

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ADOMİAN AYRIŞIM
METODU VE HOMOTOPİ PERTÜRBASYON
METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN HAZIRLAYAN
Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ADOMİAN
AYRIŞIM METODU VE HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU
İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

07221103

Ana Bilim Dalı: Matematik Ana bilim

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Haziran 2010

TEMMUZ-2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ADOMİAN
AYRIŞIM METODU VE HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU
İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hacı Mehmet BAŞKONUŞ
07221103

Ana Bilim Dalı: Matematik Ana bilim

Programı: Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Temmuz 2010

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Yrd.Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenilmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocama teşekkür ederim.

Hacı Mehmet BAŞKONUŞ
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanımlar.....	3
2. MATERYAL ve METOT	7
2.1 Adomian Ayrışım Metodu (ADM).....	7
2.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	9
3. UYGULAMALAR.....	13
3.1 Lineer Olmayan KdV Denkleminde HPM ve ADM'unun uygulanması	13
3.1.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	13
3.1.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	15
3.2. Helmholtz Denkleminde HPM ve ADM'unun uygulanması	19
3.2.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	19
3.2.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	21
3.3 Dispersive Denkleminde HPM ve ADM'unun uygulanması	25
3.3.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	25
3.3.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	27
3.4. Klein-Gordon Denkleminde HPM ve ADM'unun uygulanması	30
3.4.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	30
3.4.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	32
3.5 Lineer Olmayan K(2,2) Denkleminde HPM ve ADM'unun uygulanması	36
3.5.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	36
3.5.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	38
4. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	43
5. ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	48

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, bazı temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde, Adomian Ayrışım Metodunun ve Homotopi Pertürbasyon Metodunun temel yapısı verildi. Ayrıca Adomian Ayrışım Metodu uygulanırken ortaya çıkan Adomian polinomlarının hesaplanması verildi.

Üçüncü Bölümde, Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu: başlangıç koşulları ile verilen lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlerden KdV, Helmholtz, Dispersive, Klein-Gordon ve Lineer olmayan K(2,2) denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için uygulandı. Her bir denklem için elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik çözümlerin sayısal veri tabloları, iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri çizilerek grafiklerin irdelenmesi yapıldı.

Dördüncü bölümde, elde edilen verilerin bir tartışması yapıldı.

Beşinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlara bağlı olarak Homotopi Pertürbasyon Metodu ve Adomian Ayrışım Metodunun bazı lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere uygulanabilmesi önerilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Dispersive Denklemi, Helmholtz Denklemi, Klein-Gordon Denklemi, KdV Denklemi ve Lineer olmayan K(2,2) Denklemi,

SUMMARY

Numerical Solution of Some Nonlinear Diferantial Equations Solutions by Using Homotopy Perturbation Method And Adomian Decomposition Method

This study is constructed five chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, the primary structures of Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method are given. And also the calculation Adomian polinoms which arise applying Adomian Decomposition Method are given.

In chapter three, Homotopy Perturbation Method and Adomian Decomposition Method is applied to find approximate solutions of linear or nonlinear differential equations which have initial conditions such as KdV, Helmholtz, Dispersive, Klein-Gordon and nonlinear K(2,2) equations. We drawn graphics (2D and 3D) and constructed tables of approximate solutions and exact solution which are obtained for every equations.

In chapter four, it is made a conversation of obtained datebases.

In chapter five, it is suggested to apply Adomian Decomposition Method and Homotopy Perturbation Method to some linear or nonlinear differential equations by depending on obtained solutions

Key words: Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method, KdV Equation, Helmholtz Equation, Dispersive Equation, Klein-Gordon Equation, Nonlinear K(2,2) Equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Lineer olmayan KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü.....	17
Şekil 1.2. Lineer olmayan KdV Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	17
Şekil 1.3. Lineer olmayan KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	18
Şekil 1.4. Lineer olmayan KdV Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	18
Şekil 2.1. Helmholtz denkleminin, $u(x,y)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü	23
Şekil 2.2. Helmholtz denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	23
Şekil 2.3. Helmholtz denkleminin, $u(x,y)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	24
Şekil 2.4. Helmholtz denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	24
Şekil 3.1. Dispersive denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü.....	28
Şekil 3.2. Dispersive denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	29
Şekil 3.3. Dispersive denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	29
Şekil 3.4. Dispersive denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	30
Şekil 4.1. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü	34
Şekil 4.2. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	34

Şekil 4.3. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	35
Şekil 4.4. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	35
Şekil 5.1. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	40
Şekil 5.2. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	40
Şekil 5.3. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık Çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü.....	41
Şekil 5.4. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	41

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1. $n = 4$ durumunda, (HPM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	17
Tablo 1.2. $n = 4$ durumunda, (ADM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	18
Tablo 2.1. $n = 4$ durumunda, (HPM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	23
Tablo 2.2. $n = 4$ durumunda, (ADM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	24
Tablo 3.1. $n = 4$ durumunda, (HPM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	29
Tablo 3.2. $n = 4$ durumunda iterasyon formülü ile (ADM) hesaplanan 4 teriminin ve analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	30
Tablo 4.1. $n = 4$ durumunda, (HPM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	34
Tablo 4.2. $n = 4$ durumunda, (ADM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	35
Tablo 5.1. $n = 4$ durumunda, (HPM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	40
Tablo 5.2. $n = 4$ durumunda, (ADM) iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terim ile analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu.....	42

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Diferensiyel operatörü
L^{-1}	: İntegral operatörü
Nu	: Lineer olmayan terim
A_n	: Adomian polinomu
ϕ_n	: n-terim yaklaşımı
$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu
p	: Küçük bir parametre
R	: Reel sayı sistemi
λ	: Lamda
ε	: Ebsilon
Ω	: Omega
Γ	: Gama
ξ	: Xi
ϕ	: Phi
$\sqcup$	:Tilda

KISALTMALAR

ADM	: Adomian Ayrışım Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi

1. GİRİŞ

Bilgisayar yüzyılında yaşıyor olmamızın da bir doğal sonucu olarak günlük yaşantımızda yapmamız gerekenleri zamanında, doğru, hızlı ve güvenilir bir şekilde elde etmek için bilgisayarlardan oldukça fazla yararlanıyoruz. Bu işlemlerimizin tamamı sayısal veriler ve hesaplamalarla yapılmakta olup bizim için son derece öneme sahiptir. İşte bu önemden yola çıkan ve kendi ihtiyaçlarını da göz önünde bulundurarak çalışmaya devam eden bilim dünyası, birçok soruya cevap aramaya çalışmaktadır. Bu arayış esnasında ortaya çıkan problemlerin çözümü için tarih boyunca pek çok metot ve yöntemler geliştirilmiştir.

Çalışmamızda, işte bu şekilde geliştirilen metotlardan Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodunun ayrıntılı irdelenmesi, lineer veya lineer olmayan gibi çeşitli diferensiyel denklemlere uygulanması, elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırılması, metotların birbirleri ile karşılaştırılmasında hangisinin gerçek çözüme daha yakın değerler verdiğinin saptanması gibi sorulara cevap aranıldı.

Homotopi pertürbasyon metodu, 1998 yılında Ji-Huan He [16,17,18,20,21,22,23,24] tarafından verilmiştir. He, metodu oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramını birleştirmiş, lineer veya lineer olmayan problemleri, çözümü kolay olan problemlere dönüştürmüştür.

Bu çalışmada ele alınan bir diğer metot ise ayrışım metodu [10] olup bu metot, George Adomian (March 21, 1922–1996) tarafından 1980’li yıllarda literatüre kazandırılmıştır. Lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan ayrışım yöntemi, uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir boyutlu veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmada kullanılmaktadır. Ayrışım yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere [28,29] göre daha basit olup karmaşık denklemlere uygulanabilen bir yöntemdir. Adomian ayrışım metodu (Adomian G,1976; Adomian G,1984; Adomian G,1994) lineer olmayan problemler için etkili yarı bir analitik tekniktir. Küçük ya da büyük parametreler içerseler de içermeseler de adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulanılabilirler. Yani oldukça geneldir. Daha fazlası, Adomian yaklaşım serileri hızlı yakınsamaktadır [2]. 1980’lerden bu yana Adomian ayrışım metodu [13,14,31,34,35] fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanmıştır [4,9,11,12] (Adomian G,1994; Adomian G,1985).

Adomian ayrışım metodu ile elde edilen çözümler, seri formunda olup sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçları veren yaklaşık çözümlerdir. Bu tekniği kullanarak bir diferensiyel denklemin sayısal çözümünü indislemeğe gerek duymadan sembolik programlama dilleri ile kodlama yaparak, hesaplamada kısmen bir kolaylık sağlanabilir.

Bilindiği gibi bu yöntemler 90'lı yıllarda ortaya çıkan yöntemler olup temelde seri çözümlerine dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda[6,7] çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. Söz konusu bu analitik metotlar aynı zamanda, çeşitli lineer veya lineer olmayan denklemlerin tam çözümünü elde etmek için basit homojen denklemler için de kullanılabilir.

Günümüzde, yüksek performanslı bilgisayarlara, Mathematica, Maple, Matlab vs. gibi bazı güvenilir hesaplama yazılımlarına sahip olmamıza rağmen, verilen lineer olmayan problemin analitik yaklaşımını elde etmek, sayısal yaklaşımını elde etmekten oldukça zordur. Genel metotların çoğunda, problem lineer tek boyutlu yardımcı problem olarak tanıtılır ve daha sonra problem çözülür. Böyle metotları kullanırken esas zorluk, elde edilen integral denkleminin her zaman basit analitik fonksiyonların terimleri olarak çözülememesidir.

Bu metotlarla çözülen problemlerin bir kısmının literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün değildir. Burada kullanılan yaklaşımlarla, literatürde mevcut olan ve yeni çözümlerin analizinin yapılması sağlanmıştır. Birçok araştırmacı homotopi pertürbasyon metodunu çeşitli denklemlere uygulamıştır [30,32,33].

Bu çalışmada, çeşitli lineer veya lineer olmayan denklemlere uygulanmak üzere Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodunun [3] genel yapısı sunuldu. Öncelikle Dispersive denklemi [19], Helmholtz denklemi [8] , Klein-Gordon denklemi [15,26], KdV denklemi [1,24] ve lineer olmayan K(2,2) [1] denklemlerinin yaklaşık çözümleri Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu kullanılarak bulundu. Daha sonra analitik çözümle yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması yapıldı. Buna ilaveten karşılaştırma iki ve üç boyutlu grafikleri çizilip, sayısal veri tabloları hazırlanarak sonuçları irdelendi.

1.1 Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. Homotopi kavramı, 1895 yılında Jules Henri Poincaré [36] tarafından tanıtılmıştır.

f ve g bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına sürekli dönüşümler olsun. $I = [0,1]$ $\mathbb{R}$ 'nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere; $\forall x \in X$ için

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlayan sürekli bir $H : X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa f , g 'ye homotopiktir denir. H dönüşümüne f ve g arasında bir *homotopi* denir ve H , f ve g arasında bir homotopi olduğunda, $H : f \cong g$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. X ve Y iki uzay ve $I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $\phi : X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x,0) = f(x)$ ve $\phi(x,1) = g(x)$ oluyor ise $f, g : X \rightarrow Y$ dönüşümlerine homotopiktirler denir ve $f \sim g$ ile gösterilir. $\phi : f \sim g$ ise ϕ , f 'den g 'ye bir homotopi kurar şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.3. Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebenden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel *denkleme kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0$$

olarak yazılır.

Tanım 1.1.4. Bir diferensiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferensiyel denkleme *lineer diferensiyel denklem* denir. Eğer bir diferensiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferensiyel denklemlere *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1.1.5. Bir değişkenin skaler bir fonksiyonu için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. f fonksiyonunu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i \right)$$

formülü ile tanımlanır [5].

Tanım 1.1.6. A, B, C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin olan türden çeşitli fonksiyonel ilişkilere deterministik ilişki denir. Örneğin;

$$y = Ax + B \text{ (Doğrusal ilişki)}$$

$$\log y = \log(Ax + B) \text{ (Tam logaritmik ilişki)}$$

ifadeleri birer deterministik ilişkilerdir. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Örneğin; bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişkiler birer deterministik ilişkilerdir. [25]

Tanım 1.1.7. E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x ' de, değer kümesi E_y ' de bulunan $y = Ax$ şeklinde tanımlanan A operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A operatörüne *lineerdir* denir [27].

$$L1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$L2) A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Tanım 1.1.8. Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Eğer problem, bir “küçük”

terim eklenerek tam olarak çözülebilen probleme formüle ediliyorsa bu probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen probleminden sapmayı ölçen bir “küçük” parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulmayı amaçlar. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlarlar. A çözümüne yaklaşım için aşağıdaki küçük parametreye göre açılan (burada parametre ε ’dir) seri verilsin:

$$A = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$$

Bu örnekte A_0 tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin bilinen çözümünü ve $A_1, A_2, \dots$ bir sistematik yöntemle iteratif olarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri gösterir. ε ’nin çok küçük olması durumunda, yukarıdaki serinin yakınsak olması küçük ε değeri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir.

Pertürbasyon tekniği kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümü, seriyi bir yerden sonra kesip, genelde sadece ilk iki terimi, başlangıç çözümü ve “birinci derece” pertürbasyon düzeltmesini, bırakarak elde edilir. ε ’un çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir. Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar. Fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinden oldukça farklı olabilirler. Örneğin ;

$$u' + u - \varepsilon = 0, \quad u(0) = 1$$

ve

$$u' - u - \varepsilon = 0, \quad u(0) = 1$$

denklemleri göz önüne alınsın. Birinci denklemin çözümü $u(t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t}$ iken pertürbe edilmemiş denklemin çözümü $u_0(t) = e^{-t}$ ’dir. $\varepsilon \ll 1$ olduğunda $|u(t) - u_0(t)| \leq \varepsilon$ için pertürbasyon çözümünün doğruluğu yüksektir. İkinci denklem için ise pertürbe edilmemiş problemin çözümü $u_0(t) = e^t$ ’dir ve $|u(t) - u_0(t)| = \varepsilon |1 - e^t|$ elde edilir. Burada $t > 1$ olduğunda u_0 denklemin yaklaşık çözümü olarak düşünülemez.

Pertürbasyon metotları, orijinal problemin, tam olarak çözmeye yetecek kadar basitleştirilmiş formuyla başlar. Genel yöntem, fen ve mühendislikte çok kullanılan matematiksel bir araçtır. Basitleştirilmiş bir problemle başlamak ve aşamalı olarak düzeltmeler eklerken düzelmiş problemin giderek gerçeği temsil eden formüle yaklaşmasını sağlamak.

Hemen hemen bütün pertürbasyon metotları, bir denklemde küçük bir parametrenin olması gerektiği varsayımına dayanır. Bu küçük parametre varsayımı, pertürbasyon tekniklerinin uygulamalarını önemli ölçüde kısıtlar. Lineer olmayan problemlerin özellikle kuvvetli nonlinearliğe sahip olanların hepsinde küçük parametreler yoktur. Bir küçük parametrenin belirlenmesi zor ve özel teknikler gerektirir. Küçük parametrenin uygun seçimi ideal sonuçlar vermesine rağmen, uygunsuz seçimi de ciddi anlamda kötü sonuçlara yol açabilir. Uygun bir küçük parametre bulunsa bile, çoğu durumda, pertürbasyon metotları ile bulunan yaklaşık çözümler, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerlidir. Örneğin, çoklu ölçek methoduyla çözülen yaklaşımlar, sistem parametresi küçük olduğu sürece geçerlidir. Fakat yaklaşımlara da tamamen güvenilmez, çünkü parametrenin ne kadar küçük olması gerektiğine dair bir kriter yoktur. Buna rağmen pertürbasyon teorisi, birçok dönemde, birçok farklı alanda kullanılmıştır. 20. yüzyılın sonunda, kuantum fiziğinde pertürbasyon teorisi ile ilgili göze çarpan memnuniyetsizlik, sadece açılımda ikinci dereceden öteye gitmedeki zorlukları içermesi değil aynı zamanda pertürbatif açılımın yakınsak olup olmadığı hakkındaki sorularla da karşı karşıya kalınmasıdır. Bu da pertürbasyon metotlarının sınırlamaları olduğunu gösterir.

2. MATERYAL VE METOD

2.1. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Ayrışım yönteminin, bir seri metodu olduğu, birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metottan bahsedecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferensiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \quad (2.1.1)$$

olsun. Böylece L - verilen diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörünü, R - lineer operatörün kalan kısmını ve N - ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (2.1.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.1.2)$$

şeklinde yazalım. L bir lineer operatör ve L^{-1} tersi de mevcut olsun. (2.1.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.1.3) eşitliğinin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.1.4)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.1.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.1.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.1.5) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terim

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n Adomian polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.1.5) eşitliğindeki u ; ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.1.6)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (2.1.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.1.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.1.7) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 \\ u_2 &= -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (2.1.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.1.9) genel formülünün kullanılması, (2.1.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \quad n \geq 0 \quad (2.1.10)$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \quad (2.1.11)$$

ifadesi (2.1.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.1.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir

2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu bölümde, topolojideki homotopi ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran ve sadece zayıf lineer olmayan denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli nonlinearliğe sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır.

Bu metodun temel fikrini açıklamak için aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklemi göz önüne alalım

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) denklemi için sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2.2)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferensiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ ise Ω ya bağımlı bir sınırdır.

Genel olarak A diferensiyel operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan operatördür. (2.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.2.3)$$

buna göre homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulur.

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

olmak üzere,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.2.4)$$

dir. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (2.2.1) denkleminin bir başlangıç koşuludur.

O halde

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)] = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) - A(v) + f(r)] = 0$$

olup (2.2.1) den $A(u) - f(r) = 0$ dır. Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0 \quad (2.2.5)$$

elde ederiz ve buradan (2.2.3) eşitliğini kullanarak

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r) \quad (2.2.6)$$

denklemi bulunur. Bulunan (2.2.6) denklemi (2.2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0$$

olur. Böylece (2.2.4) denklemi

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.2.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$, başlangıç koşulu u_0 ve

$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ dir. (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.8)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.2.9)$$

dir. Burada $p = 0$ olduğunda (2.2.4) denklemi lineer bir denklem haline gelir; $p = 1$

olduğunda lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim

işlemi, $L(v) - L(u_0) = 0$ denklemini $A(v) - f(r)$ denklemine dönüştürür.

$L(v) - L(u_0) = 0$ aşıkâr problemi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli

olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme oluyorsa bu topolojide *deforme* olarak

adlandırılır. $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r)$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir.

Homotopi Pertürbasyon Metodu gereğince, ilk olarak yerleştirilen parametre p 'yi küçük

parametre olarak kabul ederek (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \quad (2.2.10)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$p^1 : f'(v_0)v_1 + f(x_0) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$p^2 : f'(v_0)v_2 + \frac{1}{2!}f''(v_0)v_1^2 = 0, \quad (2.2.13)$$

$$p^3 : f'(v_0)v_3 + \frac{1}{2!}f''(v_0)2v_1v_2 + \frac{1}{3!}f'''(v_0)v_1^3 = 0, \quad (2.2.14)$$

yazılır. (2.2.11)-(2.2.14) denklemlerinin v_1 , v_2 ve v_3 için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}, \quad (2.2.15)$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0)v_1^2}{2!f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2!f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2, \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0)v_1^3}{3!f'(v_0)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 + \frac{f'''(v_0)}{6f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

(2.2.10) serisinin v_1 , v_2 ve v_3 bileşenleri elde edilir. Elde edilen (2.2.15)-(2.2.17) denklemleri, (2.2.10) denkleminde $p=1$ alınarak yeniden yazılırsa (2.2.1) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

şeklinde elde edilir. Homotopi pertürbasyon metodu [17,19,21,22,24,25] geleneksel pertürbasyon metodunun tüm özelliklerine sahiptir. (2.2.10) serisi lineer olmayan $A(v)$

operatörüne bağılı olduğı oranda yakınsamaktadır. (Aşağıdaki görüş; He [22] tarafından önerilmektedir)

(1) V ile ilgili olarak $N(V)$ nin ikinci türevi, göreceli olarak olabildiğince küçük değerlere sahip olmalıdır. $p \rightarrow 1$ gibi.

(2) $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu ise serilere yaklaşsın diye çok küçük olmalıdır.

3. UYGULAMALAR

3.1. Lineer Olmayan KdV Denkleminin HPM ve ADM' unun Uygulanması

3.1.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.1.1.1)$$

$$u(x, 0) = 6x \quad (3.1.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan lineer olmayan KdV denklemini [1] göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$(1-p) \left[\dot{Y} - \dot{u}_0 \right] + p \left[\dot{Y} - 3(Y^2)_x + Y''' \right] = 0 \quad (3.1.1.3)$$

Burada $Y''' = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$, $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$ ve $p \in [0, 1]$ dir. (3.1.1.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\dot{Y} - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 - 3p(Y^2)_x + pY''' = 0 \quad (3.1.1.4)$$

denklemi elde edilir. (3.1.1.1) denkleminin çözümü (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi;

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, t) \quad (3.1.1.5)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + \dots \quad (3.1.1.6)$$

$$Y''' = Y_0''' + pY_1''' + p^2Y_2''' + p^3Y_3''' + p^4Y_4''' + \dots \quad (3.1.1.7)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.1.1.5)-(3.1.1.7) denklemlerinin (3.1.1.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \dot{Y} - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 - 3p(Y^2)_x + pY''' = 0, \\ & \left(\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 - 3p \left[(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4)^2 \right]_x \\ & + p(Y_0''' + pY_1''' + p^2Y_2''' + p^3Y_3''' + p^4Y_4''') = 0, \\ & \left(\dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + \left[-3pY_0^2 - 6p^2Y_0Y_1 - 3p^3Y_1^2 - 6p^3Y_0Y_2 \right]_x \\ & + \left[-6p^4Y_1Y_2 - 6p^4Y_0Y_3 \right]_x + p(Y_0''' + pY_1''' + p^2Y_2''' + p^3Y_3''' + p^4Y_4''') = 0, \\ & \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + \left[-(3pY_0^2)_x - (6p^2Y_0Y_1)_x - (3p^3Y_1^2)_x - (6p^3Y_0Y_2)_x \right] \\ & - (6p^4Y_1Y_2)_x - (6p^4Y_0Y_3)_x + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' = 0, \\ & \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 - (3pY_0^2)_x - (6p^2Y_0Y_1)_x - (3p^3Y_1^2)_x - (6p^3Y_0Y_2)_x \\ & - (6p^4Y_1Y_2)_x - (6p^4Y_0Y_3)_x + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \quad (3.1.1.8)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - (3Y_0^2)_x + Y_0''' = 0, \quad (3.1.1.9)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 - (6Y_0Y_1)_x + Y_1''' = 0, \quad (3.1.1.10)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 - (3Y_1^2)_x - (6Y_0Y_2)_x + Y_2''' = 0, \quad (3.1.1.11)$$

$$p^4 : \dot{Y}_4 - (6Y_1Y_2)_x - (6Y_0Y_3)_x + Y_3''' = 0, \quad (3.1.1.12)$$

$\vdots$

bulunur. (3.1.1.8)-(3.1.1.12) denklemlerinin çözümü ile

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 \Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{u}_0 \Rightarrow Y_0 = u_0 \Rightarrow Y_0 = 6x, \quad (3.1.1.13)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - (3Y_0^2)_x + Y_0''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 + (3Y_0^2)_x - Y_0''' \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-\dot{u}_0 + (3Y_0^2)_x - Y_0''' \right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[(3Y_0^2)_x - Y_0''' \right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = 216tx, \end{aligned} \quad (3.1.1.14)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \dot{Y}_2 - (6Y_0Y_1)_x + Y_1''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_2 = (6Y_0Y_1)_x - Y_1''' \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t \left[(6Y_0Y_1)_x - Y_1''' \right] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = 7776t^2x, \end{aligned} \quad (3.1.1.15)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \dot{Y}_3 - (3Y_1^2)_x - (6Y_0Y_2)_x + Y_2''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = (3Y_1^2)_x + (6Y_0Y_2)_x - Y_2''' \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \left[(3Y_1^2)_x + (6Y_0Y_2)_x - Y_2''' \right] dt \\ &\Rightarrow Y_3 = 279936t^3x, \end{aligned} \quad (3.1.1.16)$$

$$\begin{aligned} p^4 : \dot{Y}_4 - (6Y_1Y_2)_x - (6Y_0Y_3)_x + Y_3''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_4 = (6Y_1Y_2)_x + (6Y_0Y_3)_x - Y_3''' \\ &\Rightarrow Y_4 = \int_0^t \left[(6Y_1Y_2)_x + (6Y_0Y_3)_x - Y_3''' \right] dt \\ &\Rightarrow Y_4 = 10077696t^4x, \end{aligned} \quad (3.1.1.17)$$

$\vdots$

şeklinde (2.2.10) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.1.1.13)-(3.1.1.17) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.1.1.5) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.1.1) lineer olmayan KdV denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\ &= 6x + 216xt + 7776t^2x + 279936t^3x + 10077696t^4x + \dots \\ &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + \dots) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen denklemin analitik çözümü olan

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1$$

fonksiyonuna karşılık gelen bir seri açılımı olduğunu elde etmiş oluruz.

3.1.2. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.1.1.1) ve (3.1.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan KdV denklemini [1] göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t u = -L_{xxx} u + N(u) \quad (3.1.2.1)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ ve lineer olmayan terim ise

$$N(u) = 3(u^2)_x \text{ olarak ifade edilmektedir. Burada } L_t^{-1} \text{ integral operatörü olup } L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$$

şeklinde gösterilir. (3.1.2.1) denkleminin her iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t u] = L_t^{-1} [-L_{xxx} u + N(u)] \quad (3.1.2.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} [-L_{xxx} u] + L_t^{-1} [N(u)] \quad (3.1.2.3)$$

olur. Böylece $N(u) = 3(u^2)_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomunun

ilk üç terimi (2.1.9) ifadesinde de belirtildiği gibi

$$\begin{aligned}
A_0 &= 3(u_0^2)_x, \\
A_1 &= 3(2u_0u_1)_x, \\
A_2 &= 3(2u_2u_0 + u_1^2)_x, \\
A_3 &= 3(2u_1u_2 + 2u_0u_3)_x, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.2.4}$$

olarak alınabilir. (3.1.2.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u(x, 0) = 6x \\ u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1}[-L_{xxx}u_k] + L_t^{-1}[A_k], \quad k \geq 0, \end{cases} \tag{3.1.2.5}$$

elde edilen (3.1.2.5) rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned}
u_0 &= 6x \\
u_1 &= \int_0^t [-L_{xxx}(u_0) + A_0] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_0) + 3(u_0^2)_x] dt = 216xt \\
u_2 &= \int_0^t [-L_{xxx}(u_1) + A_1] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_1) + 3(2u_0u_1)_x] dt = 7776xt^2 \\
u_3 &= \int_0^t [-L_{xxx}(u_2) + A_2] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_2) + 3(2u_2u_0 + u_1^2)_x] dt = 279936xt^3 \\
u_4 &= \int_0^t [-L_{xxx}(u_3) + A_3] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_3) + 3(2u_1u_2 + 2u_0u_3)_x] dt = 10077696xt^4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.1.6)

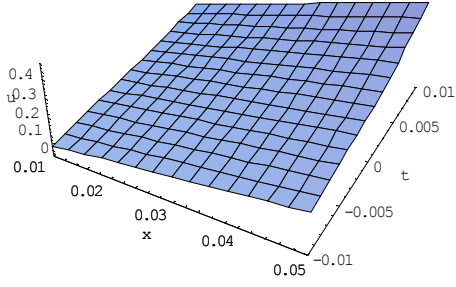
eşitliğinde yazılarak (3.1.1.1) lineer olmayan KdV denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\
&= 6x + 216tx + 7776t^2x + 279936t^3x + 10077696xt^4 + \dots \\
&= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616xt^4 + \dots)
\end{aligned}$$

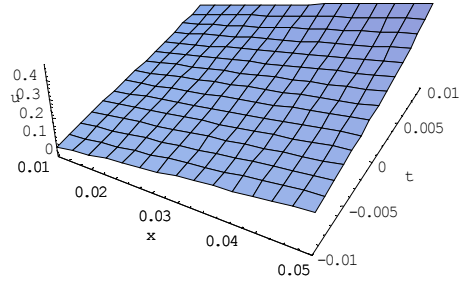
olarak elde edilebilir. Böylece (3.1.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

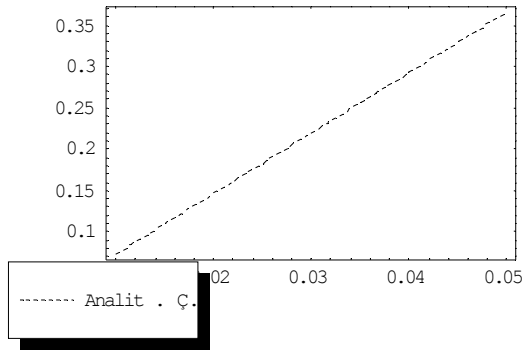


(a) Analitik çözüm

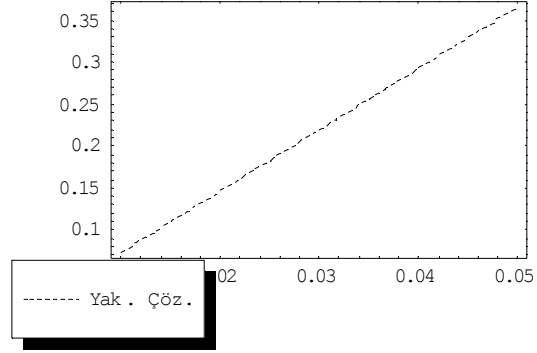


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.1. Lineer olmayan KdV Denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

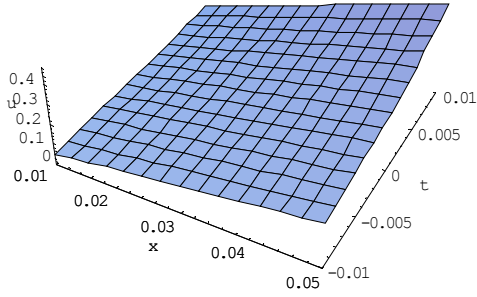


(b) Yaklaşık çözüm

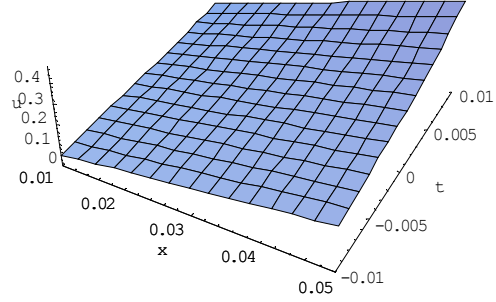
Şekil 1. 2. Lineer olmayan KdV Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 1.1 $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.005	1.38261E-5	2.76522E-5	4.14783E-5	5.53044E-5	6.91305E-5
0.010	5.66870E-4	1.13374E-3	1.70061E-3	2.26748E-3	2.83435E-3
0.015	5.98911E-3	1.19782E-2	1.79673E-2	2.39564E-2	2.99455E-2
0.020	4.14625E-2	8.2925E-2	1.24388E-1	1.6585E-1	2.07313E-1
0.025	3.54294E-1	2.20399E-0	1.06288E-0	1.41718E-0	5.50998E-0

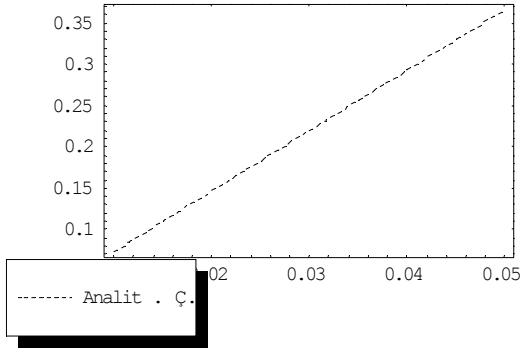


(a) Analitik çözüm

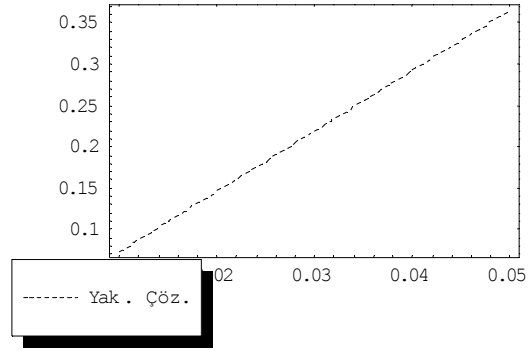


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.3. Lineer olmayan KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.4. Lineer olmayan KdV Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 1.2. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (ADM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.005	1.38261E-5	2.76522E-5	4.14783E-5	5.53044E-5	6.91305E-5
0.010	5.66870E-4	1.13374E-3	1.70061E-3	2.26748E-3	2.83435E-3
0.015	5.98911E-3	1.19782E-2	1.79673E-2	2.39564E-2	2.99455E-2
0.020	4.14625E-2	8.2925E-2	1.24388E-1	1.6585E-1	2.07313E-1
0.025	3.54294E-1	2.20399E-0	1.06288E-0	1.41718E-0	5.50998E-0

3.2. Helmholtz Denkleminin HPM ve ADM' unun Uygulanması

3.2.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - u(x, y) = 0 \quad (3.2.1.1)$$

$$u_0(x, y) = (1+x)y + x \cosh(y) \quad (3.2.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan Helmholtz denklemini [8] göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$(1-p) \left[\ddot{Y} - \ddot{u}_0 \right] + p \left[\ddot{Y} + Y'' - Y \right] = 0 \quad (3.2.1.3)$$

Burada $\ddot{Y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.2.1.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\ddot{Y} - \ddot{u}_0 + p \ddot{u}_0 + p Y'' - p Y = 0 \quad (3.2.1.4)$$

denklemini elde edilir. (3.2.1.1) denkleminin çözümü, (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi;

$$Y = Y_0 + p Y_1 + p^2 Y_2 + p^3 Y_3 + p^4 Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, y) \quad (3.2.1.5)$$

$$Y'' = Y_0'' + p Y_1'' + p^2 Y_2'' + p^3 Y_3'' + p^4 Y_4'' + \dots \quad (3.2.1.6)$$

$$\ddot{Y} = \ddot{Y}_0 + p \ddot{Y}_1 + p^2 \ddot{Y}_2 + p^3 \ddot{Y}_3 + p^4 \ddot{Y}_4 + \dots \quad (3.2.1.7)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.2.1.5)-(3.2.1.7) denklemlerinin (3.2.1.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \ddot{Y} - \ddot{u}_0 + p \ddot{u}_0 + p Y'' - p Y = 0 \\ & \left(\ddot{Y}_0 + p \ddot{Y}_1 + p^2 \ddot{Y}_2 + p^3 \ddot{Y}_3 + p^4 \ddot{Y}_4 \right) - \ddot{u}_0 + p \ddot{u}_0 + p \left(Y_0'' + p Y_1'' + p^2 Y_2'' + p^3 Y_3'' + p^4 Y_4'' \right) \\ & - p \left(Y_0 + p Y_1 + p^2 Y_2 + p^3 Y_3 + p^4 Y_4 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}_0 + p \ddot{Y}_1 + p^2 \ddot{Y}_2 + p^3 \ddot{Y}_3 + p^4 \ddot{Y}_4 - \ddot{u}_0 + p \ddot{u}_0 + p Y_0'' + p^2 Y_1'' + p^3 Y_2'' + p^4 Y_3'' \\ & - p Y_0 - p^2 Y_1 - p^3 Y_2 - p^4 Y_3 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \ddot{Y}_0 - \ddot{u}_0 = 0, \quad (3.2.1.8)$$

$$p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 + Y_0'' - Y_0 = 0, \quad (3.2.1.9)$$

$$p^2 : \ddot{Y}_2 + Y_1'' - Y_1 = 0, \quad (3.2.1.10)$$

$$p^3 : \ddot{Y}_3 + Y_2'' - Y_2 = 0, \quad (3.2.1.11)$$

$$p^4 : \ddot{Y}_4 + Y_3'' - Y_3 = 0, \quad (3.2.1.12)$$

$\vdots$

bulunur. (3.2.1.8)-(3.2.1.12) denklemlerinin çözümü ile

$$Y_0 = (1+x)y + xcosh(y) \quad (3.2.1.13)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 + Y_0'' - Y_0 = 0 &\Rightarrow \ddot{Y}_1 = -\ddot{u}_0 - Y_0'' + Y_0 \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^x \int_0^x \left[-\ddot{u}_0 - Y_0'' + Y_0 \right] dx \, dx \\ &\Rightarrow Y_1 = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) y, \end{aligned} \quad (3.2.1.14)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \ddot{Y}_2 + Y_1'' - Y_1 = 0 &\Rightarrow \ddot{Y}_2 = -Y_1'' + Y_1 \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^x \int_0^x \left[-Y_1'' + Y_1 \right] dx \, dx \\ &\Rightarrow Y_2 = \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) y, \end{aligned} \quad (3.2.1.15)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \ddot{Y}_3 + Y_2'' - Y_2 = 0 &\Rightarrow \ddot{Y}_3 = -Y_2'' + Y_2 \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^x \int_0^x \left[-Y_2'' + Y_2 \right] dx \, dx \\ &\Rightarrow Y_3 = \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \right) y, \end{aligned} \quad (3.2.1.16)$$

$$\begin{aligned} p^4 : \ddot{Y}_4 + Y_3'' - Y_3 = 0 &\Rightarrow \ddot{Y}_4 = -Y_3'' + Y_3 \\ &\Rightarrow Y_4 = \int_0^x \int_0^x \left[-Y_3'' + Y_3 \right] dx \, dx \\ &\Rightarrow Y_4 = \left(\frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} \right) y, \end{aligned} \quad (3.2.1.17)$$

$\vdots$

şeklinde (2.2.10) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.2.1.13)-(3.2.1.17) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.2.1.5) denkleminde yerine yazılırsa (3.2.1.1) Helmholtz denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\ &= (1+x)y + xcosh(y) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3}\right)y + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)y + \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\right)y + \left(\frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!}\right)y + \dots \\ &= xcosh(y) + y \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.2.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, y) = y \exp(x) + x \cosh(y)$$

olur.

3.2.2. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.2.1.1) ve (3.2.1.2) eşitlikleri ile verilen Helmholtz denklemini [8] göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_{xx}u = -L_{yy}u + u \quad (3.2.2.1)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ve $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dir. L_{xx}^{-1} integral operatörü

olup $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx$ şeklinde gösterilir. (3.2.2.1) denkleminin her iki tarafına soldan L_{xx}^{-1}

uygulanırsa

$$L_{xx}^{-1} [L_{xx}u] = L_{xx}^{-1} [-L_{yy}u + u] \quad (3.2.2.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, y) = u(0, y) + u_x(0, y) + L_{xx}^{-1} [u - L_{yy}u] \quad (3.2.2.3)$$

olur. Böylece (3.2.2.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0(x, y) = (1+x)y + xcosh(y) \\ u_{k+1}(x, y) = L_{xx}^{-1} [u_k(x, y) - L_{yy}u_k(x, y)] \end{cases} \quad k \geq 0, \quad (3.2.2.4)$$

elde edilen (3.2.2.4) rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned}
u_1 &= L_x^{-1}u_0 - L_x^{-1}\left[L_y u_0\right] \\
&= \int_0^x \int_0^x \left[(1+x)y + x \cosh(y)\right] dx dx - \int_0^x \int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(1+x)y + x \cosh(y)\right]\right] dx dx \quad (3.2.2.5) \\
&= y \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= L_x^{-1}u_1 - L_x^{-1}L_y u_1 \\
&= \int_0^x \int_0^x \left[y \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\right] dx dx - \int_0^x \int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[y \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\right]\right] dx dx \quad (3.2.2.6) \\
&= y \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= L_x^{-1}u_2 - L_x^{-1}L_y u_2 \\
&= \int_0^x \int_0^x \left[y \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right] dx dx - \int_0^x \int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[y \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right]\right] dx dx \quad (3.2.2.7) \\
&= y \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= L_x^{-1}u_3 - L_x^{-1}L_y u_3 \\
&= \int_0^x \int_0^x \left[y \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\right)\right] dx dx - \int_0^x \int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[y \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\right)\right]\right] dx dx \quad (3.2.2.8) \\
&= y \left(\frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!}\right),
\end{aligned}$$

⋮

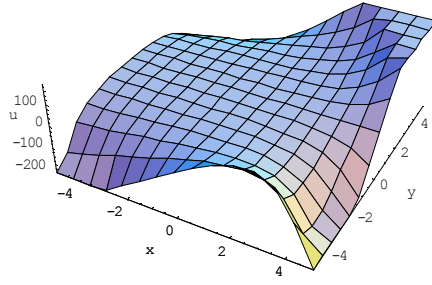
olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.1.6) eşitliğinde yazılarak (3.2.1.1) Helmholtz denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\
&= y \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \right\} + x \cdot \cosh(y)
\end{aligned}$$

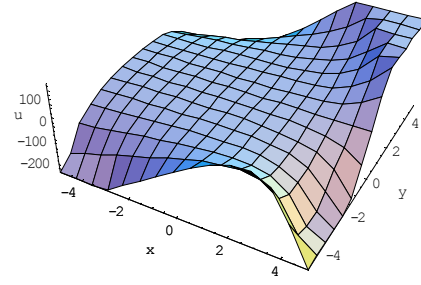
olarak elde edilebilir. Böylece (3.2.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, y) = y \exp(x) + x \cosh(y)$$

olur. $u(x, y)$ fonksiyonunun Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile Mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

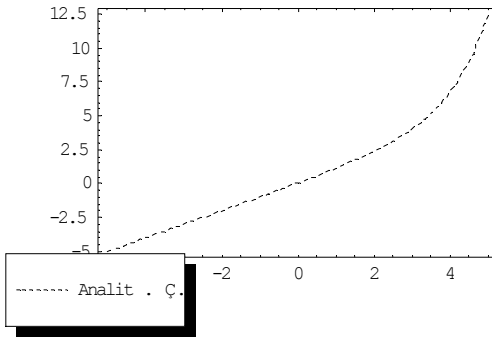


(a) Analitik çözüm

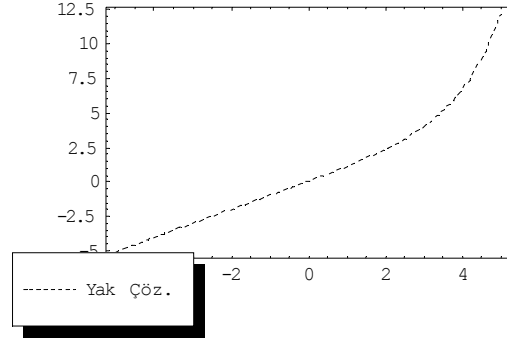


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 2.1. Helmholtz denkleminin, $u(x, y)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

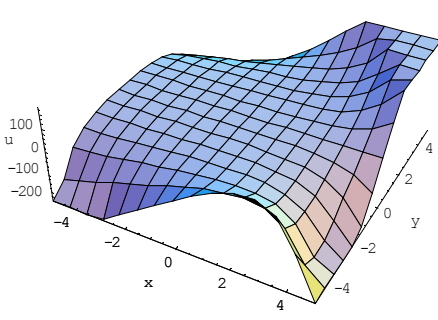


(b) Yaklaşık çözüm

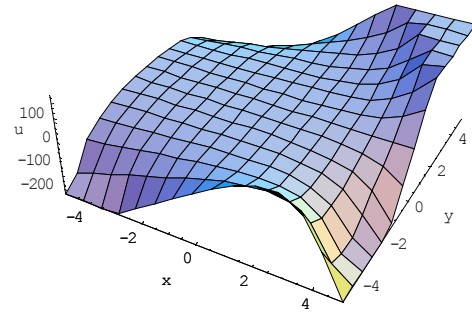
Şekil 2.2. Helmholtz denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 2.1. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

y/x	-3	-2	-1	1	2
0.05	6.36675E-4	1.19141E-5	1.26229E-8	1.51443E-8	1.71788E-5
0.10	1.27335E-3	2.38281E-5	2.52459E-8	3.02886E-8	3.43577E-5
0.15	1.91002E-3	3.57422E-5	3.78688E-8	4.54329E-8	5.15365E-5
0.20	2.5467E-3	4.76563E-5	5.04918E-8	6.05772E-8	6.87154E-5
0.25	3.18337E-3	5.95704E-5	6.31147E-8	7.57215E-8	8.58942E-5

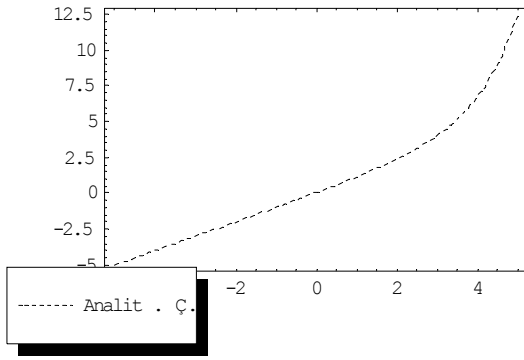


(a) Analitik çözüm

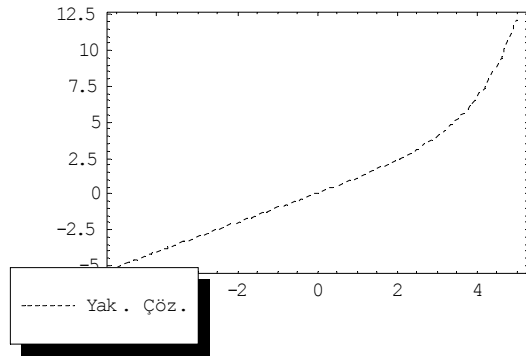


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 2.3. Helmholtz denkleminin, $u(x, y)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 2.4. Helmholtz denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 2.2. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (ADM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

y/x	-3	-2	-1	1	2
0.05	6.36675E-4	1.19141E-5	1.26229E-8	1.51443E-8	1.71788E-5
0.10	1.27335E-3	2.38281E-5	2.52459E-8	3.02886E-8	3.43577E-5
0.15	1.91002E-3	3.57422E-5	3.78688E-8	4.54329E-8	5.15365E-5
0.20	2.54670E-3	4.76563E-5	5.04918E-8	6.05772E-8	6.87154E-5
0.25	3.18337E-3	5.95704E-5	6.31147E-8	7.57215E-8	8.58942E-5

3.3. Dispersive Denklemine HPM ve ADM' unun Uygulanması

3.3.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

$$u_t + u_{xxx} = 0, x \in (-\infty, \infty), t \geq 0 \quad (3.3.1.1)$$

$$u_0(x, 0) = \cos(\pi x) \quad (3.3.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan dispersive denklemini [19] göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$(1-p) \left[\dot{Y} - \dot{u}_0 \right] + p \left[\dot{Y} + Y''' \right] = 0 \quad (3.3.1.3)$$

Burada $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$, $Y''' = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.3.1.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\dot{Y} - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p Y''' = 0 \quad (3.3.1.4)$$

denklemini elde edilir. (3.3.1.1) denkleminin çözümü, (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi

$$Y = Y_0 + p Y_1 + p^2 Y_2 + p^3 Y_3 + p^4 Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, t) \quad (3.3.1.5)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 + \dots \quad (3.3.1.6)$$

$$Y''' = Y_0''' + p Y_1''' + p^2 Y_2''' + p^3 Y_3''' + p^4 Y_4''' + \dots \quad (3.3.1.7)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.3.1.5)-(3.3.1.7) denklemlerinin (3.3.1.4) denkleminde yerine yazılması halinde

$$\left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p \left(Y_0''' + p Y_1''' + p^2 Y_2''' + p^3 Y_3''' + p^4 Y_4''' \right) = 0$$

$$\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p Y_0''' + p^2 Y_1''' + p^3 Y_2''' + p^4 Y_3''' + p^5 Y_4''' = 0$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 \quad (3.3.1.8)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + Y_0''' = 0 \quad (3.3.1.9)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 + Y_1''' = 0 \quad (3.3.1.10)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 + Y_2''' = 0 \quad (3.3.1.11)$$

$$p^4 : \dot{Y}_4 + Y_3''' = 0 \quad (3.3.1.12)$$

$\vdots$

bulunur. (3.3.1.8)-(3.3.1.12) denklemlerinin çözümü ile

$$Y_0 = u_0 = \cos(\pi x), \quad (3.3.1.13)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \dot{Y}_1 + u_0' + Y_0''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_1 = -u_0' - Y_0''' \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t [-Y_0'''] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = -\pi^3 t \sin(\pi x), \end{aligned} \quad (3.3.1.14)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \dot{Y}_2 + Y_1''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_2 = -Y_1''' \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [-Y_1'''] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t [\pi^3 t \sin(\pi x)] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = -\frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x), \end{aligned} \quad (3.3.1.15)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \dot{Y}_3 + Y_2''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = -Y_2''' \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \left[\frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x) \right] dt \\ &\Rightarrow Y_3 = \frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x), \end{aligned} \quad (3.3.1.16)$$

$$\begin{aligned} p^4 : \dot{Y}_4 + Y_3''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_4 = -Y_3''' \\ &\Rightarrow Y_4 = \int_0^t \left[-\frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x) \right] dt \\ &\Rightarrow Y_4 = \frac{1}{24} \pi^{12} t^4 \cos(\pi x), \end{aligned} \quad (3.3.1.17)$$

$\vdots$

şeklinde (2.2.10) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.3.1.13)-(3.3.1.17) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.3.1.5) denkleminde yerine yazılırsa (3.3.1.1) dispersive denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= \cos(\pi x) - \pi^3 t \sin(\pi x) - \frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x) \\
&\quad + \frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x) + \frac{1}{24} \pi^{12} t^4 \cos(\pi x) + \dots,
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.3.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \cos(\pi x + \pi^3 t)$$

olur.

3.3.2. Adomian Ayrıştırım Metodu ile Çözüm

(3.3.1.1) ve (3.3.1.2) eşitlikleri ile verilen dispersive denklemini [19] göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t + L_{xxx} u = 0 \quad (3.3.2.1)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ dir. Burada L_t^{-1} integral

operatörü olup $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde gösterilir. (3.3.2.1) denkleminin her iki tarafına

soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t u] = -L_t^{-1} [L_{xxx} u] \quad (3.3.2.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) - L_t^{-1} [L_{xxx} u] \quad (3.3.2.3)$$

olur. (3.3.2.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 = \cos(\pi x) \\ u_{k+1}(x, t) = -\int_0^t [L_{xxx} u_k(x, t)] dt, \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (3.3.2.4)$$

elde edilen (3.3.2.4) rekürans bağıntısından

$$u_1 = -L_t^{-1} (L_{xxx} u_0) = -\int_0^t [L_{xxx} \cos(\pi x)] dt = -\pi^3 t \sin(\pi x)$$

$$u_2 = -L_t^{-1} (L_{xxx} u_1) = -\int_0^t [L_{xxx} (-\pi^3 t \sin(\pi x))] dt = -\frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x)$$

$$u_3 = -L_t^{-1}(L_{xxx}u_2) = \int_0^t \left[L_{xxx} \left(-\frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x) \right) \right] dt = \frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x)$$

$$u_4 = -L_t^{-1}(L_{xxx}u_3) = \int_0^t \left[L_{xxx} \left(\frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x) \right) \right] dt = \frac{1}{24} \pi^{12} t^4 \cos(\pi x)$$

⋮

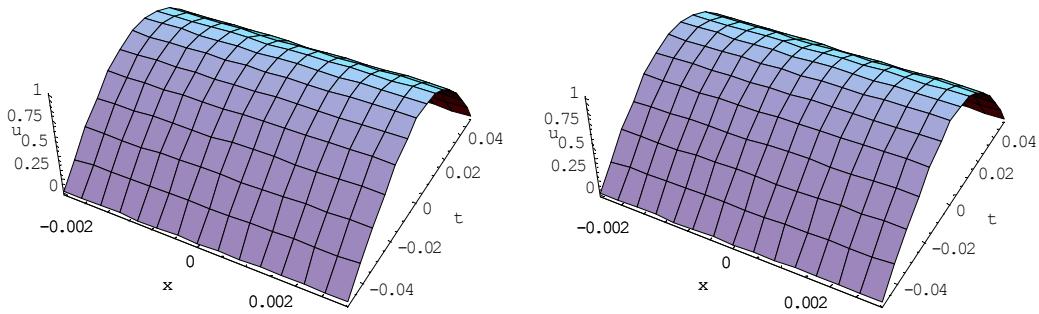
olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.1.6) eşitliğinde yazılarak (3.3.1.1) dispersive denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\ &= \cos(\pi x) - \pi^3 t \sin(\pi x) - \frac{1}{2} \pi^6 t^2 \cos(\pi x) + \frac{1}{6} \pi^9 t^3 \sin(\pi x) \\ &\quad + \frac{1}{24} \pi^{12} t^4 \cos(\pi x) + \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilebilir. Böylece (3.3.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \cos(\pi x + \pi^3 t)$$

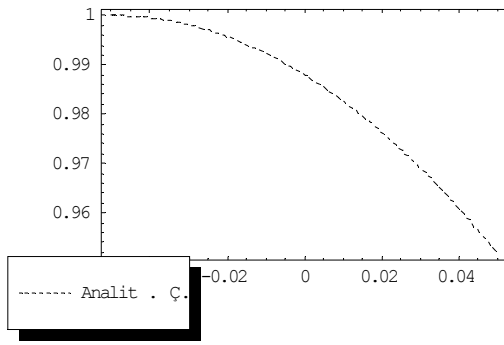
olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



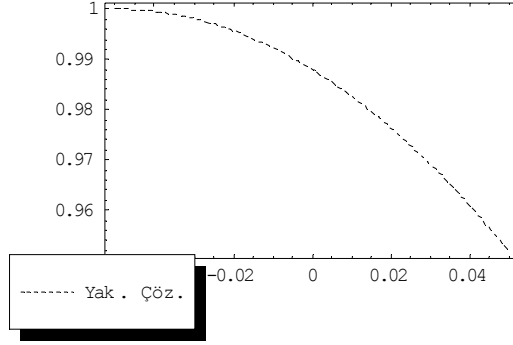
(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 3.1. Dispersive denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

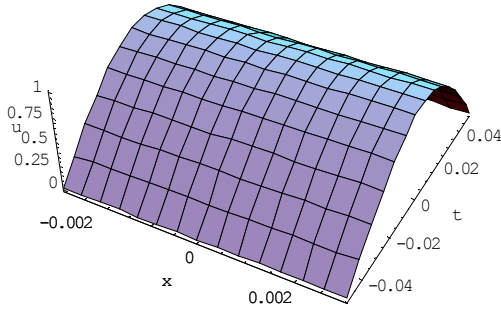


(b) Yaklaşık çözüm

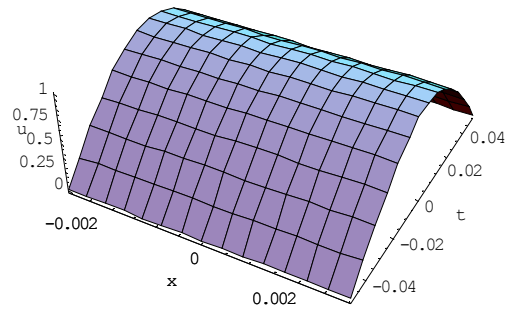
Şekil 3.2. Dispersive denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 3.1. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.005	4.26943E-8	6.60713E-8	8.93831E-8	1.12607E-7	1.35719E-7
0.010	1.97985E-6	2.72572E-6	3.46890E-6	4.20865E-6	4.94425E-6
0.015	1.96637E-5	2.53046E-5	3.09205E-5	3.65058E-5	4.20552E-5
0.020	1.02192E-4	1.25839E-4	1.49361E-4	1.72736E-4	1.95940E-4
0.025	3.70163E-4	4.41867E-4	5.13136E-4	5.83898E-4	6.54084E-4

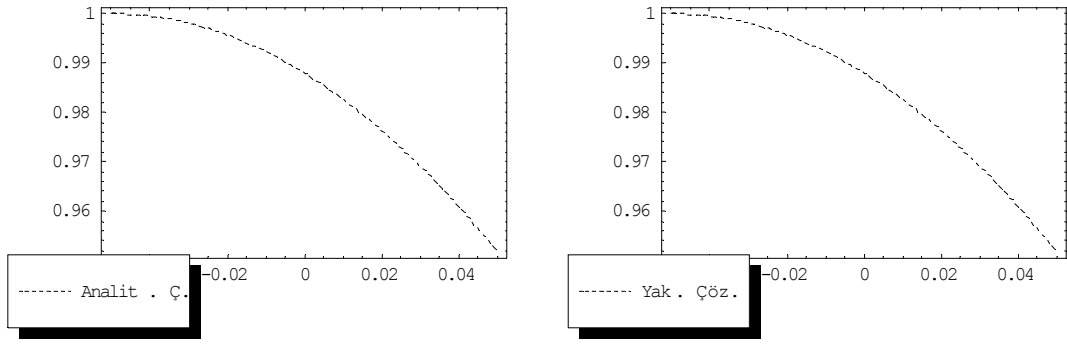


(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 3.3. Dispersive denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 3.4. Dispersive denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 3.2. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (ADM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.005	4.26943E-8	6.60713E-8	8.93831E-8	1.12607E-7	1.35719E-7
0.010	1.97985E-6	2.72572E-6	3.46890E-6	4.20865E-6	4.94425E-6
0.015	1.96637E-5	2.53046E-5	3.09205E-5	3.65058E-5	4.20552E-5
0.020	1.02192E-4	1.25839E-4	1.49361E-4	1.72736E-4	1.95940E-4
0.025	3.70163E-4	4.41867E-4	5.13136E-4	5.83898E-4	6.54084E-4

3.4. Klein-Gordon Denkleminin HPM ve ADM' unun Uygulanması

3.4.1 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

$$u_{tt} - u_{xx} = -u \quad (3.4.1.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = (x+1) \quad (3.4.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan Klein-Gordon denklemini [15,26] göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$(1-p)[\ddot{Y} - \ddot{u}_0] + p[\ddot{Y} - Y'' + Y] = 0 \quad (3.4.1.3)$$

Burada $\ddot{Y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$, $Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ve $p \in [0, 1]$ dir. (3.4.1.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\ddot{Y} - \ddot{u}_0 + p\ddot{u}_0 - pY'' + pY = 0 \quad (3.4.1.4)$$

denklemi elde edilir. (3.4.1.1) denkleminin çözümü, (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, t) \quad (3.4.1.5)$$

$$\ddot{Y} = \ddot{Y}_0 + p\ddot{Y}_1 + p^2\ddot{Y}_2 + p^3\ddot{Y}_3 + p^4\ddot{Y}_4 + \dots \quad (3.4.1.6)$$

$$Y'' = Y_0'' + pY_1'' + p^2Y_2'' + p^3Y_3'' + p^4Y_4'' + \dots \quad (3.4.1.7)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.4.1.5)-(3.4.1.7) denklemlerinin (3.4.1.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{Y}_0 + p\ddot{Y}_1 + p^2\ddot{Y}_2 + p^3\ddot{Y}_3 + p^4\ddot{Y}_4 \right) - \ddot{u}_0 + p\ddot{u}_0 - p(Y_0'' + pY_1'' + p^2Y_2'' + p^3Y_3'' + p^4Y_4'') \\ & + p(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4) = 0, \\ & \ddot{Y}_0 + p\ddot{Y}_1 + p^2\ddot{Y}_2 + p^3\ddot{Y}_3 + p^4\ddot{Y}_4 - \ddot{u}_0 + p\ddot{u}_0 - pY_0'' - p^2Y_1'' - p^3Y_2'' - p^4Y_3'' \\ & + pY_0 + p^2Y_1 + p^3Y_2 + p^4Y_3 = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \ddot{Y}_0 - \ddot{u}_0 = 0 \quad (3.4.1.8)$$

$$p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 - Y_0'' + Y_0 = 0 \quad (3.4.1.9)$$

$$p^2 : \ddot{Y}_2 - Y_1'' + Y_1 = 0 \quad (3.4.1.10)$$

$$p^3 : \ddot{Y}_3 - Y_2'' + Y_2 = 0 \quad (3.4.1.11)$$

$$p^4 : \ddot{Y}_4 - Y_3'' + Y_3 = 0 \quad (3.4.1.12)$$

$\vdots$

denklemleri elde edilir. (3.4.1.8)-(3.4.1.12) denklemlerinin çözümü ile

$$p^0 : Y_0 = u_0 = (x+1)t \quad (3.4.1.13)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 - Y_0'' + Y_0 = 0 & \Rightarrow \ddot{Y}_1 = -\ddot{u}_0 + Y_0'' - Y_0 \Rightarrow Y_1 = \int_0^t \int_0^t \left[-\ddot{u}_0 + Y_0'' - Y_0 \right] dt dt \\ & \Rightarrow Y_1 = -\frac{1}{6}t^3(x+1), \end{aligned} \quad (3.4.1.14)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \ddot{Y}_2 - Y_1'' + Y_1 = 0 & \Rightarrow \ddot{Y}_2 = Y_1'' - Y_1 \Rightarrow Y_2 = \int_0^t \int_0^t \left[Y_1'' - Y_1 \right] dt dt \\ & \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{5!}t^5(x+1), \end{aligned} \quad (3.4.1.15)$$

$$\begin{aligned}
p^3 : \ddot{Y}_3 - Y_2'' + Y_2 &= 0 \Rightarrow \ddot{Y}_3 = Y_2'' - Y_2 \Rightarrow Y_3 = \int_0^t \int_0^t [Y_2'' - Y_2] dt dt \\
&\Rightarrow Y_3 = -\frac{1}{7!} t^7 (x+1),
\end{aligned} \tag{3.4.1.16}$$

$$\begin{aligned}
p^4 : \ddot{Y}_4 - Y_3'' + Y_3 &= 0 \Rightarrow \ddot{Y}_4 = Y_3'' - Y_3 \Rightarrow Y_4 = \int_0^t \int_0^t [Y_3'' - Y_3] dt dt \\
&\Rightarrow Y_4 = -\frac{1}{9!} t^9 (x+1),
\end{aligned} \tag{3.4.1.17}$$

⋮

şeklinde (2.2.10) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.4.1.13)-(3.4.1.17) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.4.1.5) denkleminde yerine yazılırsa (3.4.1.1) Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= t(x+1) - \frac{1}{3!} t^3 (x+1) + \frac{1}{5!} t^5 (x+1) - \frac{1}{7!} t^7 (x+1) + \frac{1}{9!} t^9 (x+1) - \dots \\
&= (x+1) \left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \dots \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.4.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = (x+1) \sin t$$

olur.

3.4.2. Adomian Ayırışım Metodu ile Çözüm

(3.4.1.1) ve (3.4.1.2) eşitlikleri ile verilen Klein-Gordon denklemini [15,26] göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_u u = u_{xx} - u \tag{3.4.2.1}$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ve $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. Burada L_u^{-1} integral

operatörü olup $L_u^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ şeklinde gösterilir. (3.4.2.1) denkleminin her iki tarafına

soldan L_u^{-1} uygulanırsa

$$L_u^{-1} [L_u u] = L_u^{-1} [u_{xx} - u] \tag{3.4.2.2}$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L_{tt}^{-1} [u_{xx} - u] \quad (3.4.2.3)$$

olur. (3.4.2.3) denklemini için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_t(x, 0) = (x+1) \Rightarrow u_0(x, 0) = (x+1)t \\ u_{k+1} = L_{tt}^{-1} [(u_k)_{xx} - (u_k)] \end{cases}, \quad k \geq 0, \quad (3.4.2.4)$$

elde edilen (3.4.2.4) rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x, 0) = t(x+1) \\ u_1 &= \int_0^t \int_0^t [(u_0)_{xx} - (u_0)] dt dt = -\frac{1}{6} t^3 (x+1) \\ u_2 &= \int_0^t \int_0^t [(u_1)_{xx} - (u_1)] dt dt = \frac{1}{5!} t^5 (x+1) \\ u_3 &= \int_0^t \int_0^t [(u_2)_{xx} - (u_2)] dt dt = -\frac{1}{7!} t^7 (x+1) \\ u_4 &= \int_0^t \int_0^t [(u_3)_{xx} - (u_3)] dt dt = -\frac{1}{9!} t^9 (x+1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.1.6)

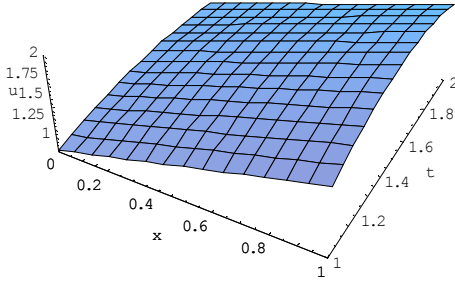
eşitliğinde yazılarak (3.4.1.1) Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\ &= t(x+1) - \frac{1}{3!} t^3 (x+1) + \frac{1}{5!} t^5 (x+1) - \frac{1}{7!} t^7 (x+1) + \frac{1}{9!} t^9 (x+1) - \dots \\ &= (x+1) \left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \dots \right] \end{aligned}$$

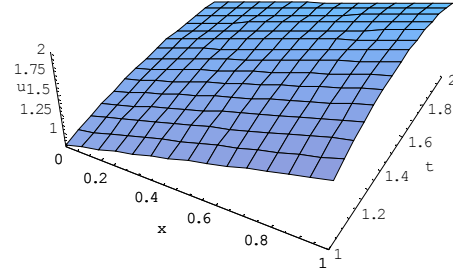
olarak elde edilebilir. (3.4.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = (x+1) \sin t$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile Mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

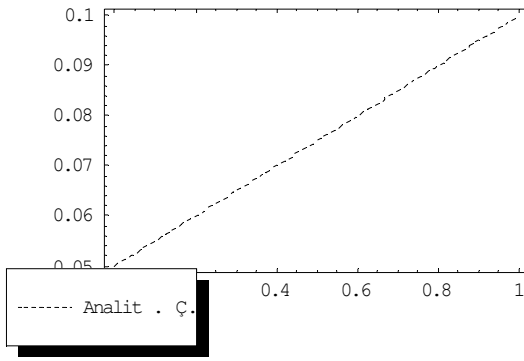


(a) Analitik çözüm

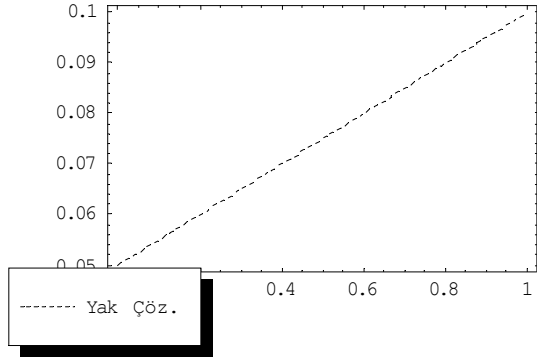


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 4.1. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

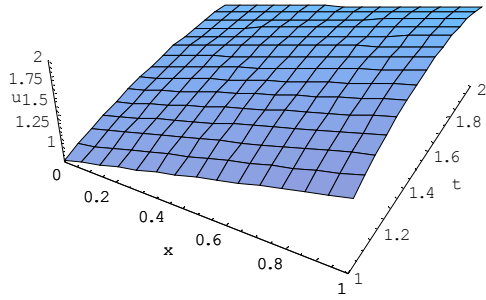


(b) Yaklaşık çözüm

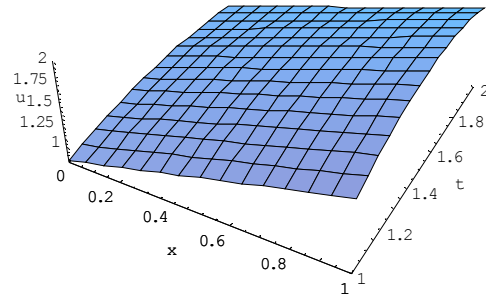
Şekil 4.2. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 4.1. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
1.1	8.51104E-8	9.929550E-8	1.13481E-7	1.27666E-7	1.34758E-7
1.3	5.32979E-7	6.218090E-7	7.10638E-7	7.99468E-7	8.43883E-7
1.5	2.56323E-6	2.990430E-6	3.41764E-6	3.84484E-6	4.05845E-6
1.7	1.01147E-5	1.118005E-5	1.34863E-5	1.51721E-5	1.60150E-5
1.9	3.42233E-5	3.992710E-5	4.56310E-5	5.13349E-5	5.41868E-5

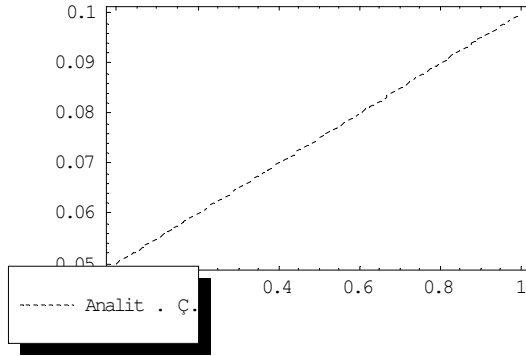


(a) Analitik çözüm

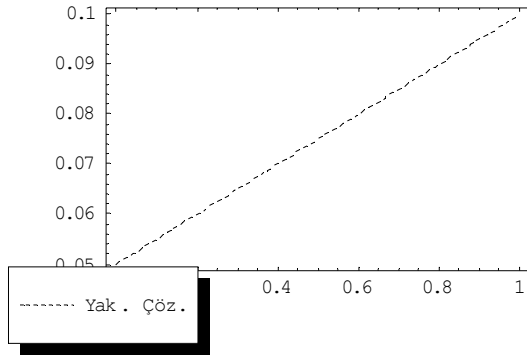


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 4.3. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 4.4. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 4.2. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
1.1	8.51104E-8	9.929550E-8	1.13481E-7	1.27666E-7	1.34758E-7
1.3	5.32979E-7	6.218090E-7	7.10638E-7	7.99468E-7	8.43883E-7
1.5	2.56323E-6	2.990430E-6	3.41764E-6	3.84484E-6	4.05845E-6
1.7	1.01147E-5	1.118005E-5	1.34863E-5	1.51721E-5	1.60150E-5
1.9	3.42233E-5	3.992710E-5	4.56310E-5	5.13349E-5	5.41868E-5

3.5. Lineer Olmayan K(2,2) Denkleminin HPM ve ADM' unun Uygulanması

3.5.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.1)$$

$$u(x, 0) = x \quad (3.5.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan lineer olmayan K(2,2) denklemini [1] göz önüne alalım. Bu denklem için aşağıdaki gibi bir homotopi kurulabilir.

$$(1-p) \left[\dot{Y} - \dot{u}_0 \right] + p \left[\dot{Y} + (Y^2)_x + (Y^2)_{xxx} \right] = 0 \quad (3.5.1.3)$$

Burada $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.5.1.3) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\dot{Y} - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p (Y^2)_x + p (Y^2)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.4)$$

denklemi elde edilir. (3.5.1.1) denkleminin çözümü, (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, t) \quad (3.5.1.5)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 + \dots \quad (3.5.1.6)$$

şeklinde alınabilir. (3.5.1.5)-(3.5.1.6) denklemlerinin (3.5.1.4) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \dot{Y} - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p (Y^2)_x + p (Y^2)_{xxx} = 0 \\ & \left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + p \left((Y_0 + pY_1 + p^2Y_2)^2 \right)_x \\ & + p \left((p^3Y_3 + p^4Y_4)^2 \right)_x + p \left((Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + p^4Y_4)^2 \right)_{xxx} = 0, \\ & \left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + (pY_0^2 + 2p^2Y_0Y_1 + p^3Y_1^2 + 2p^3Y_0Y_2)_x \\ & + (2p^4Y_1Y_2 + 2p^4Y_0Y_3)_x + (pY_0^2 + 2p^2Y_0Y_1 + p^3Y_1^2 + 2p^3Y_0Y_2 + 2p^4Y_1Y_2 + 2p^4Y_0Y_3)_{xxx} = 0, \\ & \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + (pY_0^2 + 2p^2Y_0Y_1 + p^3Y_1^2 + 2p^3Y_0Y_2)_x \\ & + (2p^4Y_1Y_2 + 2p^4Y_0Y_3)_x + (pY_0^2 + 2p^2Y_0Y_1 + p^3Y_1^2 + 2p^3Y_0Y_2 + 2p^4Y_1Y_2 + 2p^4Y_0Y_3)_{xxx} = 0, \\ & \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + p^4 \dot{Y}_4 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + (pY_0^2)_x + (2p^2Y_0Y_1)_x + (p^3Y_1^2)_x \\ & + (2p^3Y_0Y_2)_x + (2p^4Y_1Y_2)_x + (2p^4Y_0Y_3)_x + (pY_0^2)_{xxx} + (2p^2Y_0Y_1)_{xxx} + (p^3Y_1^2)_{xxx} \\ & + (2p^3Y_0Y_2)_{xxx} + (2p^4Y_1Y_2)_{xxx} + (2p^4Y_0Y_3)_{xxx} = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 \quad (3.5.1.7)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + (Y_0^2)_x + (Y_0^2)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.8)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 + (2Y_0Y_1)_x + (2Y_0Y_1)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.9)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 + (Y_1^2)_x + (2Y_0Y_2)_x + (Y_1^2)_{xxx} + (2Y_0Y_2)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.10)$$

$$p^4 : \dot{Y}_4 + (2Y_1Y_2)_x + (2Y_0Y_3)_x + (2Y_1Y_2)_{xxx} + (2Y_0Y_3)_{xxx} = 0 \quad (3.5.1.11)$$

⋮

bulunur. (3.5.1.7)-(3.5.1.11) denklemlerinin çözümü ile

$$\begin{aligned} p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + (Y_0^2)_x + (Y_0^2)_{xxx} = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 - (Y_0^2)_x - (Y_0^2)_{xxx} \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-\dot{u}_0 - (Y_0^2)_x - (Y_0^2)_{xxx} \right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-(Y_0^2)_x - (Y_0^2)_{xxx} \right] dt \\ &\Rightarrow Y_1 = -2tx, \end{aligned} \quad (3.5.1.12)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \dot{Y}_2 + (2Y_0Y_1)_x + (2Y_0Y_1)_{xxx} = 0 &\Rightarrow \dot{Y}_2 = -(2Y_0Y_1)_x - (2Y_0Y_1)_{xxx} \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t \left[-(2Y_0Y_1)_x - (2Y_0Y_1)_{xxx} \right] dt \\ &\Rightarrow Y_2 = 4t^2x, \end{aligned} \quad (3.5.1.13)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \dot{Y}_3 + (Y_1^2)_x + (2Y_0Y_2)_x + (Y_1^2)_{xxx} + (2Y_0Y_2)_{xxx} = 0 \\ &\Rightarrow \dot{Y}_3 = -(Y_1^2)_x - (2Y_0Y_2)_x - (Y_1^2)_{xxx} - (2Y_0Y_2)_{xxx} \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \left[-(Y_1^2)_x - (2Y_0Y_2)_x - (Y_1^2)_{xxx} - (2Y_0Y_2)_{xxx} \right] dt, \\ &\Rightarrow Y_3 = -8t^3x, \end{aligned} \quad (3.5.1.14)$$

$$\begin{aligned} p^4 : \dot{Y}_4 + (2Y_1Y_2)_x + (2Y_0Y_3)_x + (2Y_1Y_2)_{xxx} + (2Y_0Y_3)_{xxx} = 0 \\ &\Rightarrow \dot{Y}_4 = -(2Y_1Y_2)_x - (2Y_0Y_3)_x - (2Y_1Y_2)_{xxx} - (2Y_0Y_3)_{xxx} \\ &\Rightarrow Y_4 = \int_0^t \left[-(2Y_1Y_2)_x - (2Y_0Y_3)_x - (2Y_1Y_2)_{xxx} - (2Y_0Y_3)_{xxx} \right] dt \\ &\Rightarrow Y_4 = 16t^4x, \end{aligned} \quad (3.5.1.15)$$

⋮

şeklinde (2.2.10) serisinin ilk dört terimi elde edilmiş olur. (3.5.1.12)-(3.5.1.15) denklemleri

$p \rightarrow 1$ iken (3.5.1.5) serisinde yerine yazılırsa (3.5.1.1) lineer olmayan K(2,2)

denkleminin aşağıdaki yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= (x) + (-2tx) + (4t^2x) + (-8t^3x) + (16t^4x) + \dots \\
&= x \left[1 + (-2t) + (-2t)^2 + (-2t)^3 + (-2t)^4 + \dots \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.5.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{x}{1 + 2t}$$

olur.

3.5.2 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.5.1.1) ve (3.5.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan K(2,2) denklemini [1] göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t u = -\left(u^2\right)_x - \left(u^2\right)_{xxx} \quad (3.5.2.1)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve lineer olmayan terim ise

$N(u) = -\left(u^2\right)_x - \left(u^2\right)_{xxx}$ olarak ifade edilmektedir. Burada L_t^{-1} integral operatörü olup

$L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde gösterilir. (3.5.2.1) denkleminin her iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t (x, t)] = L_t^{-1} \left[-\left(u^2\right)_x - \left(u^2\right)_{xxx} \right] = L_t^{-1} [N(u)] \quad (3.5.2.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} \left[-\left(u^2\right)_x - \left(u^2\right)_{xxx} \right] = u(x, 0) + L_t^{-1} [N(u)] \quad (3.5.2.3)$$

olur. Böylece $N(u) = -\left(u^2\right)_x - \left(u^2\right)_{xxx} = -\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right]$, şeklinde tanımlanarak

A_n ve B_n Adomian polinomlarının ilk üç terimi (2.1.9) ifadesinde de belirtildiği gibi

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left(u_0^2\right)_x & B_0 &= \left(u_0^2\right)_{xxx} \\
A_1 &= \left(2u_0u_1\right)_x & B_1 &= \left(2u_0u_1\right)_{xxx} \\
A_2 &= \left(2u_2u_0 + u_1^2\right)_x & \text{ve} & B_2 = \left(2u_2u_0 + u_1^2\right)_{xxx} \\
A_3 &= \left(2u_1u_2 + 2u_0u_3\right)_x & B_3 &= \left(2u_1u_2 + 2u_0u_3\right)_{xxx} \\
&\vdots & & \vdots
\end{aligned} \quad (3.5.2.4)$$

olarak alınabilir. (3.5.2.3) denklemini için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u(x, 0) = x \\ u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} \left[\left((u_k)^2 \right)_x + \left((u_k)^2 \right)_{xxx} \right], \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (3.5.2.5)$$

Elde edilen (3.5.2.5) rekürans bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} u_0 &= x \\ u_1 &= -\int_0^t [A_0 + B_0] dt = -\int_0^t \left[(u_0^2)_x + (u_0^2)_{xxx} \right] dt = -2tx \\ u_2 &= -\int_0^t [A_1 + B_1] dt = -\int_0^t \left[(2u_0u_1)_x + (2u_0u_1)_{xxx} \right] dt = 4t^2x \\ u_3 &= -\int_0^t [A_2 + B_2] dt = -\int_0^t \left[(2u_2u_0 + u_1^2)_x + (2u_2u_0 + u_1^2)_{xxx} \right] dt = -8t^3x \\ u_4 &= -\int_0^t [A_3 + B_3] dt = -\int_0^t \left[(2u_1u_2 + 2u_0u_3)_x + (2u_1u_2 + 2u_0u_3)_{xxx} \right] dt = 16t^4x \\ &\vdots \end{aligned}$$

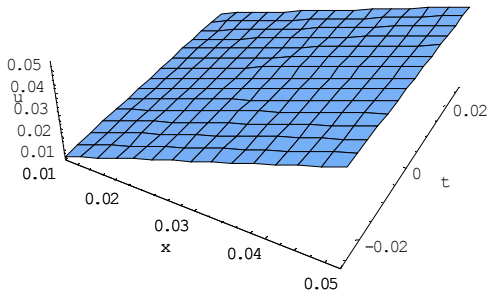
olarak ayrışım serisinin ilk dört terimi bulunur. Bulunan u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , terimleri (2.1.6) eşitliğinde yazılarak (3.5.1.1) lineer olmayan K(2,2) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \\ &= x - 2xt + 4xt^2 - 8xt^3 + 16xt^4 - \dots \\ &= x \left[1 - (2t)^1 + (2t)^2 - (2t)^3 + (2t)^4 - \dots \right] \end{aligned}$$

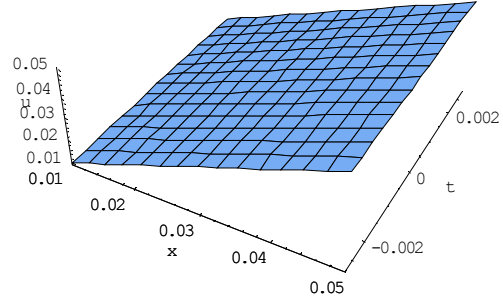
olarak elde edilebilir. Böylece (3.5.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{x}{1 + 2t}$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

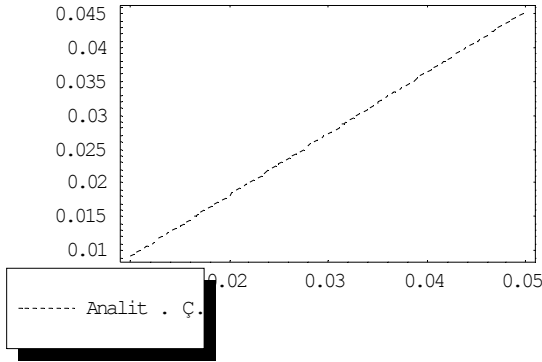


(a) Analitik çözüm

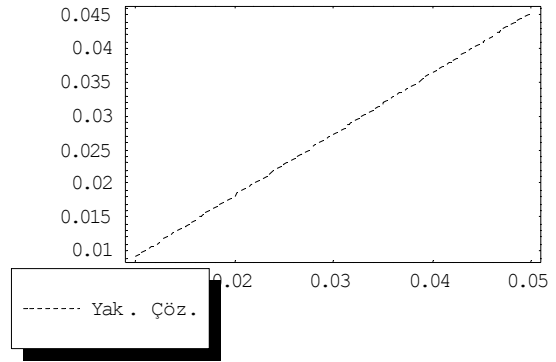


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 5.1. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

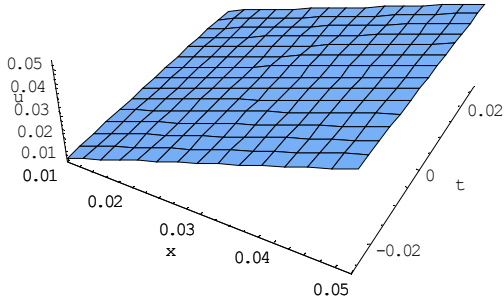


(b) Yaklaşık çözüm

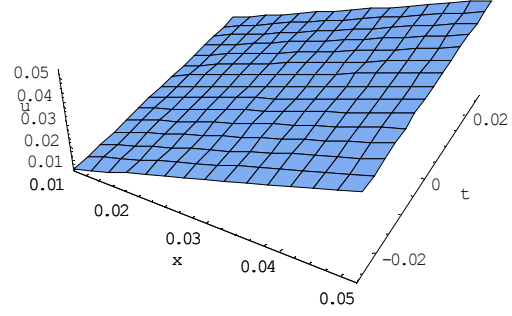
Şekil 5.2. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 5.1. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.02	9.84615E-10	1.969230E-9	2.953850E-9	3.93846E-9	4.923080E-9
0.01	3.13726E-11	6.27451E-11	9.41177E-11	1.2549E-10	1.56863E-10
-0.01	3.26531E-11	6.53061E-11	9.79592E-11	1.30612E-10	1.63265E-10
-0.02	1.06667E-9	2.133333E-9	3.200000E-9	4.266670E-9	8.53333E-4

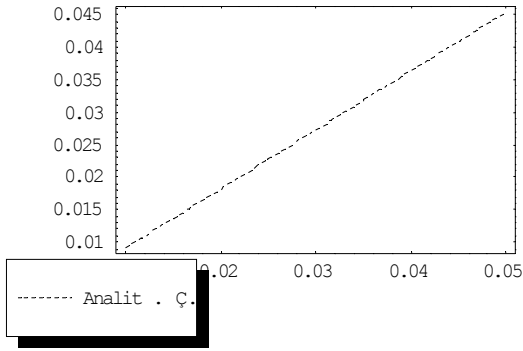


(a) Analitik çözüm

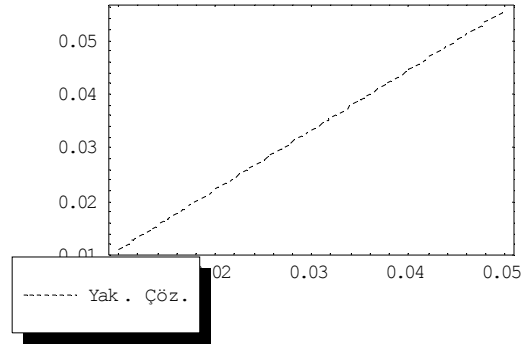


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 5.3. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 5.4. Lineer olmayan K(2,2) Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 4 terim için yaklaşık çözümün karşılaştırılması

Tablo 5.2. $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile (HPM) hesaplanan 4 terim ile analitik çözümünün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.02	9.84615E-10	1.969230E-9	2.953850E-9	3.93846E-9	4.923080E-9
0.01	3.13726E-11	6.27451E-11	9.41177E-11	1.2549E-10	1.56863E-10
-0.01	3.26531E-11	6.53061E-11	9.79592E-11	1.30612E-10	1.63265E-10
-0.02	1.06667E-9	2.133333E-9	3.200000E-9	4.266670E-9	8.53333E-4

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu; KdV, Helmholtz, Dispersive, Klein-Gordon ve lineer olmayan K(2,2) denklemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu denklemlere Adomian ayrışım metodu ve Homotopi pertürbasyon metodu için Mathematica programı kullanılarak elde edilen çözüm fonksiyonlarının, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri çizilerek sayısal veri tabloları yapılmıştır.

Bu çalışmada her iki metot ile bulunan çözümler, analitik çözüme çok yakın değerler almıştır. Her iki metotta da üç boyutlu, iki boyutlu ve sayısal veri tablolarının incelenmesi ile birkaç terim yaklaşımını kullanarak bile çok iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Ayrışım serilerine yeni terimler eklemekle hatanın daha da küçüldüğü gözlenebilir. Sayısal ve analitik çözümler için Mathematica programı kullanılarak, çözüm grafiklerinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir.

Sayısal çözüm ile analitik çözüm arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu karşılaştırmalara göre, Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen sayısal değerlerin hata miktarı, Adomian ayrışım metoduna göre elde edilen sayısal değerlerin hata miktarı ile aynı olduğu bilinmektedir.

5. ÖNERİLER

Homotopi pertürbasyon metodu herhangi bir varsayım ve sınırlama olmadan sadece bir başlangıç koşulunun verilmesi ile lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Bu metotla elde edilen yaklaşık çözümler lineer olmayan denklemlerin analitik çözümlerine hemen hemen özdeştir. Homotopi Pertürbasyon metodu, lineer olmayan diferensiyel denklemler için çok daha iyi yaklaşımlar vermekte olup bazen de benzer çözümler vermektedir. Ayrıca Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak analitik çözümleri elde etmede hataların çok az olduğu görülmektedir. Bundan dolayı bu metodun yaklaşık çözümleri bulmada etkili ve verimli bir teknik olduğu savunulabilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Abdul-Majid Wazwaz**, 2006. ‘The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers, and cubic Boussinesq equations’, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **207**, 18 – 23.
- [2] **Adomian G.** 1984. ‘Convergence series solution of non-linear equations’. *Journal Computation and Applied Mathematics*, **11 (2)**, 225–230.
- [3] **Adomian G.**, 1986. ‘On composite non-linearity and the decomposition method’ *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **113 (2)**, 504–509.
- [4] **Adomian G, Cherruault Y.** 1993. ‘Decomposition method: A new proof of convergence’. *Mathematical and Computer Modelling*, **1**, 103–106.
- [5] **Adomian G.**, 1986. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, San Diego.
- [6] **A. Rajabi, D.D. Ganji, H. Taherian**, 2007. ‘Application of Homotopy Perturbation method in nonlinear heat conduction and convection Equation’ *Physics Letters A*. **360 (4–5)**, 570-573.
- [7] **A. M. Siddiqui, R. Mahmood, Q.K. Gori**, 2006. ‘Homotopy perturbation method for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder’ *Physics Letters A*, **352**, 404-410.
- [8] **Bulut, H.**, 2008. ‘A Comparison Among Homotopy Perturbation method and The Decomposition Method with The Variational Iteration Method for Helmholtz Equation’, *e-Journal of New World Sciences Academy*, **3(1)**, 93-106.
- [9] **Cherruault, Y.**, 1988. ‘Convergence of Adomian’s method’, *Kybernetes* **18(2)**, 31-38.
- [10] **Cherruault, Y., Ngarhasta, N., Some, B., Abbaoui, K.**, 2002. ‘New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model’, *Kybernetes* **31 (1)**, 61-75
- [11] **E. Babolian, H. Sadeghi**, 2003. ‘Solving the non-linear advection-reaction equation by Adomian method’, *Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl.* **3**, 359–365.
- [12] **Ebru Cavlak**, 2008. ‘Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denkleminin yarı analitik metotlarla elde edilen sayısal çözümlerinin karşılaştırılması’, *Yüksek lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ.
- [13] **G. Adomian**, 1988. ‘A review of the decomposition method in applied mathematics’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **135**, 501–544.
- [14] **G. Adomian**, 1994. ‘Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method’, *Kluwer*, Boston.

- [15] **Hasan Bulut, H.Mehmet Baskonus, H.Hüseyin Özgen**, 2010. ‘On The Geometric Interpretations Of The Klein-Gordon Equation And Solution of The Equation By The Homotopy Perturbation Method’, *VIII. Geometri Sempozyumu, 29 Nisan - 2 Mayıs 2010, Akdeniz Üniversitesi, Antalya*, 75-76,
- [16] **He J.H.**, 2004. ‘Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method’, *Applied Mathematics and Computation*, **156(2)**, 527-539,2–42.
- [17] **He J.H.**, 2006. ‘Non-Perturbative Methods for Strongly nonlinear Problems’, *dissertation, de -verlag im Internet GmbH*, Berlin.
- [18] **He J.H.**, 2005. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **6**, 207–208.
- [19] **Hasan Bulut, H.Mehmet Baskonus**, 2010. ‘A study on the numerical solution of the third-order dispersive equations with homotopy perturbation method’, *e-Journal of New World Sciences Academy*, **Vol: 5, (1)**, ISSN:1306–3111.
- [20] **J.H. He**, 2004. ‘The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities’, *Appl. Math. Comput.* **151**, 287–292.
- [21] **J.H. He**, 2000. ‘A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems’, *Int. J Non-Linear Mech* **35**, 37,43
- [22] **J.H. He**, 2000. *Int. J. Non-Linear Mech.* **35 (1)**, 37.
- [23] **J. H. He**, 2006. ‘Application of He's Homotopy perturbation Method to Non-Linear Coupled system of Reaction diffusion Equations’, *Int J Nonlinear Sci Simul*, **7**, 413–420.
- [24] **J.H. He**, 2006. ‘Some asymptotic methods for strongly nonlinearly equations’, *Internat. J. Modern Math.* **20 (10)**, 1141–1199.
- [25] **Karagöz M.**, 1998. İstatistik Yöntemler, Malatya
- [26] **Kartik Chandra Basak, Pratap Chandra Ray, Rasajit Kumar Bera**, 2009. ‘Solution of non-linear Klein–Gordon equation with a quadratic non-linear term by Adomian decomposition method’, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 718–723.
- [27] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V.**, 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, Rochester, N. Y.

- [28] **Liao S.J.**, 2003. 'Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method', *Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press*.
- [29] **Liao S.J.**, 2009. "Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **14**, 983-997.
- [30] **Liang S., Jeffrey D.J.**, 2009. 'Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation', *Commun. Nonlinear Science and Numerical Simulation.*, doi:10.1016/j.cnsns.02.016.
- [31] **M. Dehghan**, 2004. 'The use of Adomian decomposition method for solving the one dimensional parabolic equation with non-local boundary specification', *Int. International Journal of Computer Mathematics*, **81**, 25–34.
- [32] **Ozis T., Agirseven D.**, 2008. 'He's homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients', *Physics Letters A*. **372**, 5944–5950.
- [33] **Siddiqui AM, Mahmood R, Ghori QK**, 2006. 'Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method', *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7 (1)**, 7–14.
- [34] **T. Mavoungou, Y. Cherruault**, 1992. 'Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations', *Kybernetes* **21**, 13–25.
- [35] **Wazwaz, A.M.**, 2005. 'Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations', *Applied Mathematics and Computation*, **166**, 652,663.
- [36] **www.en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9**

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Kahramanmaraş'ta doğdu. İlkokul ve Ortaokul öğrenimini Döngel İlköğretim okulunda ve Lise öğrenimini Gaziantep Mimar Sinan Lisesinde tamamladı. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitime başladı. 2005 yılında mezun oldu ve 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2010 yılında yüksek lisansını tamamladı.