

24790

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI
ve
MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Mikail ET

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1992

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI
ve
MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Mikail ET

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez,.....tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile

Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

.....

Danışman

Doç.Dr.Rıfat ÇOLAK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	I
SUMMARY	II
TEŞEKKÜR	III
SİMGELER.....	IV
I. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
II. $\Delta^m(I_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ DİZİ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ.....	6
III. DUAL UZAYLAR	28
IV. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ.....	34
KAYNAKLAR	38

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

ve

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Mikail ET

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

1992 , Sayfa : 38

Dört bölümden oluşan bu çalışmada $m \in \mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots \}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ ve $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere $\Delta^m(l_\infty) = \{ x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in l_\infty \}$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları tanımlanmış bu uzayların birer Banach uzayı olduğu gösterilerek bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiş ve bu uzayların sürekli dualları verilmiştir. Üçüncü bölümde $\Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^m(c)$ dizi uzaylarının α - duali bulunmuştur. Çalışmanın dördüncü bölümünde ise $(l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$, $(l_\infty, \Delta^m(c))$, $(c, \Delta^m(l_\infty))$, $(c, \Delta^m(c))$ matris sınıfları karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Dizi uzayı , α -duali , Matris dönüşümleri.

SUMMARY

Ph.D Thesis

GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES and MATRIX TRANSFORMATIONS

Mikail ET

Fırat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

1992 , Page : 38

In this study , which is prepared as four chapter, we define generalized difference sequence spaces $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ and $\Delta^m(c_0)$, such as for example $\Delta^m(l_\infty) = \{ X = (x_k) : \Delta^m X = (\Delta^m x_k) \in l_\infty \}$, where $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ and $m \in \mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots \}$ and we examine some properties of these sequence spaces.

In the first chapter we give the fundamental definitions and theorems. In the second chapter we define the sequence spaces $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ and $\Delta^m(c_0)$ and we show that these sequence spaces are Banach spaces, and also we give the continuous duals of the sequence spaces. In the third chapter we give the α -dual of these sequence spaces. In the last chapter, we characterize the matrix classes $(l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$, $(l_\infty, \Delta^m(c))$, $(c, \Delta^m(l_\infty))$, $(c, \Delta^m(c))$.

KEY WORDS : Sequence spaces , α - dual , Matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren, bu çalışmanın planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Rifat ÇOLAK 'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yaptığım bir dizi seminerlere katılarak çalışmalarına yardımcı olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Metin BAŞARIR ' a teşekkürü bir borç bilirim.

Mikail ET



SİMGELER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathcal{W}$	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
l_{∞}	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı
ℓ	$\{ X = (x_k) : \sum_k x_k < \infty \}$ dizi uzayı
X'	X normlu uzayının sürekli dual uzayı
X^{α}	X dizi uzayının α -dualı
(X, Y)	X dizi uzayından Y dizi uzayı içine olan tüm matrislerin cümlesi
$\overline{X}$	X cümlesinin kapanışı
$\sum_k x_k$	$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$
$\lim_k x_k$	$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$
$\binom{n}{a}$	Binom katsayıları
$x_k = O(k)$	$(k^{-1} x_k)$ nn sınırlı olduğunu ifade eder.

I TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bilinen tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım I .1 (Maddox,1970) : X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir **vektör (lineer) uzayı** adı verilir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

$$L1) \quad x + y = y + x$$

$$L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \quad \text{Her } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) \quad 1 \cdot x = x$$

$$L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$L8) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$$

Tanım I . 2 (Kreyszig,1978) : X, K cismi üzerinde bir liner uzay olsun.

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|.\|)$ çifti ne de bir **normlu uzay** adı verilir.

$$N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in K$$

$$N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya **Banach uzayı** adı verilir.

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, \dots)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w , $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmamızda sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \}$$

sınırlı,

$$c = \{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 1.3 (Goes, G., Goes, S., 1970) : X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir **BK-uzayı** denir.

Tanım I.4 (Kantorovich, L.V. , Akilov, G.P. ,1982) : $(X, ||.||)$ ile $(Y, ||.||)$ birer normlu uzay ve $T : X \longrightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa , yani her $x \in X$ için $||Tx|| = ||x||$ oluyorsa T dönüşümüne **lineer izometri** denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T ye **lineer izomorfizm** denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları **izomorfik** uzaylar adını alır.

Tanım I.5 (Maddox,1970) : Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına **denk** uzaylar denir. Bu durumda X den Y ye bir lineer izometri vardır.

Tanım I.6 (Maddox,1970) : X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten , f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f 'e X den Y ye bir **homeomorfizm** denir. f : X $\longrightarrow$ Y bir homeomorfizm ise f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olara **denk** uzaylardır.

Tanım I.7 (Kreyszig, 1978) : X normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonların cümlesi

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\substack{x \in X \\ ||x|| = 1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in **sürekli dual** uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım I.8 (Kamphtham, Gupta, 1981) : X bir dizi uzayı olsun.

$$X^{\alpha} = \{ a = (a_k) : \sum_k |a_k x_k| < \infty , \text{ her } x \in X \text{ için } \},$$

X^{α} ya X in α -duali denir. X^{α} bir dizi uzayı olup $\emptyset \subset X^{\alpha}$ dir. $X \subset Y$ ise $Y^{\alpha} \subset X^{\alpha}$ dir.

Teorem I.1 (Kreyszig,1978) : Bir X Banach uzayının bir Y altuzayının tam olması için gerek ve yeter koşul Y nin X de kapalı olmasıdır.

Tanım I.9 (Kamphtham, Gupta, 1981) : $X \subset w$ bir dizi uzayı olsun. $X = \{x_k\} \in X$ ve $y = \{y_k\} \in X$ olmak üzere $x.y = (x_k y_k) \in X$ oluyorsa , yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X e bir **dizi cebiri** denir.

Tanım I.10 (Nanda, 1986) : $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$, w dizi uzayının herhangi iki altcümlesi ve $A = (a_{nk})$, $(n, k = 1, 2, \dots)$ kompleks sayılardan oluşan sonsuz bir matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin AX dönüşüm dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak olmak üzere $AX = (A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A ya X den Y içine bir **matris dönüşümü** ve AX ' e de X in A -dönüşüm dizisi denir. (X,Y) ile X den Y içine olan bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz .

Tanım I.11 (Hardy, 1949) : $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara **binom katsayıları** denir. Eğer n ve k birer doğal sayı ise $n \leq k$ için

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)! n!}$$

ve $n > k$ ise

$$\binom{k}{n} = 0$$

dır.

Bundan başka

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{n!} = \binom{n+\beta}{n}$$

$\beta \neq -1, -2, \dots$ ise

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{n^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \sum_{s=1}^p c_s n^{\beta-p} + O(n^{\beta-p-1})$$

dir.

Teorem I. 2 (Kreyszig , 1978) : (X,d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\bar{M}$, M nin kapanışını gösterisin. $x \in \bar{M}$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

Tanım I .12 (Yurtsever,1978) : $H(n)$ n ye bağlı bir önerme olsun. Eğer $H(n)$ önermesi $n = 1$ için doğru ise ve her $m \in \mathbb{N}$ için m den küçük bütün doğal sayıların H önermesini sağladıkları kabul edildiğinde $H(m)$ önermesinin de doğru olduğu gösterilebiliyorsa $H(n)$ önermesi bütün doğal sayılar için doğrudur. Bu prensibe tümevarımın ikinci prensibi denir.

II. $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ UZAYLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları tanımlanacak, bu uzayların bazı özellikleri araştırılacak ve $D\Delta^m(l_\infty)$, $D\Delta^m(c)$ ve $D\Delta^m(c_0)$ uzaylarının sürekli dual-leri verilecektir.

Tanım II.1 : $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli herhangi bir dizi, $\Delta^0 x_k = x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$, $\Delta^m x_k = \Delta(\Delta^{m-1} x_k)$ ve $\Delta^m x = (\Delta^m x_k)$ olmak üzere

$$i) \quad \Delta^m(l_\infty) = \{ x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in l_\infty \},$$

$$ii) \quad \Delta^m(c) = \{ x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c \},$$

$$iii) \quad \Delta^m(c_0) = \{ x = (x_k) : \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c_0 \},$$

uzaylarını tanımlayalım. m herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \quad (2.1)$$

dir. $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları aşikar olarak birer lineer uzaydır.

Teorem II.1 : $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \quad (2.2)$$

normu ile birer normlu uzaydır.

İspat : x , $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ uzaylarından birini göstermek üzere

$x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

$$N1) \quad \|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \geq 0 \quad \text{olduğu aşikardır.}$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty} = 0 \quad \text{olsun. Bu takdirde}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0 \quad \text{ve her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki buradan $x = \theta$ bulunur.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\|_{\Delta} = 0$ olduğu aşikardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |\alpha x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \alpha x_{k+v} \right| \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \right) \\ &= |\alpha| \|x\|_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N4)} \quad \|x + y\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} + y_{k+v}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| + \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} y_{k+v} \right| \\ &= \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta} \end{aligned}$$

Teorem II.2 : $(\Delta^m(\mathbb{Z}_{\infty}), \|\cdot\|_{\Delta})$ Bir Banach uzayıdır.

İspat : $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \Delta^m(\mathbb{Z}_{\infty})$ olmak üzere (x^s) , $\Delta^m(\mathbb{Z}_{\infty})$ da bir

Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_k \left| \Delta^m (x_k^s - x_k^t) \right| \rightarrow 0$$

olur.

O halde $k \leq m$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \rightarrow 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & |x_{k+m}^s - x_{k+m}^t| \\ & \leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^s - x_k^t) \right| + \dots + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^s - x_{k+m-1}^t) \right| \end{aligned}$$

olması nedeni ile her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ her sabit $k = 1, 2, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir

Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, $(k=1, 2, \dots)$

diyelim. (x^s) , $\Delta^m(I_\infty)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ oldukça

$\|x^s - x^t\|_\Delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde her $s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon \quad \text{ve} \quad \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \leq \varepsilon$$

dur. Bu son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_t \left| \Delta^m (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| &= \lim_t \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \\&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \\&= \left| \Delta^m (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\varepsilon \geq N$ için

$$\|x^s - x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq 2\varepsilon$$

dur. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi de $x = (x_k) \in \Delta^m(I_{\infty})$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}|\Delta^m x_k| &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \\&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N) \right| \\&\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N) \right| + \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}^N \right| \\&\leq \|x^N - x\|_{\Delta} + |\Delta^m x_k^N| = o(1)\end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \Delta^m(I_{\infty})$ elde edilir. O halde $(\Delta^m(I_{\infty}), \|\cdot\|_{\Delta})$ bir Banach uzayıdır.

Lemma II.1 : $\Delta^m(c)$, $\Delta^m(l_\infty)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat : $x \in \Delta^m(c)$ olsun. Bu takdirde $(\Delta^m x_k) \in c \subset l_\infty$ dur. Buradan

$\Delta^m(c) \subset \Delta^m(l_\infty)$ elde edilir. $\Delta^m(c) = \overline{\Delta^m(c)}$ olduğunu gösterelim. $\Delta^m(c) \subset \overline{\Delta^m(c)}$ olması nedeniyle $\overline{\Delta^m(c)} \subset \Delta^m(c)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{\Delta^m(c)}$ olsun. Bu takdirde $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ olmak üzere Teorem I.2 gereğince $x^n \rightarrow x$ olacak şekilde $\Delta^m(c)$ de bir (x^n) dizisi vardır. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için

$$\|x^n - x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \sup_k |\Delta^m(x_{k+v}^n - x_{k+v})| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan $n \geq N$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

elde edilir. $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in \Delta^m(c)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$(\Delta^m x_i^n) = (\Delta^m x_1^n, \Delta^m x_2^n, \dots) \in c$ ve dolayısıyla $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle $i, j \geq M$ için

$$|\Delta^m x_i^n - \Delta^m x_j^n| \leq \varepsilon \quad (2.4)$$

olacak şekilde en az bir M doğal sayısı vardır. Böylece her $i, j \geq M$ için (2.3) ve (2.4) gereğince

$$\begin{aligned} & |\Delta^m x_i - \Delta^m x_j| \\ &= |\Delta^m x_i - \Delta^m x_j + \Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i^N + \Delta^m x_j^N - \Delta^m x_j^N| \\ &\leq |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i| + |\Delta^m x_j^N - \Delta^m x_j| + |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_j^N| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $(\Delta^m x_i)$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{C}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Demek ki $(\Delta^m x_i) \in c$, yani $x \in \Delta^m(c)$ dir. O halde $\Delta^m(c)$ kapalıdır.

Teorem II.3 : $(\Delta^m(c), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

İspat : $\Delta^m(c)$, $\Delta^m(l_\infty)$ uzayının kapalı bir altuzayı olduğuna Teorem I.1 gereğince $\Delta^m(c)$ bir Banach uzayıdır.

Lemma II.2: $\Delta^m(c_0)$, $\Delta^m(l_\infty)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat : $x \in \Delta^m(c_0)$ olsun. Bu takdirde $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset l_\infty$ olup $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^m(l_\infty)$ dur. Şimdi $\Delta^m(c_0) = \overline{\Delta^m(c_0)}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{\Delta^m(c_0)} \subset \Delta^m(c_0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{\Delta^m(c_0)}$ olsun. Bu takdirde $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ olmak üzere Teorem I.2 gereğince $x^n \rightarrow x$ olacak şekilde $\Delta^m(c_0)$ da bir (x^n) dizisi vardır. O halde her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ oldukça

$$\|x^n - x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \sup_k |\Delta^m(x_{k+v}^n - x_{k+v})| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan $n \geq N$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (2.5)$$

elde edilir. (x^n) dizisi $\Delta^m(c_0)$ da yakınsak olduğundan $(\Delta^m x_i^n) = (\Delta^m x_1^n, \Delta^m x_2^n, \dots) \in c_0$

ve dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $i \geq M$ oldukça

$$|\Delta^m x_i^n| \leq \varepsilon \quad (2.6)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ doğal sayısı vardır.

Böylece (2.5) ve (2.6) gereğince $i \geq M$ için

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_i| &= |\Delta^m x_i + \Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i^N| \\ &\leq |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i| + |\Delta^m x_i^N| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $x = (x_i) \in \Delta^m(c_0)$ demektir. O halde $\Delta^m(c_0)$ kapalıdır.

Teorem II.4 : $(\Delta^m(c_0), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzaydır.

İspat : Lemma II.2 ve Teorem I.1 gereğince $\Delta^m(c_0)$ bir Banach uzaydır.

Teorem II.5 : $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ uzayları (2.2) deki norm ile birer BK-uzaydır.

İspat : $\|x^n - x\|_\Delta \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu takdirde $k \leq m$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & |x_{k+m}^n - x_{k+m}| \\ & \leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \dots + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik gözönüne alınırsa her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını verelim.

1) $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^{m+1}(c_0)$ ve $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$ dir.

$x \in \Delta^m(c_0)$ olsun. Bu takdirde $k \rightarrow \infty$ için $(\Delta^m x_k) \rightarrow 0$ dir.

$$\begin{aligned} |\Delta^{m+1} x_k| &= |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}| \\ &\leq |\Delta^m x_k| + |\Delta^m x_{k+1}| \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan $x \in \Delta^{m+1}(c_0)$ dir.

$\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$ olduğunu bir örnek ile gösterelim. $x = (k^m)$ seçelim. Bu durumda $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$ ve $\Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$ dir. İspatı tümevarımın ikinci prensibi gereğince yapalım.

a) $x = (k^m)$ için $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$ dir.

$m = 1$ için $x = (k)$ ve $\Delta^2 x_k = k - 2(k+1) + k+2 = 0$ olur.

$m = n - 1$ için $x = (k^{n-1})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^n x_k = 0$ olsun.

$m = n$ için $\Delta^{n+1}(k^n) = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$$\Delta^{n+1} x_k = \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} = 0 \text{ dir.}$$

b) $x = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir.

$m = 1$ için $x = (k)$ ve $\Delta x_k = k - (k+1) = -1 = (-1)1!$

$m = n - 1$ için $x = (k^{n-1})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ $\Delta^{n-1} x_k = (-1)^{n-1} (n-1)!$ olsun.

$m = n$ için $x = (k^n)$ ve $\Delta^n x_k = (-1)^n n!$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \Delta^n x_k &= \Delta^{n-1}(\Delta(k^n)) \\ &= \Delta^{n-1}(k^n - (k+1)^n) \\ &= - \left[\binom{n}{1} \Delta^{n-1}(k^{n-1}) + \binom{n}{2} \Delta^{n-1}(k^{n-2}) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1}(1) \right] \\ &= - n \Delta^{n-1}(k^{n-1}) \\ &= - n [(-1)^{n-1} (n-1)!] \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

O halde $x = (k^m) \in \Delta^{m+1}(c_0) = \Delta^m(c_0)$ dir.

2) $\Delta^{m-1}(c) \subset \Delta^m(c)$ ve $\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$ dir.

$x \in \Delta^{m-1}(c)$ olsun. Bu takdirde en az bir ℓ için $(\Delta^{m-1} x_k) \rightarrow \ell$ ($k \rightarrow \infty$) dur.

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k - \ell| + |\Delta^{m-1} x_{k+1} - \ell| \rightarrow 0$$

olur ki bu $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$ demektir. O halde $x \in \Delta^m(c)$ dir.

$\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$ dir. Gerçekten $x = (k^m)$ seçilirse her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ ve $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! (k + (m-1)/2)$ olup $x \in \Delta^m(c) - \Delta^{m-1}(c)$ dir.

a) $x = (k^m)$ olsun. 1) (b) den $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir.

b) $x = (k^m)$ için $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! (k + (m-1)/2)$ olduğunu gösterelim.

$m = 1$ için $x = (k)$ ve $\Delta^0 x_k = (-1)^2 1! (k + (1-1)/2)$ olur.

$m = n$ için $x = (k^n)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^{n-1} x_k = (-1)^{n+1} n! (k + (n-1)/2)$ olsun.

$m = n+1$ için $x = (k^{n+1})$ ve $\Delta^n x_k = (-1)^{n+2} (n+1)! (k + n/2)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \Delta^n x_k &= \Delta^{n-1}(\Delta(k^{n+1})) \\ &= \Delta^{n-1}(k^{n+1} - (k+1)^{n+1}) \\ &= - \left[\binom{n+1}{1} \Delta^{n-1}(k^n) + \binom{n+1}{2} \Delta^{n-1}(k^{n-1}) + \binom{n+1}{3} \Delta^{n-1}(k^{n-2}) + \dots + \binom{n+1}{n+1} \Delta^{n-1}(1) \right] \\ &= - \left[(n+1) \left((-1)^{n+1} n! \left(k + \frac{n-1}{2} \right) \right) + \frac{(n+1)!}{(n-1)! 2!} (-1)^{n-1} (n-1)! \right] \\ &= (-1)^{n+2} (n+1)! \left(k + n/2 \right) \end{aligned}$$

3) $\Delta^{m-1}(I_\infty) \subset \Delta^m(I_\infty)$ ve $\Delta^{m-1}(I_\infty) \neq \Delta^m(I_\infty)$ dur.

$x \in \Delta^{m-1}(I_\infty)$ olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^{m-1}(x_k)| \leq K$ olacak şekilde en az bir

$K > 0$ sayısı vardır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k| + |\Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq 2K$$

ve buradan $x \in \Delta^m(I_\infty)$ elde edilir.

$\Delta^{m-1}(I_\infty) \neq \Delta^m(I_\infty)$ dur. Gerçekten $x = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$

ve $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! (k + (m-1)/2)$ olup $x \in \Delta^m(I_\infty) - \Delta^{m-1}(I_\infty)$ dur.

Böylece 1), 2) ve 3) den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem II.6: X, I_∞, c veya c_0 uzaylarından birini göstereyin. Bu takdirde $n, m \in \mathbb{N}$

olmak üzere $n < m$ ise $\Delta^n(X) \subset \Delta^m(X)$ dir.

Teorem II.7: i) $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$,

ii) $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^m(c) \neq \Delta^m(l_\infty)$ dur.

İspat: i) $x \in \Delta^m(c_0)$ olsun. Bu takdirde $(\Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$ olup $x \in \Delta^m(c)$ dir.

$x = (k^m)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir. $(\Delta^m x_k) \in c - c_0$ olduğundan $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$ dir.

ii) Lemma II.1 den $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(l_\infty)$ dur. $\Delta^m(c) \neq \Delta^m(l_\infty)$ olduğunu gösterelim.

$x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ olup $x \in \Delta^m(l_\infty) - \Delta^m(c)$ dir.

Gerçekten $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ olduğunu gösterelim.

$m = 1$ için $\Delta x_k = (-1)^{k+1}$ olur.

$m = n$ için $\Delta^n x_k = (-1)^{k+1} 2^{n-1}$ olsun.

$m = n + 1$ için $\Delta^{n+1} x_k = (-1)^{k+1} 2^n$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} x_k &= \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} 2^{n-1} - (-1)^{k+2} 2^{n-1} \\ &= (-1)^{k+1} 2^{n-1} [1 - (-1)] \\ &= (-1)^{k+1} 2^n\end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı : l_∞ , c ve c_0 uzayları birer dizi cebiri oldukları halde $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ uzayları birer dizi cebiri değildir.

l_∞ , c ve c_0 ın birer dizi cebiri olduğu bilinmektedir. $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ ın dizi cebiri olmadıklarını karşıt birer örnek vererek gösterelim. $x = (k)$ ve $y = (k^{m-1})$ seçelim $x, y \in \Delta^m(c_0)$ olduğu halde $\Delta^m(k^m) \notin c_0$ yani $x.y \notin \Delta^m(c_0)$ dir. $x = (k)$ ve $y = (k^m)$ seçelim. $x, y \in \Delta^m(c)$ ve $x, y \in \Delta^m(l_\infty)$ olduğu halde $\Delta^m(k^{m+1}) \notin c$ ve $\Delta^m(k^{m+1}) \notin l_\infty$, yani $x.y \notin \Delta^m(c)$ ve $x.y \notin \Delta^m(l_\infty)$ dur.

Şimdi D operatörünü

$$D : \Delta^m(\mathbb{Z}_\infty) \rightarrow \Delta^m(\mathbb{Z}_\infty) , x \rightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. D lineerdir. Gerçekten $x, y \in \Delta^m(\mathbb{Z}_\infty)$ ve α skaleri için

$$\begin{aligned} 1) D(x + y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\ &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\ &= Dx + Dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha Dx \end{aligned}$$

dir.

D sınırlıdır. Gerçekten

$$\|Dx\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k |\Delta^m y_k|$$

$$= \sup \{ |\Delta^m y_1|, \dots, |\Delta^m y_m|, |\Delta^m y_{m+1}|, \dots \}$$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots, \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, \right.$$

$$\left. |\Delta^m x_{m+1}|, |\Delta^m x_{m+2}|, \dots \right\}$$

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup \{ |\Delta^m x_1|, \dots, |\Delta^m x_m|, |\Delta^m x_{m+1}|, \dots \}$$

dir. Buradan $\|Dx\|_\Delta \leq K \|x\|_\Delta$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$$D[\Delta^m(l_\infty)] = D\Delta^m(l_\infty) = \{x = (x_k) : x \in \Delta^m(l_\infty) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$$

uzayını tanımlayalım. Bu uzay $\Delta^m(l_\infty)$ un bir altuzayı olup $D\Delta^m(l_\infty)$ üzerindeki norm

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi

$$\Delta^m : D\Delta^m(l_\infty) \longrightarrow l_\infty \quad (2.8)$$

$$x = (x_k) \longrightarrow y = (y_k) = (\Delta^m x_k)$$

operatörünü tanımlayalım. Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m nin lineerliği açıktır. Δ^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m birebirdir. $x, y \in D\Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^m x = \Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta^m(x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0}(x_k - y_k) + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}(x_{k+m-1} - y_{k+m-1}) + (-1)^m \binom{m}{m}(x_{k+m} - y_{k+m}) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ^m örtendir. Her $y \in l_\infty$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in D\Delta^m(l_\infty)$ vardır. Gerçekten

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} y_v \quad (2.9)$$

olarak seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m sınırlıdır.

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|\Delta^m x\|_\infty} = 1$$

$$4) (\Delta^m)^{-1} \text{ sınırlı ve } y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v \text{ olmak üzere}$$

$$(\Delta^m)^{-1} : l_\infty \longrightarrow D\Delta^m(l_\infty) \quad (2.10)$$

$$x \longrightarrow ((\Delta^m)^{-1} x_k) = (y_k)$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten

$$\|(\Delta^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_\Delta}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_k |\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dir. O halde Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $D\Delta^m(l_\infty)$ ile l_∞ uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka

$$\|\Delta^m x\|_\infty = \|x\|_\Delta$$

ve

$$\|(\Delta^m)^{-1} x\|_\Delta = \sup_k |\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k| = \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

olduğundan Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

$[D\Delta^m(l_\infty)]'$ ve l_∞' sırası ile $D\Delta^m(l_\infty)$ ile l_∞ uzaylarının sürekli dualle-
rini gösterebiliriz.

$$T : [D\Delta^m(l_\infty)]' \longrightarrow l_\infty' \quad (2.11)$$

$$f_\Delta \longrightarrow T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir. Gerçekten her $f_\Delta, g_\Delta \in [D\Delta^m(l_\infty)]'$

ve her α skaleri için

$$\begin{aligned} 1) T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} + g_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad T(\alpha f_{\Delta}) &= (\alpha f_{\Delta}) \circ (\Delta^m)^{-1} \\
 &= \alpha (f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1}) \\
 &= \alpha T(f_{\Delta})
 \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu yani, $\|f_{\Delta}\| = \|T(f_{\Delta})\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_{\Delta}\| = \sup_{\|x\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}(x)|, \quad x \in D\Delta^m(I_{\infty})$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|T(f_{\Delta})\| &= \|f\| = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} |f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1}(x)|, \quad x \in I_{\infty} \\
 &= \sup_{\|(\Delta^m)^{-1}(x)\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}((\Delta^m)^{-1}(x))| \\
 &= \sup_{\|y\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}(y)| \\
 &= \|f_{\Delta}\|
 \end{aligned}$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır.

Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in I_{\infty}'$ için $T(f_{\Delta}) = f$ olacak şekilde en az bir

$f_{\Delta} \in [D\Delta^m(I_{\infty})]'$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
 T(f_{\Delta}) &= T(f_{\Delta} \circ \Delta^m) \\
 &= (f_{\Delta} \circ \Delta^m) \circ (\Delta^m)^{-1} \\
 &= f \circ (\Delta^m \circ (\Delta^m)^{-1}) = f
 \end{aligned}$$

dir. Demek ki $T: [D\Delta^m(I_{\infty})]' \rightarrow I_{\infty}'$ bir lineer izomorfizmdir. O halde $D\Delta^m(I_{\infty})$ un

duali I_{∞} un dualine denktir.

D operatörünü

$$D : \Delta^m(c) \rightarrow \Delta^m(c) , x \rightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. D lineerdir. Gerçekten $x, y \in \Delta^m(c)$ ve α skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad D(x + y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\ &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\ &= Dx + Dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha Dx \end{aligned}$$

dir. D sınırlıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \|Dx\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k |\Delta^m y_k| \\ &= \sup \{ |\Delta^m y_1|, \dots, |\Delta^m y_m|, |\Delta^m y_{m+1}|, \dots \} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots, \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, \right. \\ &\quad \left. |\Delta^m x_{m+1}|, |\Delta^m x_{m+2}|, \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup \{ |\Delta^m x_1|, \dots, |\Delta^m x_m|, |\Delta^m x_{m+1}|, \dots \}$$

dir. Buradan $\|Dx\|_{\Delta} \leq K \|x\|_{\Delta}$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$$D[\Delta^m(c)] = D\Delta^m(c) = \{ x = (x_k) : x \in \Delta^m(c) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0 \}$$

uzayını tanımlayalım. Bu uzay $\Delta^m(c)$ nin bir altuzayı olup $D\Delta^m(c)$ üzerindeki norm

$$\|x\|_{\Delta} = \|\Delta^m x\|_{\infty} \quad (2.12)$$

dur. Şimdi Δ^m operatörünü

$$\Delta^m : D\Delta^m(c) \rightarrow c \quad (2.13)$$

$$x = (x_k) \rightarrow y = (y_k) = (\Delta^m x_k)$$

şeklinde tanımlayalım. Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m nin lineerliği açıktır. Δ^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m birebir dir. $x, y \in D\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m x = \Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta^m (x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0}(x_k - y_k) + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}(x_{k+m-1} - y_{k+m-1}) + (-1)^m \binom{m}{m}(x_{k+m} - y_{k+m}) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ^m örtendir. Her $y \in c$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in D\Delta^m(c)$

vardır. Gerçekten (x_k) dizisi (2.9) daki gibi seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m sınırlıdır.

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_{\infty}}{\|x\|_{\Delta}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_{\infty}}{\|\Delta^m x\|_{\infty}} = 1$$

4) $(\Delta^m)^{-1}$ sınırlı ve $y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v$ olmak üzere

$$(\Delta^m)^{-1} : c \rightarrow D\Delta^m(c) \quad (2.14)$$

$$(x_k) \rightarrow ((\Delta^m)^{-1} x_k) = (y_k)$$

şeklinde tanımlıdır.

Gerçekten

$$\|(\Delta^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_{\Delta}}{\|x\|_{\infty}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_k |\Delta^m(\Delta^m)^{-1}x_k|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dır. O halde Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. $D\Delta^m(c)$ ile c uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka

$$\|\Delta^m x\|_{\infty} = \|x\|_{\Delta}$$

ve

$$\|(\Delta^m)^{-1}x\|_{\Delta} = \sup_k |\Delta^m(\Delta^m)^{-1}x_k| = \sup_k |x_k| = \|x\|_{\infty}$$

olduğundan Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar. Eğer T operatörünü

$$T : [D\Delta^m(c)]' \rightarrow c' \quad (2.15)$$

$$f_{\Delta} \rightarrow T(f_{\Delta}) = f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlarsak, T dönüşümü bir lineer izometri olur. Gerçekten her $f_{\Delta}, g_{\Delta} \in [D\Delta^m(c)]'$

ve her α skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad T(f_{\Delta} + g_{\Delta}) &= (f_{\Delta} + g_{\Delta}) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1} + g_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= T(f_{\Delta}) + T(g_{\Delta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T(\alpha f_{\Delta}) &= (\alpha f_{\Delta}) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= \alpha (f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1}) \\ &= \alpha T(f_{\Delta}) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu yani, $\|f_{\Delta}\| = \|T(f_{\Delta})\|$ olduğunu göstereyim.

$$\|f_{\Delta}\| = \sup_{\|x\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}(x)|, \quad x \in D\Delta^m(c)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|T(f_{\Delta})\| &= \|f\| = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} |f_{\Delta} \circ (\Delta^m)^{-1}(x)|, \quad x \in c \\
 &= \sup_{\|(\Delta^m)^{-1}(x)\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}((\Delta^m)^{-1}(x))| \\
 &= \sup_{\|y\|_{\Delta}=1} |f_{\Delta}(y)| \\
 &= \|f_{\Delta}\|
 \end{aligned}$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır.

Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in c'$ için $T(f_{\Delta}) = f$ olacak şekilde en az bir

$f_{\Delta} \in [D\Delta^m(c)]'$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
 T(f_{\Delta}) &= T(f_{\Delta} \circ \Delta^m) \\
 &= (f_{\Delta} \circ \Delta^m) \circ (\Delta^m)^{-1} \\
 &= f \circ (\Delta^m \circ (\Delta^m)^{-1}) \\
 &= f
 \end{aligned}$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[D\Delta^m(c)]'$ ile c' uzayları denk topo-

lojik uzaylardır. Böylece $\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ olmak üzere $[D\Delta^m(c)]' \cong \ell_1$ dir.

Şimdi de D operatörünü

$$D : \Delta^m(c_0) \rightarrow \Delta^m(c_0), \quad x \rightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

olarak tanımlayalım. $x, y \in \Delta^m(c_0)$ ve α skaleri için

$$\begin{aligned}
 1) \quad D(x + y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\
 &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\
 &= Dx + Dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\
 &= \alpha (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\
 &= \alpha Dx
 \end{aligned}$$

olduğundan D lineerdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 \|Dx\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k |\Delta^m y_k| \\
 &= \sup \{ |\Delta^m y_1|, \dots, |\Delta^m y_m|, |\Delta^m y_{m+1}|, \dots \} \\
 &= \sup \left\{ \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots, \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, \right. \\
 &\quad \left. |\Delta^m x_{m+1}|, |\Delta^m x_{m+2}|, \dots \right\} \\
 \|x\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup \{ |\Delta^m x_1|, \dots, |\Delta^m x_m|, |\Delta^m x_{m+1}|, \dots \}
 \end{aligned}$$

olduğundan $\|Dx\|_{\Delta} \leq K \|x\|_{\Delta}$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$$D[\Delta^m(c_0)] = D\Delta^m(c_0) = \{x = (x_k) : x \in \Delta^m(c_0) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$$

uzayı $\Delta^m(c_0)$ uzayının bir altuzayıdır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|x\|_{\Delta} = \|\Delta^m x\|_{\infty} \quad (2.16)$$

dur. Şimdi Δ^m operatörünü

$$\Delta^m : D\Delta^m(c_0) \rightarrow c_0 \quad (2.17)$$

$$x = (x_k) \rightarrow y = (y_k) = (\Delta^m x_k)$$

şeklinde tanımlayalım. Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ^m nin lineerliği açıktır. Δ^m nin bir homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ^m birebir dir. $x, y \in D\Delta^m(c_0)$ ve $\Delta^m x = \Delta^m y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Delta^m(x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0}(x_k - y_k) + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}(x_{k+m-1} - y_{k+m-1}) + (-1)^m \binom{m}{m}(x_{k+m} - y_{k+m}) = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ^m örtendir. Her $y \in c_0$ için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in D\Delta^m(c_0)$

vardır. Gerçekten (x_k) dizisi (2.9) daki gibi seçilirse $\Delta^m x_k = y_k$ elde edilir.

3) Δ^m sınırlıdır.

$$\|\Delta^m\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|x\|_\Delta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta^m x\|_\infty}{\|\Delta^m x\|_\infty} = 1$$

$$4) (\Delta^m)^{-1} \text{ sınırlı ve } y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} x_v \text{ olmak üzere}$$

$$(\Delta^m)^{-1} : c_0 \rightarrow D\Delta^m(c_0) \quad (2.18)$$

$$(x_k) \rightarrow ((\Delta^m)^{-1} x_k) = (y_k)$$

şeklinde tammlıdır. O halde

$$\|(\Delta^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_\Delta}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_k |\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k|}{\sup_k |x_k|} = 1$$

dır. Buradan Δ^m bir lineer homeomorfizmdir. $D\Delta^m(c_0)$ ile c_0 uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka

$$\|\Delta^m x\|_\infty = \|x\|_\Delta$$

ve

$$\|(\Delta^m)^{-1} x\|_\Delta = \sup_k |\Delta^m (\Delta^m)^{-1} x_k| = \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

olduğundan Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

Eğer T operatörünü

$$T : [D\Delta^m(c_0)]' \rightarrow c_0' \quad (2.19)$$

$$f_\Delta \rightarrow T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} = f$$

şeklinde tanımlarsak T dönüşümü bir lineer izometri olur. Gerçekten her $f_\Delta, g_\Delta \in [D\Delta^m(c_0)]'$

ve her α skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} + g_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T(\alpha f_\Delta) &= (\alpha f_\Delta) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= \alpha (f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1}) \\ &= \alpha T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu yani, $\|f_\Delta\| = \|T(f_\Delta)\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_\Delta = 1} |f_\Delta(x)|, \quad x \in D\Delta^m(c_0)$$

ve

$$\|T(f_\Delta)\| = \|f\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1} |f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1}(x)|, \quad x \in c_0$$

$$= \sup_{\|(\Delta^m)^{-1}(x)\|_\Delta = 1} |f_\Delta((\Delta^m)^{-1}(x))|$$

$$= \sup_{\|y\|_\Delta = 1} |f_\Delta(y)|$$

$$= \|f_\Delta\|$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır.

Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in c_0'$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde en az bir

$f_\Delta \in [D\Delta^m(c_0)]'$ vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} T(f_\Delta) &= T(f_\Delta \circ \Delta^m) \\ &= (f_\Delta \circ \Delta^m) \circ (\Delta^m)^{-1} \\ &= f \circ (\Delta^m \circ (\Delta^m)^{-1}) \\ &= f \end{aligned}$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[D\Delta^m(c_0)]'$ ile c_0' uzayları denk topo-

lojik uzaylardır. Böylece $[D\Delta^m(c_0)]' \cong l_1$ dir.

Böylece şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem II. 8. i) $[D\Delta^m(l_\infty)]' \cong l_\infty'$,

ii) $[D\Delta^m(c)]' \cong l_1$,

iii) $[D\Delta^m(c_0)]' \cong l_1$ dir.

III DUAL UZAYLAR

Bu bölümde $\Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^m(c)$ dizi uzaylarının α -dualini hesaplayacağız.

Lemma III.1 : $X = (x_k) \in \Delta^m(l_\infty)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$i) \sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$$

$$ii) \sup_k |\Delta^{m-1} x_k - k(k+1)^{-1} \Delta^{m-1} x_{k+1}| < \infty$$

olmasıdır.

İspat : $X = (x_k) \in \Delta^m(l_\infty)$ olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k| \leq M$, yani $|\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$i) \Delta^{m-1} x_1 - \Delta^{m-1} x_{k+1} = \sum_{v=1}^k \Delta^{m-1} x_v - \Delta^{m-1} x_{v+1}$$

yazılabileceğinden

$$|\Delta^{m-1} x_1 - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq \sum_{v=1}^k |\Delta^{m-1} x_v - \Delta^{m-1} x_{v+1}| = O(k) \quad (3.1)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \quad (3.2)$$

dir. (3.1) ve (3.2) kullanılırsa

$$|\Delta^{m-1} x_k| \leq |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| + |\Delta^{m-1} x_1 - \Delta^{m-1} x_{k+1}| + |\Delta^{m-1} x_1|$$

eşitsizliğinden $\sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ elde edilir. Böylece i) ispatlanmış olur.

ii)

$$\begin{aligned} |\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| &= |(k+1)(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| \\ &\leq k(k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| + (k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| \\ &\leq |\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| + k^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik gözönüne alınırsa i) den ve $|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| \leq M$ olduğundan
 $\sup_k |\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| < \infty$ elde edilir.

Tersine i) ve ii) sağlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} k(k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| &= (k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| \\ &= k(k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_{k+1} - \Delta^{m-1}x_k| + (k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| \\ &\leq |k(k+1)^{-1}(\Delta^{m-1}x_{k+1} - \Delta^{m-1}x_k)| + (k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| \\ &= |k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1} - [(k+1)(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_k]| \\ &= |\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$k(k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| \leq (k+1)^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| + |\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}|$$

dır. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} |\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| &\leq k^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| + k^{-1}(k+1)|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| \\ &\leq k^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| + k^{-1}(k+k)|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| \\ &= k^{-1}|\Delta^{m-1}x_k| + 2|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}| \end{aligned}$$

bulunur. (i) ve (ii) gözönüne alınırsa $\sup_k |\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| < \infty$ elde edilir.

Lemma III.2 : $i \in \mathbb{N}$ için $\sup_k k^{-i} |\Delta x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-(i+1)} |x_k| < \infty$ dur.

İspat : $\sup_k k^{-i} |\Delta x_k| < \infty$ olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$k^{-i} |\Delta x_k| \leq M \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buna göre

$$x_1 - x_{k+1} = \sum_{v=1}^k (x_v - x_{v+1})$$

olduğundan

$$|x_1 - x_{k+1}| \leq \sum_{v=1}^k |x_v - x_{v+1}| = O(k^{i+1}) \quad (3.4)$$

dir. (3.3) ve (3.4) kullanılırsa

$$|x_k| \leq |x_k - x_{k+1}| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_1|$$

eşitsizliğinden $\sup_k k^{-(i+1)} |x_k| < \infty$ elde edilir.

Lemma III.3 : $1 \leq i < m$ ve $i, m \in \mathbb{N}$ için $\sup_k k^{-i} |\Delta^{m-i} x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-(i+1)} |\Delta^{m-(i+1)} x_k| < \infty$ dur.

İspat : Lemma III.2 de Δx_k yerine $\Delta^{m-i} x_k$ alınırsa ispat çıkar.

Bu Lemmadan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç III.1 : $\sup_k k^{-i} |\Delta^{m-i} x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ dur.

Sonuç III.2 : $x = (x_k) \in \Delta^m(l_\infty)$ ise $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ dur.

İspat : Lemma III.1 den $x = (x_k) \in \Delta^m(l_\infty)$ için $\sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ ve Sonuç III.1 den dolayı da $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ elde edilir.

Lemma III.4 :

$$[D\Delta^m(l_\infty)]^\alpha = \{ a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty \}$$

İspat :

$U_1 = \{ a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty \}$ diyelim. $a \in U_1$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\Delta^m(l_\infty) \subset \Delta^m(l_\infty)$ için Sonuç III.2 kullanılırsa

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| (k^{-m} |x_k|) < \infty \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradan $a \in [D\Delta^m(l_\infty)]^\alpha$ çıkar.

$a \in [D\Delta^m(l_\infty)]^\alpha$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\Delta^m(l_\infty)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq m \quad \text{ise} \\ k^m & , \quad k > m \quad \text{ise} \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlayalım. $x \in D\Delta^m(l_\infty)$ dur.

Bu dizi için

$$\sum_k k^m |a_k| = \sum_{k=1}^m k^m |a_k| + \sum_k |a_k x_k| < \infty \quad (3.7)$$

olup, buradan $a \in U_1$ elde edilir.

Lemma III.5 : $[D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha = [D\Delta^m(c)]^\alpha$ dir.

İspat : $D\Delta^m(c) \subset D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)$ olduğundan $[D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha \subset [D\Delta^m(c)]^\alpha$

dir. $a \in [D\Delta^m(c)]^\alpha$ olsun. Bu takdirde her $x \in D\Delta^m(c)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. (3.6)

daki dizi için (3.7) yi yazabiliriz. Böylece $\sum_k k^m |a_k| < \infty$ olur ki bu $a \in [D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha$ olmasını gerektirir.

Lemma III.6 :

i) $[\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha = [D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha$

ii) $[\Delta^m(c)]^\alpha = [D\Delta^m(c)]^\alpha$

dir.

İspat : i) $D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty) \subset \Delta^m(\mathcal{I}_\infty)$ olduğundan aşıkâr olarak

$[\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha \subset [D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha$ dir. Şimdi de $a \in [D\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha$ olsun. Sonuç III.2 kullanılırsa

herhangi bir $x \in \Delta^m(\mathcal{I}_\infty)$ için

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| (k^{-m} |x_k|) < \infty$$

elde edilir. Bu ise $a \in [\Delta^m(\mathcal{I}_\infty)]^\alpha$ demektir.

ii) $D\Delta^m(c) \subset \Delta^m(c)$ olduğundan $[\Delta^m(c)]^\alpha \subset [D\Delta^m(c)]^\alpha$ dir.

$a \in [D\Delta^m(c)]^\alpha$ olsun. Herhangi bir $x \in \Delta^m(c) \subset \Delta^m(l_\infty)$ için (3.5) den $\sum_k |a_k x_k| < \infty$

elde edilir. Buradan $a \in [\Delta^m(c)]^\alpha$ bulunur.

Teorem III.1 : $X = l_\infty$ veya c için

$$[\Delta^m(X)]^\alpha = \{ a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty \}$$

dir.

İspat : İspat Lemma III.4, Lemma III.5 ve Lemma III.6 dan hemen çıkar.

IV MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $A = (a_{nk})$ kompleks terimli bir matris olmak üzere $(l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$, $(l_\infty, \Delta^m(c))$, $(c, \Delta^m(l_\infty))$, $(c, \Delta^m(c))$ matris sınıfları karakterize edilecektir.

Teorem IV . 1 : $A \in (l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B = (b_{nk}) = (\Delta^m a_{nk}) = (\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k}) \quad (4.1)$$

olmak üzere

$$i) \quad \sum_k |a_{nk}| < \infty, \quad (\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

$$ii) \quad B \in (l_\infty, l_\infty)$$

olmasıdır.

İspat : $A \in (l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$ olsun. Bu takdirde her $x \in l_\infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \text{ yakınsak ve } (A_n(x)) \in \Delta^m(l_\infty) \text{ dur.}$$

$$i) \quad \text{Her } x \in l_\infty \text{ için } \sum_k a_{nk} x_k \text{ yakınsak } (l_\infty)^\beta = l_1 \text{ olduğundan her } n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$$(a_{nk}) = (a_{n1}, a_{n2}, \dots,) \in l_1 \text{ yani, } \sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ dur.}$$

$$ii)$$

$$\Delta^m A_n(x) = \sum_k \Delta^m a_{nk} x_k = \sum_k b_{nk} x_k = B_n(x) \quad (4.2)$$

olması nedeniyle $(A_n(x)) \in \Delta^m(l_\infty)$ olduğundan $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ olup , buradan

$B \in (l_\infty, l_\infty)$ elde edilir.

i) ve ii) sağlansın ve $x \in l_\infty$ olsun. $(B_n(x)) \in l_\infty$ olması nedeniyle

$$B_n(x) = \sum_k b_{nk} x_k = \sum_k \Delta^m a_{nk} x_k = \Delta^m A_n(x) \quad (4.3)$$

eşitliğinden $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ bulunur ki buradan $(A_n(x)) \in \Delta^m(l_\infty)$ elde edilir. O halde $A \in (l_\infty, \Delta^m(l_\infty))$ dur.

Teorem IV.2 : B matrisi (4.1) deki gibi olsun. $A \in (l_\infty, \Delta^m(c))$ olması için gerek ve yeter koşul

i) $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in \mathbb{N}$ için)

ii) $B \in (l_\infty, c)$

olmasıdır.

İspat : $A \in (l_\infty, \Delta^m(c))$ olsun. Bu takdirde her $x \in l_\infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in \Delta^m(c)$ dir.

i) Her $x \in l_\infty$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak $(l_\infty)^\beta = l_1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ olur.}$$

ii) $(A_n(x)) \in \Delta^m(c)$ ise $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ dir. (4.2) kullanılırsa $B \in (l_\infty, c)$ bulunur.

i) ve ii) sağlansın ve $x \in l_\infty$ keyfi bir dizi olsun. (4.3) den $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ elde edilir. Buradan $A \in (l_\infty, \Delta^m(c))$ dur.

Teorem IV . 3 : B matrisi (4.1) deki gibi olsun. $A \in (c, \Delta^m(l_\infty))$ olması için gerek ve yeter koşul

i) $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in \mathbb{N}$ için)

ii) $B \in (c, l_\infty)$

olmasıdır.

İspat : $A \in (c, \Delta^m(l_\infty))$ olsun. Bu takdirde her $x \in c$ için $(A_n(x)) \in \Delta^m(l_\infty)$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsaktır.

i) Her $x \in c$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ve $c^\beta = l_1$ olduğundan , her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ elde edilir.

ii) $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ olduğundan (4.2) den $B \in (c, l_\infty)$ olur.

i) ve ii) sağlansın ve $x \in c$ olsun. $(B_n(x)) \in l_\infty$ olduğundan (4.3) dikkate alınırsa $(\Delta^m A_n(x)) \in l_\infty$ elde edilir. Buradan $A \in (c, \Delta^m(l_\infty))$ elde edilir.

Teorem IV . 4 : B matrisi (4.1) deki gibi olsun. $A \in (c, \Delta^m(c))$ olması için gerek ve yeter koşul

i) $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, (Her $n \in \mathbb{N}$ için)

ii) $B \in (c, c)$

olmasıdır.

İspat : $A \in (c, \Delta^m(c))$ olsun. Bu takdirde her $x \in c$ için $(A_n(x)) \in \Delta^m(c)$ ve her

$n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsaktır.

i) Her $x \in c$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve $c^\beta = \lambda_1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ elde edilir.

ii) (4.2) yi gözönüne alalım. $(A_n(x)) \in \Delta^m(c)$ olduğundan $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ olup buradan $B \in (c, c)$ elde edilir.

Tersine i) ve ii) sağlansın ve $x \in c$ olsun. (4.3) gözönüne alınırsa $(\Delta^m A_n(x)) \in c$ elde edilir. Bu ise $(A_n(x)) \in \Delta^m(c)$ demektir. O halde $A \in (c, \Delta^m(c))$ dir.

KAYNAKLAR

- Goes, G. ve Goes, S. (1970) : *Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I*. Math. Z. 118 , 93 -102.
- Hardy, G.H. (1949) : *Divergent Series*, At the Clarendon Press, Oxford.
- Kamphtham, P.K. ve Gupta, M. (1981) : *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker Inc. New York.
- Kantorovich, L.V. ve Akilov, G.P. (1982) : *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford.
- Kızmaz, H. (1981) : *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull. Vol. 24(2), 169 -176.
- Kreyszig, E. (1978) : *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- Maddox, I.J. (1970) : *Elements of Functional Analysis*. Cambridge Univ. Press.
- Nanda, S. (1986) : *Two Applications of Functional Analysis I, Matrix Transformations and Sequence Spaces*. Queen's Papers and Appl. Math. Queen's Univ. Press. 74.
- Powell, R.E. ve Shah, S.M. (1972) : *Summability Theory and Its Applications*. Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Yurtsever, B. (1978) : *Mathematik Analiz Dersleri, Cilt I* , Diyarbakır Üniv. Fen Fak. Yayınları.