

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MINKOWSKI UZAYINDA BEZİER EĞRİLERİNİN
KARAKTERİZASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ceylan YEŞİLMEN

(131121113)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI

2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA BEZİER EĞRİLERİNİN
KARAKTERİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ceylan YEŞİLMEN
(131121113)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Aralık- 2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİNİN
KARAKTERİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ceylan YEŞİLMEN

(131121113)

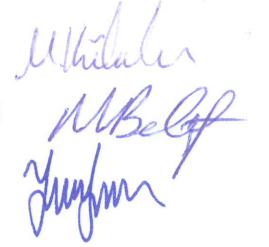
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.12.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 29.01.2016

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye: Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ



OCAK - 2016

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, çalışmalarımda destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Essin TURHAN'a, çalışmalarımda bana her türlü imkanı sağlayan ve desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI'ya ve çalışmanın her aşamasında desteğini gördüğüm çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Gülden ALTAY 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ceylan YEŞİLMEN

ELAZIĞ-2016

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	2
Temel Tanımlar	2
3. BÖLÜM	15
$\mathbb{R}^3$ Uzayında ve Düzlemde Bezier Eğrileri ve Özellikleri	15
4. BÖLÜM	38
PH ve MPH Eğrileri ve Bazı Karakterizasyonları	38
KAYNAKLAR	45

ÖZET

MINKOWSKI UZAYINDA BEZIER EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; çalışmanın giriş kısmı olup, bu bölümde Bezier eğrileri ve PH eğrileri üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelendi.

İkinci bölümde; Bezier eğrileri, Minkowski uzayı, PH ve MPH eğrileri ile ilgili temel tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde; $\mathbb{R}^3$ uzayında ve düzlemde Bezier eğrileri ve özellikleri incelendi. Ayrıca, bu eğrilerin bazı örnekleri elde edilerek çizimleri verildi.

Dördüncü bölümde ise PH ve MPH eğrileriyle ilgili bazı özellikler ve teoremler incelendi..

Anahtar Kelimeler: Kontrol noktaları, Bernstein taban polinomları, Bezier eğrileri, PH ve MPH eğrileri.

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF BEZIER CURVES IN MINKOWSKI SPACE

This thesis consists of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction. Then, studies in literature about Bezier curves and PH curves are examined.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of Bezier, PH and MPH curves are given.

In the third chapter; in $\mathbb{R}^3$ space and in plane Bezier curves and their properties are examined. Then, some examples and their graphics are given.

In the fourth chapter; some properties and theorems of PH and MPH curves are investigated.

Keywords: Control points, Bernstein polynomial, Bezier curves, PH and MPH curves.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Reel Uzay
$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzay
$\mathbb{E}^{3,1}$	: 3-boyutlu Minkowski Uzay
$\mathbb{R}^{n,1}$	: n-boyutlu Lorentz Uzay
V	: Vektör Uzayı
L	: Lorentz dönüşümü
F	: Afın dönüşüm
$\langle, \rangle$	: Simetrik bilineer form veya Lorentz iç çarpımı
$ $	: Norm
T	: Birim teğet vektör
N	: Birim normal vektör
B	: Birim binormal vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
$b_0, b_1, \dots, b_n$	: Kontrol noktaları
$B(t)$	: Bezier eğrisi
$B_i^n(t)$	: Bernstein taban polinomları
CH	: Konveks hull

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bilgisayar destekli tasarımların (CAD) temelini parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler oluşturmaktadır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları (patch), B- spline metodları, PH ve MPH eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) önemli bir yere sahiptir. Bilgisayar destekli geometrik tasarım (kısaca CAGD)'ın başlangıcı konik kesitlerinin ortaya konulması ve Roma dönemlerine kadar uzanmaktadır. Bu alandaki bilimsel araştırmalar ilk olarak R. Liming tarafından yapılmıştır. Ancak, Liming'in sunduğu bu yeni teknikler uçak tasarımında kullanışlı olmasına rağmen diğer alanlarda kullanışlı olmamıştır, [2].

Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk defa 1958-1960 yıllarında otomotiv sektöründe, Citroen ve Renault firmalarında mühendis olarak çalışan Paul De Casteljaeu ve Pierre Bezier tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. De Casteljaeu, Bezier eğrilerini P. Bezier'den az bir zaman önce geliştirmiş, ancak yaptığı çalışmaları herhangi bir yerde yayınlamamıştır. Böylece, polinom eğri ve yüzeylerin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi, P. Bezier'in ismiyle anılmaya başlamıştır, [2].

PH eğrileri ise ilk olarak 1990 yılında Farouki ve Sakkalis tarafından geliştirilmiştir. PH eğrileri birçok geometrik ve cebirsel özelliğe sahiptir. Bu nedenle PH eğrileri birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bunun sonucunda bu eğrilerle ilgili yüzlerce çalışma yapılmıştır, [11]. 2008 yılında CAGD gazetesinde PH eğrileriyle ilgili "Pythagorean-Hodograph Curves and Related Topics" başlığı altında bir makale yayınlanmıştır. Aynı yıl Farouki, Pythagorean özelliğiyle eğrilerin şekillerinin oluşturulması arasındaki bağlantıyı kurarak PH eğrileriyle ilgili yeni araştırmaların başlamasına zemin hazırlamıştır. Son yıllarda, PH eğrilerinin offsettingdeki uygulamaları, CNC makineciliği, devinim (hareket) planlaması vb. alanlarda aktif bir çalışma sahasına sahip olmuştur, [8].

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde çalışmamıza yön verecek olan tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve (I, α) koordinat komşuluğu verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

olmak üzere $t \in I$ için $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ şeklinde tanımlı $\alpha(t)$ ye $\mathbb{E}^n$ de bir *eğri* denir. Burada I aralığına α *eğrisinin parametre aralığı*, $t \in I$ ya α *eğrisinin parametresi* denir, [3].

Tanım 2.1.2.

$\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$t \in I$ ve $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ olmak üzere $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ ile tanımlı vektöre *M eğrisinin hız vektörü* denir, [3].

Tanım 2.1.3.

$\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skaler hız fonksiyonu*, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skaler hızı* denir, [3].

Tanım 2.1.4.

$\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

oluyorsa M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre *birim hızlı eğri* denir. Bu durumda α eğrisinin $s \in I$ parametresine de *yay parametresi* denir, [3].

Tanım 2.1.5.

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir, [3].

Tanım 2.1.6.

$\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi için $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet 3-ayaklısı* $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ ile gösterilirse

$$\mathbf{T} = \alpha'(s),$$

$$\mathbf{N} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

olarak tanımlıdır, [3].

Tanım 2.1.7.

$\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ olmak üzere α eğrisinin sırasıyla, *eğrilik ve burulması*

$$\kappa = \|\alpha''(s)\|,$$

$$\tau = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2}$$

olarak tanımlıdır, [3].

Tanım 2.1.8.

$\mathbb{E}^3$ de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ olmak üzere *Serret-Frenet formülleri*

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N},$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$$

dir. Bu ifade matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

olarak yazılır, [3].

Tanım 2.1.9.

$\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{K}$ elemanlarının, sonlu sayıdakileri dışında kalanlar sıfır ($\mathbb{K}$ daki birinci işlemin etkisiz elemanı) olmak üzere bu elemanların sıralı ve sayılabilir her bir

$$P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n, \dots)$$

sistemine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir *polinom* denir, [4]

Tanım 2.1.10.

3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin genel şeklini belirleyen ve sürekli parametrik polinom fonksiyon parçalarında kullanılan noktalara *kontrol noktaları* denir, [14].

Tanım 2.1.11.

3-boyutlu Öklid uzayında seçilen kontrol noktaları yardımıyla çizilen eğriye *Bezier eğrisi* denir, [1].

Tanım 2.1.12.

V bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir, [12]:

1.

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$$

2.

$$\langle aX + bY, Z \rangle = a \langle X, Z \rangle + b \langle Y, Z \rangle ,$$

$$\langle X, aY + bZ \rangle = a \langle X, Y \rangle + b \langle X, Z \rangle .$$

Tanım 2.1.13.

$\langle, \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

i) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna *pozitif tanımlı*,

ii) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna *negatif tanımlı*,

iii) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna *pozitif yarıtanımlı*,

iv) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna *negatif yarıtanımlı*,

v) Eğer $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna *nondejenere* denir, [12].

Tanım 2.1.14.

V bir reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir simetrik bilinear form olsun.

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun *indeksi* denir, [12].

Tanım 2.1.15.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı yerine indeksi 1 olan

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ uzayına *Lorentz vektör uzayı* denir ve $\mathbb{R}^{n,1}$ ile gösterilir.

Özel olarak $n = 3$ için bu uzay *Minkowski 3-uzayı* olarak adlandırılır ve genellikle $\mathbb{E}^{3,1}$ ile gösterilir, [7].

Tanım 2.1.16.

$\vec{x}$, $\mathbb{R}^{n,1}$ de bir vektör olmak üzere, $\vec{x}$ vektörüne,

i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise *spacelike*,

ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise *timelike*,

iii) $\vec{x} \neq 0$ olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise *lightlike* veya *null vektör* denir.

Timelike ve null vektörlere *causal vektörler* denir, [7].

Ayrıca, $\vec{x}$ vektörünün tipi, onun *causal karakteri* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.17.

c bir eğri ve s yay parametresi olmak üzere bu eğrinin timelike, spacelike ve lightlike olması durumlarını gözönüne alalım:

i. Eğrinin timelike olması hali

c nin bir timelike eğri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $T'(s) \neq 0$, $T(s)$ ile lineer bağımsız bir spacelike vektördür. s noktasında c eğrisinin eğriliği,

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

dir. $N(s)$ asli normal vektörü de,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$$

dir. Ayrıca

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

dir.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklindeki $B(s)$ vektörüne *binormal vektör* denir. $B(s)$ vektörü, bir spacelike birim vektördür. Her s için c nin Frenet üç ayaklısı diye adlandırılan $\{T, N, B\}$, $\mathbb{E}^{3,1}$ in bir ortonormal bazıdır.

c nin s deki burulması,

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Bu durum için Frenet denklemleri matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

şeklinde ifade edilir.

ii. Eğrinin spacelike olması hali

c bir spacelike eğri olsun. $T'(s)$ nin causal karakterine bağlı olarak üç olasılık vardır:

a. $T'(s)$ vektörü spacelike olsun:

Yine

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

dir. Bu durum için Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

şeklindedir. c nin burulması,

$$\tau = -\langle N'(s), B(s) \rangle$$

dir.

b. $T'(s)$ vektörü timelike olsun:

c nin eğriligi

$$\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$$

ve asli normal vektörü de

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

dır.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

binormal vektörü, bir spacelike vektördür. Bu durumda Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

dır. c nin burulması,

$$\tau = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

dir.

c. Her s için $T'(s)$ vektörü lightlike ($T'(s) \neq 0$ ve $T(s)$ ile orantılı değil) olsun:

$T(s)$ ile lineer bağımsız olan asli normal vektör,

$$N(s) = T'(s)$$

şeklinde tanımlanır. B birim lightlike vektör olsun, öyle ki

$$\langle N(s), B(s) \rangle = 1$$

dir ve $B(s)$, $T(s)$ ye ortogonaldır. $B(s)$ vektörü, c nin s deki binormal vektörüdür. Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\tau} & 0 \\ -1 & 0 & -\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

dir. τ fonksiyonuna c nin burulması denir, [6].

Önerme 2.1.18.

$c(t) \in \mathbb{R}^{2,1}$ bir spacelike eğri olsun. O halde $c(t)$ nin bir kırılma noktasına sahip olması için gerek ve yeter şart $t \in I$ için $\|c'(t) \times c''(t)\|^2 = 0$ olmasıdır, [9].

İspat.

Kısalık için, eğrinin t parametresinden bağımsız olduğunu kabul edeceğiz. T ve κ , c nin sırasıyla birim tanjant vektörü ve eğriliği olsun. Öklidyen durumda Frenet formülleri,

$$\|c' \times c''\|^2 = \kappa^2 \|c'\|^6 \|T \times T'\|^2 \quad (2.1.5)$$

dir. İlk olarak, c bir kırılma noktasına sahip olsun. O zaman T' bir lightlike vektördür. $\langle T, T \rangle = 1$ olduğundan, $\langle T, T' \rangle = 0$ elde edilir. $\langle T, T' \rangle = 0$ ifadesinin $\|T \times T'\|^2 = 0$ ifadesine eşit olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (T, T' vektörleri bir lightlike düzlemde tanımlıdır.) Sonuç olarak (2.1.5) eşitliği $\|c' \times c''\|^2 = 0$ yi sağlar.

İkinci olarak, $\|c' \times c''\|^2 = 0$ olsun. (2.1.5) ten $\|T \times T'\|^2 = 0$ veya $\kappa = 0$ olmalıdır. Yine, $\langle T, T' \rangle = 0$ dan T' vektörünün light-like olduğu sonucu çıkarılabilir.

$c(t)$ spacelike eğrisinin eğriligi ve torsiyonu,

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{|\langle c'(t) \times c''(t), c'(t) \times c''(t) \rangle|}}{\|c'(t)\|^3} \quad (2.1.6)$$

ve

$$\tau(t) = \frac{[c'(t), c''(t), c'''(t)]}{|\langle c'(t) \times c''(t), c'(t) \times c''(t) \rangle|} \quad (2.1.7)$$

dir. $c(t)$ spacelike eğrisinin kırılma noktasına sahip olmadan eğrilik ve torsiyonu Frenet formüllerinden elde edilebilir, [9].

Tanım 2.1.19.

Eğer bir $L : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ lineer dönüşümü Minkowski iç çarpımını, yani $\forall u, v \in \mathbb{R}^{2,1}$ için

$$\langle u, v \rangle = \langle L_u, L_v \rangle$$

eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme *Lorentz dönüşümü* denir. Bütün Lorentz dönüşümlerinin grubu $\mathcal{L} = O(2, 1)$ ile gösterilir ve *Lorentz Grup* olarak adlandırılır.

$K = (k_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ bir Lorentz dönüşüm olsun. O zaman k_1, k_2 ve k_3 kolon vektörleri $\langle k_i, k_j \rangle = G_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ü sağlar. Yani onlar $\mathbb{R}^{2,1}$ in bir ortonormal bazı şeklindedir. $\langle k_3, k_3 \rangle = G_{33} = -1$ den $k_{33}^2 \geq 1$ elde edilir. Eğer $k_{33} \geq 1$ ise K dönüşümü *orthochronous (zamanın yönünü koruyan dönüşüm)* dir denir. Her K Lorentz dönüşümünün determinantı ± 1 'e eşit ve $\det(K) = 1$ şeklinde özel bir gösterime sahiptir, [9].

Yardımcı Teorem 2.1.20.

Bir A orthochronous Lorentz dönüşümü

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & 0 & \sinh \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$R(\theta_1)L(\phi)R(\theta_2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $R(\theta)$ spatial koordinatların rotasyonu (dönmesi), $L(\phi)$ de ϕ hiperbolik açısı olmak üzere boost (öteleme) olarak adlandırılan bir hiperbolik rotasyondur, [11].

Tanım 2.1.21.

Bir eğrinin sabit bir doğrultu ile her noktasındaki teğetinin yaptığı açı sabit ise bu eğriye bir *helis* (*eğilim çizgisi*) denir, [9].

Tanım 2.1.22.

Sabit iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların geometrik yerine *hiperbol* denir, [13].

Tanım 2.1.23.

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ polinomal bir eğri olmak üzere bu eğrinin $\gamma'(t)$ hodographı Pythagorean şartını sağlıyorsa, yani $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ eşitliğini sağlayan polinomal bir $\sigma(t)$ fonksiyonu mevcut ise $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ polinomal eğrisine *PH* (*Pythagorean Hodograph*) denir, [11].

Tanım 2.1.24.

PH eğrisinin Minkowski uzayına genişletilmiş şekline MPH (*Minkowski Pythagorean Hodograph*) denir, [11].

3. BÖLÜM

$\mathbb{R}^3$ Uzayında ve Düzlemde Bezier Eğrileri ve Özellikleri

Bezier eğrileri, özel matematiksel gösterimlere sahip eğrilerdir. Bu eğriler bilgisayar destekli tasarımda (CAD) ve bilgisayar grafiklerinde kullanıldığından matematiksel uygulamalarda önemli bir yere sahiptirler. n . dereceden bir Bezier eğrisi; kontrol noktaları olarak adlandırılan, $n + 1$ tane nokta ile belirlenen ve n . dereceden Bernstein taban fonksiyonları ile lineer şekilde ifade edilen polinom eğrilerdir. Bezier eğrileri, düzlemde ve $\mathbb{R}^3$ uzayında olmak üzere ayrı ayrı incelendiğinden bu çalışmada da ayrı olarak verilmiştir, [5].

3.1. Düzlemde Bezier Eğrileri

3.1.1. Lineer Bezier Eğrileri

Derecesi 1 olan ve iki kontrol noktası bulunan polinom eğriler *lineer Bezier eğrileri* olarak adlandırılır. Bir lineer Bezier eğrisi bu iki noktayı birleştiren bir doğru parçasıdır. Bu eğrilerin vektörel denklemi; kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olmak üzere

$$B(t) = (1 - t)b_0 + tb_1, \quad t \in [0, 1] \quad (3.1.1)$$

şeklindedir. Burada eğrimiz, b_0 noktasını b_1 noktasına birleştiren doğru parçasıdır ve başlama noktası $B(0) = b_0$, bitiş noktası ise $B(1) = b_1$ noktasıdır. Yani, kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$ ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisinin parametrik denklemi

$$B(t) = (x(t), y(t)),$$

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-t)p_0 + tp_1, \\y(t) &= (1-t)q_0 + tq_1, \quad t \in [0, 1]\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

şeklindedir, [5].

Örnek 3.1.1.

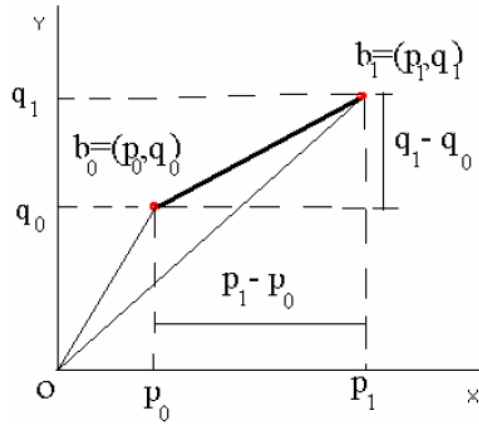
Kontrol noktaları $b_0 = (4, 6)$ ve $b_1 = (1, 3)$ olan lineer Bezier eğrisinin parametrik denklemini

$$B(t) = (1-t)b_0 + tb_1 = (1-t)(4, 6) + t(1, 3)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}x(t) &= 4(1-t) + t = 4 - 3t \\y(t) &= 6(1-t) + 3t = 6 - 3t\end{aligned}$$

elde edilir, [10].



Şekil 3.3.1. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$

ve $b_1 = (p_1, q_1)$ olan bir lineer Bezier eğrisi

3.1.2. Kuadratik Bezier Eğrileri

Derecesi 2 ve üç tane kontrol noktası olan polinom eğrilere kuadratik Bezier eğrisi denir. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$, $b_1 = (p_1, q_1)$ ve $b_2 = (p_2, q_2)$ olan bir kuadratik Bezier eğrisi, başlangıç noktası $B(0) = b_0$ ve bitiş noktası da $B(1) = b_2$ olan ikinci dereceden bir eğri parçasıdır. Bu eğrilerin vektörel anlamda denklemi

$$B(t) = (1-t)^2 b_0 + 2(1-t)t b_1 + t^2 b_2, \quad t \in [0, 1] \quad (3.1.3)$$

şeklinde dir. Parametrik denklemi ise

$$B(t) = (x(t), y(t))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 p_0 + 2(1-t)t p_1 + t^2 p_2 \\ y(t) &= (1-t)^2 q_0 + 2(1-t)t q_1 + t^2 q_2, \quad t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

dir, [5].

Örnek 3.1.2.

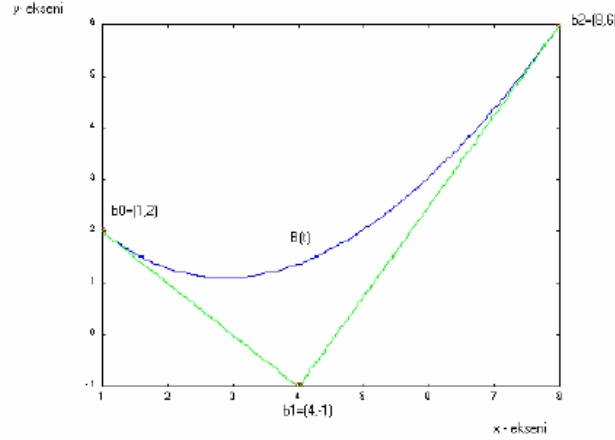
Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (4, -1)$ ve $b_2 = (8, 6)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin vektörel ve parametrik denklemleri:

$$B(t) = (1-t)^2(1, 2) + 2(1-t)t(4, -1) + t^2(8, 6), \quad t \in [0, 1]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 + 8(1-t)t + 8t^2 = t^2 + 6t + 1 \\ y(t) &= 2(1-t)^2 - 2(1-t)t + 6t^2 = 10t^2 - 6t + 2 \\ B(t) &= (t^2 + 6t + 1, 10t^2 - 6t + 2), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

şeklindedir, [5].



Şekil 3.1.2. Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (4, -1)$
ve $b_2 = (8, 6)$ olan kuadratik Bezier eğrisi

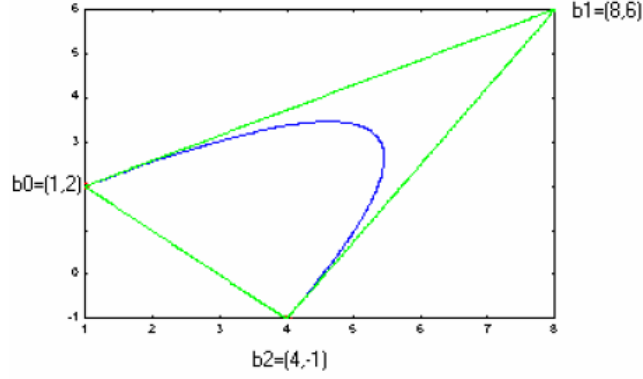
Kontrol noktaları, Bezier eğrisinin yönünü, şeklini, başlangıç ve bitim noktasını belirlediğinden kontrol noktalarının sırası çok önemlidir.

Örnek 3.1.3.

Yukarıdaki örnekte b_1 ile b_2 noktalarının yerlerini değiştirelim ve bu değişimin eğriyi nasıl değiştirdiğini gözlemleyelim. Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (8, 6)$ ve $b_2 = (4, -1)$ olan kuadratik Bezier eğrisinin parametrik ifadesi;

$$B(t) = (-11t^2 + 14t + 1, -11t^2 + 8t + 2), \quad t \in [0, 1]$$

biçimindedir. Bu eğrinin grafiği ise Şekil 3.1.3 te verildiği gibidir, [5].



Şekil 3.1.3.Kontrol noktaları $b_0 = (1, 2)$, $b_1 = (8, 6)$
ve $b_2 = (4, -1)$ olan kuadratik Bezier eğrisi

3.1.3. Kübik Bezier Eğrileri

Üçüncü dereceden, dört tane kontrol noktası olan polinom eğrilere kübik Bezier eğrileri denir. Kontrol noktaları $b_0 = (p_0, q_0)$, $b_1 = (p_1, q_1)$, $b_2 = (p_2, q_2)$ ve $b_3 = (p_3, q_3)$ olan bir kübik Bezier eğrisi, b_0 noktasından başlayan, b_3 noktasında biten üçüncü derece polinom eğridir. Bu eğrinin vektörel denklemi

$$B(t) = (1-t)^3 b_0 + 3(1-t)^2 t b_1 + 3(1-t) t^2 b_2 + t^3 b_3, \quad t \in [0, 1] \quad (3.1.5)$$

şeklindedir. Parametrik denklemi ise

$$B(t) = (x(t), y(t)),$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^3 p_0 + 3(1-t)^2 t p_1 + 3(1-t) t^2 p_2 + t^3 p_3, \\ y(t) &= (1-t)^3 q_0 + 3(1-t)^2 t q_1 + 3(1-t) t^2 q_2 + t^3 q_3, \end{aligned} \quad t \in [0, 1] \quad (3.1.6)$$

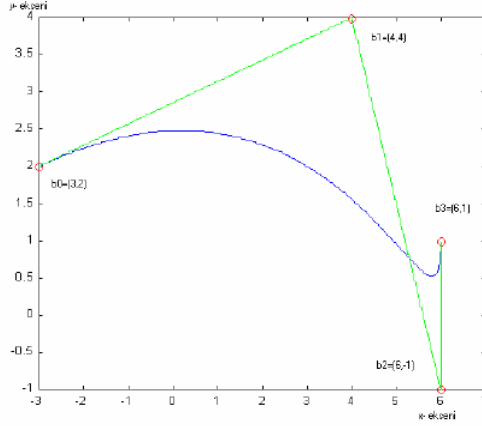
dir, [5].

Örnek 3.1.4.

Kontrol noktaları $b_0 = (-3, 2)$, $b_1 = (4, 4)$, $b_2 = (6, -1)$ ve $b_3 = (6, 1)$ olan kübik Bezier eğrisinin parametrik ifadesi:

$$\begin{aligned}x(t) &= -3(1-t)^3 + 12(1-t)^2t + 18(1-t)t^2 + 6t^3 \\y(t) &= 2(1-t)^3 + 12(1-t)^2t - 3(1-t)t^2 + t^3 \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

biçimindedir (Şekil 3.1.4), [5].



Şekil 3.1.4. Kontrol noktaları $b_0 = (-3, 2)$, $b_1 = (4, 4)$, $b_2 = (6, -1)$ ve $b_3 = (6, 1)$ olan kübik Bezier eğrisi

3.1.4. Genel Bezier Eğrileri

Tanım 3.1.5.

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n . dereceden bir polinom eğriye genel Bezier eğrisi denir. Genel Bezier eğrisinin, vektörel denklemi,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.1.7)$$

şeklinde. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

biçiminde verilen *Bernstein taban fonksiyonları* (ya da *Bernstein taban polinomları*)dır. $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ifadeleri de *Binom katsayılarıdır* ve $\binom{n}{i}$ ya da C_i^n ile gösterilir, [5].

Teorem 3.1.6.

Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar:

i)

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad t \in [0, 1] \quad (\text{Toplamanın birim olması}) \quad (3.1.9)$$

ii)

$$B_i^n(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1] \quad (\text{Pozitiflik}) \quad (3.1.10)$$

iii)

$$B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{Simetri}) \quad (3.1.11)$$

iv)

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (\text{İndirgeme}) \quad (3.1.12)$$

, [5].

İspat.

i)

$$1 = 1^n = (1 - t + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 - t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

dir.

ii) $t \in [0, 1]$ olduğundan $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - t \leq 1 \Rightarrow t \geq 0$ ve $1 - t \geq 0$ dir. O halde pozitif bir sayının tüm reel kuvvetleri de pozitif olduğundan $B_i^n(t) \geq 0$ elde edilir.

iii) $t \in [0, 1]$ için

$$B_{n-i}^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^i t^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} [(1-t)^i (1-(1-t))^{n-i}]$$

dir. $k \in [0, 1]$ olmak üzere $1 - t = k$ denirse,

$$B_{n-i}^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} [(k)^i (1-k)^{n-i}] = B_i^n(k) = B_i^n(1-t)$$

elde edilir.

iv)

$$(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

ifadesinin değerini yazarsak

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) &= (1-t) \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (1-t)^{n-1-i} t^i \\ &\quad + t \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^{i-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (1-t)^{n-i} t^i + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) &= \frac{(n-1)!}{i(i-1)!(n-1-i)!}(1-t)^{n-i}t^i \\
&+ \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)(n-1-i)!}(1-t)^{n-i}t^i \\
&= \left[\frac{(n-i)(n-1)! + i(n-1)!}{i(n-i)(i-1)!(n-1-i)!} \right] (1-t)^{n-i}t^i \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i+i)}{i(i-1)!(n-i)(n-1-i)!} \right] (1-t)^{n-i}t^i \\
&= \left[\frac{n!}{i!(n-i)!} \right] (1-t)^{n-i}t^i = B_i^n(t)
\end{aligned}$$

bulunur, [5].

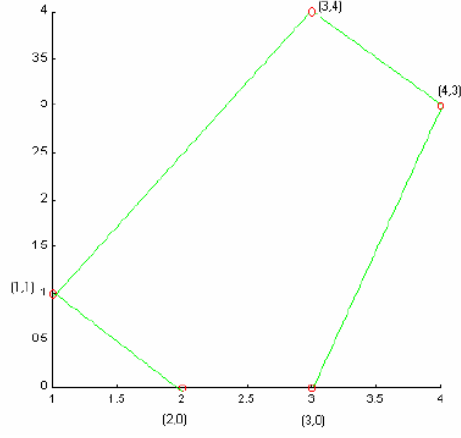
3.1.5. Kontrol Poligonu

Tanım 3.1.7.

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin *kontrol poligonu* adı verilir, [5].

Örnek 3.1.8.

Kontrol noktaları $b_0 = (2, 0), b_1 = (1, 1), b_2 = (3, 4), b_3 = (4, 3), b_4 = (3, 0)$, olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 3.1.5 te gösterilmiştir, [5].



Şekil 3.1.5. Kontrol noktaları $b_0 = (2, 0)$, $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (3, 4)$, $b_3 = (4, 3)$ ve $b_4 = (3, 0)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu

3.1.6. Konveks Hull

Konveks hull, özellikle bilgisayar destekli tasarımlarda çok önemli bir yer tutar. $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gibi $n + 1$ noktadan oluşan noktalar sistemi için, verilen konveks hull şu şekilde tanımlanmaktadır, [5].

Tanım 3.1.9.

$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin konveks hulu

$$CH(X) = \left\{ a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n : \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (3.1.13)$$

olarak tanımlanır. Yani düzlemde $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarını içeren en küçük konveks kümeye $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin *konveks hulu* (*Convex Hull*) denir. Bu tanım $\mathbb{R}^3$ uzayında da benzer şekilde verilir. Fakat düzlemde ifade edilen konveks hullda bir

alandan bahsedilirken, $\mathbb{R}^3$ uzayında ise uzayın bir bölgesinden bahsetmek gerekir, [5].

Örnek 3.1.10.

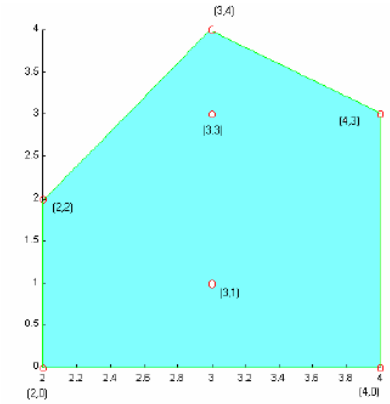
Düzlemde $X = \{(2, 0), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3)\}$ noktalarından oluşan kümenin konveks hulu:

$$CH(X) = \left\{ a_0(2, 0) + a_1(2, 2) + \dots + a_6(4, 3) : \sum_{i=0}^6 a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, 6 \right\}$$

olmak üzere, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = 2(a_0 + a_1) + 3(a_2 + a_3 + a_4) + 4(a_5 + a_6), \\ y = a_2 + 2a_1 + 3(a_3 + a_6) + 4a_4 \end{array} \right\}$$

biçiminde verilir. Bunu daha iyi kavramak için Şekil 3.1.6 incelenebilir, [5].



Şekil 3.1.6. $X = \{(2, 0), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 3)\}$ noktalarının konveks hulu

3.1.7. Bezier Eğrilerinin Özellikleri

Teorem 3.1.11.

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i)

$$B(0) = b_0, B(1) = b_n, \quad (\text{Son nokta interpolasyon özelliği}) \quad (3.1.14)$$

dir.

ii)

$$\begin{aligned} B'(0) &= \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} = n(b_1 - b_0), & (\text{Son nokta teğet özelliği}) & (3.1.15) \\ B'(1) &= \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} = n(b_n - b_{n-1}) \end{aligned}$$

dir.

iii) $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$B(t) \in CH(\{b_0, b_1, \dots, b_n\}) \quad (3.1.16)$$

dir. Yani Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konveks alanı içinde kapsamaktadır.

iv) F , bir afin dönüşüm olsun. O halde

$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t) \quad (3.1.17)$$

dir. Yani kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisinin bir afin dönüşüm altındaki görüntüsü, kontrol noktaları $F(b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, olan Bezier eğrisidir.

v) Bir d doğrusu ile $B(t)$ düzlemsel Bezier eğrisinin arakesit noktalarının sayısı m , $B(t)$ Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesit noktalarının sayısı s ise $m \leq s$ dir. (Varyasyon Azaltma Özelliği), [5].

İspat.

i) (3.1.7) de verilen genel Bezier eğrisinde $t = 0$ için $i \neq 0$ iken $B_i^n(t) = 0$ dir. $i = 0$ durumunda ise, $B_0^n(t) = (1 - t)^n$ dir. Böylece,

$$B(0) = b_0 B_0^n(0) = b_0(1 - 0)^n = b_0$$

elde edilir. Benzer şekilde, $t = 1$ için $i \neq n$ iken $B_i^n(t) = 0$ dir. $i = n$ durumunda ise $B_n^n(t) = t^n$ olduğundan

$$B(1) = b_n B_n^n(1) = b_n 1^n = b_n$$

bulunur.

ii)

$$\begin{aligned} B'(t) &= \left[\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right]' = \left[\sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \right]' \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} [-(n-i)(1-t)^{n-i-1} t^i + i(1-t)^{n-i} t^{i-1}] \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} B'(t) &= b_0[-n(1-t)^{n-1}] + b_1 n[(1-n)(1-t)^{n-2} t + (1-t)^{n-1}] \\ &\quad + b_2 \binom{n}{2} [(2-n)(1-t)^{n-3} t^2 + 2(1-t)^{n-2} t] + \dots + \\ &\quad + b_{n-1} n[-t^{n-1} + (n-1)(1-t)t^{n-2}] + b_n n t^{n-1} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$B'(0) = -nb_0 + b_1 n = n(b_1 - b_0) \text{ ve } B'(1) = -b_{n-1} n + b_n n = n(b_n - b_{n-1})$$

elde edilir.

iii) $\forall t \in [0, 1]$ için $B_i^n(t) \geq 0$ ve $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ olduğundan konveks hull tanımından

$$B(t) \in CH\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$$

dir.

iv) Afin bir F dönüşümü, $F(x) = gx + c$, $g \in GL(2, R)$, $c \in R^2$, biçiminde ifade edilebilir. O halde $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = g \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) + c$$

dir. $c = c.1$ olarak alınrsa ve (3.1.9) da 1 yerine $\sum_{i=0}^n B_i^n(t)$ yazılırsa

$$F(B(t)) = g \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) + c \cdot \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

elde edilir. İfade aynı toplam altında yazıldığında,

$$F(B(t)) = \sum_{i=0}^n (gb_i + c) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t)$$

elde edilir, [5].

3.2. $\mathbb{R}^3$ Uzayında Bezier Eğrileri

3.2.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında Genel Bezier Eğrisi

$\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlanan Bezier eğrileri, düzlemdeki Bezier eğrileri gibi tanımlanır. Ancak burada kontrol noktaları düzlemin değil $\mathbb{R}^3$ uzayının elemanlarıdır, [5].

Tanım 3.2.1.

$\mathbb{R}^3$ uzayında genel Bezier eğrisi, kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisinin vektörel denklemi

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.2.1)$$

şeklindedir. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları düzlemsel Bezier eğrilerindeki gibi

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır, [5].

3.2.2. Kontrol Poligonu

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki kontrol poligonu da düzlemde tanımlanan Bezier eğrilerinin kontrol poligonu tanımına benzer şekilde tanımlanabilir. Ancak, burada da kontrol noktaları $\mathbb{R}^3$ ün elemanlarıdır, [5].

Tanım 3.2.2.

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin *kontrol poligonu* adı verilir, [5].

Düzlemdeki Bezier eğrilerinin özellikleri ile ilgili verilen teorem, benzer şekilde uzaydaki Bezier eğrileri için de verilebilir. Ancak uzaydaki Bezier eğrileri için, varyasyon azaltma özelliğinde, “Bir Bezier eğrisi ile bir doğrunun arakesit noktaları” ifadesi yerine, “Bir Bezier eğrisi ile bir düzlemin arakesit noktaları” ifadesi alınmalıdır, [5].

3.3. Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı

Bezier eğrilerinin türevleri, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

Teorem 3.3.1.

$0 \leq t \leq 1$ için $B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ Bernstein taban fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri,

i)

$$B_i^n(t)' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad (3.3.1)$$

ya da

$$B_i^n(t)' = \frac{i - nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (3.3.2)$$

ii)

$$B_i^n(t)'' = n(n-1)(B_{i-2}^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_i^{n-2}(t)) \quad (3.3.3)$$

ya da

$$B_i^n(t)'' = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (3.3.4)$$

biçimindedir, [5].

İspat.

i) $0 \leq t \leq 1$ için

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

olduğundan t -ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)' &= \binom{n}{i} [-(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + it^{i-1}(1-t)^{n-i}] \\
&= \binom{n}{i} it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \binom{n}{i} (n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i \quad (3.3.5) \\
&= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t \frac{i}{t} - \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \frac{(n-i)}{(1-t)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)' &= B_i^n(t) \frac{i}{t} - B_i^n(t) \frac{(n-i)}{(1-t)} \\
&= B_i^n(t) \left(\frac{i}{t} - \frac{n-i}{1-t} \right) \\
&= B_i^n(t) \left(\frac{i-nt}{t(1-t)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.5) ifadesi başka bir şekilde ifade edilirse,

$$n-i = (n-1) - (i-1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)' &= \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} i - \frac{n!}{(n-i)!i!} (n-i)(1-t)^{n-1-i} t^i \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} \\
&\quad - \frac{n(n-1)!}{(n-i)!i!} (n-i)(1-t)^{n-1-i} t^i
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)' &= n \frac{(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!} (1-t)^{n-1-(i-1)} t^{i-1} \\
&\quad - n \frac{(n-1)!}{(n-i)!i!} (n-i)(1-t)^{n-1-i} t^i \\
&= n B_{i-1}^{n-1}(t) - n B_i^{n-1}(t) \\
&= n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) (3.3.1) eşitliğinin her iki tarafının t- ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)'' &= n (B_{i-1}^{n-1}(t)' - B_i^{n-1}(t)') \\
&= n \{ (n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t)] - (n-1) [B_{i-1}^{n-2}(t) - B_i^{n-2}(t)] \}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)'' &= n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t) - B_i^{n-2}(t)] \\
&= n(n-1) [B_{i-2}^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) - B_i^{n-2}(t)]
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci türev olarak, (3.3.2) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)'' &= \left[\frac{i-nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \right]' \\
&= \left[\frac{i-nt}{t(1-t)} \right]' B_i^n(t) + \frac{i-nt}{t(1-t)} [B_i^n(t)]' \\
&= \frac{-nt(1-t) - (1-2t)(i-nt)}{t^2(1-t)^2} B_i^n(t) + \frac{(i-nt)^2}{t^2(1-t)^2} B_i^n(t)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)'' &= \left[\frac{-nt(1-t) - (1-2t)(i-nt)}{t^2(1-t)^2} + \frac{(i-nt)^2}{t^2(1-t)^2} \right] B_i^n(t) \\
&= \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t)
\end{aligned}$$

elde edilir, [5].

Yukarıda verilen teoremden aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.3.2.

Kontrol noktaları $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ şeklinde verilen bir Bezier eğrisinin türevi, kontrol noktaları $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i), i = 0, 1, \dots, n-1$, olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t), \quad b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i) \quad (3.3.6)$$

dir, [5].

İspat.

$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ şeklinde verilen Bezier eğrisinin türevi (3.3.1) ifadesinden,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)' = \sum_{i=0}^n b_i n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = n \sum_{i=0}^n b_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^n b_i B_i^{n-1}(t)$$

olarak elde edilir. $i = 0$ için

$$B_{i-1}^{n-1}(t) = B_{-1}^{n-1}(t) = 0$$

ve $i = n$ durumunda

$$B_i^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$$

olduğundan

$$B'(t) = n \sum_{i=1}^n b_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(t)$$

yazılabilir. Tekrar düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} B'(t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} B_i^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n(b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

elde edilir, [5].

Sonuç 3.3.3.

Kontrol noktaları $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ şeklinde verilen bir Bezier eğrisinin ikinci türevi, kontrol noktaları

$$b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i), i = 0, 1, \dots, n-2$$

olan $(n-2)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t), \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i) \quad (3.3.7)$$

dir, [10].

İspat.

$B'(t)$ kontrol noktaları $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i)$ şeklinde olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisi olduğundan bir kere daha türev alırsak, kontrol noktaları (3.3.6) dan,

$$b_i^{(2)} = (b_i^{(1)})^{(1)} = (n-1)(b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)}) = (n-1)[n(b_{i+2} - b_{i+1}) - (b_{i+1} - b_i)]$$

$$b_i^{(2)} = n(n-1)[(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)]$$

şeklinde olan $(n-2)$. dereceden bir Bezier eğrisi olur. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t), \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$$

olur, [5].

Sonuç 3.3.4.

Kontrol noktaları $b_i, i = 0, 1, \dots, n$, olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğrisi için r . türev fonksiyonu, kontrol noktaları $i = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere

$$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$$

olan $(n-r)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} B_i^{n-r}(t), \quad b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \quad (3.3.8)$$

dir, [10].

İspat.

İspatı tümevarımla yapabiliriz. $r = 1$ için ;

$$b_i^{(1)} = n \sum_{j=0}^1 (-1)^{1-j} \binom{1}{j} b_{i+j} = n(-b_i + b_{i+1})$$

elde edilir ki bu (3.3.6) ifadesinden doğrudur. r için yukarıdaki ifade doğru olsun.

Yani

$$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$$

olsun. $r+1$ için

$$b_i^{(r+1)} = (b_i^{(r)})^{(1)} = (n-r)(b_{i+1}^{(r)} - b_i^{(r)})$$

$$\begin{aligned} b_i^{(r+1)} &= (n-r) \left[\begin{aligned} &\left(n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} \right) \\ &- \left(n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \right) \end{aligned} \right] \\ &= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^r [(-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} - (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}] \\ &= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^r [(-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+1+j} + (-1)^{r-j+1} \binom{r}{j} b_{i+j}] \end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
b_i^{(r+1)} &= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)[((-1)^r \binom{r}{0} b_{i+1} + (-1)^{r+1} \binom{r}{0} b_i) + \dots \\
&\quad + ((-1)^{r-1} \binom{r}{1} b_{i+2} + (-1)^r \binom{r}{1} b_{i+1}) + \dots + ((-1)^0 \binom{r}{r} b_{i+1+r} + (-1)^1 \binom{r}{r} b_{i+r})] \\
&= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)[(-1)^{r+1} \binom{r}{0} b_i + (-1)^r \left(\binom{r}{0} + \binom{r}{1} \right) b_{i+1} + \dots \\
&\quad + (-1)^1 \left(\binom{r}{r-1} + \binom{r}{r} \right) b_{i+r} + (-1)^0 \binom{r}{r} b_{i+1+r}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
b_i^{(r+1)} &= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)[(-1)^{r+1} \binom{r+1}{0} b_i + (-1)^r \binom{r+1}{1} b_{i+1} + \dots \\
&\quad + (-1)^1 \binom{r+1}{r} b_{i+r} + (-1)^0 \binom{r+1}{r+1} b_{i+1+r}] \\
&= n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j} \binom{r+1}{j} b_{i+j}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır, [5].

4. BÖLÜM

4.1. PH ve MPH Eğrileri ve Bazı Karakterizasyonları

Polinomal bir eğri $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ olmak üzere $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ hodographı, $\sigma(t)$ polinomal bir fonksiyon olmak üzere Pythagorean şartını yani, $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ şartını sağlıyorsa bu eğriye Pythagorean hodograph (PH) eğrisi denir.

PH eğrilerinin en önemli özelliklerinden biri rasyonel gösterimlerinin olmasıdır. $\gamma(t)$ bir PH eğrisi ise birim normal vektörü

$$n(t) = \begin{bmatrix} \frac{-y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \\ \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \end{bmatrix}$$

şeklinde rasyonel gösterime sahiptir. Bu nedenle $\gamma(t)$ rasyonel bir ifadeye sahiptir. Aslında, bu özellik $\gamma(t)$ nin hız vektörünün bir polinom fonksiyon olmasından kaynaklanır.

Pythagorean şartı sayesinde PH eğrilerini oluşturmak kolaydır. Polinomal bir $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eğrisinin bir PH eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ hodographının ve $\sigma(t)$ hızının $u(t)$, $v(t)$ ve $w(t)$ polinomları yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilmesidir.

$$x'(t) = w(t)\{u^2(t) - v^2(t)\}$$

$$y'(t) = w(t)\{2u(t)v(t)\}$$

$$\sigma(t) = w(t)\{u^2(t) + v^2(t)\}$$

$x'(t)$ ve $y'(t)$ nin rolleri değiştirilebilir. Çünkü yukarıdaki ifade dönme ve yansıma altında invarianttır.

Kübik Bezier eğrilerinde, bir eğrinin PH eğrisi olması için gerek ve yeter şart L_0 , L_1 , L_2 kontrol eğrilerinin $L_1^2 = L_0L_2$ şartını sağlaması ve θ_1 ve θ_2 kontrol poligon açılarının eşit olmasıdır.

$\mathbb{R}^{2,1}$ Minkowski uzayı 3-boyutlu reel vektör uzayı olduğundan PH eğrisinin $\mathbb{R}^{2,1}$ e genişletilmiş PH uzay eğrisiyle birçok ortak özelliğe sahiptir. Polinomal bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eğrisinin $\gamma'(t)$ hodographı, $\sigma(t)$ bir polinom olmak üzere $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t)$ Pythagorean şartını sağlarsa $\gamma(t)$ eğrisi bir *PH uzay eğrisi* olur. Polinomal bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uzay eğrisinin Pythagorean hodographa sahip olması yani, bazı polinomal $\sigma(t)$ ler için

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t)$$

ve

$$\text{ebob}(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1$$

şartlarının sağlanması için $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, $\rho(t)$ polinomları, $\gamma'(t)$ hodographı ve $\sigma(t)$ hızının

$$\sigma(t) = \pm(u^2(t) + v^2(t) + w^2(t) + \rho^2(t))$$

$$x'(t) = u^2(t) - v^2(t) - w^2(t) + \rho^2(t)$$

$$y'(t) = 2u(t)v(t) + 2\rho(t)w(t)$$

$$z'(t) = 2u(t)w(t) - 2\rho(t)v(t)$$

şeklinde ifade edildiğini göstermiştir, [11].

Tanım 4.1.1

$\mathbb{R}^{2,1}$ de polinomal bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ eğrisi, $\sigma(t)$ bir polinom olmak üzere

$$x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t) = \sigma^2(t)$$

şartını sağlıyorsa bu eğriye *Minkowski Pythagorean Hodograph (MPH) eğrisi* denir, [11]

Teorem 4.1.2

$\mathbb{R}^{2,1}$ uzayında $x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t) = \sigma^2(t)$ şartını sağlayan polinomal bir $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ eğrisinin bir MPH eğrisi olması için gerek ve yeter şart $u(t), \rho(t), v(t), w(t)$ polinomlarının ve $\gamma'(t)$ hodographının

$$\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) - w^2(t) - \rho^2(t),$$

$$x'(t) = u^2(t) - v^2(t) + w^2(t) - \rho^2(t),$$

$$y'(t) = 2u(t)v(t) - 2\rho(t)w(t),$$

$$r'(t) = 2u(t)w(t) - 2\rho(t)v(t)$$

şartlarını sağlamasıdır, [11].

İspat.

Minkowski Pythagorean şartından

$$\frac{1}{2}(\sigma + x')\frac{1}{2}(\sigma - x') = \frac{1}{2}(y' + r')\frac{1}{2}(y' - r')$$

yazılabilir. Bu eşitlikten

$$\frac{1}{2}(\sigma + x') = AB, \quad \frac{1}{2}(\sigma - x') = CD \quad (4.1.1)$$

$$\frac{1}{2}(y' + r') = AC, \quad \frac{1}{2}(y' - r') = BD$$

olur. Eğer u, ρ, v, w polinomları

$$u = \frac{A+B}{2}, \quad \rho = \frac{B-A}{2}, \quad v = \frac{C+D}{2}, \quad w = \frac{C-D}{2}$$

olarak ifade edilirse o zaman

$$AB = u^2 - \rho^2, \quad CD = v^2 - w^2, \quad (4.1.2)$$

$$AC = (u - \rho)(v + w), \quad BD = (u + \rho)(v - w)$$

olur. (4.1.2) deki eşitlikler (4.1.1) de yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır, [11].

Sonuç 4.1.3.

Bir $\gamma(t)$ MPH eğrisinin hodographı Teorem 4.1.2 deki gibi tanımlansın ve $\Gamma(t) = (X(t), Y(t), R(t))$ de hodographı

$$X'(t) = f(t)\{u^2(t) - v^2(t) + w^2(t) - z^2(t)\}$$

$$Y'(t) = f(t)\{2u(t)v(t) - 2z(t)w(t)\}$$

$$R'(t) = f(t)\{2u(t)w(t) - 2z(t)v(t)\}$$

ile verilen başka bir MPH eğrisi olsun. Burada $f(t)$ bir polinomdur. Yukarıdaki denklemlerde $f(t)u(t) = U(t)$, $f(t)v(t) = V(t)$, $f(t)w(t) = W(t)$, $f(t)z(t) = Z(t)$ yazılırsa,

$$X'(t) = U^2(t) - V^2(t) + W^2(t) - Z^2(t)$$

$$Y'(t) = 2U(t)V(t) - 2Z(t)W(t)$$

$$R'(t) = 2U(t)W(t) - 2Z(t)V(t)$$

olur. Burada

$$U(t) = \frac{1}{2}\{u(1+f) + z(1-f)\}, \quad Z(t) = \frac{1}{2}\{u(1-f) + z(1+f)\}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\{v(1+f) + w(1-f)\}, \quad W(t) = \frac{1}{2}\{v(1-f) + w(1+f)\}$$

dir, [11].

Teorem 4.1.4.

Bir spatial spacelike MPH eğrisinin torsiyonunun eğriliğine oranı sabittir. Yani, spatial spacelike MPH eğrisi $\mathbb{R}^{2,1}$ de helistir, [9].

İspat.

$\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))^T \in \mathbb{R}^{2,1}$ bir spatial spacelike MPH kübiği olsun. O zaman dört tane lineer polinom vardır:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(1-t) + u_1t, & v(t) &= v_0(1-t) + v_1t \\ w(t) &= w_0(1-t) + w_1t, & \rho(t) &= \rho_0(1-t) + \rho_1t \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

öyleki,

$$\begin{aligned}
x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) - w^2(t) + \rho^2(t), \\
y'(t) &= -2(u(t)v(t) + w(t)\rho(t)), \\
r'(t) &= 2(u(t)\rho(t) + v(t)w(t)), \\
\sigma(t) &= u^2(t) + v^2(t) - w^2(t) - \rho^2(t)
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

dir. $\gamma(t)$ bir spacelike eğri olduğundan, $u_0 = 0$, $w_0 = 0$ ve $\rho_0^2 - v_0^2 = 1$ iken, $\gamma'(0) = (1, 0, 0)^T$ şeklinde kabul edebiliriz (genelliği bozmadan). $\gamma(t)$ eğrisi Bezier formunda ifade edilir. Bu eğrinin skaler üçlü çarpımı hesaplanırsa aşağıda verilen

$$[\gamma'(0), \gamma'(1), \gamma(1) - \gamma(0)] = (u_1 - w_1)(u_1 + w_1)(v_1\rho_0 - \rho_1v_0) = 0 \tag{4.1.5}$$

eşitliğinin sağlandığı durumda, $\gamma(t)$ nin düzlemsel bir eğri olduğu elde edilir.

Önerme 2.1.18 e göre,

$$(u_1 - w_1)(u_1 + w_1)\sigma(t) = 0 \tag{4.1.6}$$

ise $\gamma(t)$ nin bir kırılma noktası vardır.

Eğer $\gamma(t)$ bir lightlike teğete sahip ise (veya $\gamma(t)$ düzlemsel bir eğriyse) (4.1.5) ve (4.1.6) den $\gamma(t)$ nin bir kırılma noktasına sahip olduğu görülebilir.

(2.1.6) ve (2.1.7) formüllerinden $\gamma(t)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa = \frac{2\sqrt{|u_1^2 - w_1^2|}}{\sigma^2(t)} \quad \tau = \frac{2(v_1\rho_0 - \rho_1v_0)}{\sigma^2(t)} \tag{4.1.7}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\kappa(t)$ nin $\tau(t)$ ya oranı t ye bağlı değildir, [9].

Örnek 4.1.5.

$\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t)) \in \mathbb{R}^{2,1}$ bir MPH kübiği olsun. Dört tane lineer polinom da

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2}t + 2 & \rho(t) &= -\frac{1}{2}t - 1 \\ v(t) &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & w(t) &= -t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olsun. Buradan

$$x'(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + 3$$

$$y'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 3t + 3$$

$$r'(t) = -\frac{3}{2}t^2 - 4t + 3$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 3t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t$$

$$r(t) = -\frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + 3t$$

elde edilir. Buradan $\gamma(t) = (x(t), y(t), r(t))$ MPH eğrisi elde edilir.

Eğri $\gamma(0) = (0, 0, 2)$ olarak seçilirse yukarıdaki ifadelerden hodograph şartı sağlanır ve dolayısıyla bu eğri bir MPH eğrisi olur, [11].

Kaynaklar

- [1] **Anderson, Fredrik**, Bezier and B-Spline Technology, Umea Universitet, (2003)
- [2] **Farin G.**, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, 2nd edition, Academic Press Inc, San Diago, (1990).
- [3] **Hacısalihoğlu H. H.**, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Yayınevi, (1993).
- [4] **Hacısalihoğlu H. H.**, Lineer Cebir, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, (1982).
- [5] **İncesu Muhsin**, Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Matlab İle Sayısal Algoritmalar, Yüksek Lisans Tezi, Trabzon, (2003).
- [6] **Kazan Ahmet**, Minkowski 3-Uzayında Eğriler ve Yüzeylerin Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, Malatya, (2011).
- [7] **Kim Y.H. and Yoon D.W.**, Ruled Surfaces with Finite Type Gauss Map in Minkowski Spaces, Rocky Mountain J.Math., Volume 35 , Number 5 , (2005) , 1555-1581.
- [8] **Kosinka Jiri and Lavicka Miroslav**, Pythagorean Hodograph Curves: A Survey of Recent Advances, J. Geom. Graph. (2014), 18(1), 23-43.
- [9] **Kosinka Jiri and Jüttler Bert**, Cubic Helices in Minkowski Space , Sitzungsber. Abt. II , (2006) , 215 : 13-35.
- [10] **Marsh D**, Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, London, (1999).
- [11] **Moon H. P.**, Minkowski Pythagorean Hodographs, Computer Aided Geometric Design, South Korea, (1999), 16, 739-753.
- [12] **O'Neill B.**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic press, New York, (1983).
- [13] **Sabuncuoğlu A.**, Analitik Geometri, Nobel Yayınları, Ankara, (2005).

- [14] **Uğur Aybars**, Bezier Eğri ve Yüzeyleri, İzmir, (2006).

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Mardin'in Midyat ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimi Midyat'ta tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2013 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.