quad (3.4)$$

dir. (3.1) eşitsizliğinin ardışık olarak uygulanmasıyla, 2^k şeklindeki bütün n sayıları için (3.4) eşitsizliğinin sağlanacağı ispatlanabilir. n sayısının keyfi olması hali daha karmaşıktır. $n + m = 2^k$ olacak şekilde bir m sayısı alalım. Bu durumda

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + m \cdot u^*}{n + m}\right) \leq \frac{1}{n + m} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n) + mM(u^*)]$$

olur. Burada, $u^* = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ alınırsa, (3.4) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, $u_1 \leq u_3 \leq u_2$ olsun. Bu durumda

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2$$

olup, (3.2) eşitsizliğinden,

$$M(u_3) \leq \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2)$$

ve bu iki eşitsizlikten,

$$\frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(u_2) - M(u_3)}{u_2 - u_3} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Elde edilen bu eşitsizliklerden, "AB kirişinin eğiminin AC kirişinin eğiminden ve BC kirişinin eğiminden daha küçük olduğu" sonucu çıkarılabilir.

Lemma 3.2.2. Sürekli ve konveks bir $M(u)$ fonksiyonu, her noktada

$$p_-(u) \leq p_+(u)$$

olacak şekilde bir $p_+(u)$ sağ türevine ve bir $p_-(u)$ sol türevine sahiptir [20].

Lemma 3.2.3. Sürekli ve konveks bir $M(u)$ fonksiyonunun $p_+(u)$ sağ türevi, azalmayan sağdan sürekli bir fonksiyondur [20].

Uyarı 3.2.4. Benzer olarak, $M(u)$ fonksiyonunun $p_-(u)$ sol türevi, azalmayan soldan sürekli bir fonksiyondur [20].

3.3. Orlicz Fonksiyonu

Tanım 3.3.1. Bir Orlicz fonksiyonu, sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonudur [18].

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t)dt$$

integral formunda gösterilebilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen p , azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0$, $t > 0$ için $p(t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ dur [20].

Bir $M(t)$ Orlicz fonksiyonu ile çekirdeği olan $p(t)$ yi gözönüne alalım ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu taktirde

$$N(x) = \int_0^x q(s)ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$, N nin çekirdeği olup, $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir ki bu da N nin bir Orlicz fonksiyonu olduğunu gösterir. Bu şekildeki M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır [18].

Önerme 3.3.2. M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu taktirde

(i) $x, y \geq 0$ için $xy \leq M(x) + N(y)$ (Young Eşitsizliği)

(ii) $x \geq 0$ için $xp(x) = M(x) + N(p(x))$

dir [18].

Ayrıca, M konveks ve $M(0) = 0$ olduğundan $x \geq 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ olmak üzere her μ için $M(\mu x) \leq \mu M(x)$ dir [18].

Tanım 3.3.3. Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\tilde{\ell}_M = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir [18]. Benzer şekilde N , M nin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\tilde{\ell}_N$ cümlesi

$$\tilde{\ell}_N = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N(|x_k|) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lindenstrauss ve Tzafriri [23] Orlicz fonksiyonu fikrini kullanarak aşağıdaki dizi uzayını tanımladılar.

Tanım 3.3.4. Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\ell_M = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan cümleye Orlicz dizi uzayı denir [18]. Benzer şekilde N , M nin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere

$$\ell_N = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

de bir Orlicz dizi uzayıdır.

M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere, ℓ_M Orlicz dizi uzayı

$$\ell_M = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak, her } y \in \tilde{\ell}_N \text{ için}\} \quad (3.6)$$

şeklinde de verilebilir [18].

Buradan açıkça görülebilir ki $\tilde{\ell}_M \subset \ell_M$ ve $\tilde{\ell}_N \subset \ell_N$ dir [18].

Aşağıda verilen teoremlerden bazılarının ifadeleri bu tez içinde kullanılmıştır. Bu teoremlerin ispatlarını referans [18] de bulmak mümkündür.

Teorem 3.3.6. Her bir $x \in \ell_M$ için

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1\right\} < \infty$$

dir [18].

Böylece $\|x\|_M = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1\right\}$ şeklinde ℓ_M üzerinde bir norm tanımlanabilir. ℓ_M , bu norm ile birlikte bir Banach uzayıdır [18].

Teorem 3.3.7. $(\ell_M, \|x\|_M)$ bir $BK-$ uzayıdır [18].

$\|x\|_M$ normundan farklı olarak ℓ_M ,

$$\|x\|_{(M)} = \inf\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\}$$

ile tanımlanan ve $\|x\|_M$ normuna denk olan bir $\|\cdot\|_{(M)}$ normuyla da BK -uzayı yapılabılır [18].

Teorem 3.3.8. $x \in \ell_M$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}}\right) \leq 1$$

dir [18].

Teorem 3.3.9. $\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda, $y = \{p(|x_k|)\} \in \tilde{\ell}_N$ ve $\sum_{k \geq 1} N(|y_k|) \leq 1$ dir [18].

Teorem 3.3.10. $\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda, $y = \{p(|x_k|)\} \in \tilde{\ell}_M$ ve $\sum_{k \geq 1} M(|x_k|) \leq \|x\|_M$ dir [18].

Önerme 3.3.11. $x \in \ell_M$ için $\sum_{k \geq 1} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_M}\right) \leq 1$ dir [18].

Teorem 3.3.12. $x \in \ell_M$ için

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2 \|x\|_{(M)}$$

dir [18].

Sonuç 3.3.13. $(\ell_M, \|x\|_{(M)})$ bir BK -uzayıdır [18].

Bir AK -uzayı olan ℓ_M nın önemli bir alt uzayı

$$h_M = \{x = (x_k) \in \ell_M : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklindeki uzayıdır [18].

Teorem 3.3.14. M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda, $(h_M, \|\cdot\|)$ bir AK - BK uzayıdır [18].

Tanım 3.3.15. Bir M Orlicz fonksiyonuna, eğer her bir $k > 0$ için

$$M(kx) \leq R_k M(x), \quad \forall x \in (0, x_k]$$

olacak şekilde $R_k > 0$ ve $x_k > 0$ mevcutsa, sıfırda veya küçük x ler için Δ_2 - şartını sağlıyor denir [18].

Teorem 3.3.16. Bir M Orlicz fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M sıfırda Δ_2 - şartını sağlar.
- (ii) $\ell_M = h_M$ dir.
- (iii) ℓ_M bir AK - uzayıdır [18].

Önerme 3.3.17. M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun.

Bu taktirde $h_M^\beta = \ell_N$ dir [18].

İspat. $y \in \ell_N$ olsun. Böylece en az bir $r > 0$ için $\sum_{i \geq 1} N\left(\frac{|x_i|}{r}\right) < \infty$ olur. h_M de herhangi bir x alınırsa

$$|x_i y_i| \leq M(|r x_i|) + N(|y_i|/r)$$

olur. Böylece $\sum_{i \geq 1} |x_i y_i|$ yakınsak ve $y \in h_M^\beta$ dir. Diğer taraftan, $y \in h_M^\beta$ olduğunu farzedelim. (3.6) daki tanım kullanılarak $h_M^\beta \subset \ell_N$ elde edilir. Böylece $h_M^\beta = \ell_N$ bulunur.

Sonuç 3.3.18. $h_M^\alpha = h_M^\beta = h_M^\gamma = \ell_N$ dir [18].

İspat. ℓ_M normal olduğundan ispat açıktır.

3.4. $\ell_M(p)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, Parashar ve Choudhary [30] tarafından tanımlanan ve bazı cebirsel-topolojik özellikleri incelenen $\ell_M(p)$ dizi uzayına yer verildi. Bu bölümde $p = (p_k)$ dizisini sınırlı kabul edeceğiz.

Şimdi, bir M Orlicz fonksiyonu ve pozitif reel sayıların herhangi bir $p = (p_k)$ dizisi için

$$\ell_M(p) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan dizi uzayının bazı temel özelliklerini verelim.

Teorem 3.4.1. $H = \sup_k p_k$ olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir lineer uzayıdır [30].

Teorem 3.4.2. $H = \sup_k p_k$ olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$

$$g(x) = \inf\{\rho^{\frac{pn}{H}} > 0 : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, \dots\} \quad (3.7)$$

paranormuyla total paranormlu uzaydır [30].

Uyarı 3.4.3. $M(x) = x$ için $\ell_M(p)$ üzerindeki paranorm ile $\ell(p)$ üzerindeki paranorm aynıdır [30].

Teorem 3.4.4. Her bir k için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olacak şekilde (p_k) ve (q_k) dizilerini alalım. Bu taktirde $\ell_M(p) \subset \ell_M(q)$ dir [30].

3.5. Modular Dizi Uzayı

Woo [38] modular dizi uzayını ve bu uzayın önemli bir alt uzayı olan $h(\mathcal{M})$ uzayını tanımlamıştır. Biz de bu bölümde M_k Orlicz fonksiyonlarının integral formundaki gösterimini, çekirdeğini, alışımlı tamamlayıcısını ve modular dizi sınıfını tanımlayıp bunların bazı özelliklerini inceledik.

$\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde her bir k için M_k lar

$$M_k(x) = \int_0^x p_k(t) dt$$

şeklinde integral formunda gösterilebilir. Burada her bir k için M_k ların çekirdeği olarak bilinen p_k lar azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, her bir k için $p_k(0) = 0$, $t > 0$ için $p_k(t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $p_k(t) \rightarrow \infty$ dur.

Her bir k için M_k lar Orlicz fonksiyonu ve her bir M_k ya karşılık p_k lar da bu Orlicz fonksiyonlarının çekirdeği olmak üzere

$$q_k(s) = \sup\{t : p_k(t) \leq s\}$$

olsun. Bu taktirde her bir k için

$$N_k(x) = \int_0^x q_k(s) ds$$

integral formunda gösterilen N_k fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Burada her bir k için $q_k(s)$, N_k nin çekirdeği olup $p_k(t)$ nin tüm özelliklerine sahiptir. Yani (N_k) bir Orlicz

fonksiyon dizisi olur. Bu şekildeki her bir M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır.

Önerme 3.5.1. M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu taktirde

- (i) $x, y \geq 0$ için $xy \leq M_k(x) + N_k(y)$
 - (ii) $x \geq 0$ için $x p_k(x) = M_k(x) + N_k(p_k(x))$
- dir.

Ayrıca, M_k lar konveks ve her bir k için $M_k(0) = 0$ olduğundan $x \geq 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ olmak üzere her μ için $M_k(\mu x) \leq \mu M_k(x)$ dir.

Tanım 3.5.2. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere

$$\tilde{\ell}(\mathcal{M}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\ell}(\mathcal{M})$ cümlesine Modüler dizi sınıfı denir. Benzer şekilde her bir k için N_k, M_k nın alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere $\tilde{\ell}(\mathcal{N})$,

$$\tilde{\ell}(\mathcal{N}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5.3. Bir $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyon dizisi için

$$\ell(\mathcal{M}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan $\ell(\mathcal{M})$ cümlesine modüler dizi uzayı denir [38]. Bu dizi uzayı

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \inf\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde her bir k için N_k, M_k nın alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere

$$\ell(\mathcal{N}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanan $\ell(\mathcal{N})$ cümlesine modüler dizi uzayı denir. Bu dizi uzayı

$$\|x\|_{\mathcal{N}} = \inf\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Her bir k için M_k ve N_k fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere, $\ell(\mathcal{M})$ Modular dizi uzayı

$$\ell(\mathcal{M}) = \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak, her } y \in \tilde{\ell}(\mathcal{N}) \text{ için}\} \quad (3.8)$$

olarak da verilebilir.

Bir AK -uzayı olan $\ell(\mathcal{M})$ nın önemli bir alt uzayı

$$h(\mathcal{M}) = \{x = (x_k) \in \ell(\mathcal{M}) : \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}$$

uzayıdır [38].

Tanım 3.5.5. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer her $x \in (0, 1)$ ve $k > k_0$ için

$$\frac{x M'_k(x)}{M_k(x)} \leq p$$

olacak şekilde $p > 1$ ve $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa veya buna denk olarak her $k > k_0$ ve $x \in (0, \frac{1}{2}]$ için

$$\frac{M_k(2x)}{M_k(x)} \leq K$$

olacak şekilde $K > 0$ ve $k_0 \in \mathbb{N}$ varsa (M_k) dizisi düzgün Δ_2 -şartını sağlıyor denir [38].

(M_k) dizisinin düzgün Δ_2 -şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $h(\mathcal{M}) = \ell(\mathcal{M})$ olmasıdır [38].

Tanım 3.5.6. M_1 ve M_2 herhangi iki Orlicz fonksiyonu olsun. $0 \leq x \leq x_0$ şeklindeki her x için

$$M_1(\alpha x) \leq M_2(x) \leq M_1(\beta x)$$

olacak şekilde x_0, α ve β pozitif sayıları varsa M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonlarına denktir denir [18].

Benzer şekilde Orlicz fonksiyon dizilerinin denkliği aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{T} = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının herhangi iki dizisi olsun. $0 \leq x \leq x_0$ şeklindeki her x ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$M_k(\alpha x) \leq T_k(x) \leq M_k(\beta x)$$

olacak şekilde x_0, α ve β pozitif sayıları varsa (M_k) ve (T_k) Orlicz fonksiyon dizilerine denktir denir.

4. ORLICZ FONKSİYON DİZİLERİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

4.1. $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ Dizi Uzayının Tanımı ve Bazı Topolojik Özellikleri

Tanım 4.1.1. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi, X q yarınormu ile bir yarınormlu uzay, $s(X)$, X üzerindeki bütün dizilerin uzayı ve $\tilde{u} = (\tilde{u}_k)$ ve $\tilde{w} = (\tilde{w}_k)$ herhangi iki kompleks dizi olsun. $u_k = |\tilde{u}_k|$ ve $w_k = |\tilde{w}_k|$ olmak üzere aşağıdaki dizi uzayını tanımlayalım:

$$\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] = \{x \in s(X) : \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}.$$

$\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ dizi uzayı tanımında her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınırsa $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, q, u, w]$ uzayı elde edilir.

$\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ dizi uzayı tanımında $m = 0$ alınırsa $\ell_{\mathcal{M}}[p, q, u, w]$ uzayı elde edilir.

Teorem 4.1.2. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat. $x, y \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ ve a ve b iki kompleks sayı olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2)$ şeklinde tanımlayalım. M_k lar azalmayan ve konveks, q yarınorm ve Δ_v^m lineer olduğundan, (2.1) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m (ax_k + by_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{aw_k \Delta_v^m x_k}{\rho_3} \right) + q \left(\frac{bw_k \Delta_v^m y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{aw_k \Delta_v^m x_k}{2|a| \rho_1} \right) + q \left(\frac{bw_k \Delta_v^m y_k}{2|b| \rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2^{p_k}} \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) + q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ bir lineer uzaydır.

Teorem 4.1.3. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu taktirde $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ uzayı $H = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \sum_{k \geq 1} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır.

İspat. $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(0) = 0$ olduğundan $x = \theta$ için $\inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} \right\} = 0$ olur. $x, y \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ olsun.

$$\sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right] \leq 1$$

ve

$$\sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right] \leq 1$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ sayılarını seçelim. $\rho = \rho_1 + \rho_2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m (x_k + y_k)}{\rho} \right) \right) \right] &\leq \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1 + \rho_2} \right) + q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right) \right] \\
&\leq \frac{\rho_1}{\rho} \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right] \\
&\quad + \frac{\rho_2}{\rho} \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m y_k}{\rho_2} \right) \right) \right] \leq 1
\end{aligned}$$

olur. Böylece $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$ elde ederiz.

Skaler çarpımın sürekli olduğunu ispatlayalım. μ sıfırdan farklı herhangi bir kompleks sayı olsun. Bu taktirde $r = \rho/|\mu|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
g(\mu x) &= \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m (\mu x_k)}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\} \\
&= \inf \left\{ (|\mu| \cdot r)^{\frac{p_n}{H}} : \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{r} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0 \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $|\mu|^{p_n} \leq \max(1, |\mu|^H)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\mu x) &\leq \max(1, |\mu|^H) \cdot \inf\{r^{\frac{p_n}{H}} : \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{r} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\} \\ &= \max(1, |\mu|^H) \cdot g(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece $g(x)$, $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ de sıfıra yakınsak iken $g(\mu x)$ de sıfıra yakınsaktır.

Şimdi x , $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ uzayının sabit elemanı olsun. Bu taktirde

$$g(x) = \inf\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\}$$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı vardır. $\mu \rightarrow 0$ iken

$$g(\mu x) = \inf\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \sum_k u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{\mu w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1, n \geq 1, \rho > 0\} \rightarrow 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^{m-1}, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, q, u, w]$ dır.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^{m-1}, q, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^{m-1} x_k}{\rho} \right) \right) \right] < \infty$$

dır. Diğer taraftan M_k lar azalmayan ve konveks, q da yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^{m-1} x_k}{\rho} \right) \right) \right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^{m-1} x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, q, u, w]$ elde edilir. Böylece $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^{m-1}, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, q, u, w]$ olur.

Teorem 4.1.5. $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{T} = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının herhangi iki dizisi olsun. Bu taktirde

(i) $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \cap \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}+\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$,

(ii) Eğer $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{T}$ denk ise $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] = \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$

dir.

İspat. (i) $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \cap \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada (2.1) eşitsizliğini kullanırsak

$$\left[(M_k + T_k) \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq D \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + D \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafı u_k ile çarpılır ve 1 den ∞ 'a toplamı alınır

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[(M_k + T_k) \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) $x \in \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 3.5.6 daki eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınır

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \quad (4.1)$$

olur. Şimdi de $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ alalım. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Tanım 3.5.6 deki eşitsizlikte $\beta = 1$ alınır

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[T_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan

$$\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \quad (4.2)$$

olur. (4.1) ve (4.2) den $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] = \ell_{\mathcal{T}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.6. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Herhangi iki q_1 ve q_2 yarınormu için

$$(i) \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w] \cap \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_2, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1+q_2, u, w],$$

(ii) Eğer q_1, q_2 den daha kuvvetli ise ve Δ_2 -şartı sağlanırsa $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_2, u, w]$ dir.

İspat. (i) $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w] \cap \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_2, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_2 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ vardır. $\rho_3 = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ olarak tanımlayalım. M_k lar azalmayan ve konveks, q_1 ve q_2 yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left((q_1 + q_2) \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_3} \right) + q_2 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2^{p_k}} \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) + M_k \left(q_2 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + D \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_2 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1+q_2, u, w]$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

(ii) $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

dir. Lemma 2.1.15 den

$$q_2(x) \leq K q_1(x)$$

olacak şekilde sabit bir $K > 0$ sayısı vardır. Δ_2 - şartından

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_2 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq R_K \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde ederiz. O halde $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_2, u, w]$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.7. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $p = (p_k)$ ve $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların herhangi iki dizisi olsun. Herhangi iki q_1 ve q_2 yarınormu için $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q_1, u, w] \cap \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, t, q_2, u, w] \neq \emptyset$ dır.

İspat. Özel olarak her k için $p_k = t_k$ ve $q_1(x) = q_2(x)$ alınırsa ispat elde edilir.

Teorem 4.1.8. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq t_k$ olsun. Bu taktirde $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w] \subset \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, t, q, u, w]$ dir.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde en az bir $\rho > 0$ sayısı vardır.

Mesela k nın yeterince büyük değerleri ve en az bir sabit $k_0 \in \mathbb{N}$ için $k \geq k_0$ alınırsa $M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \leq 1$ sağlanır. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} \leq \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

olur ve böylece

$$\sum_{k \geq k_0} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} \leq \sum_{k \geq k_0} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k \Delta_v^m x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir. O halde $x \in \ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, t, q, u, w]$ olur.

Teorem 4.1.9 $\ell_{\mathcal{M}}[p, q, u, w]$ dizi uzayı solid ve monotondur.

İspat. $x \in \ell_{\mathcal{M}}[p, q, u, w]$ ve (α_k) her $k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ olacak şekilde skaler bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{\alpha_k w_k x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left[M_k \left(q \left(\frac{w_k x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Böylece $\alpha x \in \ell_{\mathcal{M}}[p, q, u, w]$ olur. Ayrıca bu uzayın Sonuç 2.1.11 den monoton olduğu görülür.

5. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ DİZİ UZAYLARI

5.1. $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ Dizi Uzaylarının Tanımı ve Bazı Topolojik Özellikleri

Tanım 5.1.1. $\ell_{\mathcal{M}}[\Delta_v^m, p, q, u, w]$ dizi uzayında her k için $p_k = 1$, $u_k = 1$, $v_k = 1$, $q(x) = |x|$ olmak üzere $w_k = \frac{1}{\lambda_k}$ ve $w_k = \lambda_k$ için sırasıyla $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dizi uzaylarını elde ederiz. Burada $\lambda = \{\lambda_k\}$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisidir. Her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olmak üzere, $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyon dizileri için $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dizi uzaylarını

$$\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \{x \in s : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty, \rho > 0 \text{ için}\}$$

ve

$$\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m) = \{x \in s : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty, \rho > 0 \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlayalım. Aynı zamanda

$$\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \{x \in s : \left\{ \frac{\Delta^m x_k}{\lambda_k} \right\} \in \ell\{M_k\}\}$$

ve

$$\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m) = \{x \in s : \{\lambda_k \Delta^m x_k\} \in \ell\{N_k\}\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Bu bölümde her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(1) = 1$ ve $N_k(1) = 1$ alınacaktır.

Teorem 5.1.2. $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{N} = (N_k)$ Orlicz fonksiyonlarının iki dizisi olsun. Bu taktirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dizi uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzaydır.

İspat. $x, y \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_1} \right) < \infty$$

ve

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_2} \right) < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. a ve b iki kompleks sayı olmak üzere $\rho_3 = \max(2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2)$ alalım. M_k lar azalmayan, konveks ve Δ^m lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m(ax_k + by_k)|}{\lambda_k \rho_3} \right) &= \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|a\Delta^m x_k + b\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_3} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|a||\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_3} + \frac{|b||\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_3} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left[\frac{1}{2} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_1} \right) + \frac{1}{2} M_k \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_2} \right) \right] \\ &\leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_1} \right) + \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho_2} \right) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ bir lineer uzaydır.

$x, y \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) < \infty$$

ve

$$\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. a ve b iki kompleks sayı olmak üzere $\rho_3 = \max(2|a|\rho_1, 2|b|\rho_2)$ alalım. N_k lar azalmayan, konveks ve Δ^m lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m(ax_k + by_k)|}{\rho_3} \right) &= \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |a\Delta^m x_k + b\Delta^m y_k|}{\rho_3} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |a||\Delta^m x_k|}{\rho_3} + \frac{\lambda_k |b||\Delta^m y_k|}{\rho_3} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left[\frac{1}{2} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) \right] \\ &\leq \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) + \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 5.1.3. $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dizi uzayı

$$\|x\|_\lambda^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

İspat. (N1) $\|x\|_\lambda^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} \geq 0.$

(N2) $\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} = 0$ ise $\sum_{i=1}^m |x_i| = 0$ ve $\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} = 0$ dir.

$\sum_{i=1}^m |x_i| = 0$ ise $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_m| = 0$ olur ki bu da $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ demektir.

Yani $1 \leq i \leq m$ için $x_i = 0$ dir. Ayrıca $\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} = 0$ ise

$k \rightarrow \infty$ iken $M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \rightarrow 0$ olur ki buradan $|\Delta^m x_k| = 0$ elde edilir. $x_1 = \dots = x_m = 0$ ve

$$|\Delta^m x_k| = 0 \text{ ise } \left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki buradan $x = \theta$ bulunur.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} = 0$ olduğu aşıkardır.

(N3) $\|\mu x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m |\mu x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m (\mu x_k)|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\}$ olsun. $r = \rho / |\mu|$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\mu x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} &= |\mu| \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{r |\mu| > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k r} \right) \leq 1\} \\ &= |\mu| \sum_{i=1}^m |x_i| + |\mu| \inf\{r > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k r} \right) \leq 1\} \\ &= |\mu| \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{(N4)} \quad \|x + y\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m (x_k + y_k)|}{\lambda_k 2\rho} \right) \leq 1\} \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m (x_k) + \Delta^m (y_k)|}{\lambda_k 2\rho} \right) \leq 1\} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^m |y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} \right) \\ &= \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} + \|y\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.4. $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dizi uzayı

$$\|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

İspat. (N1) $\|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\} \geq 0$.

(N2) $\|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = 0$ ise $\sum_{i=1}^m |x_i| = 0$ ve $\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\} = 0$ dir.

$\sum_{i=1}^m |x_i| = 0$ ise $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_m| = 0$ olur ki bu da $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ olması demektir. Yani $1 \leq i \leq m$ için $x_i = 0$ dir. Ayrıca $\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\} = 0$ ise $k \rightarrow \infty$ iken $N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \rightarrow 0$ olur ki buradan $|\Delta^m x_k| = 0$ elde edilir. $x_1 = \dots = x_m = 0$ ve

$$|\Delta^m x_k| = 0 \text{ ise } \left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki buradan $x = \theta$ bulunur.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = 0$ olduğu aşıkardır.

(N3) $\|\mu x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = \sum_{i=1}^m |\mu x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m (\mu x_k)|}{\rho} \right) \leq 1\}$ olsun. $r = \rho / |\mu|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\mu x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} &= |\mu| \sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{r |\mu| > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{r} \right) \leq 1\} \\ &= |\mu| \sum_{i=1}^m |x_i| + |\mu| \inf\{r > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{r} \right) \leq 1\} \\ &= |\mu| \|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{(N4)} \quad \|x + y\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m (x_k + y_k)|}{2\rho} \right) \leq 1\} \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m (x_k) + \Delta^m (y_k)|}{2\rho} \right) \leq 1\} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^m |y_i| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho} \right) \leq 1\} \right) \\ &= \|x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} + \|y\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.5. $(\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m), \|\cdot\|_{\lambda}^{\mathcal{M}})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olmak üzere (x^s) , $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|x^s - x^t\|_\lambda^{\mathcal{M}} < \varepsilon \quad (s, t \geq n_0)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buna göre $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_\lambda^{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} \rightarrow 0$$

dır. O halde $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

olur. Buna göre $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin her sabit $k = 1, 2, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olduğu görülür. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$) diyelim. (x^s) , $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\forall s \geq N$ için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca $s, t \geq n_0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\lambda_k \rho_\varepsilon} \right) \leq 1 \quad (5.1)$$

olacak şekilde $0 < \rho_\varepsilon < \varepsilon$ mevcuttur.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(1) = 1$ iken her bir $k \geq 1$ için

$$\frac{|\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\lambda_k \rho_\varepsilon} \leq 1 \quad (s, t \geq n_0)$$

elde ederiz. Buna göre verilen her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\Delta^m x_k^s\}$ dizisi $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ uzayında bir Cauchy dizisidir ve böylece $s \rightarrow \infty$ iken $\Delta^m x_k^s \rightarrow \Delta^m x_k$ diyelim. $\Delta^m x = \{\Delta^m x_k\}$ alalım. (5.1) den ve M_k ların sürekliliğinden

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_\varepsilon} \right) \leq 1 \quad (k \geq n_0)$$

elde ederiz. Böylece $s \geq n_0$ için $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\|x^s - x\|_\lambda^{\mathcal{M}} < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $(\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m), \|\cdot\|_\lambda^{\mathcal{M}})$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 5.1.6. $(\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m), \|\cdot\|_{\mathcal{N}}^{\lambda})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ olmak üzere (x^s) , $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} < \varepsilon \quad (s, t \geq n_0)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buna göre $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\rho} \right) \leq 1\} \rightarrow 0$$

dır. O halde $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

olur. Buna göre $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin her sabit $k = 1, 2, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$) diyelim. (x^s) , $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\forall s \geq N$ için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca $s, t \geq n_0$ için

$$\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\rho_{\varepsilon}} \right) \leq 1 \quad (5.2)$$

olacak şekilde $0 < \rho_{\varepsilon} < \varepsilon$ mevcuttur.

$N_k(1) = 1$ iken, her bir $k \geq 1$ için

$$\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k^t|}{\rho_{\varepsilon}} \leq 1 \quad (s, t \geq n_0)$$

elde ederiz. Buna göre verilen her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\{\Delta^m x_k^s\}$ dizisi $\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ uzayında bir Cauchy dizisidir ve böylece $s \rightarrow \infty$ iken $\Delta^m x_k^s \rightarrow \Delta^m x_k$ dır. $\Delta^m x = \{\Delta^m x_k\}$ alalım.

(5.2) den ve N_k ların sürekliliğinden

$$\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^s - \Delta^m x_k|}{\rho_{\varepsilon}} \right) \leq 1 \quad (s \geq n_0)$$

elde ederiz. Böylece $s \geq n_0$ için $x \in \ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m)$ ve $\|x^s - x\|_{\mathcal{N}}^{\lambda} < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $(\ell_{\mathcal{N}}^{\lambda}(\Delta^m), \|\cdot\|_{\mathcal{N}}^{\lambda})$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 5.1.7. $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ uzayı $\|\cdot\|_\lambda^{\mathcal{M}}$ normu ile bir BK - uzayıdır.

İspat. $(\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m), \|\cdot\|_\lambda^{\mathcal{M}})$ uzayının bir Banach uzayı olduğu Teorem 5.1.5 de gösterildi. Şimdi $n \rightarrow \infty$ için

$$\|x^n - x\|_\lambda^{\mathcal{M}} \rightarrow 0$$

olsun. Bu taktirde $k \leq m$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1\} \rightarrow 0$$

olur. $M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\lambda_k \|x\|_\lambda^{\mathcal{M}}} \right) \leq 1$ ise $\forall k$ için $\frac{|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\lambda_k \|x\|_\lambda^{\mathcal{M}}} \leq 1$ ve buradan $|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \leq \lambda_k \|x\|_\lambda^{\mathcal{M}}$ olacağından

$$|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \leq \lambda_k \|x^n - x\|_\lambda^{\mathcal{M}}$$

elde edilir. Buradan $\|x^n - x\|_\lambda^{\mathcal{M}} \rightarrow 0$ olup $|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \rightarrow 0$ bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^n - x_{k+m}| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \\ &\quad + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \dots + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik gözönüne alınırsa $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece $(\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m), \|\cdot\|_\lambda^{\mathcal{M}})$ bir BK - uzayıdır.

Teorem 5.1.8. $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m)$ uzayı $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}^\lambda$ normu ile bir BK - uzayıdır.

İspat. $(\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m), \|\cdot\|_{\mathcal{N}}^\lambda)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu Teorem 5.1.6 da gösterildi. Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\|x^n - x\|_{\mathcal{N}}^\lambda \rightarrow 0$$

olsun. Bu taktirde $k \leq m$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve

$$\inf\{\rho > 0 : \sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1\} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\|x\|_{\mathcal{N}}^\lambda} \right) \leq 1$ ise $\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k|}{\|x\|_{\mathcal{N}}^\lambda} \leq 1$ ve buradan $|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \leq \lambda_k^{-1} \|x\|_{\mathcal{N}}^\lambda$ olacağından

$$|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \leq \lambda_k^{-1} \|x^n - x\|_{\mathcal{N}}^\lambda$$

bulunur. Buradan $\|x^n - x\|_{\mathcal{N}}^\lambda \rightarrow 0$ olup $|\Delta^m x_k^n - \Delta^m x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^n - x_{k+m}| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik gözönüne alınırsa $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece $(\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m), \|\cdot\|_{\mathcal{N}}^\lambda)$ bir BK - uzayıdır.

Teorem 5.1.9. Eğer μ, λ yı ihtiva eden normal (solid) bir dizi uzayı ise bu taktirde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m), \mu(\Delta^m)$ nin bir altuzayıdır. Ayrıca eğer $\mu(\Delta^m)$ uzayı $\|\cdot\|_{\mu}$ monoton normuyla (quasi-norm) verilmişse $\|I\| \leq \|\{\lambda_k\}\|_{\mu}$ yani $I : \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \rightarrow \mu(\Delta^m)$ dönüşümü sürekli-dir.

İspat. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty$$

olduğundan, her bir $k \in \mathbb{N}$ ve sabit $K > 0$ için

$$\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \leq K$$

elde edilir. $|\Delta^m x_k| \leq K \lambda_k \rho$ olup μ, λ yı ihtiva eden normal (solid) bir dizi uzayı olduğundan $(\Delta^m x_k) \in \mu$ ise $x \in \mu(\Delta^m)$ dir. O halde $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \mu(\Delta^m)$ dir.

Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k(1) = 1$ olduğundan $\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}} \right) \leq 1$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}} \leq 1$ ve $|\Delta^m x_k| \leq \lambda_k \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}$ elde edilir. $\|\cdot\|_{\mu}$ monoton norm olduğundan

$\|Ix\|_\mu = \|(\Delta^m x_k)\|_\mu \leq \|\{\lambda_k\}\|_\mu \|x\|_\lambda^{\mathcal{M}}$ ise $\sup_{x \neq 0} \frac{\|(\Delta^m x_k)\|_\mu}{\|x\|_\lambda^{\mathcal{M}}} \leq \|\{\lambda_k\}\|_\mu$ ve buradan da $\|I\| \leq \|\{\lambda_k\}\|_\mu$ elde edilir. Buradan I dönüşümü sınırlıdır. O halde I sürekli.

Teorem 5.1.10. Eğer $\eta, \{\frac{1}{\lambda_k}\} \equiv \lambda^{-1}$ yı ihtiva eden normal (solid) bir dizi uzayı ise bu taktirde $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m)$, $\eta(\Delta^m)$ nin bir altuzayıdır. Ayrıca eğer $\eta(\Delta^m)$ uzayı $\|\cdot\|_\eta$ monoton normuyla (quasi-norm) verilmişse $\|J\| \leq \|\{\lambda_k^{-1}\}\|_\eta$ yani $J : \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m) \rightarrow \eta(\Delta^m)$ dönüşümü sürekli.

İspat. $y \in \ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olduğundan, her bir $k \in \mathbb{N}$ ve sabit $K > 0$ için

$$\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\rho} \leq K$$

dır. $\lambda_k |\Delta^m y_k| \leq K\rho$ ise $|\Delta^m y_k| \leq \lambda_k^{-1} K\rho$ olup η, λ^{-1} i ihtiva eden normal (solid) bir dizi uzayı olduğundan, $\Delta^m y_k \in \eta$ ise $y \in \eta(\Delta^m)$ dır. O halde $\ell_{\mathcal{N}}^\lambda(\Delta^m) \subset \mu(\Delta^m)$ dir.

Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k \geq 1} N_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\|y\|_{\mathcal{N}}^\lambda} \right) \leq 1$ ise $\frac{\lambda_k |\Delta^m y_k|}{\|y\|_{\mathcal{N}}^\lambda} \leq 1$ ve $|\Delta^m y_k| \leq \lambda_k^{-1} \|y\|_{\mathcal{N}}^\lambda$ olur. $\|\cdot\|_\eta$ monoton norm olduğundan $\|Jy\|_\eta = \|\Delta^m y_k\|_\eta \leq \|\{\lambda_k^{-1}\}\|_\eta \|y\|_{\mathcal{N}}^\lambda$ ise $\sup_{y \neq 0} \frac{\|\Delta^m y_k\|_\eta}{\|y\|_{\mathcal{N}}^\lambda} \leq \|\{\lambda_k^{-1}\}\|_\eta$ ve buradan da $\|J\| \leq \|\{\lambda_k^{-1}\}\|_\eta$ elde edilir. Buradan J dönüşümü sınırlıdır. O halde J sürekli.

5.2. $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ Dizi Uzayları Arasındaki İlişki

Bu bölümde $\lambda = \{\lambda_k\}$ dizisinin farklı üç durumunda aynı $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonların dizisine karşılık gelen $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ ve $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ uzayları arasındaki ilişki incelenecektir. $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ dizi uzayında her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = 1$ alınırsa

$$\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \{x \in s : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty, \rho > 0 \text{ için}\}$$

dizi uzayı elde edilir.

Teorem 5.2.1. Eğer $\lambda = \{\lambda_k\}$ sınırlı ve $\inf \lambda_k > 0$ olacak şekilde bir dizi ise, bu taktirde $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dir.

İspat. İlk önce $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

dir. $\lambda = \{\lambda_k\}$ sınırlı bir dizi olduğundan $a \leq \lambda_k \leq b$ alalım. Eğer $\rho_1 = \rho b$ alınırsa, bu taktirde her k için

$$\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho_1} = \frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho b} = \frac{\lambda_k}{b} \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \leq \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}$$

dir. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ elde edilir.

Şimdi $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

dir. Eğer $\rho_2 = \rho/a$ alınırsa, bu taktirde her k için

$$\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_2} = \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho/a} = a \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \leq \frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}$$

dir. M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_2} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ bulunur. Böylece $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olur.

Şimdi de $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

dir. Eğer $\rho_3 = \rho/a$ alınırsa M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho_3} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ elde edilir. Son olarak $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde herhangi bir $\rho > 0$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty$$

dir. Eğer $\rho_4 = \rho b$ alınırsa bu taktirde M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_4} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ bulunur. Böylece $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olur. O halde $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m) = \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dir.

Teorem 5.2.2. Eğer $\{\lambda_k\} \in \ell_\infty$, $a = \sup_{k \geq 1} \lambda_k$ ($a \geq 1$) olacak şekilde pozitif terimli bir dizi ve $\{\lambda_k^{-1}\}$ sınırsız ise, bu taktirde $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$, $\ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ nin öz alt uzayıdır ve $\|T\| \leq a^2$ yani $T : \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \rightarrow \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Herhangi bir $\rho > 0$ ve $\rho' = \rho a^2$ için M_k lar azalmayan olduğundan, $x = \{x_k\}$ dizisi için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho'} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ olur.

Şimdi $\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m) \subset \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterelim. $\{\lambda_k^{-1}\}$ dizisi sınırsız olduğundan $\lambda_{k_n}^{-1} \geq n$ olacak şekilde bir $\{k_n\} \in \mathbb{N}$ alt dizisini seçebiliriz. $\Delta^m x = \{\Delta^m x_k\}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1/n, & k = k_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olup $x \in \ell_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m)$ dir. Fakat $x \notin \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dir.

T dönüşümünün sürekli olduğunu ispatlamak için, ilk olarak $a = 1$ durumunu göz önüne alalım. $x \in \ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ için

$$A_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m x) = \left\{ \rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1 \right\}$$

ve

$$B_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m x) = \left\{ \rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

yazarız. M_k lar azalmayan ve $a = 1$ olduğundan $a = \sup_{k \geq 1} \lambda_k = 1$ ve bu nedenle $\forall k$ için $\lambda_k \leq 1$ olduğundan $1 \leq \frac{1}{\lambda_k}$ olur. Ayrıca $\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \leq \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \leq \frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho}$ olduğundan

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right)$$

elde ederiz ki $A_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m x) \subset B_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m x)$ bulunur. Böylece

$$\|x\|_{\mathcal{M}}^\lambda = \inf B_{\mathcal{M}}^\lambda(\Delta^m x) \leq \inf A_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m x) = \|x\|_{\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} \quad (5.3)$$

yani $\|T(x)\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \leq \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}$ olur. Buna göre

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda}}{\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}} \leq 1 \Rightarrow \|T\| \leq 1 \Rightarrow \|T\| \leq 1 = a^2$$

olduğundan T süreklidir.

Eğer $a \neq 1$ ise $k \in \mathbb{N}$ için $\beta_k = \frac{\lambda_k}{a}$ şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\beta_k \leq 1$ ve (5.3) den $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ için

$$\|x\|_{\mathcal{M}}^{\beta} \leq \|x\|_{\beta}^{\mathcal{M}} \quad (5.4)$$

dir. Burada $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m) = \ell_{\beta}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dir.

Böylece (5.4) den

$$\frac{1}{a} \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \leq a \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \text{ ise } \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \leq a^2 \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}$$

olur ki buradan

$$\|T(x)\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} = \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \leq a^2 \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \Rightarrow \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda}}{\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}} \leq a^2$$

elde edilir. Bu da T nin sürekliliğini verir.

Teorem 5.2.3. Eğer $\sup_{k \geq 1} \lambda_k^{-1} = d$ ($d \geq 1$) olacak şekilde ki $\{\lambda_k\}$ dizisi ($\lambda_k \geq 0$) sınırsız ise, bu taktirde $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$, $\ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ nin öz alt uzayıdır ve $\|U\| \leq d^2$ yani $U : \ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m) \rightarrow \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Herhangi bir $\rho > 0$ ve $\rho'' = \rho d^2$ için M_k lar azalmayan olduğundan, $x = \{x_k\}$ için

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho''} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olup, buradan $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ elde edilir.

Şimdi $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m) \subset \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterelim. $\{\lambda_k\}$ dizisi sınırsız olduğundan $\lambda_{k_n} \geq n$ olacak şekilde bir $\{k_n\} \in \mathbb{N}$ alt dizisini seçebiliriz. $\Delta^m x = \{\Delta^m x_k\}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1/n, & k = k_n, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olup, buradan $x \in \ell_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ olur. Fakat $x \notin \ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$ dir.

U dönüşümünün sürekli olduğunu ispatlamak için ilk olarak $d = 1$ durumunu göz önüne alalım. $x \in \ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$ için

$$A_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m x) = \left\{ \rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

ve

$$B_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m x) = \left\{ \rho > 0 : \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq 1 \right\}$$

yazarız. M_k lar azalmayan ve $d = 1$ olduğundan $\sup_{k \geq 1} \lambda_k^{-1} = d = 1$ ise $\lambda_k^{-1} \leq 1$ ve $1 \leq \lambda_k$ olur ki buradan

$$\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \leq \frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \leq \frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho}$$

ve son olarak

$$\sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\lambda_k \rho} \right) \leq \sum_{k \geq 1} M_k \left(\frac{\lambda_k |\Delta^m x_k|}{\rho} \right)$$

elde edilir. Bu da $A_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m x) \subset B_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m x)$ olması demektir. Böylece

$$\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} = \inf B_{\lambda}^{\mathcal{M}}(\Delta^m x) \leq \inf A_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m x) = \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \quad (5.5)$$

yani $\|U(x)\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda}$ olur. O halde U süreklidir.

Eğer $d \neq 1$ ise $k \in \mathbb{N}$ için $\gamma_k = \lambda_k d$ tanımlayalım. Bu taktirde $\gamma_k \leq 1$ olduğundan (5.5) den $x \in \ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m)$ için

$$\|x\|_{\gamma}^{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{M}}^{\gamma} \quad (5.6)$$

elde edilir. Burada $\ell_{\mathcal{M}}^{\lambda}(\Delta^m) = \ell_{\mathcal{M}}^{\gamma}(\Delta^m)$ dir.

Böylece (5.6) dan

$$\frac{1}{d} \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \leq d \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \Rightarrow \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \leq d^2 \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda}$$

elde edilir ki buradan

$$\|U(x)\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} = \|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}} \leq d^2 \|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda} \Rightarrow \|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_{\lambda}^{\mathcal{M}}}{\|x\|_{\mathcal{M}}^{\lambda}} \leq d^2$$

bulunur. Bu da U nun sürekliliğini verir.

6. DUAL UZAYLAR

Bu bölümün ilk kısmında $h(\mathcal{M})$ dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesaplayacağız. İkinci kısımda ise $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ ve $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dizi uzaylarının tanımını verip, bu dizi uzaylarının $\alpha-$ dualini hesaplayacağız.

6.1. $h(\mathcal{M})$ Dizi Uzayının Duali

Bu bölümde $h(\mathcal{M})$ dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesaplayacağız.

Teorem 6.1.1. Her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu taktirde

$$\ell(\mathcal{N}) = \{a = (a_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\frac{|a_k|}{\rho'} \right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ ve } \rho' = \frac{1}{\rho} \text{ için}\}$$

olmak üzere $[h(\mathcal{M})]^\beta = \ell(\mathcal{N})$ dir.

İspat. $\ell(\mathcal{N}) \subset [h(\mathcal{M})]^\beta$ olduğunu gösterelim. $a \in \ell(\mathcal{N})$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} N_k \left(\frac{|a_k|}{\rho'} \right) < \infty$ dur. Ayrıca herhangi bir $x \in h(\mathcal{M})$ için $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty$ yazabiliriz. Bu taktirde $\rho' = 1/\rho$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\rho} \frac{|a_k|}{1/\rho} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) + N_k \left(\frac{|a_k|}{\rho'} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\frac{|a_k|}{\rho'} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur. Demek ki herhangi bir $x \in h(\mathcal{M})$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ dur. Böylece $a \in [h(\mathcal{M})]^\beta$ elde edilir. O halde $\ell(\mathcal{N}) \subset [h(\mathcal{M})]^\beta$ bulunur.

Şimdi $[h(\mathcal{M})]^\beta \subset \ell(\mathcal{N})$ olduğunu gösterelim. $a \in [h(\mathcal{M})]^\beta$ olsun. Bu taktirde her $x \in h(\mathcal{M})$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ dir. $(x_k) \in h(\mathcal{M}) \subset \ell(\mathcal{M})$ olduğundan $(x_k) \in \ell(\mathcal{M})$

dir. (3.8) deki tanımını kullanırsak, $a \in \tilde{\ell}(\mathcal{N}) \subset \ell(\mathcal{N})$ yani $a \in \ell(\mathcal{N})$ elde ederiz. O halde $[h(\mathcal{M})]^\beta \subset \ell(\mathcal{N})$ dir.

Önerme 6.1.2. $\mathcal{M} = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu taktirde $h(\mathcal{M})$ dizi uzayı normaldir.

İspat. $x \in h(\mathcal{M})$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $|y_k| \leq |x_k|$ olsun. Bu taktirde M_k lar azalmayan olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|y_k|}{\rho} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty$$

olur. Böylece $y \in h(\mathcal{M})$ olur ki bu da $h(\mathcal{M})$ dizi uzayının normal olduğunu gösterir.

Teorem 6.1.3. Her bir k için M_k ve N_k birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olsun. Bu taktirde $\mathcal{M} = (M_k)$ ve $\mathcal{N} = (N_k)$ fonksiyon dizileri için

$$[h(\mathcal{M})]^\beta = [h(\mathcal{M})]^\alpha = [h(\mathcal{M})]^\gamma = \ell(\mathcal{N})$$

dir.

İspat. Önerme 6.1.2 den $h(\mathcal{M})$ normaldir ve Önerme 2.1.10 gereğince $[h(\mathcal{M})]^\alpha = [h(\mathcal{M})]^\gamma = \ell(\mathcal{N})$ elde edilir. Sonuç 2.1.11 den monoton olduğundan $[h(\mathcal{M})]^\alpha = [h(\mathcal{M})]^\beta = \ell(\mathcal{N})$ olur. O halde $[h(\mathcal{M})]^\beta = [h(\mathcal{M})]^\alpha = [h(\mathcal{M})]^\gamma = \ell(\mathcal{N})$ elde edilir.

6.2. $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ ve $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$ Dizi Uzayları ve Bu Dizi Uzaylarının α -Duali

$\ell_\lambda^{\mathcal{M}}(\Delta^m)$ ve $\ell_\lambda^{\mathcal{N}}(\Delta^m)$ dizi uzaylarının tanımında $m = 0$ alırsak aşağıdaki dizi uzaylarını elde ederiz:

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{M}, \lambda) &= \{x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}, \\ \ell(\mathcal{N}, \lambda) &= \{y = (y_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\frac{\lambda_k |y_k|}{\rho} \right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için}\}. \end{aligned}$$

Teorem 6.2.1. (i) Eğer (M_k) dizisi düzgün Δ_2 - şartını sağlıyorsa $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dir.

(ii) Eğer (N_k) dizisi düzgün Δ_2 - şartını sağlıyorsa $[\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ dir.

İspat. (i) $\ell(\mathcal{N}, \lambda) \subset [\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha$ olduğunu gösterelim. $a \in \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\frac{\lambda_k |a_k|}{\rho} \right) < \infty$ dir. Ayrıca $x \in \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ için

$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\lambda_k \rho} \right) < \infty$ yazabiliriz. Bu taktirde $\rho' = 1/\rho$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\lambda_k \rho} \frac{\lambda_k |a_k|}{1/\rho} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[M_k \left(\frac{|x_k|}{\lambda_k \rho} \right) + N_k \left(\frac{\lambda_k |a_k|}{\rho'} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} M_k \left(\frac{|x_k|}{\lambda_k \rho} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\frac{\lambda_k |a_k|}{\rho'} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece $a \in [\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha$ elde edilir. O halde $\ell(\mathcal{N}, \lambda) \subset [\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha$ olur.

Tersine $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha \subset \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ olduğunu gösterelim. $a \in [\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha$ olsun. Bu taktirde her $x \in \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ için $\left(\frac{x_k}{\lambda_k} \right) \in \ell(\mathcal{M})$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \quad (6.1)$$

elde edilir. (M_k) dizisi düzgün Δ_2 - şartını sağlıyorsa $\ell(\mathcal{M}) = h(\mathcal{M})$ dir ve böylece $(y_k) \in h(\mathcal{M})$ için (6.1) den $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k y_k a_k| < \infty$ olur. Böylece $(\lambda_k a_k) \in [h(\mathcal{M})]^\alpha = \ell(\mathcal{N})$ olur ve buradan da $(\lambda_k a_k) \in \ell(\mathcal{N})$ ise $(a_k) \in \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ elde edilir. O halde $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha \subset \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dır.

(ii) $[\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 6.2.2. Eğer (M_k) ve (N_k) dizileri düzgün Δ_2 - şartını sağlıyorsa $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ ve $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dizi uzayları perfektir.

İspat. (M_k) ve (N_k) Orlicz dizileri düzgün Δ_2 - şartını sağladığından Teorem 6.2.1 den $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ ve $[\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^{\alpha\alpha} = [\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ olup, $[\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^{\alpha\alpha} = \ell(\mathcal{M}, \lambda)$ dir, yani $\ell(\mathcal{M}, \lambda)$ dizi uzayı perfektir. Benzer şekilde $[\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^{\alpha\alpha} = [\ell(\mathcal{M}, \lambda)]^\alpha = \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ olup $[\ell(\mathcal{N}, \lambda)]^{\alpha\alpha} = \ell(\mathcal{N}, \lambda)$ yani $\ell(\mathcal{N}, \lambda)$ dizi uzayının perfekt olduğu gösterilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Alsaedi, R. S. and Bataineh, A. H. A.**, 2007. On a generalized difference sequence spaces defined by a sequence of Orlicz functions, *International Mathematical Forum*, **2**, 167-177.
- [2] **Bektaş, Ç. A.**, 2004. On some difference sequence spaces defined by Orlicz functions, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **28**, 195-202.
- [3] **Bektaş, Ç. A, Et, M. and Çolak, R.**, 2004. Generalized difference sequence spaces and their dual spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **292**, 423-432.
- [4] **Bektaş, Ç. A.**, 2004. Absolute and Ordinary Köthe-Toeplitz duals of some generalized sets of difference sequences. *Hokkaido Math. J.*, **33**, 207-214.
- [5] **Çolak, R.**, 1989. On Some Generalized Sequence Spaces, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara. Series A*, **38**, 35-46.
- [6] **Et, M.**, 2000. On Some Topological Properties of Generalized Difference Sequence Spaces, *Internat. J. Math.& Math. Sci.*, **24**, 785-791.
- [7] **Et, M. and Bektaş, Ç. A.**, 2004. Generalized Strongly - Summable Sequence Defined By Orlicz Functions, *Math. Slovaca*, **54**, 411-422.
- [8] **Et, M. and Çolak, R.**, 1995. On generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.
- [9] **Et, M. and Esi, A.**, 2000. On Köthe-Toeplitz duals of generalized difference sequence spaces, *Bull. Malaysian Math. Sc. Soc.*, **23**, 25-32.
- [10] **Et, M. and Nuray, F.**, 2001. Δ^m - Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**, 961-969.
- [11] **Et, M., Yee L. P. and Tripathy, B. C.**, 2006. Strongly almost $(V, \lambda)(\Delta^r)$ -summable sequences defined by Orlicz functions, *Hokkaido Math. J.*, **35**, 197-213.
- [12] **Et, M.**, 2001. On some new Orlicz sequence spaces, *J. Anal.*, **9**, 21-28.
- [13] **Gribanov, Y.**, 1957. On the theory of ℓ_M -spaces(Russian), *Uc. Zap. Kazansk un-ta*, **117**, 62-65.
- [14] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, *Math. Zeift.*, **118**, 93-102.
- [15] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, **118**, 93-102.

- [16] **Gupta, M. and Pradhan, S.**, 2008. On Certain Type of Modular Sequence Spaces, Turk J Math., **32**, 293 – 303.
- [17] **Jain, P. K., Ahuja, O. P. and Ahmad, K.**, 1995. Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [18] **Kamthan, P. K. and Gupta, M.**, 1981. Sequence Spaces and Series, Marcel Dekkar.
- [19] **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., **24**, 169-176.
- [20] **Krasnoselskii, M. A. and Rutitsky, Y. B.**, 1961. Convex functions and Orlicz spaces, Groningen, Netherlands.
- [21] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [22] **Leindler L.**, 1965. Über die de la Vallée-Pousinsche summierbarkeit allgemeiner orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **16**, 375-387.
- [23] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.**, 1965. On Orlicz sequence spaces, Israel J. Math., **10**, 379-390.
- [24] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, London and New York.
- [25] **Maddox, I. J.**, 1989. Elements of Functional Analysis, Universal Book Stall.
- [26] **Malkowsky, E. and Parasar, S. D.**, 1997. Matrix transformation in spaces of bounded and convergent difference sequences of order m, Analysis, **17**, 87-97.
- [27] **Mursaleen M.**, 1996. Generalized spaces of difference sequences, J. Math. Anal. Appl, **203**, 738–745.
- [28] **Nakano, H.**, 1955. Modulared Sequence Spaces, Proc. Jap. Acad. 27 reprinted in semi ordered Linear Spaces, Tokyo.
- [29] **Özdemir, M. K.**, Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bazı yeni dizi uzayları, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, 2003.
- [30] **Parashar, S. D. and Choudhary, B.**, 1994. Sequence Spaces defined by Orlicz functions, Indian J. Appl. Math., **25**, 419-428.
- [31] **Rao, M. M. and Ren, Z. D.**, 1991. Theory on Orlicz spaces, Marcel Dekker, New York.
- [32] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The integrability of certain functions and related

summability methods, Amer. Math. Monthly, **66**, 361-375.

[33] **Tripathy, B. C.**, 2004. Generalized difference paranormed statistically convergent sequences defined by Orlicz function in a locally convex space, Indian, **30**, 431-446.

[34] **Tripathy, B. C., Altin, Y. and Et, M.**, 2003. Generalized difference sequence spaces on seminormed spaces, J. Analysis Appl., **1**, 175-192.

[35] **Tripathy, B. C., Et, M. and Altin, Y.**, 2003. Generalized difference sequence spaces defined by Orlicz function in a locally convex space, J. Analysis Appl., **1**, 175-192.

[36] **Wilansky, A.**, 1984. Summability through Functional Analysis, Nort-Holland Mathematics studies, **85**, North-Holland.

[37] **Wilansky, A.**, 1964. Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York.

[38] **Woo, J. Y. T.**, 1973. On Modular Sequence spaces, Studia Math., **48**, 271–289.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılı Elazığ doğumluyum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümününü kazandım. 2005 yılında mezun olup aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek lisans öğrenimime başladım. 2008 yılında tezli yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. 20.02.2008 tarihinde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimime başladım. 2010 yılında Muş Alparslan Üniversitesinde Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladım. Halen görevime devam etmekteyim.

Gülcan ATICI