

**TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ**

Cübeyr SABANCI

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR**

OCAK-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cübeyr SABANCI

(08221109)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

OCAK-2011

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cübeyr SABANCI

(08221109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ocak 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 27 Ocak 2011

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

OCAK-2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam sayın Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR' e en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Cübeyr SABANCI

ELAZIĞ – 2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanımlar.....	2
2. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI.....	6
3. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ.....	10
4. SONUÇLAR.....	16
KAYNAKLAR.....	18
ÖZGEÇMİŞ.....	

ÖZET

Bu tez, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir

İkinci bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin beklenen değer, varyans ve kovaryansı elde edilmiştir.

Son bölümde, sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin momentleriyle ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Sürekli Tesadüfi Değişkenler, Dağılım Fonksiyonu, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Beklenen Değer, Varyans, Kovaryans.

SUMMARY

Moments of Order Statistics of Random Variables

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter, the probability density and distribution functions of order statistics of independent and nonidentically distributed continuous random variables are examined.

In the third chapter, the expected value, variance and covariance of order statistics of independent and nonidentically distributed continuous random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the moments of order statistics of continuous random variables are given.

Key Words: Order statistics, Independent Random Variables, Nonidentically Distributed Random Variables, Continuous Random Variables, Distribution Function, Probability Density Function, Expected Value, Variance, Covariance.

SEMBOLLER LİSTESİ

F	: Dağılım fonksiyonu
f	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu
n_s	: s 'nin eleman sayısı

1. GİRİŞ

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü; sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar ve momentler, Arnold vd. [1], David [2] ve Reiss [3] tarafından elde edilmiştir. Arnold vd. [1], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin bileşik olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Cao ve West [4], bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin dağılımları için bağıntılar vermişlerdir. Corley [5], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Vaughan ve Venables [6], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmişlerdir. Balakrishnan [7] ve Bapat ve Beg [8], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları ve momentleri farklı şekillerde ifade edilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. Bir tesadüfi değişken, herhangi bir aralıktaki bütün reel değerleri alabiliyorsa bu tesadüfi değişkene *sürekli tesadüfi değişken* denir [9].

Tanım 1.1.2. X , sürekli bir tesadüfi değişken olsun.

$$i. f(x) \geq 0, \quad x \in R$$

$$ii. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

koşullarını sağlayan $f(x)$ 'e X 'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [9].

Tanım 1.1.3. X , olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan sürekli tesadüfi değişken olsun. X 'in *dağılım fonksiyonu*,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad x \in R$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 1.1.4. X , olasılık fonksiyonu $f(x)$ olan bir tesadüfi değişken ve Y 'de olasılık fonksiyonu $f(y)$ olan bir tesadüfi değişken olsun. Ayrıca X ve Y 'nin bileşik olasılık fonksiyonu $f(x, y)$ olsun. Eğer,

$$f(x, y) = f(x) f(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa X ve Y 'ye *bağımsız tesadüfi değişkenler* denir [9].

Tanım 1.1.5. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenlerinin meydana gelme sırası değil büyüklüklerinin sırası göz önüne alınırsa bu tesadüfi değişkenlerin *sıralı istatistikleri*,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, r -inci sıralı istatistik denir.

Buradan,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yazılabilir [3].

Tanım 1.1.6. X , olasılık fonksiyonu f olan sürekli tesadüfi değişken olsun. X 'in beklenen değeri,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad -\infty < x < \infty.$$

olarak ifade edilir [10].

Tanım 1.1.7. X tesadüfi değişkeninin varyansı,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

olarak ifade edilir [10].

Tanım 1.1.8. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin beklenen değerleri $E(X)$ ve $E(Y)$ ise X ve Y arasındaki kovaryans,

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

şeklinde ifade edilir [10].

Teorem 1.1.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r}$$

şeklinde ifade edilir [1].

Teorem 1.1.2. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ ve $x_1 < x_2$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{n!}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} [F(x_1)]^{r-1} f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)]^{s-1-r} \cdot f(x_2) [1 - F(x_2)]^{n-s}$$

şeklinde ifade edilir [2].

Teorem 1.1.3. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}$$

şeklinde ifade edilir [1].

Teorem 1.1.4. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ ve $x_1 < x_2$ olmak üzere

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_2=s}^n \sum_{j_1=r}^{j_2} \frac{n!}{j_1!(j_2-j_1)!(n-j_2)!} [F(x_1)]^{j_1} [F(x_2) - F(x_1)]^{j_2-j_1} \cdot [1 - F(x_2)]^{n-j_2}$$

şeklinde ifade edilir [2].

2. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonları verilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenler olsun. X_i ($i=1, 2, \dots, n$) tesadüfî değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Bu tesadüfî değişkenlerin büyüklüklerine göre sıralanmasıyla elde edilen sıralı istatistikler, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ olsun.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $x \in R$ olmak üzere

$$f_{r:n}(x) = \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_1}} F_{\varsigma_1^{(\ell)}}(x) \right) f_{\varsigma_2^{(1)}}(x) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_3}} [1 - F_{\varsigma_3^{(\ell)}}(x)] \right) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\varsigma_1 = \{\varsigma_1^{(1)}, \varsigma_1^{(2)}, \dots, \varsigma_1^{(r-1)}\}$, $\varsigma_2 = \{\varsigma_2^{(1)}\}$, $\varsigma_3 = \{\varsigma_3^{(1)}, \varsigma_3^{(2)}, \dots, \varsigma_3^{(n-r)}\}$,

$\nu \neq g$ için $\varsigma_\nu \cap \varsigma_g = \emptyset$ ve $\bigcup_{\ell=1}^3 \varsigma_\ell = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $\sum_{n_{s_1}, n_{s_2}}$, $\bigcup_{\ell=1}^2 \varsigma_\ell$ üzerinden toplamı ifade eder.

$X_{r:n}$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x) \right) f_{i_r}(x) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \quad (2.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\sum_P$, $(1, 2, \dots, n)$ 'nin bütün $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı ifade etmektedir [2].

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$, $x_1 < x_2$ ve $x_1, x_2 \in R$ olmak üzere

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\tau_1}} F_{\tau_1^{(\ell)}}(x_1) \right) f_{\tau_2^{(1)}}(x_1) \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\tau_3}} [F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_2) - F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_1)] \right) f_{\tau_4^{(1)}}(x_2) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\tau_5}} [1 - F_{\tau_4^{(\ell)}}(x_2)] \right) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\tau_1 = \{\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \dots, \tau_1^{(r-1)}\}$, $\tau_2 = \{\tau_2^{(1)}\}$, $\tau_3 = \{\tau_3^{(1)}, \tau_3^{(2)}, \dots, \tau_3^{(s-r-1)}\}$, $\tau_4 = \{\tau_4^{(1)}\}$, $\tau_5 = \{\tau_5^{(1)}, \tau_5^{(2)}, \dots, \tau_5^{(n-s)}\}$, $\nu \neq \varnothing$ için $\tau_\nu \cap \tau_\vartheta = \emptyset$ ve $\bigcup_{\ell=1}^5 \tau_\ell = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak

üzere $\sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}}$, $\bigcup_{\ell=1}^4 \tau_\ell$ üzerinden toplamı ifade eder.

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{r,s:n}(x_1, x_2) = \frac{1}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_1) \right) f_{i_r}(x_1) \cdot \left(\prod_{\ell=r+1}^{s-1} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) f_{i_s}(x_2) \left(\prod_{\ell=s+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \quad (2.4)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^n \left\{ \sum_{n_{\zeta_1}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_1}} F_{\zeta_1^{(\ell)}}(x) \right) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_2}} [1 - F_{\zeta_2^{(\ell)}}(x)] \right) \right\} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\zeta_1 = \{\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \dots, \zeta_1^{(j)}\}$, $\zeta_2 = \{\zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \dots, \zeta_2^{(n-j)}\}$, $\zeta_1 \cap \zeta_2 = \emptyset$ ve $\zeta_1 \cup \zeta_2 = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $\sum_{n_{\zeta_1}}$, ζ_1 üzerinden toplamı ifade eder.

$X_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^n \left\{ \frac{1}{j!(n-j)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^j F_{i_\ell}(x) \right) \left(\prod_{\ell=j+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right\} \quad (2.6)$$

şeklinde de ifade edilebilir [2].

Bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu, $1 \leq r < s \leq n$ ve $x_1 < x_2$ olmak üzere

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_2=s}^n \sum_{j_1=r}^{j_2} \left[\sum_{n_{\gamma_1}, n_{\gamma_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\gamma_1}} F_{\gamma_1^{(\ell)}}(x_1) \right) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\gamma_2}} [F_{\gamma_2^{(\ell)}}(x_2) - F_{\gamma_2^{(\ell)}}(x_1)] \right) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\gamma_3}} [1 - F_{\gamma_3^{(\ell)}}(x_2)] \right) \right] \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; $\gamma_1 = \{\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(j_1)}\}$, $\gamma_2 = \{\gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots, \gamma_2^{(j_2-j_1)}\}$, $\gamma_3 = \{\gamma_3^{(1)}, \gamma_3^{(2)}, \dots, \gamma_3^{(n-j_2)}\}$, $\nu \neq g$ için $\gamma_\nu \cap \gamma_g = \emptyset$ ve $\bigcup_{\ell=1}^3 \gamma_\ell = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$\sum_{n_{\gamma_1}, n_{\gamma_2}}, \bigcup_{\ell=1}^2 \gamma_\ell$ üzerinden toplamı ifade eder.

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F_{r,s:n}(x_1, x_2) = \sum_{j_2=s}^n \sum_{j_1=r}^{j_2} \left\{ \frac{1}{j_1!(j_2-j_1)!(n-j_2)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{j_1} F_{i_\ell}(x_1) \right) \cdot \left(\prod_{\ell=j_1+1}^{j_2} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) \left(\prod_{\ell=j_2+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right\} \quad (2.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

3. BAĞIMSIZ VE AYNI DAĞILIMLI OLMAYAN SÜREKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN MOMENTLERİ

Bu bölümde, bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfî değişkenlerin sıralı istatistiklerinin beklenen değer, varyans ve kovaryansı ifade edilecektir.

Sürekli tesadüfî değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{r:n}(x) dx \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir.

(2.1), (3.1)'de kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\sum_{n_{s_1}, n_{s_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_1}} F_{s_1^{(\ell)}}(x) \right) f_{s_2^{(1)}}(x) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_3}} [1 - F_{s_3^{(\ell)}}(x)] \right) \right] dx \quad (3.2)$$

olarak elde edilir.

(2.2), (3.1)'de kullanılırsa

$$E(X_{r:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x) \right) f_{i_r}(x) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right] dx \quad (3.3)$$

olarak da elde edilebilir.

Ayrıca; $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin çarpımının beklenen değeri, $1 \leq r < s \leq n$ ve $x_1 < x_2$ olmak üzere

$$E(X_{r:n} X_{s:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 f_{r,s:n}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (3.4)$$

olarak ifade edilir.

(2.3), (3.4)'de kullanılırsa kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ 'nin çarpımının beklenen değeri,

$$E(X_{r:n} X_{s:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 \left[\sum_{n_{r_1}, n_{r_2}, n_{r_3}, n_{r_4}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_1}} F_{\tau_1^{(\ell)}}(x_1) \right) f_{\tau_2^{(1)}}(x_1) \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_3}} [F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_2) - F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_1)] \right) f_{\tau_4^{(1)}}(x_2) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_5}} [1 - F_{\tau_4^{(\ell)}}(x_2)] \right) \right] dx_2 dx_1 \quad (3.5)$$

olarak elde edilir.

(2.4), (3.4)'de kullanılırsa

$$E(X_{r:n} X_{s:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 \left[\frac{1}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_1) \right) f_{i_r}(x_1) \right. \\ \left. \cdot \left(\prod_{\ell=r+1}^{s-1} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) f_{i_s}(x_2) \left(\prod_{\ell=s+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right] dx_2 dx_1 \quad (3.6)$$

olarak da elde edilebilir.

Tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin varyansı,

$$Var(X_{r:n}) = E(X_{r:n}^2) - [E(X_{r:n})]^2 \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir.

(3.1), (3.7)'de kullanılırsa sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin varyansı,

$$Var(X_{r:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{r:n}(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{r:n}(x) dx \right]^2 \quad (3.8)$$

olarak da ifade edilebilir.

(2.1), (3.8)'de kullanılırsa kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin varyansı,

$$\begin{aligned} Var(X_{r:n}) = & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[\sum_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_1}} F_{\zeta_1^{(\ell)}}(x) \right) f_{\zeta_2^{(1)}}(x) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_3}} [1 - F_{\zeta_3^{(\ell)}}(x)] \right) \right] dx \\ & - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \left[\sum_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_1}} F_{\zeta_1^{(\ell)}}(x) \right) f_{\zeta_2^{(1)}}(x) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{\zeta_3}} [1 - F_{\zeta_3^{(\ell)}}(x)] \right) \right] dx \right]^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

(2.2), (3.8)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} Var(X_{r:n}) = & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[\frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x) \right) f_{i_r}(x) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right] dx \\ & - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x) \right) f_{i_r}(x) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x)] \right) \right] dx \right]^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak da elde edilebilir.

Sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = E(X_{r:n} X_{s:n}) - E(X_{r:n})E(X_{s:n}) \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.1) ve (3.4), (3.11)' de kullanılırsa sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 f_{r,s:n}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{r:n}(x_1) dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{s:n}(x_2) dx_2 \right] \quad (3.12)$$

olarak da ifade edilebilir.

(2.1) ve (2.3), (3.12)'de kullanılırsa kullanılırsa bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned} Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 \left[\sum_{n_{r_1}, n_{r_2}, n_{r_3}, n_{r_4}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_1}} F_{\tau_1^{(\ell)}}(x_1) \right) f_{\tau_2^{(1)}}(x_1) \right. \\ & \cdot \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_3}} [F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_2) - F_{\tau_3^{(\ell)}}(x_1)] \right) f_{\tau_4^{(1)}}(x_2) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{r_5}} [1 - F_{\tau_4^{(\ell)}}(x_2)] \right) \Big] dx_2 dx_1 \\ & - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_1}} F_{\varsigma_1^{(\ell)}}(x_1) \right) f_{\varsigma_2^{(1)}}(x_1) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_3}} [1 - F_{\varsigma_3^{(\ell)}}(x_1)] \right) dx_1 \right] \\ & \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 \sum_{n_{s_1}, n_{s_2}} \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_1}} F_{\varsigma_1^{(\ell)}}(x_2) \right) f_{\varsigma_2^{(1)}}(x_2) \left(\prod_{\ell=1}^{n_{s_3}} [1 - F_{\varsigma_3^{(\ell)}}(x_2)] \right) dx_2 \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

(2.2) ve (2.4), (3.12)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 \left[\frac{1}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} \sum_p \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_1) \right) f_{i_r}(x_1) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\prod_{\ell=r+1}^{s-1} [F_{i_\ell}(x_2) - F_{i_\ell}(x_1)] \right) f_{i_s}(x_2) \left(\prod_{\ell=s+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) \right] dx_2 dx_1 \\
&\quad - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_p \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_1) \right) f_{i_r}(x_1) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_1)] \right) dx_1 \right] \\
&\quad \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_p \left(\prod_{\ell=1}^{r-1} F_{i_\ell}(x_2) \right) f_{i_r}(x_2) \left(\prod_{\ell=r+1}^n [1 - F_{i_\ell}(x_2)] \right) dx_2 \right] \quad (3.14)
\end{aligned}$$

olarak da elde edilebilir.

4. SONUÇLAR

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenler olsun. X_i ($i=1, 2, \dots, n$) tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun. Burada, $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenler elde edilir. Bu yaklaşımla, aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin beklenen değeri,

$$E(X_{r:n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r} \right] dx \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.2) veya (3.3)'de $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa, (4.1) elde edilir.

Sonuç 4.2. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiğinin varyansı,

$$\begin{aligned}
Var(X_{r:n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r} \right] dx \\
&\quad - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r} \right) dx \right]^2
\end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.9) veya (3.10)'da $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa, (4.2) elde edilir.

Sonuç 4.3. Bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ arasındaki kovaryans,

$$\begin{aligned}
Cov(X_{r:n}, X_{s:n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} x_1 x_2 \frac{n! [F(x_1)]^{r-1} f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)]^{s-1-r} f(x_2) [1-F(x_2)]^{n-s}}{(r-1)!(s-1-r)!(n-s)!} dx_2 dx_1 \\
&\quad - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{n! [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x)]^{n-r}}{(r-1)!(n-r)!} dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{n! [F(x)]^{s-1-r} f(x) [1-F(x)]^{n-s}}{(s-1-r)!(n-s)!} dx_2 \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak ifade edilir.

İspat. (3.13) veya (3.14)'da $f_i = f$ ve $F_i = F$ alınırsa, (4.3) elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.,** 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [2] **David, H. A.,** 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [3] **Reiss, R. -D.,** 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer-Verlag, New York.
- [4] **Cao, G. and West, M.,** 1997. Computing distributions of order statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 755-764.
- [5] **Corley, H. W.,** 1984. Multivariate order statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **13**, 1299-1304.
- [6] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.,** 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **34**, 308-310.
- [7] **Balakrishnan, N.,** 2007. Permanents, order statistics, outliers and robustness, *Revista Matematica Complutense*, **20**, 7-107.
- [8] **Bapat, R. B. and Beg, M. I.,** 1989. Order statistics for nonidentically distributed variables and permanents, *Sankhyā, Ser. A*, **51**, 79-93.
- [9] **Milton, J. S. and Arnold, J. C.,** 2003. Introduction to probability and statistics, McGraw-Hill, Boston.
- [10] **Akdeniz, Fikri,** 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.

ÖZGEÇMİŞ

Cübeyr SABANCI, 1983 yılında Malatya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladı. 2006 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.