

Soy :

1077

KUTUPHAN : 1989/68
 DAİRE : 1161
 Demirbaş No : 1462

54-20
C-6

43.991

111
Y.L.
TEN Bil.

BANACH LİMITLERİ

Rıfat Çolak

Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Analiz Kürsüsü

Asistanı

Fırat Üniversitesi
Merkez Kütüphanesi



0069699

255.07.02.03.00.00/08/0069699

MYL/1

Yüksek Lisans Tezi

1979

Bu çalışmayı bana veren, çalışmalarında
yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın
Hocam Doç.Dr. ner ÇAKAR'a teřekkür ve řk -
ranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Rıfat olak

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
NOTASYON LİSTESİ	i
ÖNSÖZ	iii
BÖLÜM 1. TANIM ve NOTASYONLAR	1
1.1. Lineer ve Normlu Uzaylar	1
1.2. Matris Dönüşümleri	3
1.3. Temel Tanım ve Teoremler	4
1.4. Bir Dizinin Çekirdeği	6
BÖLÜM 2. BANACH LİMİTLERİ	8
2.1. Banach Limitleri	8
2.2. Hemen hemen yakınsak dizi örnekleri	13
BÖLÜM 3. BANACH-HAUSDORFF LİMİTLERİ	15
3.1. Hausdorff Matrisleri	15
3.2. B-H Fonksiyonelleri	16
BÖLÜM 4. BANACH-HAUSDORFF LİMİTLERİNİN GENELLEŞTİRİLMELERİ	21
4.1. Mutlak Eşdeğerlik ve Mutlak Regülerlik	21
4.2. I. Genelleştirme	24
4.3. II. Genelleştirme	31
BÖLÜM 5. BANACH VE DİĞER LİMİTLER	36
5.1. B- $\emptyset$ Fonksiyonelleri	36

	<u>Sayfa</u>
5.2. $B-L_A^*$ Fonksiyonelleri	37
5.3. Invariant Limitler	39
5.4. Tek Limitler	44
REFERANSLAR	48

NOTASYON LİSTESİ

- N : Doğal sayılar cümlesi
- R : Reel sayılar cümlesi
- C : Kompleks sayılar cümlesi
- D : Değiştirme operatörü
- s : R üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
- c : R üzerinde tanımlı yakınsak diziler uzayı
- c_0 : R üzerinde tanımlı sıfır diziler uzayı
- m : R üzerinde tanımlı sınırlı diziler uzayı
- m_0 : R üzerinde tanımlı, $Dx-x \in c_0$ özelliğini gerçekleyen sınırlı diziler uzayı
- $A_n(x) : \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ dönüşüm dizisinin n -inci terimi
- Ax : $(A_n(x))$ dizisi
- c_A : A matrisinin yakınsaklık alanı; yani $\{x=(x_k) : Ax \in c\}$ cümlesi
- $L^*(x) : \limsup x_n$
- $L_*(x) : \liminf x_n$
- $q(x) : \inf_{n_1, n_2, \dots, n_p} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k}$
- alt lineer fonksiyoneli
- E : $x=(x_k) \in E \Rightarrow Dx-x \in E$ olacak şekilde m 'nin lineer alt uzayı
- $\mathcal{L}_E$: $L: E \rightarrow R$ lineer fonksiyonellerin cümlesi

$\{E, \emptyset\}$: $\emptyset, E$ üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olmak üzere, her $x \in E$ için $L(x) \leq \emptyset(x)$ koşulunu gerçekleyen L lineer fonksiyonellerin cümlesi.

$B-\emptyset$: $\{m, \emptyset\}$ nin herhangi bir L elemanı

$L_A^*(x)$: $A\text{-}\lim \sup x_n$

$\mathcal{T}$: Regüler matrisler sınıfı

$\mathcal{T}^+$: $\{A=(a_{nk}) \in \mathcal{T} : \sum_k |a_{nk}| \rightarrow 1\}$

$\mathcal{T}^*$: $\{A=(a_{nk}) \in \mathcal{T}^+ : \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| \rightarrow 0\}$

$\mathcal{K}$: Regüler Hausdorff matrisleri sınıfı

$\mathcal{K}_+$: Negatif olmayan regüler Hausdorff matrisleri sınıfı

Δ : Reel $x=(x_n)$ dizisinin çekirdeği

$\|A\|$: A matrisinin K_r -sınırı; yani $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, beş bölüm halinde Banach limitleri incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde temel tanım ve teoremler, ikinci bölümde Banach limiti kavramının ilk çıkışı, tanım ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölüm Banach-Hausdorff limitlerine ve dördüncü bölüm Banach-Hausdorff limitlerinin genelleştirilmelerine ayrılmıştır.

Son olarak beşinci bölümde sınırlı bir dizi için $\{m, \emptyset\}$ nin $B-\emptyset$ limitleri; sınırlı diziler üzerinde, regüler matris dönüşümleri altında invariant kalan $B-\emptyset$ limitleri ve tek limitler incelenmiştir.

BÖLÜM 1

TANIMLAR VE NOTASYONLAR

1.1. Lineer ve Normlu Uzaylar.

1.1.1. Lineer (Vektör) Uzay.

X boş olmayan bir cümle ve R reel sayılar cismi verilmiş olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : R \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine R üzerinde bir reel lineer (vektör) uzay adı verilir:

Her $\alpha, \beta \in R$ ve $x, y, z \in X$ için

$$(L1) \quad x+y=y+x$$

$$(L2) \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

$$(L3) \quad x+\theta=x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L4) \quad \text{Her } x \in X \text{ için } x+(-x)=\theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \quad 1.x=x$$

$$(L6) \quad \alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$$

$$(L7) \quad (\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$$

$$(L8) \quad \alpha.(\beta.x)=(\alpha\beta).x$$

Burada R yerine C kompleks sayılar cismi alındığında X cümlesine C üzerinde bir kompleks lineer (vektör) uzay adı verilir.

Kolayca görülebileceği gibi $x=(x_k), y=(y_k) (k=1,2,\dots)$ iki dizi ve α skaler olmak üzere; $x+y=(x_k+y_k)$, ve $\alpha x=(\alpha x_k)$

olarak tanımlanırsa, bütün reel diziler uzayı olan s , R üzerinde bir lineer uzay olur.

1.1.2. Linear Alt Uzay.

X bir lineer uzay ve M , X in bir alt cümlesi olsun. $x, y \in M$ ve α, β skaler olmak üzere

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in M$$

koşulu gerçekleşiyorsa M ye X in lineer bir alt uzayı adı verilir.

1.1.3. Normlu Uzay.

X reel (veya kompleks) bir lineer uzay ve

$$\| \cdot \| : X \rightarrow R$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve λ skaleri için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Özellikleri sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

Buna göre c , c_0 , m ve m_0 lineer uzayları

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

ile normlanmıştır. $\{[8; \text{Sh. } 95], [4]\}$.

LINEER DÖNÜŞÜM: X ve Y lineer uzaylar olsunlar.

$$f : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu; her $x, y \in X$ ve her α, β skalerleri için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

özelliğini gerçekliyorsa, f ye lineer dönüşüm denir.

KONVEKS CÜMLE: C lineer bir uzayın bir alt cümlesi olsun. Eğer $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $x, y \in C$ için $\alpha x + \beta y \in C$ ise C ye konvekstir denir. [8; Sh. 80].

1.2. Matris Dönüşümleri.

$A = (a_{nk})$ ($n, k = 1, 2, \dots$) bir sonsuz matris olsun. $x = (x_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) dizisinin Ax matris dönüşümü; $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$, her n için mevcut olmak üzere

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

matris çarpımı olarak tanımlanır. Burada $Ax = (A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi ile yapılan dönüşümü adı verilir. Bu dönüşümün lineer olduğu açıktır.

ÜÇGENSEL MATRİS: Bir $A = (a_{nk})$ matrisinde $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ($n, k = 1, 2, \dots$) ise bu matrise alt yarı-matris; $k < n$ için $a_{nk} = 0$ ise üst yarı-matris adı verilir.

TRANSLASYON MATRİS: $D = (d_{nk})$ matrisinde $k = n+1$ için $d_{nk} = 1$ ve $k \neq n+1$ için $d_{nk} = 0$ ise bu D matrisine translasyon matris adı verilir.

BİR MATRİSİN SINIRI: $\sum_k |a_{nk}|$ yakınsak olmak üzere

$$\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$$

ya A matrisinin K_r -sınırı (sattır sınırı) denir.

$\|A\|$ ve $\|B\|$ ile sırasıyla A ve B nin K_r -sınırlarını gösterirsek ;

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ ve } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

olduğu açıktır. Ayrıca I birim matrisi için $|I| = 1$ ve μ skaller olmak üzere $\|\mu A\| = |\mu| \|A\|$ dır. [3; Sh. 25].

1.3. Temel Tanım ve Teoremler.

1.3.1. Lineer ve Alt Lineer Fonksiyonel.

X bir lineer uzay olmak üzere

$$f: X \rightarrow C$$

dönüşümüne bir fonksiyonel adı verilir. Eğer her $x, y \in X$ için

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa f fonksiyoneline alt toplamsal; eşitsizlik yerine eşitlik hali geçerliyse toplamsaldır denir.

Eğer her $x \in X$ ve her $\alpha \geq 0$ skaleri için

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

gerçekleniyorsa f fonksiyoneline homojendir denir.

Alt toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele alt lineer; toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele lineer fonksiyonel adı verilir. [9; Sh. 55].

Biz bu çalışmamızda reel lineer fonksiyonelleri kullanacağız.

Şimdi çalışmamızda sıkça kullanacağımız önemli bir teoremi ve bu teoremin bir sonucunu verelim.

1.3.2. TEOREM (Hahn-Banach). X bir reel lineer uzay ve M bunun bir alt uzayı olsun. q , X üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olmak üzere, eğer M üzerinde f bir lineer fonksiyonel ve

$$f(x) \leq q(x)$$

ise; bu taktirde X üzerinde

$$g(x) \leq q(x)$$

olacak şekilde, f 'in X 'e bir g lineer genişlemesi vardır. [8; Sh. 121].

1.3.3. SONUÇ. X bir reel lineer uzay ve q , X üzerinde alt lineer bir fonksiyonel olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için

$$F(x) \leq q(x)$$

olacak şekilde X de tanımlı bir $F(x)$ lineer fonksiyoneli mevcuttur. [1; Sh. 29].

Bir X lineer uzayı üzerinde bir lineer fonksiyonelin varlığından sözedebilmemiz için, bu sonuçtan dolayı bir alt lineer fonksiyonel inşa etmemiz yeterli olmaktadır.

1.3.4. A-toplanabilirlik. Bir $A=(a_{nk})$ matrisi verilmiş olsun. Her n için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ mevcut ve $n \rightarrow \infty$ için $A_n(x) \rightarrow a$ ise (x_k) dizisi a 'ya A-toplanabilirdir (veya A-limitlenebilir) denir ve $A\text{-}\lim x_k = a$ (veya $\lim Ax = a$) yazılır.

Bir A matrisinin yakınsaklık (veya toplanabilirlik) alanı c_A ile gösterilir ve Ax yakınsak olacak şekilde bütün $x=(x_k)$ dizilerinin sınıfı ; yani

$$c_A = \{x=(x_k) : Ax \in c\}$$

olarak tanımlanır.

1.3.5. TEOREM. $A=(a_{nk})$ olsun. Ax 'in bütün sınırlı diziler için var olmasının gerek ve yeter koşulu Ax 'in sıfıra yakınsayan bütün diziler için var olmasıdır. Ax 'in her iki sınıftaki diziler için var olmasının gerek ve yeter koşulu ise her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|$ 'nin yakınsak olmasıdır. [9; Sh. 5].

1.3.6. TEOREM. Bir A matrisinin bütün sınırlı dizileri yine sınırlı dizilerin içine dönüştürmesi için gerek ve yeter ko-

şul A matrisinin sıfıra yakınsayan bütün dizileri sınırlı dizilerin içine dönüştürmesidir. $A=(a_{nk})$ ise, A'nın her iki sınıftaki dizileri sınırlı dizilere dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < K$ olacak şekilde bir K sabitinin var olmasıdır. [9; Sh. 5].

Yakınsak bir diziyi limitini değiştirmeksizin yine yakınsak bir diziye dönüştüren bir A matrisine REGÜLER matris denildiğini biliyoruz.

Regüler matrislere ilişkin en önemli teoremlerden birisi Silverman-Toeplitz teoremidir.

1.3.7. TEOREM (Silverman-Toeplitz). $A=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşullar

$$(i) \quad \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty ,$$

$$(ii) \quad \text{Her } k \text{ ve } n \rightarrow \infty \text{ için } a_{nk} \rightarrow 0 ,$$

$$(iii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olmasıdır. [8; Sh. 165].

1.4. Bir Dizinin Çekirdeği.

$R_k, (x_k)$ ($k=1,2,\dots$) dizisinin $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ elemanlarını içeren kompleks düzlemin en küçük konveks kapalı bölgesi olsun. $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$ olduğu açıktır. Buna göre konveks ve kapalı olan

$$R = \bigcap_i R_i \quad (i=1,2,\dots)$$

cümlesine (x_k) dizisinin çekirdeği denir.

Bir reel (x_k) dizisi için

$$L^*(x) = \limsup x_k \quad \text{ve} \quad L_*(x) = \liminf x_k$$

alalım. Buna göre bir reel (x_k) dizisinin çekirdeği onun bütün limit noktalarını içeren $\Delta = (L_*(x), L^*(x))$ aralığıdır. Ax dönüşüm dizisinin çekirdeği de $\Delta' = (L_*(Ax), L^*(Ax))$ aralığıdır. [3; Sh. 137-138].

Dizilerin çekirdeğine ilişkin önemli iki teoremi ispatsız olarak ifade etmemiz yerinde olacaktır.

1.4.1. TEOREM (Çekirdek teoremi). Eğer $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ise Ax dönüşüm dizisinin Δ' çekirdeği reel $x = (x_k)$ dizisinin Δ çekirdeğinde kapsanır. [3; Sh. 138].

1.4.2. TEOREM. $A = (a_{nk})$ regüler bir matris olsun. Sınırlı her $x = (x_k)$ dizisinin çekirdeğinin Ax dönüşüm dizisinin çekirdeğini içermesi için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

dir. [3; Sh. 149].

BÖLÜM 2

BANACH LİMİTLERİ

Bu bölümde Banach limiti kavramının ilk çıkışı, bazı özellikleri incelenecek ve hemen hemen yakınsaklık kavramına da yer verilecektir.

2.1. Banach Limitleri.

2.1.1. $x=(x_n)$ sınırlı bir dizi; p pozitif bir tam sayı ve $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ tam sayıların keyfi bir alt cümlesi olmak üzere

$$q(x)=q(x_n)=\inf_{n_1, n_2, \dots, n_p} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} \quad (2.1.1)$$

tanımlıyalım. Bu şekilde tanımlanan $q(x)$ fonksiyoneli m sınırlı diziler uzayı üzerinde alt lineerdir. [9; Sh. 56].

Buna göre $x, y \in m$ ve $\alpha \geq 0$ için

$$q(\alpha x) = \alpha q(x) \quad , \quad q(x+y) \leq q(x) + q(y) \quad (2.1.2)$$

dir.

Hahn-Banach teoremi uyarınca m üzerinde $L(x) \leq q(x)$ koşuluna uygun bir $L(x)$ lineer fonksiyoneli mevcuttur. Bu tip lineer fonksiyonellere $x=(x_n)$ dizisinin ^{çer} bir BANACH LİMİTİ adı verilir ve $L(x)=L(x_n)=\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olarak yazılır.

Şimdi $D; D(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $D^2(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, ... Özelliğine sahip değiştirme operatörünü göstermek üzere, $L(x)$ 'in özelliklerini belirten bir teorem verelim.

2.1.2. TEOREM. $L(x_n)$ fonksiyoneli; $(x_n), (y_n) \in M$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalerler olmak üzere aşağıdaki koşulları gerçeğe çıkar.

- (i) $L(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha L(x_n) + \beta L(y_n)$
- (ii) $x_n \geq 0$ ise $L(x_n) \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$)
- (iii) $L(Dx) = L(x)$; yani, $L(x_{n+1}) = L(x_n)$
- (iv) $L(e) = 1$ ($e = (1, 1, \dots)$)

[9].

İSPAT.

(i) Bu koşul $L(x_n)$ 'in lineer fonksiyonel olmasının ifadesidir.

(ii) $x_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$) ise $q(-x_n) \leq 0$ olup,

$$L(x_n) = -L(-x_n) \geq -q(-x_n) \geq 0 \Rightarrow L(x_n) \geq 0 \text{ çıkar.}$$

(iii) (2.1.1) de $n_1, n_2, \dots, n_p$ sayılarını sırasıyla 1, 2, ..., p olarak alalım. Buna göre $(x_n) \in M$ olduğundan $|x_n| \leq K$ ($n=1, 2, \dots$) olmak üzere $(x_n - x_{n+1})$ dizisi için

$$\frac{1}{p} \left| \sum_{i=1}^p (x_{n_i+k} - x_{n_i+k+1}) \right| = \frac{1}{p} |x_{k+1} - x_{p+k+1}| \leq \frac{2}{p} K$$

elde ederiz. Açıkça görüldüğü gibi $q(x_n - x_{n+1}) \leq 0$; benzer bir düşünce ile de $q(x_{n+1} - x_n) \leq 0$ bulunur. Buna göre $L(x_n - x_{n+1}) \leq 0$ ve

$$L(x_n - x_{n+1}) = -L(x_{n+1} - x_n) \geq -q(x_{n+1} - x_n) \geq 0$$

olur. Böylece $L(x_n - x_{n+1}) = 0$ çıkar. O halde L lineer olduğundan $L(x_{n+1}) = L(x_n)$; yani, $L(Dx) = L(x)$ bulunur.

(iv) Açıkça $q(e) = 1$ dir. Ancak $L(e) \leq q(e) = 1$ ve

$$L(e) = -L(-e) \geq -q(-e) = 1$$

ifadesinden $L(e) = 1$ çıkar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$$2.1.3. \quad q'(x) = q'(x_n) = -q(-x_n) = \sup_{n_1, n_2, \dots, n_p} \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k}$$

olarak tanımlıyalım.

Her $x = (x_n) \in m$ için $\inf x_n \leq L(x_n) \leq \sup x_n$ olduğu açıktır. $L(x_n)$ 'in (x_n) dizisinin ilk terimlerinden, örneğin $k < k_0$ için x_k dan bağımsız düşünersek, biraz daha hassas olan

$$L_*(x) = \liminf x_n \leq L(x_n) \leq \limsup x_n = L^*(x) \quad (2.1.3)$$

ifadesini elde ederiz. q alt lineer fonksiyonel olduğundan (2.1.2) de $y = -x$ alırsak:

$$0 = q(x-x) \leq q(x) + q(-x) \Rightarrow -q(-x) \leq q(x), \text{ yani } q'(x) \leq q(x) \text{ dir.}$$

Eğer $(x_n) \in m$ ve $(y_n) \in c$ ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} q(x_n + y_n) &= \inf_{n_1, n_2, \dots, n_p} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (x_{n_i+k} + y_{n_i+k}) \\ &= \inf_{n_1, n_2, \dots, n_p} \{ \lim_{k \rightarrow \infty} y_n + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} \} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_n + q(x_n) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

elde edilir.

$q(x_n)$ ve $q'(x_n)$ yardımıyla (2.1.3) daha hassas olarak yazılabilir. Gerçekten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} \geq L\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k}\right) = L(x_n)$$

ve benzer şekilde $\liminf$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} \leq L\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k}\right) = L(x_n)$$

bulunur. Bu nedenle

$$q'(x_n) \leq L(x_n) \leq q(x_n) \quad (2.1.5)$$

elde edilir. [7].

(2.1.3) den yakınsak diziler için bütün $L(x_n)$ limitlerinin çakışık olduğu aşıkardır.

TANIM. Eğer $L(x_n)=s$ her L limiti için sağlanıyorsa, (x_n) sınırlı dizisine hemen hemen yakınsak ve $s=\lim x_n$ sayısına onun F -limiti adı verilir.

Şimdi bir $x=(x_n)$ dizisinin hemen hemen yakınsaklığını karakterize edecek iki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

2.1.4. TEOREM. $x=(x_n)$ dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$q'(x_n)=q(x_n) \quad (2.1.6)$$

olmasıdır. [7; Sh. 169].

İSPAT. $q'(x_n) \leq L(x_n) \leq q(x_n)$ den koşulun yeter olduğu hemen görülür.

Tersine belirli bir $x=(x_n)$ dizisi için $q'(x_n) < q(x_n)$ olsun. O zaman L yi aşağıdaki şekilde inşa edebiliriz; $y \in C$ alalım, buna göre $L(y_n) = \lim y_n$ dir. $y \in C$, α reel olmak üzere $y + \alpha x$ elemanlarının uzayı içine L nin temdidini için, $L(x_n)$ in değerini

$$\sup_{y \in C} \{-q(-x_n - y_n) - \lim y_n\} \leq L(x_n) \leq \inf_{y \in C} \{q(x_n + y_n) - \lim y_n\}$$

aralığında keyfi olarak seçebiliriz. Eğer $(x_n) \in m$ ve $(y_n) \in c$ ise $q(x_n + y_n) = \lim y_n + q(x_n)$ gereğince eşitsizlik

$$q'(x_n) \leq L(x_n) \leq q(x_n)$$

eşitsizliğine eşdeğer olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Böylece L , m uzayının tümüne teşmil edilebilir.

şimdi (2.1.6) özelliğini daha basit bir şekle getiren bir diğer teoremi verelim.

2.1.5.TEOREM. Bir (x_n) dizisinin s değerine hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul n 'e göre düzgün olarak,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p-1}}{p} = s \quad (2.1.7)$$

olmasıdır. [7].

İSPAT. Eğer (2.1.7) gerçekleşiyorsa, $\epsilon > 0$ için $p \geq P$ ve her n için

$$s - \epsilon < \frac{1}{p}(x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p-1}) < s + \epsilon$$

olacak şekilde bir P sayısı vardır. Bu nedenle $q(x)$ ve $q'(x)$ ifadelerini gözönüne alırsak;

$$s - \epsilon < q'(x_n) \leq q(x_n) < s + \epsilon$$

çıkar. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $q'(x_n) = q(x_n) = s$ elde edilir. O halde $\lim x_n$ mevcuttur ve s 'e eşittir.

Tersine $\lim x_n = s$ olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} < s + \epsilon$$

kalacak şekilde p ve $n_1, n_2, \dots, n_p$ doğal sayıları vardır. Yeteri kadar büyük k lar, örneğin $k \geq k_0$ için

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k} < s + \epsilon \quad (2.1.8)$$

çıkar; n_i yerine $n_i + k_0$ ve k yerine $k - k_0$ alırsak, (2.1.8) daima

her doğal k sayısı için gerçekleşir.

Şimdi her n doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{n_i+k+n} &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_i+1}^{n_i+K} x_{j+n} \\ &= \sum_{j=n_p+1}^{n_1+K} x_{j+n} + O(1) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} x_{j+n} + O(1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada son terim n'e göre düzgün sınırlıdır. Buna göre yeteri kadar büyük K ve her n için (2.1.8) den

$$\frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} x_{j+n} < s + 2\epsilon$$

çıkar. Benzer olarak toplamın $s - 2\epsilon$ dan büyük olduğu gösterilebilir, böylece ispat tamamlanmış olur.

2.2. Hemen Hemen Yakınsak Dizilere Örnekler.

2.2.1. Birim çemberin sınırı üzerinde bir z kompleks sayısı için $z \neq +1$ dışında her yerde $L(z^n) = 0$ gerçekleşir.

$$\frac{1}{p} (z^n + z^{n+1} + \dots + z^{n+p-1}) = z^n \frac{1-z^p}{p(1-z)}$$

ve 2.1.5 den sonuç hemen çıkar.

$|z| = 1$, $z \neq +1$ için $\sum z^n$ geometrik serisi $\frac{1}{1-z}$ ye hemen hemen yakınsaktır (yani bu serinin $(s_n(z))$ kısmi toplamlar dizisi için $L(s_n(z)) = \frac{1}{1-z}$ dir.). Burada $|z| < 1$ için regüler olan ve $z=1$ üzerinde tek basit kutup noktasına sahip bir $f(z)$ fonksiyonunun

Taylor serisi, $|z|=1$ çevresi üzerinde her noktada $f(z)$ limitine hemen hemen yakınsaktır.

2.2.2. Bir $x=(x_n)$ dizisi için $n \geq N$ oldukça $x_{n+p}=x_n$ olacak şekilde N ve p (periyot) sayıları mevcut ise, böyle bir diziye PERİYODİK dizi adı verilir. Periyodik bir (x_n) dizisi

$$L(x_n) = \frac{1}{p}(x_N + x_{N+1} + \dots + x_{N+p-1})$$

değerine hemen hemen yakınsaktır. Örneğin $(1,0,0,1,0,0,\dots)$ dizisi $\frac{1}{3}$ değerine hemen hemen yakınsaktır.

BÖLÜM 3

BANACH-HAUSDORFF LİMİTLERİ

Bu bölümde, Banach-Hausdorff limitlerinin tanımı, özellikleri ve bu limitlerin varlığını karakterize edecek önemli bir teorem verilecektir.

3.1. Hausdorff Matrisleri

Regüler Hausdorff matrislerinin sınıfını $\mathbb{K}$ ile gösterelim.

$\mathbb{K}$ sınıfı,

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} d\phi(u) & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (3.1.1)$$

olmak üzere (a_{nk}) regüler matrisleri ile tanımlı m den m ye lineer dönüşümlerin konveks Abel yarı-grubudur. $\phi(u)$ lar ise $\phi(0)=\phi(0+)=0$, $\phi(1)=1$ koşullarını gerçekleyen $(0,1)$ aralığında sınırlı salınımlı reel fonksiyonlardır. [5].

Eğer $\phi(u)$ fonksiyonu azalan değilse veya eşdeğer olarak matrisin, bütün a_{nk} elemanları, negatif değilse, $H \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ da belirli veya tam regüler olarak ifade edilir.

Şimdi $L^*(x) = \limsup x_n$, $L_*(x) = \liminf x_n$ notasyonunu da gözönüne alarak şu tanımı verelim.

TANIM. Eğer 2.1.2 de verilen (i)-(iv) koşullarına ek olarak

$$L(Hx) = L(x) \quad (H \in \mathbb{K}) \quad (3.1.2)$$

koşulunu gerçeklerse $L(x)$ 'e bir BANACH-HAUSDORFF (B-H) fonksiyoneli veya limiti adı verilir.

B-H limitlerinin regülerlik Özelliği şöyle ifade edilir:

Eğer sınırlı bir $x=(x_n)$ dizisi enaz bir regüler Hausdorff matrisi

ile a' 'ya toplanabiliyorsa, bu taktirde her $L, B-H$ fonksiyoneli için $L(x)=a$ dır.

Aşikâr problemimiz $B-H$ limitlerinin varlığıdır. Bir $H \in K$ matrisini gözönüne alalım: Eğer H tam regüler ise, bu taktirde $\|H\| = 1$ ve

$$L_*(x) \leq L_*(Hx) \leq L^*(Hx) \leq L^*(x) \quad (3.1.3)$$

dir. Sınırlı salınımlı fonksiyonların standart ayrışımı bir regüler H matrisinin kanonik ayrışımının verir; yani H_1, H_2 tam regüler ve $a-b=1, b \geq 0$ olmak üzere

$$H = aH_1 - bH_2$$

dir.

Bu nedenle bundan böyle sadece tam regüler Hausdorff matrislerinin $K_+ \subset K$ konveks yarı-grubunu gözönüne almamız yeterli olmaktadır. Böylece (3.1.2) koşulu yerine, ona eşdeğer olan

$$L(Hx) = L(x) \quad (H \in K_+) \quad (3.1.4)$$

koşulu alınabilir.

3.2. $B-H$ Fonksiyonelleri.

Şimdi çalışmamızı oldukça kısaltacak olan bazı tanımları verelim.

$x \sim y \iff x - y \in c_0$ alalım. Buna göre $\sim$ bağıntısı toplama, skalarla çarpma ve H operatörleri altında bir denklik bağıntısıdır.

Diğer bir gösterim olarak ta

$$P_+(x) = \inf_{H \in K_+} L^*(Hx)$$

$$P_-(x) = -P_+(-x) = \sup_{H \in K_+} L_*(Hx)$$

yazalım. Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2.1. TEOREM. (a) m de $L(x)$ lineer fonksiyonelinin bir B-H fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x) \quad (x \in m) \quad (3.2.1)$$

dir.

(b) B-H fonksiyonelleri mevcuttur.

(c) Bütün B-H fonksiyonellerinin x de çakışık olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-(x) = P_+(x)$$

dir. [5].

Teoremin ispatını vermeden önce $P_+(x)$ in gerekli özelliklerini verip, daha sonra Hahn-Banach genişletme işlemini uyarlayacağız. $H_0 x = y$ Hölder Cesàro dönüşümünün rolü,

$$y_n = (n+1)^{-1}(x_0 + \dots + x_n),$$

$\phi(u) = u'$ ya karşılık olmak üzere, aşağıdaki basit özelliklere bağlı olmaktadır.

3.2.2. LEMMA. $H_0 D x \sim H_0 x$ dir. [5].

3.2.3. LEMMA.

(a) $P_+(x+y) \leq P_+(x) + P_+(y)$

(b) $P_+(\alpha x) = \alpha P_+(x), \quad \alpha \geq 0$

(c) $P_-(x) \leq P_+(x)$

(d) $|P_{\pm}(x)| \leq \|x\|; \quad x \geq 0 \text{ ise } P_{\pm}(x) \geq 0$

(e) Eğer $x \in c$ ise; $P_{\pm}(x) = \lim_n x_n,$

$P_{\pm}(x+y) = \lim_n x_n + P_{\pm}(y)$ ve $x \sim y$ ise $P_{\pm}(x) = P_{\pm}(y)$ dir.

(f) $P_{\pm}(Hx) = P_{\pm}(x) \quad (H \in K_+)$

$$(g) \quad P_{\pm}(Dx) = P_{\pm}(x)$$

$$(n) \quad P_{\pm}(Dx-x) = 0$$

$$(i) \quad P_{\pm}(Hx-x) = 0 \quad (H \in K_+)$$

[5].

İSPAT. (a) $P_+(x)$ in tanımı gereğince

$$L^*(H_1x) \leq P_+(x) + \epsilon, \quad L^*(H_2y) \leq P_+(y) + \epsilon$$

olacak şekilde K_+ da H_1, H_2 elemanları vardır. $H_3 = H_2H_1 = H_1H_2$ alalım. Buna göre

$$L^*(H_3x) = L^*(H_2H_1x) \leq L^*(H_1x) \leq P_+(x) + \epsilon$$

ve benzer şekilde

$$L^*(H_3y) \leq P_+(y) + \epsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} P_+(x+y) &\leq L^*(H_3(x+y)) \\ &\leq L^*(H_3x) + L^*(H_3y) \\ &\leq P_+(x) + P_+(y) + 2\epsilon \end{aligned}$$

olup, $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$P_+(x+y) \leq P_+(x) + P_+(y)$$

çıkar. (b) aşıkârdır. (a) da $y = -x$ alınır

$$0 = P_+(x-x) \leq P_+(x) + P_+(-x)$$

den $-P_+(-x) \leq P_+(x)$; yani $P_-(x) \leq P_+(x)$ bulunur. Bu da (c) dir.

(d) ise $P_+(x) \leq L^*(Hx) \leq L^*(x)$ ve (c) den hemen çıkar.

(e) Eğer $x \in c$ ise H regüler olduğundan

$$P_+(x) = \inf L^*(Hx) = \inf \limsup x_n = \lim x_n,$$

$$P_-(x) = \sup L_*(Hx) = \sup \liminf x_n = \lim x_n$$

ve (2.1.4) göz önüne alınır, $P_{\pm}(x+y) = \lim x_n + P_{\pm}(y)$ bulunur.

şimdi de $x \in c$ ve $x-y \in c_0$ olsun. Buna göre $x-y \in c_0$ dir. O halde

$$0 = P_{\pm}(x-y) = \lim x_n + P_{\pm}(-y) \Rightarrow \lim x_n = P_{\pm}(y) \text{ dir.}$$

Ancak xac olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P_{\pm}(x)$ dir. Böylece $P_{\pm}(x) = P_{\pm}(y)$ elde edilir. (f) K_+ nın yarı-grup özelliği, (3.1.3) ve $P_{\pm}(x)$ in tanımının bir sonucudur. Lemma 3.2.2, (e) ve (f) den

$$P_{\pm}(Dx) = P_{\pm}(H_0 Dx) = P_{\pm}(H_0 x) = P_{\pm}(x) ;$$

(f) ve lemma 3.2.2 den de

$$P_{\pm}(Dx-x) = P_{\pm}(H_0 Dx - H_0 x) = 0$$

elde edilir ki bunlar sırasıyla (g) ve (h) dir.

(i) nin ispatını yapmak için

$$H_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n H^i \in K_+$$

elemanlarının

$$\|H_n H - H_n\| \leq \frac{2}{n+1}$$

ergodik özelliğinden yararlanacağız. [6]. Açıkça

$$\begin{aligned} |P_{\pm}(Hx-x)| &= |P_{\pm}((H_n H - H_n)x)| \leq \|(H_n H - H_n)x\| \\ &\leq \frac{2}{n+1} \|x\| \end{aligned}$$

dir. Ancak n keyfi olduğundan $P_{\pm}(Hx-x) = 0$ bulunur.

Şimdi teorem 3.2.1 in ispatını verebiliriz.

İSPAT. (a) Gereklik. $L(x)$ B-H fonksiyonellerinin (3.2.1) eşitsizliğini sağlamaları (2.1.3) ve (3.1.4) özelliklerinin bir sonucudur. Gerçekten (2.1.3) den

$$L_*(Hx) \leq L(Hx) \leq L^*(Hx) \quad (H \in K_+)$$

dir. Ancak $P_+(x)$ ve $P_-(x)$ tanımları da göz önüne alınırsa

$P_-(x) \leq L(Hx) \leq P_+(x)$ elde edilir. Halbuki (3.1.4) den $H \in K_+$ için $L(Hx) = L(x)$ dir. Böylece $P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x)$ bulunur.

Yeterlilik. (3.2.1) koşulunun gerçekleştiğini kabul edelim.

2.1.2 nin (i) koşulunun gerçeklendiği aşıkardır. Şimdi teorem 2.1.2 nin (ii), (iii) ve (iv) koşulları ile (3.1.4) koşulunun gerçeklendiğini gösterelim.

(ii) $x_n \geq 0$ ($n=1,2,\dots$) olsun. Bu taktirde lemma 3.2.3 (d) den $P_+(x) \geq 0$ dir, bu nedenle (3.2.1) den $L(x) \geq 0$ çıkar.

(iii) Lemma 3.2.3 (h) dan

$$P_-(Dx-x) \leq L(Dx-x) \leq P_+(Dx-x)$$

eşitsizliği $L(Dx-x)=0$ eşitsizliğine dönüşür, ancak L lineer olduğundan $L(Dx)=L(x)$ elde edilir.

(iv) $P_+(e)=1$ olup (3.2.1) den hemen $L(e)=1$ çıkar.

Lemma 3.2.3 (i) den $P_+(Hx-x)=0$ ve (3.2.1) göz önüne alınırsa $L(Hx-x)=0$ elde edilir. L lineer olduğundan o halde $H \in K_+$ için $L(Hx)=L(x)$ dir, bu ise (3.1.4) dir.

O halde $P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x)$ koşulunu gerçekleyen $L(x)$ bir B-H fonksiyoneliidir.

(b) $P_+(x)$ alt lineer bir fonksiyoneldir, böylece Hahn-Banach teoremi gereğince $L(x) \leq P_+(x)$ olacak şekilde bir L lineer fonksiyoneli mevcuttur. Ayrıca $L(x) \leq P_+(x)$ koşulu $P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x)$ koşuluna eşdeğer olup ; $L(x)$ bu koşulu yani (3.2.1) koşulunu gerçeklediğinden bir B-H fonksiyoneliidir.

(c) $P_-(x) = P_+(x)$ koşulunun x de bütün B-H fonksiyonellerinin çakışık olması için yeter olduğu açıktır.

Gereklilik. $q_+(x)$ yerine $P_+(x)$ alınarak, 2.1.3 deki ispat yöntemi uygulanmak suretiyle ve lemma 3.2.3(e) de göz önüne alınarak aynı şekilde yapılır.

BÖLÜM 4

BANACH-HAUSDORFF LİMİTLERİNİN

GENELLEŞTİRİLMELERİ

Bu bölümde Banach-Hausdorff limitleri kavramı genelleştirecektir.

İlk olarak çalışmamızda gerekli olan bazı tanım ve teoremleri verelim.

4.1. Mutlak Eşdeğerlik ve Mutlak regülerlik.

4.1.1. TANIM. A ve B regüler matrisler olmak üzere

$$x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad x''_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

alalım. Buna göre

$$n \rightarrow \infty \text{ için } x'_n - x''_n \rightarrow 0$$

oluyorsa, (x_k) dizilerinin verilen bir sınıfı için A ile B matrisleri mutlak eşdeğerdir denir.

Regüler A ve B matrislerinin mutlak eşdeğerliliğine ilişkin gerek ve yeter koşul aşağıdaki teoremle verilir.

4.1.2. TEOREM. Regüler A ve B matrislerinin bütün sınırlı diziler için mutlak eşdeğer olmalarının gerek ve yeter koşulu

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| \rightarrow 0 \quad (4.1.1)$$

dır. [3; Sh. 105].

4.1.3. A, B, C ve D regüler matrisler olmak üzere her x em

için A ile B ve C ile D mutlak eşdeğer iseler, her $x \in m$ için AB ile BA ve CD ile DC mutlak eşdeğer olduğu gibi AC ile BD de mutlak eşdeğerdir. [3; Sh. 133].

4.1.4. TANIM. $x \in m$ hem A hem de B limitlenebilen bir dizi olmak üzere her $x \in m$ için

$$A\text{-}\lim x_n = B\text{-}\lim x_n$$

ise, A ve B matrislerine m için (sınırlı) tutarlıdır denir.

4.1.5. TEOREM. Eğer A ile B her $x \in m$ için AB ile BA mutlak eşdeğer olacak şekilde regüler matrisler iseler, bu taktirde A ile B enaz $m \cap C_A \cap C_B$ de (yani $C_A \cap C_B$ deki bütün sınırlı diziler için) tutarlıdır. [3; Sh. 132, Pr.11].

İSPAT. Her $x \in m \cap C_A \cap C_B$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = x'_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k = \bar{x}_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

olsun. $\alpha = \beta$ olduğunu göstereceğiz. (x'_n) ile $(\bar{x}_n)$ dizileri yakınsak ve A ile B matrisleri regüler olduklarından

$$A_n(\bar{x}) = \bar{x}_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$B_n(x') = x'' \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. Ancak $(x_k) \in m$ için

$$\sum_i a_{ni} \left(\sum_k b_{ik} x_k \right) = \sum_k \left(\sum_i a_{ni} b_{ik} \right) x_k \quad (4.1.2)$$

$$\sum_i b_{ni} \left(\sum_k a_{ik} x_k \right) = \sum_k \left(\sum_i b_{ni} a_{ik} \right) x_k \quad (4.1.3)$$

dir.

A ile B regüler matrisler ve $(x_k) \in m$ olduğundan her n için yukarıdaki çift serilerin her ikisinde mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla toplam sırası değiştirilebilir ve böylece (4.1.2) ve (4.1.3) den

$$A_n(\bar{x}) = (AB)(x_k) \quad \text{ve} \quad B_n(x') = (BA)(x_k) \quad (4.1.4)$$

elde edilir. Hipotezden dolayı AB ile BA her $x \in m$ için mutlak eşdeğer olduğundan, (4.1.2) ile (4.1.3) ün sağ taraflarının farkı $n \rightarrow \infty$ için 0'a gider. Böylece $n \rightarrow \infty$ için $(AB)(x_k) = (BA)(x_k)$ olup (4.1.4) gereğince $n \rightarrow \infty$ için $A_n(\bar{x}) = B_n(x')$, yani $\bar{x}_n = x''_n$ dır.

$n \rightarrow \infty$ için $\bar{x}_n \rightarrow \beta$ ve $x''_n \rightarrow \alpha$ olduğundan $\beta = \alpha$ dir. O halde A ile B $m \cap c_A \cap c_B$ de tutarlıdır.

4.1.6. TANIM. A bir regüler matris olmak üzere

$$x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_{k+1} \quad , \quad x''_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k+1} x_{k+1}$$

yazalım. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $x' - x'' \rightarrow 0$ ise A matrisine mutlak regüler (mutlak translatif) matris adı verilir.

4.1.7. TEOREM. $A = (a_{nk})$ matrisinin mutlak regüler (veya mutlak translatif) bir matris olması için gerek ve yeter koşul

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{n,k+1}) x_{k+1} \rightarrow 0$$

dır. [3; Sh. 119].

4.1.8. TEOREM. $A = (a_{nk})$ regüler matrisinin her $x \in m$ için mutlak regüler (veya mutlak translatif) yani;

$$A_n(Dx - x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.1.5)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. [3; Sh. 119].

Şimdi Banach-Hausdorff limitlerini iki yolla genelleştireceğiz.

4.2. I. Genelleştirme.

K_+ nın yerine aşağıdaki özelliklere sahip negatif olmayan regüler matrislerin bir A yarı-grubunu alalım:

(α) Her $A, B \in A$ matris çifti, AB ile BA m için mutlak eşdeğer olacak şekildedir.

(β) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

(γ) A m için mutlak regüler olan enaz bir matris içerir.

İlk olarak A nın bu özellikleri üzerinde bazı uyarılar vereceğiz: Eğer A ile B komütatif ise, bu taktirde AB ile BA nın m için mutlak eşdeğer olacağı yani; (α) nın gerçekleşeceği açıktır, böylece (α) Abel yarı-grubu olduğundan K_+ için de gerçekleşir. Ancak tersi doğru değildir, yani AB ile BA nın m için mutlak eşdeğer olması A ile B nin komütatif olmasını gerektirmez, dolayısıyla (α) koşulu komütatiflikten daha az kısıtlayıcıdır.

Bu A ile B nin 4.1.5 gereğince her $x \in m$ için tutarlı olmasını gerektirir. (γ) yı gerçekleyen matris, yani mutlak regüler olan matris H_0 aritmetik ortalamalarındandır. [3; Sh. 120]. Bu matris A yerine K_+ alındığında A da kapsanır. K_+ ya ek olarak bunların örnekleri; Borel matrisi, Nörlund matrisi ve regüler Abel

matrisini sayabiliriz. [3].

A nın bir yarı-grup olduğunu göstermek için negatif olmayan regüler matrislerin her hangi sayıda çarpımının negatif olmadığına işaret edelim ve aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

4.2.1. TEOREM. İki regüler matrisin çarpımı vardır ve bir regüler matristir; çarpım birleşme özelliğine sahiptir. [3;Sh.83].

$\bar{A}$ nın elemanlarının çarpımı (α) özelliğine sahiptir. Çünkü $A, B, C \in \bar{A}$ ise, bu taktirde AB ile BA ve BC ile CB her $x \in \bar{A}$ için mutlak eşdeğer olacağından 4.1.3 den CAB ile CBA ve BCA ile CBA da her $x \in \bar{A}$ için mutlak eşdeğer olup, böylece CAB ile BCA mutlak eşdeğerdir. Aynı zamanda $A, B \in \bar{A}$ için $\|A\|=1$ ve $\|B\|=1$ dir. Buna göre $\|AB\|=\|A\| \|B\|=1$ ve $\|AB\|$ 1'den daha küçük olamayacağına göre $\|AB\|=1$ elde edilir. O halde $\bar{A}$ yarı-gruptur.

4.2.2. TANIM. Eğer bir Banach limiti olmanın yanısıra

$$L(Ax) = L(x) \quad (A \in \bar{A}, x \in \bar{A}) \quad (4.2.1)$$

koşulunu gerçeklemesi halinde $L(x)$ 'e $\bar{A}$ üzerinde bir $B-\bar{A}$ fonksiyoneli veya limiti adı verilir.

Böylece eğer $x \in \bar{A}$ dizisi enaz bir $A \in \bar{A}$ matrisi ile a 'ya toplanabiliyorsa bu taktirde her $L, B-\bar{A}$ fonksiyoneli için $L(x)=a$ dır.

Şimdi

$$P_+^*(x) = \inf_{A \in \bar{A}} L^*(Ax) \quad \text{ve} \quad P_-^*(x) = -P_+^*(-x) = \sup_{A \in \bar{A}} L_*(Ax)$$

gösterimi kullanılarak aşağıdaki teorem, teorem 3.2.1 tarzında inşa edilebilir.

4.2.3. TEOREM.

(a)' m üzerinde $L(x)$ lineer fonksiyonelinin bir $B-A$ fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x) \quad (x \in m)$$

dir.

(b)' $B-A$ fonksiyonelleri mevcuttur.

(c)' Bütün $B-A$ fonksiyonellerinin x de çakışık olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-(x) = P_+(x)$$

dir. [2].

şimdi teoremin ispatı için gerekli olan iki lemma verelim.

4.2.4. LEMMA. (γ) Özelliği uyarınca her $x \in m$ için mutlak regüler olan bir $A \in A$ vardır. Buna göre her $x \in m$ için $A^{(0)}Dx \sim A^{(0)}x$ dir. [2].

İSPAT. Her $x \in m$ için

$$\begin{aligned} A_n^{(0)}(Dx) - A_n^{(0)}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(0)} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(0)} x_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(0)} (x_{k+1} - x_k) \\ &= -a_{n1}^{(0)} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk}^{(0)} - a_{n,k+1}^{(0)}) x_{k+1} \end{aligned}$$

dir. Her $x \in m$ için $A_n^{(0)}(Dx) - A_n^{(0)}(x) \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $n \rightarrow \infty$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(0)} - a_{n,k+1}^{(0)}| \rightarrow 0$ olduğunu biliyoruz. O halde $A^{(0)}Dx \sim A^{(0)}x$ dir.

4.2.5. LEMMA.

- (a)' $P'_+(x+y) \leq P'_+(x) + P'_+(y)$
 (b)' $P'_+(\alpha x) = \alpha P'_+(x) \quad \alpha \geq 0$
 (c)' $P'_-(x) \leq P'_+(x)$
 (d)' $|P'_\pm(x)| \leq \|x\| \quad ; \quad x \geq 0 \text{ ise } P'_\pm(x) \geq 0 \text{ dir.}$
 (e)' $(x_n) \in c \text{ ise } P'_\pm(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P'_\pm(x_n) \text{ ve } x \sim y \text{ ise } P'_\pm(x) = P'_\pm(y)$
 (f)' $P'_\pm(Ax) = P'_\pm(x) \quad (A \in \bar{A})$
 (g)' $P'_\pm(Dx) = P'_\pm(x)$
 (h)' $P'_\pm(Dx-x) = 0$
 (i)' $P'_\pm(Ax-x) = 0 \quad (A \in \bar{A})$

[2].

İSPAT. Burada yalnız (a)' ve (i)' yü ispatlıyacağız. Diğerlerinin ispatı 3.2.3 de verilen ispatın tamamen aynıdır.

(a)' $\epsilon > 0$ istenildiği kadar küçük bir sayı olmak üzere, $P'_+(x)$ in tanımını gereğince

$$L^*(A_1 x) \leq P'_+(x) + \epsilon \text{ ve } L^*(A_2 y) \leq P'_+(y) + \epsilon$$

olacak şekilde $A_1, A_2 \in \bar{A}$ vardır. $\bar{A}$ nın (α) Özelliği uyarınca $A_1 A_2$ ile $A_2 A_1$ m için mutlak eşdeğer olduklarından

$$L^*(A_1 A_2 x - A_2 A_1 x) = 0$$

ve 1.4.1 çekirdek teoreminden $L^*(A_1 A_2 x) \leq L^*(A_2 x)$ dir. Buna göre $A_3 = A_1 A_2$ yazarak

$$\begin{aligned} L^*(A_3 x) &= L^*(A_1 A_2 x) \leq L^*(A_1 A_2 x - A_2 A_1 x) + L^*(A_2 A_1 x) \\ &= L^*(A_2 A_1 x) \leq L^*(A_1 x) \leq P'_+(x) + \epsilon \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $L^*(A_3 y) \leq P_+^1(y) + \epsilon$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} P_+^1(x+y) &\leq L^*(A_3(x+y)) \\ &\leq L^*(A_3 x) + L^*(A_3 y) \\ &\leq P_+^1(x) + P_+^1(y) + 2\epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Ancak $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$P_+^1(x+y) \leq P_+^1(x) + P_+^1(y)$$

çıkar.

(i)' Her $A \in A$ için $\|A\| = 1$ olduğundan, eğer $A \in A$ için

$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A^k$ alırsak, $\|A_n\| = 1$ ve $A_n \in A$ olduğu açıktır.

$$A_n A - A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A^{k+1} - A^k) = \frac{1}{n} (A^{n+1} - A)$$

ve $\|A\| = 1$ olduğundan

$$\|A_n A - A_n\| \leq \frac{1}{n} (\|A\|^{n+1} + \|A\|) = \frac{2}{n}$$

çıkar. Böylece (f)' ve (d)' den

$$\begin{aligned} |P_{\pm}^1(Ax - x)| &= |P_{\pm}^1((A_n A - A_n)x)| \\ &\leq \|(A_n A - A_n)x\| \\ &\leq \frac{2}{n} \|x\| \end{aligned}$$

olur, ve n keyfi pozitif bir tam sayı olduğundan

$$P_{\pm}^1(Ax - x) = 0$$

bulunur.

Bu bilgilerin ışığı altında artık "B-H fonksiyoneli" yerine "B- $\bar{A}$ fonksiyoneli" ni alarak Teorem 3.2.1'in ispatına benzer bir yolla Teorem 4.2.3'ün ispatını tamamlayabiliriz.

4.2.6. SONUÇ. Eger $\bar{A}$ yarı-grubunun tanımında (β) koşulu yerine daha genel olan aşağıdaki $(\beta)'$ koşulu alınırsa Teorem 4.2.3 doğruluğunu korur.

$(\beta)'$: B (β) koşulunu gerçekleyen ve C her sınırlı diziyi bir sıfır dizisine dönüştüren birer matris olsunlar. Buna göre her $A \in \bar{A}$ matrisi $A=B+C$ formundadır (yani A ile B m için mutlak eşdeğerdirler).

$$M_n = \sum_k a_{nk} = \sum_k |a_{nk}|$$

alalım. Eger her n için $M_n \leq 1$ ise bu taktirde A nın K_r -sınırı $\|A\|=1$ dir. Eger enaz bir n için $M_n > 1$ ise, o zaman $\|A\| > 1$ olur. Bu durumda B nin (β) koşulunu gerçeklemesi için $b_{nk} = \frac{a_{nk}}{M_n}$ almanız yeterdir ve sonuç olarak $\|B\|=1$ çıkar. Yine

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - b_{nk}) = M_n - 1 \rightarrow 0$$

olduğundan A ile B m için mutlak eşdeğerdir. Böylece A $(\beta)'$ koşulunu gerçekler.

A ile B her x m için mutlak eşdeğer olduklarından 4.1.3 gerejince her x m için AB ile BA da mutlak eşdeğerdir. Buna göre $B, \bar{A}$ nın tanımındaki (α) koşulunu gerçekler.

Şimdi (β) koşulu yerine $(\beta)'$ koşulu alındığında lemma 4.2.5 in (i)' koşulunun sağlandığını göstereceğiz.

Eğer $\|A\| \neq 1$ ise yukarıda verilen ispat aynen uygulanır. Eğer enaz bir $A \in \tilde{A}$ için $\|A\| > 1$ ise $b_{nk} = \frac{a_{nk}}{M_n}$ alarak, $\|B\| = 1$ elde edilir ve böylece yukarıdaki ispat yöntemi uygulanarak

$$|P'_\pm(Bx-x)| \leq \frac{2}{n} \|x\|$$

çıkar. Ancak n keyfi bir pozitif tam sayı olduğundan $P'_\pm(Bx-x) = 0$ bulunur, A ile B mutlak eşdeğer ve böylece $Bx-x \sim Ax-x$ olduğundan lemma 4.2.5 (e)' den $P'_\pm(Bx-x) = P'_\pm(Ax-x)$ elde edilir.

Şimdi 4.2.6'nın ispatını tamamlayalım.

Eğer $A = D = (d_{nk})$ translasyon matrisini içeriyorsa ispat basitleşir. Çünkü $A \in \tilde{A}$ ve $x \in m$ olmak üzere $L(Dx) = L(x)$ koşulu, $L(Ax) = L(x)$ koşulunun özel bir hali olarak ortaya çıkar ve lemma 4.2.5 in (g)' ile (h)' koşulları artık gerekmez. Eğer $D \in \tilde{A}$ ise $\tilde{A}$ 'nın (a) özelliğinden her $A \in \tilde{A}$ matrisi her $x \in m$ için DA ile AD mutlak eşdeğer olacak şekildedir. Bu taktirde (a) koşulu her $A \in \tilde{A}$ için $\tilde{A}$ üzerinde oldukça ağır bir kısıtlama koyan

$$\sum_k |a_{n,k-1} - a_{n+1,k}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

koşulunu gerektirir.

Böylece 4.2.6'nın ispatı tamamlanmış oldu.

D bir alt-yarımatris olmadığından, şüphesiz $K_+ D$ yi kapsamaz.

4.3. II. Genelleştirme.

4.3.1. Yukarıda 4.2. de verdiğimiz genelleştirilmiş limitler $L(Dx)=L(x)$ koşulunu daima gerçekelemez.

Şimdi m üzerinde genelleştirilmiş bir limiti

$$L(x) \leq L^*(x) \quad (x \in m) \quad (4.3.1)$$

koşulunu gerçekeleyen bir $L(x)$ lineer fonksiyoneli olarak tanımlıyalım; böylece 2.1.2'nin (i) koşulunu kabul ediyoruz. (2.1.3) gereğince $L_*(x) \leq L(x) \leq L^*(x)$ den 2.1.2'nin (ii) ve (iv) koşullarının da gerçekelediği açıktır. Fakat 2.1.2'nin (iii) koşulunun gerçekelemesi gerekmez.

Şimdi eğer $L(x)$ 'in tanımını (4.3.1) deki gibi ve $\hat{A}$ nın tanımını yukarıdaki gibi alırsak (böylece (γ) özelliği gerçekeleleniyor); bu taktirde teorem 4.2.3 ve sonuç 4.2.6 herhangi bir değışiklik olmaksızın gerçekelelenir. Böylece 2.1.2'nin (iii) koşulu da gerçekelelenir.

Bu durumda aynı zamanda Banach limitleri olan I. genelleştirilmiş limitlerin bir alt sınıfından oluşan, teoremdeki $L(x)$ fonksiyonelleri şüphesiz $B-\hat{A}$ fonksiyonelleridir.

Şimdi $\hat{A}$ nın (α) ve (β) veya $(\beta)'$ özelliklerini aynen fakat (γ) özelliği yerine aşağıdaki $(\gamma)'$ özelliğini alarak yeni bir $\hat{A}'$ yarı-grubunu gözönüne alalım.

$(\gamma)': \hat{A}'$ m için mutlak regüler (mutlak translatif) olan matris içermes.

Buna göre A' için lemma 4.2.4 yanlıştır; bu nedenle onu ve bunun sonucu olarak lemma 4.2.5 in (g)'ile (h)' koşulları atlanabilir. O zaman 2.1.2 nin (iii) koşulunun $L(x)$ ile gerçetlenmesi gerekmez.

4.3.2. TANIM. $L(x)$ fonksiyoneli (4.3.1) ve

$$L(Ax) = L(x) \quad (A \in A', x \in M) \quad (4.3.2)$$

koşulunu gerçeklesin. Bu taktirde $L(x)$ e bir B^*-A' fonksiyoneli veya limiti denir.

Şimdi

$$P_+''(x) = \inf_{A \in A'} L^*(Ax) \quad , \quad P_-''(x) = -P_+''(-x) = \sup_{A \in A'} L_*(Ax)$$

olarak alalım. Buna göre şu sonucu elde ederiz.

4.3.3. TEOREM.

(a) " (4.3.1) ile tanımlı $L(x)$ lineer fonksiyonelinin bir B^*-A' fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-''(x) \leq L(x) \leq P_+''(x) \quad (x \in M)$$

dir.

(b) " B^*-A' fonksiyonelleri mevcuttur.

(c) " Bütün B^*-A' fonksiyonellerinin x de çakışık olması için gerek ve yeter koşul

$$P_-''(x) = P_+''(x)$$

olmasıdır. [2] .

İSPAT. Yalnız B^*-A' fonksiyonellerinin varlığını göstermemiz gerekmektedir. Eğer herhangi bir regüler A matrisi için

$$|a_{n/p_n}| = \max_{k=1,2,\dots} |a_{nk}|$$

olmak üzere p_n , en küçük tam sayı olarak tanımlı ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.3.3)$$

ise; bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{p_n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \rightarrow 0$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{p_n-1} (a_{nk} - a_{n,k+1}) \rightarrow 0$$

olup böylece $a_{n1} - a_{n,p_n} \rightarrow 0$ dır. A regüler bir matris olduğundan

$$a_{n,p_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.3.4)$$

olur. Böylece (4.3.4), (4.3.3) den çıkar, ancak tersi yanlıştır.

Bundan dolayı hiç olmazsa enaz biri için (4.3.4) sağlanacağı, fakat hiçbirini için (4.3.3) sağlanmayacak şekilde A matrislerinden oluşan ; A'nın (α) ve (β) veya $(\beta)'$ özelliklerine de sahip A' sınıfına ihtiyacımız vardır.

Bu tip matrisler aşağıdaki yöntemle elde edilebilir.

A'nın matrislerini alalım ve A'nın her bir matrisinin her ardışık kolon çiftleri arasına 0 elemanlarından oluşan bir veya daha fazla kolon yerleştirerek "hafifletilmiş" ve satır-tekrarlı matrisleri oluşturalım. Burada yerleştirme her bir matris için aynı olmakta ve m_n A'nın orijinal matrisinin n-inci ve n+1 -inci kolonları arasına yerleştirilen sıfır kolonlarının sayısını göstermek üzere; bu tip matrisler n-inci satırın m_n defa tekrarlanması ile elde edilir. Böylece eğer $A \in A$ nın her ardışık kolon çifti arasına yalnız bir sıfır kolonu koyul-

muş ise A matrisi her satırı bir kez tekrarlanan

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 & \dots \\ a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 & \dots \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & \dots \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

matrisine dönüşür.

Buna göre $\tilde{A}$ sınıfı uygun bir şekilde bir A' formunda değişmiş oldu. Çünkü $\tilde{A}$ nın (β) veya $(\beta)'$ Özelliği A' nün negatif olmayan regüler A' matrisleri tarafından gerçekleştirir ve $\tilde{A}$ nın (α) Özelliği

$$\sum_k \left| \sum_i (a_{ni} b_{ik} - b_{ni} a_{ik}) \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan, bu serilerin bazı terimlerinden oluşan

$$\sum_k \left| \sum_i (a'_{ni} b'_{ik} - b'_{ni} a'_{ik}) \right| \quad (A', B' \in \tilde{A}')$$

serisinin $n \rightarrow \infty$ için daha kuvvetle 0'a gideceği açıktır. O halde $\tilde{A}$ nın (α) Özelliğide $\tilde{A}'$ nün negatif olmayan regüler A' matrisleri tarafından gerçekleştirir.

Varsayım gereğince (4.3.3) ü, yani $\tilde{A}$ nın (γ) Özelliğini ve böylece (4.3.4) ü gerçekleyen $\tilde{A}$ nın bir matrisi vardır. Bu matrise A diyelim. Bu A matrisi yukarıda belirtildiği gibi "hafifletilmiş" ve satır-tekrarlı olduğu zaman (4.3.4) ü gerçekliyecek fakat (4.3.3) ü gerçeklemeyecektir. Böylece boş

olmayan bir $\hat{A}'$ sınıfının varlığını göstermiş olduk, bu nedenle $B^*-\hat{A}'$ fonksiyonelleri mevcuttur.

$\hat{A}$ nın matrislerine yerleştirilen sıfır kolonlarının sayısı keyfi olduğundan $B^*-\hat{A}'$ fonksiyonellerinin $B-\hat{A}$ fonksiyonellerinden çok daha fazla olduğu açıktır.

BÖLÜM 5

BANACH VE DİĞER LİMİTLER

Bu bölümde m sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı, farklı $\emptyset$ alt lineer fonksiyonelleri için $B-\emptyset$ limitlerine ilişkin tanım ve teoremler; m üzerinde regüler matris dönüşümleri altında invaryant kalan $B-\emptyset$ limitleri incelenecektir.

5.1. $B-\emptyset$ Fonksiyonelleri.

E , $e=(1,1,\dots)\in E$ ve $x\in E \Rightarrow Dx\in E$ olacak şekilde m 'nin lineer bir alt uzayı olsun; her $x\in E$ için teorem 2.1.2 nin (ii), (iii) ve (iv) koşullarını gerçekleyen $L:E \rightarrow R$ lineer fonksiyonellerin cümlesini $\mathcal{L}_E$ ile gösterelim. Böylece $\mathcal{L}=\mathcal{L}_m$ için bir $L\in \mathcal{L}$ fonksiyoneli bir Banach limiti olur.

$\emptyset$, E üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olmak üzere E üzerinde her $x\in E$ için $L(x)\leq \emptyset(x)$ koşulunu gerçekleyen bütün L lineer fonksiyonellerin cümlesini $\{E,\emptyset\}$ ile gösterelim. L nin lineer olması nedeni ile her $x\in E$ için $L(x)\leq \emptyset(x)$ koşulu $-\emptyset(-x) \leq L(x)\leq \emptyset(x)$ koşulu ile eşdeğerdir.

5.1.1. TANIM. $\{m,\emptyset\}$ nin bir elemanına bir $B-\emptyset$ LİMİTİ denir.

5.1.2. TEOREM.

$$(i) \mathcal{L}_E = \{E, q\} \subset \{E, L^*\}$$

ve

$$(ii) \mathcal{L}_{m_0} = \{m_0, q\} = \{m_0, L^*\}$$

dir. [4].

İSPAT. 2.1.3 gereğince her $x=(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ için

$$L_*(x) \leq q'(x) \leq q(x) \leq L^*(x)$$

ve $L \in \mathcal{L}$ ise $q'(x) \leq L(x) \leq q(x)$ dir. Bu eşitsizliklerden dolayı herhangi E alt uzayı için

$$\mathcal{L}_E \subset \{E, q\} \subset \{E, L^*\}$$

elde edilir. Şimdi $L \in \{E, L^*\}$ alalım. Teorem 2.1.2 nin (ii) ve (iv) koşullarının gerçekleşeceği açıktır. Ayrıca $L \in \{E, q\}$ ise aynı teoremin (iii) koşulunun gerçekleşmesi için m yerine E almak yeterlidir. Böylece $\mathcal{L}_E = \{E, q\}$ elde edilir. Bu da (i) nin ispatını tamamlar.

(ii) $E=m_0$ olsun. Buna göre (i) m_0 için gerçekleşir. İspatı tamamlamak için $L \in \{m_0, L^*\}$ 'ın 2.1.2 nin (iii) koşulunu gerçeklediğini göstermeliyiz.

$L \in \{m_0, L^*\}$ olsun. O zaman $x \in m_0 \Rightarrow Dx - x \in c_0 \subset m_0$ ve m_0 üzerinde $L_*(x) \leq L(x) \leq L^*(x)$ olduğundan, $L(Dx - x) = 0$ çıkar. Ancak L lineer olduğundan ispatı tamamlayan $L(Dx) = L(x)$ koşulu elde edilir.

5.2. $B-L_A^*$ Fonksiyonelleri.

$A=(a_{nk})$ ($n, k=1, 2, \dots$) matrisini alalım. Eğer reel A matrisi 1.3.7 nin (i) koşulunu gerçekleştiriyorsa 1.3.6 uyarınca, $L^*(Ax)$, m üzerinde daima tanımlıdır.

5.2.1. TANIM. Bir A matrisi regüler ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0 \quad (5.2.1)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa A'ya kuvvetli regüler matris adı verilir.

şimdi regüler matrisler cümlesini τ ile,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rightarrow 1 \quad (5.2.2)$$

koşulunu gerçekleyen $A \in \tau$ matrislerinin cümlesini τ^+ ile ve kuvvetli regüler olan $A \in \tau^+$ matrislersınıfını τ^* ile gösterelim. Buna göre regüler A matrisleri için $a_{nk} > 0$ ise (5.2.2) nin gerçekleneceği açıktır.

Çalışmamızda $L^*(Ax)$ yerine bazen $L_A^*(x)$ yazacağız.

şimdi m üzerinde $A \in \tau$ için $B-L_A^*$ limitlerini inceliyelim.

5.2.2. TEOREM. E, m nin bir alt uzayı olmak üzere

$$(i) \quad \{E, L_A^*\} \subset \mathcal{L}_E = \{E, q\} \quad (A \in \tau^*)$$

ve

$$(ii) \quad \{m_0, L_A^*\} \subset \mathcal{L}_{m_0} = \{m_0, q\} \quad (A \in \tau^+)$$

dir. [4].

İSPAT. (i) $A \in \tau$ olsun. L_A^* , E üzerinde alt lineer olduğundan Hahn-Banach teoremi gereğince, her $x \in E$ için $L(x) \leq L_A^*(x)$ olacak şekilde bir lineer L fonksiyoneli mevcuttur. Dolayısıyla $\{E, L_A^*\}$ boş değildir. Reel diziler için 1.4.2 çekirdek teoremi gereğince, her $x \in E$ için

$$A \in \tau^+ \Rightarrow L_A^*(x) \leq L^*(x) \quad (5.2.3)$$

dir. Buna göre $A \in \tau^+$ için $\{E, L_A^*\} \subset \{E, L^*\}$ elde edilir.

Şimdi $A \in \tau^*$ olsun; eğer $L \in \{E, L_A^*\}$ ise, bu taktirde $L \in \{E, L^*\}$ olup, böylece teorem 2.1.2 nin (ii) ve (iv) koşulları gerçekleşir. Herhangi $x \in E$ için $Dx - x \in E$ olduğundan $L(Dx - x) \leq L_A^*(Dx - x)$ dir.

Ancak $A \in \mathcal{T}^*$ olduğundan, 4.1.8 gereğince $L_A^*(Dx-x)=0$ çıkar, L lineer olduğundan E üzerinde $L(Dx)=L(x)$, yani 2.1.2 nin (iii) koşulu gerçekleşir. Bu da $L \in \mathcal{L}_E$ olduğunu ifade eder.

(ii) $E=m_0$ alalım. Herhangi bir $A \in \mathcal{T}^+$ matrisi için 2.1.2' nin (ii) ve (iv) özelliklerinin gerçekleştiğini yukarıda gösterdik. İspatı tamamlamak için $A \in \mathcal{T}^+$ olunca $L(Dx)=L(x)$ olduğunu göstermeliyiz. $A \in \mathcal{T}^+$ olsun. $x \in m_0 \Rightarrow Dx-x \in c_0$ olduğundan, $L_A^*(Dx-x)=0$ olup, böylece L nin lineerliğinden $L(Dx)=L(x)$ elde edilir.

5.2.3. SONUÇ. $A \in \mathcal{T}^* \Rightarrow L_A^*(x) \leq q(x)$ (her $x \in m$).

İSPAT. Kabul edelim ki $q(x_0) < L_A^*(x_0)$ olacak şekilde enaz bir $x_0 \in m$ bulunsun. Buna göre Hahn-Banach teoremi gereğince $L \in \{m, L_A^*\}$ ve $L(x_0)=L_A^*(x_0)$ olacak şekilde bir L lineer fonksiyoneli mevcuttur. Böylece $q(x_0) < L(x_0)$ elde ederiz, bu ise $L \notin \{m, q\}$ olduğunu ifade eder. Halbuki $E=m$ alındığında bu, teorem 5.2.2 ile çelişir. O halde $q(x_0) < L_A^*(x_0)$ kabulümüz yanlıştır, yani $L_A^*(x) \leq q(x)$ dir.

5.3. İnvariant Limitler.

5.3.1. TANIM. $\emptyset, m$ üzerinde alt lineer bir fonksiyonel ve $K, k:m \rightarrow m$ lineer dönüşümlerin bir sınıfı olsun. Eğer her $x \in m$ ve her $k \in K$ için $L(kx)=L(x)$ ise $L \in \{m, \emptyset\}$ elemanına m üzerinde K -invariant $B-\emptyset$ limiti denir.

Bu tanıma göre $B-q$ ve $A \in \mathcal{T}^*$ için $B-L_A^*$ D -invariant; $x \in c$ ve $A \in \mathcal{T}$ için A -lim $x_n = \lim x_n$ olduğundan Cauchy limiti $\mathcal{T}$ -invarianttır.

Şimdi uygun bir K sınıfı için K-invariant B- $\emptyset$ limitlerini inceliyeceğiz.

$\mathcal{T}^+$ 'nin enaz bir σ alt cümlesi için

$$w_\sigma(x) = \inf_{A \in \sigma} L_A^*(x) \quad (5.3.1)$$

olarak tanımlıyalım. $A \in \mathcal{T}^+$ için $\{m, L_A^*\}$ cümlesinin boş olmadığını görmüştük. Eğer enaz bir $\sigma \subset \mathcal{T}^+$ için $\bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\}$ cümlesini alırsak, bu cümle uygun bir $\sigma \subset \mathcal{T}^+$ sınıfı için boş olmayan ve σ -invariant B- w_σ limitleri cümlesine dönüşür. Bunu aşağıdaki teoremlerde göreceğiz.

5.3.2. TEOREM. $\sigma \subset \mathcal{T}^+$ olsun. Buna göre

$$\{m, w_\sigma\} = \bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\}$$

dir. [4].

İSPAT. 1.4.2 den

$$-L^*(-x) \leq -L^*(-Ax) \leq L^*(Ax) \leq L^*(x) \quad (\text{her } x \in m, A \in \mathcal{T}^+)$$

ve $w_\sigma(x)$ in tanımından da

$$-L^*(-x) \leq -w_\sigma(-x) \leq w_\sigma(x) \leq L^*(x)$$

elde edilir. Bu nedenle w_σ m üzerinde sonludur.

Şimdi $L \in \bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\}$ alalım. Buna göre her $A \in \sigma$ için $L(x) \leq L_A^*(x)$ olup, $w_\sigma(x)$ in tanımı gereğince $L(x) \leq w_\sigma(x)$ elde ederiz. Bu da $L \in \{m, w_\sigma\}$ yani; $\bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\} \subset \{m, w_\sigma\}$ olduğunu ifade eder.

Tersine $L \in \{m, w_\sigma\}$ olsun. Buna göre her $A \in \sigma$ için $L(x) \leq w_\sigma(x) \leq L_A^*(x)$ dir, dolayısıyla $L \in \bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\}$ dir. O halde

$$\{m, w_\sigma\} \subset \bigcap_{A \in \sigma} \{m, L_A^*\}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

G , her $A, B \in G$ ve her $x \in G$ için AB ile BA mutlak eşdeğer ve $AB, BA \in G$ olacak şekilde τ^+ nın bir alt cümlesi olsun.

Bundan sonraki teoreme geçmeden önce gerekli olan aşağıdaki lemmaları verelim.

5.3.3. LEMMA. τ bir konveks yarı-gruptur. [3; Sh. 131].

5.3.4. LEMMA. Her $A, B \in \sigma$ ve her $x \in G$ için AB ile BA mutlak eşdeğer ve $AB, BA \in \sigma$ olacak şekilde $\sigma \subset \tau$ alt cümlesi bir yarı-gruptur. [4].

İSPAT. 4.1.3 den hemen çıkar.

5.3.5. LEMMA. G bir konveks yarı-gruptur. [4].

İSPAT. Bunu ispat etmek için $A, B \in \tau^+$ iken $AB \in \tau^+$ (ve $BA \in \tau^+$) ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere $U = \lambda A + \mu B \in \tau^+$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

$C = AB = (c_{nk})$ alalım. Buna göre açıkça

$$\sum_r a_{nr} \sum_k b_{rk} \leq \sum_k |c_{nk}| \leq \sum_r |a_{nr}| \sum_k |b_{rk}|$$

ve

$$\lambda \sum_k |a_{nk}| + \mu \sum_k |b_{nk}| \leq \sum_k |u_{nk}| \leq \lambda \sum_k |a_{nk}| + \mu \sum_k |b_{nk}|$$

dir. (5.2.2) den $(|a_{nk}|)$ ve $(|b_{nk}|)$ regüler olduklarından yukarıdaki ifadelerin her ikisinde $n \rightarrow \infty$ için baştaki ve sondaki ifadeler 1'e gider. Böylece $\sum_k |c_{nk}| \rightarrow 1$ ve $\sum_k |u_{nk}| \rightarrow 1$, yani $AB \in \tau^+$ ve $U \in \tau^+$ dir. Benzer şekilde $BA \in \tau^+$ olduğu kolayca gösterilebilir. O halde G bir konveks yarı-gruptur.

Şimdi $w_G = w$ yazıp, aşağıdaki teoremi verelim.

5.3.6. TEOREM. $\{m, w\}$ cümlesi boş değildir ve $\{m, w\}$ nin elemanları m de G -invariant B - w limitleridir. Ayrıca, eğer G kuvvetli regüler bir matris içeriyorsa, bu taktirde B - w limitleri aynı zamanda D -invarianttır ve

$$\{m, w\} \subset \{m, q\}$$

dir. [4].

İSPAT. $A, B \in G$ ve $x \in m$ için $L^*(AB-BA)x=0$ hipotezinden

$$L^*(AB)x = L^*(AB-BA+BA)x \leq L^*(BA)x$$

ve A ile B nin rolleri değiştirilirse

$$L^*(AB)x = L^*(BA)x \quad (5.3.2)$$

elde edilir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük bir sayı olmak üzere $x_1, x_2 \in m$ dizileri için w nin tanımını gereğince,

$$L_{A_1}^*(x_1) < w(x_1) + \varepsilon, \quad L_{A_2}^*(x_2) < w(x_2) + \varepsilon \quad (5.3.3)$$

olacak şekilde $A_1, A_2 \in G$ vardır. w nin tanımını, (5.3.2), (5.2.3) ve (5.3.3) den

$$\begin{aligned} w(x_1+x_2) &\leq L_{A_1 A_2}^*(x_1+x_2) \\ &\leq L_{A_1 A_2}^*(x_1) + L_{A_1 A_2}^*(x_2) \\ &= L_{A_1 A_2}^*(x_1) + L_{A_2 A_1}^*(x_2) \\ &\leq L_{A_1}^*(x_1) + L_{A_2}^*(x_2) \\ &< w(x_1) + w(x_2) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

çıkar, ancak $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan w , m üzerinde alt toplamsaldır.

$\alpha \geq 0$ için $w(\alpha x) = \alpha w(x)$ olduğundan w , m üzerinde aynı zamanda homojen ve dolayısıyla w , m üzerinde alt lineer olur. Buna göre Hahn-Banach teoremi gereğince $\{m, w\}$ boş değildir.

Şimdi $\epsilon > 0$ ve $x \in m$ olmak üzere $L_{BA}^*(x) < w(Ax) + \epsilon$ olacak şekilde enaz bir $B \in G$ vardır. Ancak, $BA \in G$ olduğundan

$$w(x) \leq L_{BA}^*(x) < w(Ax) + \epsilon \quad (5.3.4)$$

dir.

Diğer taraftan (5.3.2) ve (5.2.3) den

$$\begin{aligned} w(Ax) &= \inf_{C \in G} L^*(CAx) \\ &= \inf_{C \in G} L^*(ACx) \\ &\leq \inf L^*(Cx) \\ &= w(x) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

bulunur. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan, (5.3.4) ve (5.3.5) den her $x \in m$ ve her $A \in G$ için

$$w(Ax) = w(x) \quad (5.3.6)$$

dir.

Şimdi $A \in G$ olsun. $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A^k \in G$ olmak üzere

$$A_n A - A_n = \frac{1}{n} (A^{n+1} - A)$$

dir. Buna göre her $A \in G$ için (5.3.6) dan $w(A_n x) = w(x)$ ve böylece

$$\begin{aligned} w(Ax - x) &= w(A_n A - A_n)x \\ &\leq \frac{1}{n} \{w(A^{n+1})x + w(-Ax)\} \\ &= \frac{1}{n} \{w(x) + w(-x)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak n istenildiği kadar büyütülebileceğinden $w(Ax-x) \leq 0$ ve benzer şekilde $w(x-Ax) \leq 0$ elde edilir. Bu nedenle $L \in \{m, w\}$ ye karşılık her $A \in G$ için $L(Ax-x)=0$ ve L lineer olduğundan $L(Ax)=L(x)$ bulunur. O halde L, m üzerinde G -invarianttır.

$A_0 \in G$ kuvvetli regüler bir matris olsun. (4.1.8) den

$$w(Dx-x) \leq L_{A_0}^*(Dx-x) = 0$$

ve böylece $L \in \{m, w\}$ için $L(Dx-x)=0$ bulunur, yine L nin lineerliğinden $L(Dx)=L(x)$ elde edilir. O halde L, m üzerinde D -invarianttır.

Son olarak 5.2.3 gereğince her $x \in m$ için $w(x) \leq L_{A_0}^*(x) \leq q(x)$ yani $\{m, w\} \subset \{m, q\}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

5.3.7. TEOREM. G nin matrisleri reel sınırlı diziler için tutarlı limitleme metotları tanımlar. [4].

İSPAT. $A, B \in G$ olsun. Bu taktirde (5.3.6) dan $x \in m$ için $w(Ax)=w(x)=w(Bx)$ dir. c üzerinde $w(x)=\lim x_n$ olduğundan c_A üzerinde $w(Ax)=A-\lim x_n$ ve bu nedenle $x \in m \cap c_A \cap c_B$ için $A-\lim x_n = B-\lim x_n$ dir. Çünkü $x \in m \cap c_A \cap c_B$ ise bu taktirde $x \in m$, $Ax \in c$ ve $Bx \in c$ ve böylece

$$A-\lim x_n = w(Ax) = w(x) = w(Bx) = B-\lim x_n$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

5.4. Tek Limitler.

Hahn-Banach teoreminin bir sonucu olarak sınırlı her $x=(x_n)$ ($n=1,2,\dots$) dizisi $B-L^*$, $B-q$, $B-L_A^*$ ve $B-w$ limitlerine sahiptir. Ancak belirli bir $\emptyset$ alt lineer fonksiyoneli ve belirli bir di-

zi için bir $B-\emptyset$ limiti tek değildir. Gerçekte verilen bir dizi için bu limitlerin sayısı kontinum kardinalitesi kadar olabilir.

İlk olarak genel lineer uzayda bir teorem verelim.

5.4.1. TEOREM. X bir reel lineer uzay ve E , X in bir alt uzayı olmak üzere, $\emptyset$ X de alt lineer ve E de lineer bir fonksiyonel olsun. $\{X, \emptyset\}$, $\emptyset$ nin E den X 'e lineer genişlemelerinin cümlesini gösterebilirsin. Buna göre verilen bir $x_0 \in X$ için $\{X, \emptyset\}$ deki bütün lineer fonksiyonellerin x_0 da çakışık olması için gerek ve yeter koşul

$$\emptyset(x_0) = -\emptyset(-x_0) \quad (5.4.1)$$

dir. [4].

İSPAT. $m=X$, $c=E$ ve $q=\emptyset$ alınarak 2.1.4 deki benzer olarak yapılır.

5.4.2. SONUÇ. $\emptyset$, $X=m$ için yukarıdaki teoremin koşullarını gerçeklesin ve

$$m(\emptyset) = \{x \in m : -\emptyset(-x) = \emptyset(x)\} \quad (5.4.2)$$

olarak tanımlıyalım. Buna göre $B-\emptyset$ limitleri $m(\emptyset)$ cümlesi üzerinde kesin olarak tektir. Gerçekten $L \in \{m(\emptyset), \emptyset\}$ ise $-\emptyset(-x) \leq L(x) \leq \emptyset(x)$ ve $-\emptyset(-x) = \emptyset(x)$ olduğundan $L(x)$ tek olmak zorundadır.

UYARI. $\emptyset$ ile ψ , m üzerinde $\emptyset(x) \leq \psi(x) \leq L^*(x)$ olmak üzere, c üzerinde lineer ve m üzerinde alt lineer fonksiyoneller iseler, bu taktirde c üzerinde $\emptyset(x) = \psi(x) = \lim x$ ve $m(\psi) \subset m(\emptyset)$ dir.

Gerçekten $\emptyset(x) \leq \psi(x) \leq L^*(x)$ koşulu $-L^*(-x) \leq -\psi(-x) \leq -\emptyset(-x) \leq \emptyset(x) \leq \psi(x) \leq L^*(x)$ koşulu ile eşdeğer olduğundan ve c üzerinde

$-L^*(-x)=L^*(x)$ bulunduğundan sonuç hemen çıkar. Şimdi de $x \in m(\psi)$ olsun. Buna göre $x \in m$ ve $-\psi(-x)=\psi(x)$ dir. Ancak m üzerinde $\emptyset(x) \leq \psi(x)$ verildiğinden, $-\psi(-x) \leq -\emptyset(-x) \leq \emptyset(x) \leq \psi(x)$ den $-\emptyset(-x) = \emptyset(x)$ çıkar; yani $x \in m(\emptyset)$ dir. O halde $m(\psi) \subset m(\emptyset)$ olur.

Yukarıda 5.4.2 de $\emptyset$ nin $L^*, q, A \in \mathcal{T}^+$ olmak üzere L_A^* ve w özel halleri için $m(L^*)=c$, $m(L_A^*)=m \cap c_A$ ve $m(q)$ hemen hemen ya-
kınınsak dizilerden oluşmuştur. $A \in \sigma$ için $w_\sigma(x) \leq L_A^*(x)$ den de

$$m \cap c_A \subset m(w_\sigma) \quad (A \in \mathcal{T}^+) \quad (5.4.3)$$

dir. Çünkü $x \in m \cap c_A$ alırsak, $x \in m$ ve $x \in c_A$ dir. Halbuki c_A nin tanımı gereğince $x \in c_A$ ise $Ax \in c$ olup, buna göre $-L^*(-Ax)=L^*(Ax)$ ve ayrıca $A \in \mathcal{T}^+$ olduğundan, $-L^*(-Ax) \leq -w_\sigma(-x) \leq w_\sigma(x) \leq L^*(Ax)$ den $-w_\sigma(-x)=w_\sigma(x)$ çıkar; yani $x \in m(w_\sigma)$ dir. Eğer $A \in \mathcal{T}^*$ ise 5.2.3 gereğince $c \subset m(q) \subset m \cap c_A$ olduğu

$$-L^*(-x) \leq -q(-x) \leq -L^*(-Ax) \leq L^*(Ax) \leq q(x) \leq L^*(x)$$

ifadesinden hemen çıkar. Bu sonuç $\frac{1}{2}$ nin neden $(1,0,1,0,\dots)$ dizisinin her iki tek $B-q$ ve $B-L_A^*$ limiti olduğunu açıklamaktadır. Ayrıca (5.4.3) den $\bigcup_{A \in G} (m \cap c_A) \subset m(w_G)$ olduğu açıktır. $m(w) \subset \bigcup_{A \in G} (m \cap c_A)$ olduğunu gösterememekle beraber buna yakın olan bir teorem vereceğiz.

5.4.3. TEOREM. $\varepsilon > 0$ ve $x \in m(w)$ için

$$w(x) - \varepsilon < L_*(Ax) \leq w(x) \leq L^*(Ax) < w(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde enaz bir $A \in G$ vardır. [4].

İSPAT. $w(x) = \lambda = -w(-x)$ olsun. Buna göre $\varepsilon > 0$ için

$$L^*(Bx) < \lambda + \varepsilon \quad \text{olacak şekilde enaz bir } B \in G \text{ ve}$$

$$\lambda - \varepsilon < L_*(Cx) \quad \text{olacak şekilde enaz bir } C \in G$$

vardır. G nin tanımı gereğince $BC \in G$ olduğundan, (5.2.3) ve

(5.3.2) den

$$L_*(Cx) \leq L_*(BCx) \leq w(x) \leq L^*(BCx) = L^*(CBx) \leq L^*(Bx)$$

elde ederiz, burada $A=BC$ alma ile istenen sonuç hemen elde edilir.

REFERANSLAR

- [1] BANACH, S. Théorie des opérations linéaires; Warsaw, (1932)
- [2] COOKE, R.G. Generalisation of Banach-Hausdorff limits; Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 410-417.
- [3] COOKE, R.G. Infinite matrices and sequence spaces; Mcmillan, (1950)
- [4] DAS, G. Banach and other limits; J. London Math. Soc. (2), 7 (1973), 501-507.
- [5] EBERLEIN, W.F. Banach-Hausdorff limits; Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 662-665.
- [6] EBERLEIN, W.F. Abstract Ergodic Theorems and weak almost periodic functions; Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 67 (1949), 217-239.
- [7] LORENTZ, G.G. A contribution to the theory of divergent sequences; Acta. Mathematica 80 (1948), 167-190.
- [8] MADDOX, I.J. Elements of Functional Analysis; Cambridge University Press, 1970.
- [9] PETERSEN, G.M. Regular Matrix Transformation; McGraw-Hill, 1966.

