

SIVI AKIŞKANLARIN ANİMASYONU

Mehmet Akif TAN

Yüksek Lisans Tezi

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet ÇINAR

EYLÜL-2011

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SIVI AKIŞKANLARIN ANİMASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Akif TAN

(08129103)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Eylül 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Ekim 2011

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ÇINAR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mehmet KAYA (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Servet TUNCER (F.Ü)

EYLÜL-2011

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca zengin bakış açısıyla beni aydınlatan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet ÇINAR'a çalışmamda gösterdiği ilgi ve sabrından dolayı teşekkür ederim.

Yüksek Lisans dersleriyle bana katkıda bulunan ve engin bilgi ve tecrübeleri ile aydınlatan ve destekleyen bölüm hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi yönden beni her zaman destekleyen sevgilerini ve dualarını esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Mehmet Akif TAN
ELAZIĞ – 2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLolar LİSTESİ	X
SEMBOLLER LİSTESİ	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. ANİMASYON	5
2.1. Animasyonun Türleri.....	9
2.1.1. Çizme-Çekme Animasyonu.....	9
2.1.2. Hücre Animasyonu	10
2.1.3. Kağıt Animasyonu.....	11
2.1.4. Kesme-Çıkarma Animasyonu.....	11
2.1.5. Gölge Animasyonu	12
2.1.6. Karma Animasyonu	12
2.1.7. Bilgisayarlı Animasyonu	13
2.2. Derinlik Kazandırma	14
2.2.1. Derinlik Kazandırma Motoru V-Ray.....	16
2.2.2. Derinlik Kazandırma Motoru Mental Ray.....	17
2.3. Animasyonun Tarihçesi.....	18
2.4. Animasyon Teknikleri	19
2.4.1. Katı Yapıların Animasyonu.....	21
2.4.2. Taneciklerin Animasyonu.....	21
2.4.3. Üç Boyutlu Bilgisayarlı Animasyonun Oluşum Aşamaları	22
2.5. Gerçek Zamanlı Animasyon.....	25

2.6. Sayısal Analiz	27
3. AKIŞKANLAR	29
3.1. İdeal Akışkan	29
3.2. Viskozite	30
3.3. Akışkanlarla ilgili ilk Çalışmalar	31
3.4. Akışkan Hareketinin Analizi	32
3.5. Yoğunluk	37
3.6. Reynolds Tansport Teoremi	37
3.7. Süreklilik Denklemi	40
3.8. Akışkan Hareketini Yöneten Genel Denklemler	41
3.8.1. Debi	42
3.8.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	43
3.8.3. Genel Denklemlerin İntegral Formları	44
3.8.4. Genel Denklemlerin Diferansiyel Formları	46
4. NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ.....	50
4.1. Navier-Stokes Denklemlerinin Kullanım Alanları	51
4.2. Navier-Stokes Denklemlerinin Türetilmesi	52
4.3. Navier-Stokes Denklemlerinin Sayısal Çözümü	56
4.3.1. Sonlu Hacimler Metodu	60
4.3.2. Sonlu elemanlar Metodu	62
5. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	64
5.1. Sonlu Farklar Yönteminin Tercih Edildiği Durumlar	65
5.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Türev Hesabı	66
5.2.1. Taylor Serisi	66
5.2.2. İleri Fark Yaklaşımı	70
5.2.3. Geri Fark Yaklaşımı	70
5.2.4. Merkezi Fark Yaklaşımı	70
5.2.5. Sonlu Farklar Yaklaşımı ile Diferansiyel Denklem Çözümü	71
6. UYGULAMA	83
7. SONUÇ	91
8. KAYNAKLAR.....	93

ÖZET

Bu çalışmada akışkanların animasyonu incelenmiştir. Bunun için akışkanların özellikleri araştırılmıştır. Çalışmada öncelikle animasyon ve akışkanlar ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. Animasyon için akışkanların hareketinde karşımıza çıkan problemler incelenmiştir. Hareket denklemleri incelenip animasyonda kullanımıyla ilgilenilmiştir. Hareket denklemlerinin çözümü için Navier-Stokes denklemlerinden faydalanılmıştır. Bu adımlardan sonra karşımıza çıkan diferansiyel denklemin çözümü için Sonlu Farklar yaklaşımı kullanılmıştır. Uygulama olarak bilgisayar ortamında nesne tabanlı programlama dillerinden olan Visual Basic dili kullanılarak animasyon gerçekleştirilmiştir. Hareket denklemi Sonlu farklar metoduyla çözüldükten sonra belirtilen dilde uygulamaya konularak dalga animasyonu gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Animasyon, Akışkanlar, Akışkan Hareket Denklemleri, Navier-Stokes Denklemleri, Sonlu Farklar Yaklaşımı

SUMMARY

Animation of Liquid Fluid

In this study the animation of fluids has been examined. For this reason, the properties of fluids were investigated. This study primarily includes informations about animations and fluids. For animation, the problems encountered in fluid movements were examined. Equations of movement were investigated and their usage in animations were evaluated. Navier-Stokes equations were used for the solution of the equations of motion. For the solution of diferantial equation, which is encountered after all these steps, finite difference approach was preferred. As an aplication, object-oriented programming language Visual Basic was used in computer environment and animation was realized. As application, real time animation has been implemented.

Key Words: Animation, Fluid, Fluid Equations of Motion, Navier-Stokes Equations,
Finite Difference Approach

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Topun hareket animasyonu	6
Şekil 2.2. Yılan animasyonu.....	7
Şekil 2.3. Çizme-çekme animasyonu	10
Şekil 2.4. Hücre animasyonu.....	10
Şekil 2.5. Kağıt animasyonu.....	11
Şekil 2.6. Kesme-çıkarma animasyonu	11
Şekil 2.7. Gölge animasyonu.....	12
Şekil 2.8. Karma animasyonu.....	13
Şekil 2.9. Bilgisayarlı animasyon	13
Şekil 2.10. Derinlik kazandırılmamış ve derinlik kazandırılmış resim	15
Şekil 2.11. V-ray motoru ile render edilmiş 3 boyutlu bir model	16
Şekil 2.12. Mental-ray motoru ile render edilmiş 3 boyutlu bir model	17
Şekil 2.13. 1928'deki Walt Disney animasyonu	18
Şekil 2.14. Çizgi animasyonu	20
Şekil 2.15. Katı yapı animasyonu.....	21
Şekil 2.16. Tanecik animasyonu.....	22
Şekil 2.17. Üç boyutlu animasyonda kartezyen koordinat yapısı.....	24
Şekil 3.1. Akışkan eğrisi.....	36
Şekil 3.2. Akım tüpündeki akış olayı	39
Şekil 3.3. Sabit konumlu sonlu kontrol hacmi	41
Şekil 3.4. Prizmadaki akışkanın debisi	42
Şekil 4.1. Akışta Navier-Stokes denklemi	56

Şekil 4.2. Hız bileşenleri	58
Şekil 4.3. Yapısal ağ	60
Şekil 4.4. Yapısal olmayan ağ	60
Şekil 4.5. Hibrit ağ	60
Şekil 4.6. Sonlu hacimler metodu	61
Şekil 4.7. Dairenin çevresinin sonlu elemanlar yaklaşımı ile bulunması	63
Şekil 5.1. Düğüm noktalarının gösterimi	64
Şekil 5.2. İleri, geri ve merkezi fark yaklaşımları	69
Şekil 5.3. Sonlu farklar yaklaşımında fark aralığı gösterimi	71
Şekil 5.4. Griddeki düğüm noktaları	80
Şekil 5.5. Griddeki düğüm noktaları ve hız bileşenleri	81
Şekil 5.6. Bileşenlerin grideki gösterimi	81
Şekil 6.1. Sonlu farklar metodunun düzlemdeki elemanları	83
Şekil 6.2. Düğümlerin dizilimi	84
Şekil 6.3. Uygulamadaki düğüm noktaları ve grid yapısı	85
Şekil 6.4. Uygulamadaki formülün uygulanması	86
Şekil 6.5. Dönüşüm matrisinin etkisi	87
Şekil 6.6. Dönüşüm matrisinin etkisi	87
Şekil 6.7. Dönüşüm matrisinin etkisi	88
Şekil 6.8. Dönüşüm matrisinin etkisi	88
Şekil 6.9. Dönüşüm matrisinin etkisi	88
Şekil 6.10. Dönüşüm matrisinin etkisi	89
Şekil 6.11. Dönüşüm matrisinin etkisi	89
Şekil 6.12. Dönüşüm matrisinin etkisi	89

Şekil 6.13. Dönüşüm matrisinin etkisi	90
Şekil 6.14. Dönüşüm matrisinin etkisi	90

TABLÖLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. Kontrol yüzeyindeki momentum değişimleri.....	45
Tablo 5.1. İleri Fark Tablosu	76
Tablo 5.2. İleri Fark Tablosu Değişik Gösterimi.....	77
Tablo 5.3. Geri Fark Tablosu	77
Tablo 5.4. Merkezi Fark Tablosu	78
Tablo 5.5. x^3+5x fonksiyonu için ileri fark tablosu	79
Tablo 5.6. Diferansiyel ayrıklaştırması	82
Tablo 6.1. Dönüşüm Matrisi ve Açık Değerleri	86

SEMBOLLER LİSTESİ

T :	Yüzey Gerilimi
μ :	Viskozite
ν :	Kinematik Viskozite
ρ :	Yoğunluk
α :	Sıkıştırılmaz bir akışta lineer momentum için düzeltme katsayısı
R_e :	Reynold Sayısı
Ma :	Mach Sayısı
Q :	Debi
δ :	Merkezi Fark Operatörü

1. GİRİŞ

Animasyon ile ilgili geçmiş yıllardan beri süren araştırma ve inceleme günümüzde de hala devam etmektedir. Üstelik bu araştırmalar bilgisayar teknolojisinin hızlı bir şekilde ilerlemesiyle birlikte çeşitlenmiş ve değişik boyutlar kazanmıştır. Bu farklı boyutlardan birkaçı 3 boyutlu animasyon ve gerçek zamanlı animasyondur. Gerçek zamanlı animasyon daha çok gerçekçi doğa olaylarının animasyonunda kullanılmaktadır. Günümüzde animasyonlar mühendislik, multimedya, mimarlık, eğitim, sinema ve televizyon gibi birçok alanda kendine geniş yer bulmuştur. Bu alanların her birinde de araştırma ve geliştirme çalışmaları devam etmektedir [1].

Animasyon nesnelerin (resim, grafik vb.) belirlenen kurgu etrafında kendi konumundan istenilen herhangi bir yere hareket ettirilmesidir. Animasyonda nesne bir yerden başka bir yere hareket ettirilirken iki konum arasında çeşitli işlemler olmaktadır. Bu işlemler nesnelerin yapısıyla ilgili işlemler ve nesnenin iki konumu arasını dolduran ara kare gibi işlemlerdir [2].

Animasyon hücre animasyonu, kağıt animasyonu ve bilgisayarlı animasyon gibi alanlarda varlığını sürdürmektedir. Bu alanlarda kendi kurallarıyla değişik animasyonlar yapılmaktadır.

Bu çalışmada konumuz diğer animasyon türlerinden ziyade bilgisayarlı animasyonla ilgilenmektir. Bilgisayarlı animasyonda nesnelerin çizimi ve diğer işlemlerin yapılmasıyla sunuş aşamasında derinlik verme işlemi(render) yapılmaktadır. Render ile nesneler üzerindeki bütün hesaplamalar yapılarak sunuş aşamasına gelinir. Nesnelerin kaplama ve ışık gibi özellikleri arasında etkileşim olur. Öyle ki bazı animasyonlarda render süresi saatlerle ifade edilebilmektedir. Tabi bu sürenin uzamasında kullanılan sistemin özelliklerinin katkısı vardır.

Animasyon yapılırken kullanılan değişik teknikler vardır. Bu tekniklere de bu çalışmada yer verilmiştir. Bunlar; katı yapıların animasyonu, taneciklerin animasyonu fizik kurallarıyla animasyon vb.dir.

Çalışmamızda 3 boyutlu bilgisayarlı animasyon uygulama kısmında kullanılacaktır. Böyle bir animasyon yapımındaki adımlar şunlardır: Model oluşturma, yüzey nitelikleri verme, sahne oluşturma ve hareket verme olarak söylenebilir.

Bu çalışmadaki amacımız bir sıvı akışkanın 3 boyutlu animasyonunu yapmaktır. Bu amacımız doğrultusunda kullanacağımız akışkanın özellikleri üzerinde durulmuştur. Uygulamada dalga animasyonu yapılacağından sıvı akışkanlar hakkında bilgiler verilmiştir.

Akışkanlarla ilgili araştırma süreci günümüzde hala sürmektedir. Akışkanlar sıvı ve gaz olarak ikiye ayrılır. Bu akışkanlardan gazlar sıkıştırılabilir iken sıvı akışkanlar sıkıştırılamazdır.

Bu çalışmada sıvı akışkanların yapısıyla ilgili bazı önemli özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu özellikler ideal akışkan, viskozite, yoğunluk ve debidir. Gazlar sıkıştırılabilir akışkanlar iken sıvılar sıkıştırılamaz akışkanlardır. Akışkanların en önemli özelliği dışarıdan bir kuvvetin etkisiyle deforme olmaya karşı direnç gösterememesidir. İşte bu özelliğiyle katılardan ayrılırlar [3].

Akışkan animasyonu yaparken akışkanın hareket denklemlerine ihtiyaç duyulacaktır. İşte burada karşımıza Navier –Stokes denklemleri çıkmaktadır. Navier-Stokes denklemleri akışkanların davranışlarını inceler ve bir dizi kısmi diferansiyel denklemlerden meydana gelmektedir.

Eğer diferansiyel denklem en az iki değişkenli fonksiyonun türevini bulunduruyorsa kısmi diferansiyel denklem denir. Denklemin mertebesi ise bir diferansiyel denklemde en yüksek derecedeki türevdir. Diferansiyel denklemde denklemin mertebesini belirleyen terimin derecesi, denklemin derecesidir. Örneğin aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem ikinci mertebeden bir denklemdir;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

Fizik problemlerinin hemen hemen tamamı matematiksel modele dönüştürüldüğünde karşımıza Kısmi Diferansiyel Denklemler(K.D.D.) çıkmaktadır. Buna karşılık günümüzde KDD lerin analitik çözüm yöntemleri tatmin edici olmaktan uzak kalmaktadır. Özellikle başlangıç ve sınır şartları önemli olduğundan zorluklarla karşılaşılmalıdır [4].

K.D.D.leri genellikle başlangıç değer problemi göz önüne alınıp çözümleri başlangıç şartına göre değerlendirilir. Bazı fizik olaylarında ise sınır değeri şartlarıyla da karşılaşılabilir.

KDD ler, tanım gereği, çok değişkenli fonksiyonlar içermektedir. Dolayısıyla herhangi bir problemin, analitik ya da sayısal, kesin çözümünü bilsek de buna ait sayısal değerleri tablolamak ve kullanıma hazır tutmak son derece zor olmaktadır.

Akışkanın hareket denklemini veren Navier-Stokes denklemlerinin çözümünün bulunması gerekmektedir. Fakat günümüzde bu denklemler hala tam olarak çözülebilmemiş değildir. Araştırmacılar tarafından yakın çözümlerle uygulamada kolaylıklar sağlanması amaçlanmaktadır. Bu denklemler uygulama alana göre değişik formlara basitleştirilerek kullanılabilir.

Bu aşamada sayısal çözümleme yöntemleri kritiktir. Bu yöntemler sayesinde analitik çözümleri çok zor olan matematik problemleri belli hata oranlarıyla çözülebilmektedir. Bu yöntemler Sonlu elemanlar, Sonlu hacimler ve Sonlu Farklar yöntemleridir. Bu yöntemlerle diferansiyel denklemlerin ayrıştırılması yapılmaktadır.

Bu çalışmamızda bu metodlardan Sonlu Farklar yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntem ile diferansiyel denklemin çözümü için çözüm bölgesi dörtgenlere ayrılarak her bir parça üzerinde düğüm noktaları belirlenir. Ardından her düğüm noktası için hesaplamalar yapılır. Böylece karmaşık olan diferansiyel denklemler fark denklemlerinden oluşan matematik denklemlerine indirgenir. Düğümleri bulunduğu yere göre ileri, geri veya merkezi fark formülleri kullanılır.

Bu matematiksel denklemlerin düzenlenmesinden sonraki aşama bütün bunları bilgisayar ortamında uygulamaktır. Bunun için nesne tabanlı programlama dilleri tercih edilmektedir. Burada biz Visual Basic dilini kullanacağız. Denklemler kullanılarak animasyon çizimi yapıldıktan sonraki aşama bu animasyonu 3 boyutlu hale getirmek olacaktır. Bunun için dönüşüm matrisi kullanılmalıdır. Bu işlem yapıldıktan sonra 3 boyutlu animasyonumuz hareketine başlayabilecektir.

Navier-Stokes gibi diferansiyel denklemlerin çözümü konusunda hala çalışmalar sürdürülmektedir. Bu denklemleri çözmek için çeşitli yaklaşımlara başvurulmaktadır. Bu çalışmada da böyle bir yönteme başvurulmuştur.

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin amacı belirlenen bir sıvı akışkanın animasyonunu gerçekleştirmektir. Bunun için akışkan animasyonundaki temel kavramlardan biri olan hareket denklemleri üzerinde durulması amaçlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada animasyonun yapımında diferansiyel denklemlerden yararlanılması hedeflenmiştir.

Bu amaç doğrultusunda yapılan çalışmada literatürde sıklıkla rastlanan diferansiyel denklem kullanılarak çözümün bulunması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda Sonlu farklar yöntemiyle denklemin basitleştirilmesinin sağlanması ve ardından bulunan fark denklemleriyle uygulamanın yapılmasına çalışılmıştır.

1.2. Tezin Planı

Bölüm 1’de bu çalışmanın konusu olan akışkan ve animasyon kavramlarına giriş yapılmıştır. Ayrıca bu bölümde çalışmanın merkezinde yer alacak olan kısmi diferansiyel denklemlerin akışkan hareketindeki rolü vurgulanmıştır.

Bölüm 2’de çalışmanın ana unsurlarından olan animasyonun temelleri ve teknikleri üzerinde durularak animasyon yapımındaki aşamalar belirtilmiştir.

Bölüm 3’de animasyonu yapılacak olan akışkanların özellikleri incelenmiştir. Akışkanlarla ilgili yapılan çalışmalardan örnekler sunulmuştur. Ayrıca bölümün sonunda akışkan hareketini yöneten denklemler verilmiştir.

Bölüm 4’de akışkan hareketini sağlamak amacıyla kullanılan Navier-Stokes denklemleri üzerinde durulmuştur. Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için başvurulacak yöntemler incelenmiştir.

Bölüm 5’de ise Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde kullanılan yöntemlerden olan Sonlu Farklar metodu üzerinde durulmuştur. Ardından Taylor serisi ile denklemlerin açılmasıyla diferansiyel denklemlerin çözümlerine yer verilmiştir.

Çalışmayla ilgili sonuçlar Bölüm 6’da verilmiştir.

2. ANİMASYON

Animasyon nesnelerin belirlenen doğrultuda hareket ettirilmesidir. Nesnelerin hareketi ile her bir sahne ayrı bir durum gibi düşünülür. Animasyonun tarihsel gelişimine bakıldığında ilk zamanlarda animasyon çizilen resimlerin peş peşe getirilmesiyle yapılırdı. Bu durumda resimler hızlıca geçirilir veya bir çemberin içinde hareket verilir. Teknolojinin gelişmesiyle beraber ise günümüzde artık animasyonda gerçek zamanlılık kavramı karşımıza çıkmaktadır [5].

Animasyon, birçok resim ve grafiğe belirlenen senaryolar içerisinde hareket verilmesi olarak da tanımlanabilir. Hareket verme işlemi bir kaç değişik yol ile gerçekleştirilebilir. En yaygın hareketlendirme yöntemi kurgulanan senaryolar arasında geçişler sağlanarak gerçekleştirir [6].

Hareketlendirme işlemi, çoğu animasyon programında sahnelerin belirlenen sıraya göre getirilmesiyle oluşturulur. Örneğin yürüyen bir insana ait her hareket bir sahne içerisinde yer almakta ve animasyon farz edelim toplam on adet sahneden oluşuyorsa bu sahnelerin ard arda getirilmesi ile yürüyen insan animasyonu oluşturulmaktadır.

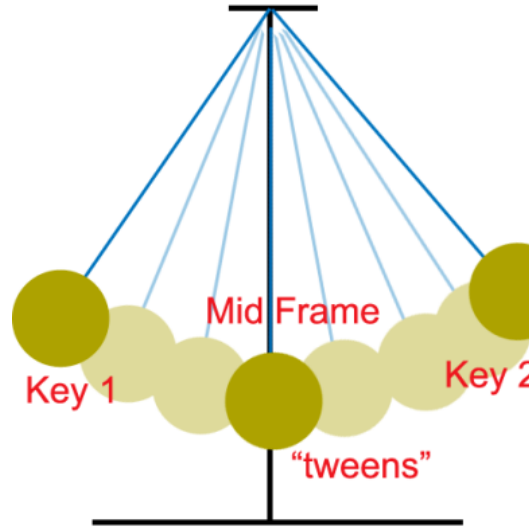
Yıllardır resimler üzerinde hep hareketlilik olayı gerçekleştirilmiştir. Bu işlemin mantığını en çok çizgi film ile uğraşan senarist ve yapımcılar kullanmıştır. Gerçekte izlediğimiz filmlerde bu yapı kullanılmaktadır. Bu alanlarda birbiri ardına eklenmiş çok sayıda resim ve ses montajları karşımıza çıkmaktadır.

Diğer hareketlendirme işleminde ise animasyonda kullanılacak olan metin, resim ve grafik gibi nesnelerin ekranın bir yerinden başka bir yerine götürülmesi için hareketlendirme yapılır. Bu animasyonlardaki hareketlerde kullanılan nesneler şekil değişikliğine uğramazlar. Bu nesneler sadece yer değiştirirler. Bu işlem, özel efektlerle gerçekleştirilebilir.

Animasyon yapma işi bir grup çalışmasıdır diyebiliriz. Çünkü animasyon yapmak için çok sayıda aşama ve iş bölümü vardır. Bir animasyon yaparken sırasıyla şu işlemler yapılır: İlk sırada yapılacak olan iş animasyonun hikayesi ve kurgusunu hazırlamak ve buna göre bir senaryo yazmaktır. Senaryo yazıldıktan sonra storyboard hazırlanır.

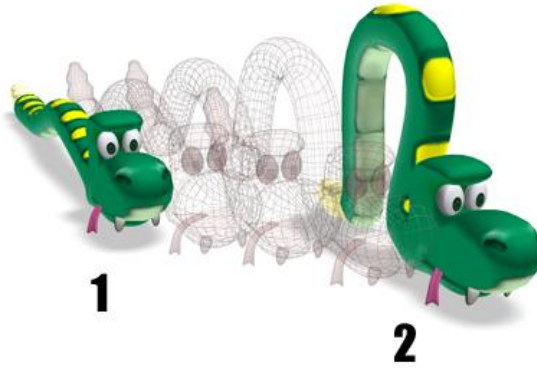
Storyboard'ta, yapılacak olan animasyonun akışı anlatılır, kamera açıları seçilir sahne düzeni ve geçişler kurgulanır. Daha sonra karakterler tasarlanır ve karakterlerin tüm duygusal ifadelerinin jest ve mimiklerinin bulunduğu bir sayfa hazırlanır. Bundan sonra sıra animatörlerdedir. Çok sayıda çeşitli animatörler vardır bunlar [7]:

- Key Animatör (Ana kare animatörleri): Bu animatörler hareketin nasıl olacağını kafalarında önce tasarlayıp sonrada hareketin ana hatlarını(yani karelerini)çizerler ve daha sonra ara animatörlere bu çizimler verilir. Şekil 2.1 ana kareleri göstermektedir [8].



Şekil 2.1. Topun hareket animasyonu[9].

- Between Animatör (Ara kare animatörleri): Görevleri Şekil 2.2'deki gibi ana karelerin aralarını doldurarak animasyon akışını sağlamaktır. Ara kareleri çizer sonra test etmek için line-test adı verilen aşamaya geçerler. Eğer harekette herhangi bir sorun olmamışsa bu çizimler clean-up animatörlere gider. Fakat hata varsa hatalı olan kare çıkartılır ve tekrardan çizilir bu bazen öyle bir kare olabilir ki animasyonu en baştan yapmak gerekebilir [10].



Şekil 2.2. Yılan animasyonu [11].

- Clean-up Animatör: Animasyondaki hareket bittikten sonra senaryoya uygun olarak çizilen karelerin üstünden tek çizgiyle geçilerek tekrar line-test aşamasına gidilerek burada da herhangi bir hata olmadığı tespit edildiği müddetçe renklendirilmeye gider.

Clean-up işleminden sonra animasyon kaydedilir. Sonraki aşama renklendirme aşamasıdır. Renklendirici animatörler kareleri renklendirir ve tekrar line-test alınır. Bu aşama esnasında ise arka plan yapılır. Arka planlar storyboarddaki kamera açılarına göre hazırlanır. Eğer olmuşsa onay alır ona göre renklendirilir. En sonunda arka plan ile animasyon birleşir. Bundan sonraki aşamada seslendirmedir. Karakterleri seslendirecek kişiler seçilir stüdyoya alınır seslendirilme başlar ve kayıt alınır. Sonra bilgisayar programları ile montaj edilir. Montaj bittikten sonrada animasyon hazırdır.

Bilgisayar animasyonları teknolojinin her geçen gün hızlı bir şekilde ilerlemesiyle birlikte birçok sektörde çokça kullanılmaya başlandı. Animasyonların yoğun olarak kullanıldığı alanlar şunlardır [8]:

- Bilimsel canlandırma: Bilgisayarlar ortamında hazırlanan grafik ve canlandırmalar, bilimin pek çok dalında yararlanılan unsurlardandır. Tıp, jeoloji, astronomi, denizbilimi vb. birçok bilim dalı bilgisayar animasyonları sayesinde daha fazla çözümler bulabilmekte ve daha anlaşılabilir hale gelebilmektedir.
- Eğlence: Burada günümüzde oynadığımız bilgisayar oyunlarına baktığımızda bu oyunların reklamı için yapılmış animasyonları görmek mümkündür. Ayrıca oyunların içinde çok sayıda animasyon görmemiz mümkündür. Bunların dışında sinema

sektöründe artık animasyon filmlerinin çoğaldığını ve dikkat çekici, hasılatı yüksek filmlerin yapıldığını bilmekteyiz.

- Eğitim: Eğitimde dikkat çekicilik ve istekli oluş çok önemli kavramlardır. Bu sebeple eğitimin daha zevkli ve daha çekici hale getirilmesi için birçok araştırma yapılmaktadır. Burada da bilgisayar animasyonları önemli bir konumdadır. Bilgisayar animasyonları sayesinde öğrencilerin hem kavrama yetenekleri hem de bu sayede konuya ilgileri daha kolay arttırılmaktadır.
- Mimarlık: Bilgisayar animasyonlarından faydalanan ve son yıllarda ülkemizde de oldukça popüler hale gelen bir diğer kullanım alanı da mimarlıktır. Bu alanda yapılacak olan iç dekorasyonları, çevre düzenlemeleri gibi çalışmalar bilgisayar ortamında canlandırılabilir ve yapı içinde dolaşma imkanı sağlanmış olur.
- Multimedya: Bu alan bilgisayar animasyonlarının yoğun olarak kullanıldığı alanlardan birisidir. Animasyonlar özellikle sunum yapımında yoğun bir şekilde faydalanılmaktadır. Günümüzde ise sunum vazgeçilmez bir konumda bulunmaktadır. Bu sayede, uygulamalar çok daha canlı ve etkileyici olabilmektedir.
- Mühendislik: Grafik işlerinin mimari ve mühendislik sistemleri için çizim ve planların bilgisayar ortamında üretilmesi mühendisler için çok önemlidir. Animasyonlar sayesinde tasarlanan ve geliştirilen her türlü araç ya da parça canlandırılabilen ve çalışmalarda büyük kolaylık sağlamaktadır. Otomotiv ve uçak sanayinde çok yoğun bir şekilde animasyonlardan faydalanılmaktadır. Tasarlanan her türlü hareketli parça animasyonlar sayesinde incelenebilmektedir. Bunlar için çok sayıda yazılım geliştirilmiştir.
- Reklam Sektörü: Reklam sektöründe önemli olan izleyicilerin dikkatini çekerek reklamı yapılan nesnenin akılda kalıcılığını arttırmaktır. Bunun için animasyon çok yararlı bir araç haline gelmiştir. Reklamı yapılacak olan nesneler animasyonlarla hareket ettirilmekte ve konuşturulmaktadır. Örneğin dans eden diş fırçaları veya denizde yüzen balıklar gibi.
- Sinema: Bu sektörde bilgisayar animasyonları yapımı oldukça pahalı ve zor olan birçok film sahnesinde önemli işler başarmaktadır. Çok sayıda film bu sayede yüksek maliyetlerden kurtulmaktadır. Yüzüklerin Efendisi, Avatar, Transformers ve Jurrassic Park gibi filmlerdeki özel sahnelerde bilgisayar efektleri kullanılmıştır.
- Televizyon: Bilgisayar animasyonundan yararlanılan diğer bir alan ise televizyonlardır. Televizyonlardaki jeneriklerin yapımı ve sanal stüdyoların

gerçekleştirilmesi gibi birçok uygulama animasyon sayesinde oldukça zengin bir içerik kazanmaktadır.

- Uzak Çalışmaları: Uzak çalışmalarında animasyonlar çok önemli rol oynamaktadır. Uzak araçlarının incelediği yerler ve yaptığı çalışmalar animasyonlar sayesinde yeryüzüne sunulmaktadır.
- Video: Animasyonları kullanarak yapımcılar hikaye ve masalları veya senaryoların bütün içeriklerini canlandırarak önemli çalışmalar yapabilmektedir. Bu sayede oluşturulan birçok video filmi de mevcuttur. Buz Devri, Kırmızı Başlıklı Kız, Walt Disney gibi videoları örnek olarak verebiliriz.

Animasyonlar web sayfalarında internet ortamına yerleştirilebilir. Animasyon ard arda gösterilen statik görüntülerden oluşur. Kareler daha hızlı ilerledikçe animasyonun akımı da artar. Ama web oldukça yavaş bir yer olabilmekte ve hızlı çalışması gereken animasyonlarda sıkıntılar yaşanabilmektedir. Bunu aşmak için özel yöntemler kullanılabilir.

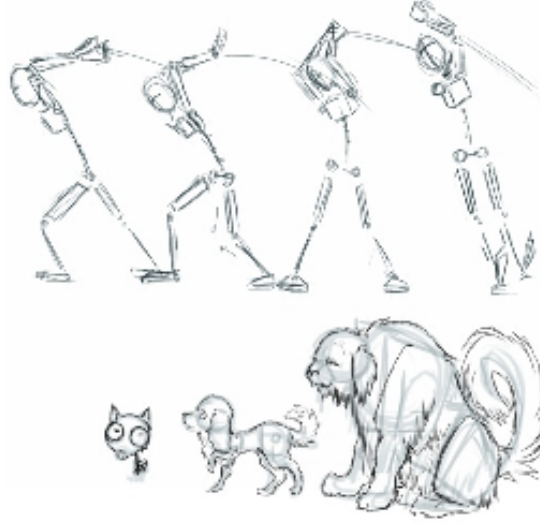
2.1. Animasyon Türleri

Yüzeysel animasyonda resimler veya figürlerin hazırlanması çeşitli tekniklerle yapılabilmektedir. Bu nesneler renk ve çizgi ile dikey bir kamera altında hareket ettirilerek plastik yapı ve derinlik gibi özellikler verilmektedir. Bu tür animasyonları bilgisayar ortamında uygulamak için geleneksel teknikler kullanılmaktadır.

Bu tür animasyonlar jenerik yapımında da kullanılmaktadır. Bunların arasında en yaygın olanları; Çizme-Çekme Animasyonu, Hücre Animasyonu, Kağıt Animasyonu, Kesme-Çıkarma Animasyonu, Gölge Animasyon, Karma Animasyon, Kamerasız/Alıcısız Animasyon ve İki Boyutlu Bilgisayar animasyonudur [12].

2.1.1. Çizme-Çekme Animasyonu

Çizme-Çekme Animasyonu tekniğinde, jenerikteki tüm animasyon bir tek resimden elde edilmektedir. Görüntünün oluşum aşamalarını elde edebilmek için çizim anındaki çekimlerden yararlanılmaktadır.



Şekil 2.3. Çizme-çekme animasyonu [13].

Çizme-Çekme animasyonu jenerik tasarımlarında çoğunlukla yazının akmakta olan görüntüyle birlikte aynı anda yazılmakta olduğu yada görüntünün oluşmakta olduğu izlenimi sağlamak için kullanılabilmektedir.

2.1.2. Hücre Animasyonu(Cell Animation)

Hücre animasyon yüzeysel animasyon türleri içinde en çok kullanılan ve görsellik bakımından en iyi sonuçları karşımıza çıkaran tekniklerin başında gelmektedir. Yapılacak olan jenerik için kullanılacak olan müzik ve akış şemasını belirlemek gerekmektedir. Bunun için önceden planlama çalışması yapılmalıdır.



Şekil 2.4. Hücre animasyonu [14].

Planlama gereği olarak tamamlanmış olan ön çalışmalarla birlikte, bu teknik için özel olarak yapılmış olan ışıklı cam veya plastik masalarda, hareketler birer birer, standart boylarda (12-inch/15inch boyunda) hazırlanmış saydam ve düz kağıtların üzerine çizilmektedir. Cell animasyonlardaki arka plan tasarımları da, hazırlanan hareketler kadar önemli bir işlemdir.

2.1.3. Kağıt Animasyonu

Kağıt animasyonu ile hücre animasyonu arasında benzerlikler vardır. Bu benzerlikler çizim ve çekim tekniklerinde kendini göstermektedir. Fakat kullanılan malzeme açısından farklılık göstermektedir. Bu animasyonda çizimler saydam kağıt ve asetat yerine beyaz veya renkli kağıda yapılmaktadır.



Şekil 2.5. Kağıt animasyonu [15].

2.1.4. Kesme-Çıkarma Animasyonu

Bu teknikte figürler kağıt, kumaş, veya metal gibi malzemelere çizilir ardından kesilip çıkartılarak kamera altında hareket ettirilir. Bu animasyonda bir saniyelik hareket için 12 ayrı figürün hazırlanması gerekmektedir.



Şekil 2.6. Kesme-çıkarma animasyonu [16].

2.1.5. Gölge Animasyonu

Bu animasyon türü teknik olarak Karagöz oyununa benzeyen bir gölge oyunudur. Burada figürler siyah kartona veya metal plakalara çizilir ardından figürler kesilir ve buzlu cam üzerine yerleştirilir. Bütün bu işlemler yapıldıktan sonra kesme-çıkarma animasyonu tekniğinde olduğu gibi filme alınır. Çekim sırasında ışık buzlu cam altındaki bölümden verilir. Işık figürlerin arkasından geldiği için kamera önündeki figürler siyah görünür. Bu sayede figürleri oluşturan nesneleri birbirine bağlayan tellerin filmde gizlenebilmesi sağlanmaktadır.

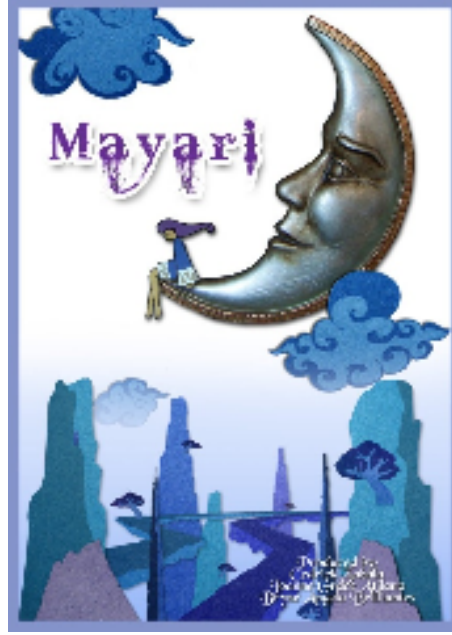


Şekil 2.7. Gölge animasyonu [17].

2.1.6. Karma Animasyon

Bu animasyon tekniği ile kesme-çıkarma animasyon tekniği arasında bazı benzerlikler vardır. Bu benzerlikler hazırlık ve teknik aşamasında kendini gösterir. Fakat malzeme açısından ise birbirinden ayrılmaktadır. Figürlerin çizilip çıkarılma işlemi kesme çıkarma tekniğinde kağıt ve metaller kullanılarak gerçekleştirilirken karma teknikte bu işlem dergi, fotoğraf veya gazetelerden kesilip birleştirilerek yapılmaktadır. Burada

figürler, değişik malzemelerden ve birçok parçadan oluştuğu için kompozisyon öğeleri arasındaki ilişkiye dikkat ederek tasarım yapılmalıdır.



Şekil 2.8. Karma animasyonu [18].

2.1.7. Bilgisayarlı Animasyon

Bilgisayarlı animasyon, bilgisayar aracılığıyla elektronik resimlerin yazılımlar yardımıyla hareketlendirilmesiyle oluşur. Diğer tekniklerden farkı animasyonda kullanılacak olan figürler kağıt, cam vb. yerlerin üzerine değil de bilgisayar ortamında modellenerek çizilir.



Şekil 2.9. Bilgisayarlı animasyon [19].

Bilgisayarlı animasyon iki ve üç boyutlu animasyonları içermektedir. İki boyutlu bilgisayar animasyonu x ve y koordinatlarında oluşturulan karelerin tek tek çizilmesiyle ve basit efektlerle gerçekleştirilebilir. Üç boyutlu animasyon ise daha farklı aşamaları gerektirir. Bu fark bir resim boyamak ve bir heykel yapmak arasındaki fark gibi olabilir. Bunun nedeni ise derinlik efekti oluşturan x,y ve z koordinat sisteminde çizimlerin yapılmasıdır [20].

2.2.Derinlik Kazandırma(Rendering)

Animasyon yaparken karşımıza sıkça çıkan kavramlardan bir diğeri de renderdir. Render kelimesi 3D alanında en çok kullanılan terimlerden birisidir. Türkçe karşılığı sunmak, derlemek manasına gelir. Render, sahnede çizdiğimiz nesnelerin bütün hesaplamalarının yapılarak en son sunuş aşamasına gelmesidir. Render, modellemesini yaptığımız 3 boyutlu objelerdeki ışık ve kaplama gibi özelliklerin etkileşmesi sonucu iki boyutlu çıktı vermesi olayıdır. Sahnede çizim yaparken nesnelere ışık, kaplama ve efektler uygulansa da gerçek görüntü yansıtılamaz. Çünkü çizim olayı sırasında hem bu hesaplamaların yapılması hem çizimin yapılması normal bilgisayarların gücünün üstünde bir işlemdir. Bazı sahnelerin render süresi o kadar çok zaman alır ki bazen bu süre saatleri bulabilir ve saatler süren bir sahnenin gerçek zamanlı olarak hem çizilmesi hem hesaplanması oldukça maliyet gerektirir. Render işleminin bu kadar uzun sürmesinin sebebi bilgisayar işlemcisine çok fazla yük bindirmesinden kaynaklanmaktadır. Bunun için yüksek performanslı bilgisayarlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bilgisayar sisteminde kullanılan işlemcinin hızı ve sayısı render süresini etkiler. Bunun için bazı yardımcı yazılımlarla birlikte birden fazla sistemin ortak çalışması yoluna gidilerek bu sürenin kısaltılması sağlanabilmektedir [21].

Render sahnedeki nesnelerin, ışıkların, yansımaların ve efektlerin birbirinden etkilenmesiyle meydana gelen ışık kümelerinin ortamdaki yayılımlarının hesaplanmasıdır. Render motoru önce sahnedeki nesneleri ve ışık kaynaklarını varsa efektleri tespit eder ve ortama vermek için hesaplama başlar. Örnek olarak sağ taraftan gelen bir ışık kaynağının ışığını nereye göndereceğini, nerelerde gölge oluşturacağını ve bu ışığın hangi nesneler üzerinde parlaklık oluşturacağını hesaplayarak çizimi sunuş konumuna hazırlar[22].

Render için başka bir tanımlamada bilgisayarda çizilmiş olan modeli veya modelleri bilgisayar tarafından işlemektir denilebilir. Görüntünün ham halinin, bilgisayar tarafından işlenmesidir. Render işlemini gerçekleştirmek için çeşitli bilgisayar yazılımlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Renderdeki en büyük etken ışıktır. Çünkü ışık olmadan nesneler görünmez. Işık kaynaklarını nasıl yerleştirdiğimiz ve bu kaynaklara hangi değerleri verdiğimiz önemlidir. Bilinen render motorlarındaki birçok ayar birbirine benzemektedir. Render motorlarının bazılarının ayarları az olup sadeyken bazılarınıninki ise fazla olup karışıklıklara sebep olabilmektedirler. Her render motoru kendine özgü kullanım alanları ve özelliklere sahiptir. Bu yüzden render motorları arasında birbirinden üstünlükten söz etmek uygun olmayabilir. Render motorları seçilirken kullanım kolaylığı ve amaç göz önünde tutulmalıdır. Bazıları mimari alanda uygunken bazıları da animasyonlarda daha yararlıdır. Çalışmamızı herhangi bir render motoruyla çalıştırdığımız zaman aynı etkileri ve sonuçları alabiliriz. Fark sadece render hızı ve ayarlama da kendini göstermektedir [23].



Şekil 2.10. Derinlik kazandırılmamış ve derinlik kazandırılmış resim [24].

Render işlemi, bilgisayar ortamında tasarım yapılan bütün sektörlerde gerçekleştirilir. Bu sektörlerden mimarlık, bilgisayar oyunları, simulatörler, sinema ve televizyon gibi alanlarda ağırlıklı kullanılır. Rendering işleminde kullanılan matematik dalları ise şunlardır; doğrusal cebir, kalkülüs, sayısal yöntemler, sayısal sinyal işleme, Monte Carlo benzetimi.

Render işlemini yapan yazılımlar render motorlarıdır. Modellemede kullanılan yazılımların kendi default render motorları bulunmasına rağmen gereksinim durumunda farklı render motorları da kullanabilmekteyiz. Günümüzde en çok kullanılanlardan bazıları,

Mental ray, V-ray, Maxwell, Final, Brazil vb.dir. Burada render motorlarının özelliklerine daha ayrıntılı bakabilmek amacıyla Vray ve Mental Ray motorları ele alınacaktır [25].

2.2.1. Derinlik Kazandırma Motoru V-Ray

3D StudioMax, AutodeskVIZ , Autodesk Maya, Rhinoceros, MaxonCinema 4D, Sketchup gibi birçok 3 boyutlu tasarım yazılımlarında oluşturulan bir modelin gerçekçi bir biçimde render edilmesine imkan sağlayan bir render motorudur. Görsellik vermede üst düzey gerçekçilik sağlar. Bu render motoru kullanıcıya çeşitli ışıklandırma seçenekleri sunar. Özellikle mimari alandaki görselleştirmede kullanımı oldukça yaygındır. Şekil 2.11’de V ray ile render olmuş bir model görülmektedir.



Şekil 2.11. V-ray motoru ile render edilmiş 3 boyutlu bir model [26].

V-Ray, 3 boyutlu sahnelerin fiziksel olarak doğru bir şekilde aydınlatılması için Dolaylı Aydınlatma yöntemlerini kullanır. Bu yöntemler şunlardır; Işıkları Haritalama, Işık Ön Belleği, Foton Haritalama ve Doğrudan Hesaplama yöntemleridir. Bu dört teknik birincil ve ikincil ışık sıçramalarının hesaplanmasında çeşitli kombinasyonlar ile kullanılabilir.

V-Ray render motoru resim örnekleme işlemi için önceki sürümlerinde QMC (Quasi Monte Carlo) yöntemi kullanılıyorken günümüzde ise QMC (Quasi Monte Carlo) yöntemi yerine Schlick örnekleme yönteminin değiştirilmiş bir hali olan DMC (Deterministik Monte Carlo) örnekleme yöntemini kullanmaktadır. V-Ray, çeşitli kırık giderme yöntemlerini geniş ayar aralıkları ile kullanıma sunar. Dolaylı Aydınlatma hesaplanması sırasında birincil ve ikincil ışık sıçramaları için Işık Önbelleği yöntemini kullanarak İlerlemeli Yol İzleme yapabilir [27].

V-Ray render motoru çok etkili gölgeleme seçenekleri sunmaktadır. Burada kolay ayarlanabilir malzeme özellikleri etkili olmaktadır. Etkin ve tutarlı ışıklandırma çözümleri için alan ışıkları sunmaktadır. Ayrıca IES fotometrik ışıklara da destek verir. Görüntü tabanlı ışıklandırma yapabilme özelliğine sahiptir. Bunun için yordamsal güneş ve gökyüzü benzetimleri ve bütünleşik HDR desteğine sahiptir. Yüzey altı ışık dağılımı gibi yöntemlere destek vermektedir. Burada V-Ray deki bulanık yansımalar ve geçirimler önem kazanmaktadır.

2.2.2. Derinlik Kazandırma Motoru Mental Ray

Mental Ray motorundaki promaterial özelliği materyal ve kaplama konusunda kolaylıklar sağlamaktadır. Yine aynı özellik sayesinde kullanıcı gereksiz ayarlardan kurtulmaktadır. Örneğin malzeme türü olarak tahta seçildiğinde sadece tahta ile ilgili olan ayarlar gelmekte diğer malzemelere ait ayarlar görünmemektedir.

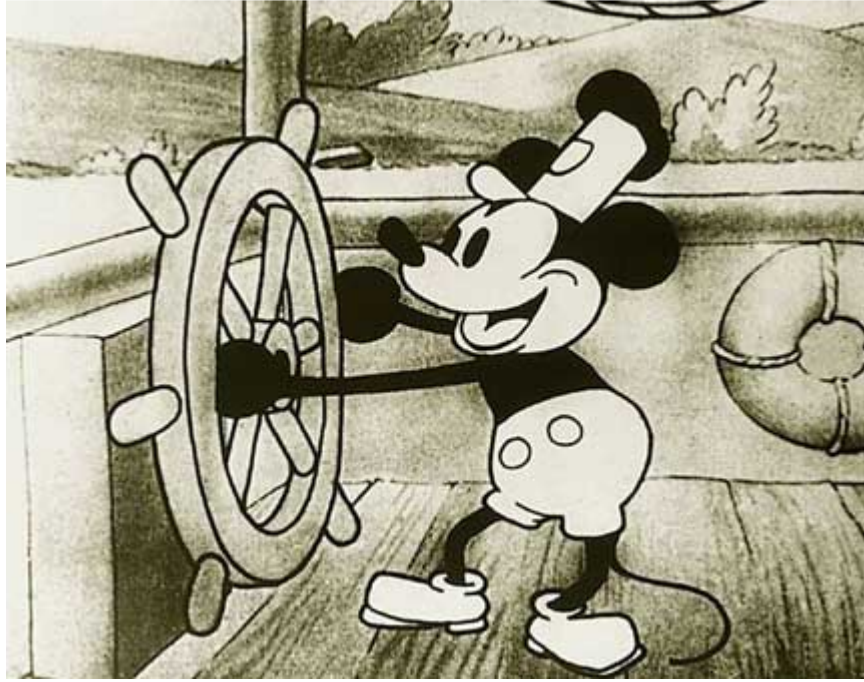


Şekil 2.12. Mental-ray motoru ile render edilmiş 3 boyutlu bir model [28].

Mental-ray render motoru ile mimari ve animasyon alanlarında yararlı etkiler alınmaktayken V-ray motoru daha çok iç mimari modellemelerinde kullanılmaktadır. Animasyonda render hızı yavaşlatmaktadır. Bunun sonucunda render yavaş ise kalite daha mı artar diye sorulabilir. Bunun cevabı evet olsa da çoğu zaman kaliteden fazla performans daha önde gelebilmektedir.

2.3. Animasyonun Tarihçesi

Animasyonun tarihine baktığımızda bunu eski çağlarda mağaralarda çizilen resimlere ve daha sonraları yapılan heykellere kadar götürmek mümkündür. Fakat animasyonun temeli olan hareketlendirmeden bahsetmek için 20.yüzyıla bakmak faydalı olacaktır. Aşağıdaki resim 1900 lü yıllardaki Walt Disney'i hatırlatmaktadır.



Şekil 2.13. 1928'deki Walt Disney animasyonu [29].

Resimlerin sinema üzerindeki ilk animasyonu 1908 yılında Emile Cohl tarafından gerçekleştirildi. Cohl beyaz kibrit çöplerinden yapılan figürleri siyah bir arka fon üzerinde hareket ettirmiştir.

1960 lı yıllarda video ve bilgisayarın gelişimi, iletişim ortamlarını oldukça geliştirdi. Videonun görüntüyü hemen kayıt edebilme özelliği ve kayıt edilmiş görüntüleri hemen izlenebilir hale getirmesi, sanatçıların animasyon için çizdikleri hareketleri kağıt üzerindeyken çekip görebilmelerini sağladı [30].

Geçmiş yıllarda animasyonların yapılışı kağıtlara resimlerin çizilmesi ve kağıtların hızlıca geçirilmesi veya bir çemberin içine konup döndürülmesi ile olurdu. Günümüzde ise bilgisayar teknolojisi hem vektör hem de piksel tabanlı animasyonlar yapılmasını mümkün kılmaktadır. 2 boyutlu animasyon tekniğinde saniyede 24 kare çizilerek animasyon gerçekleştirilir. Animelerde saniyede 12 kare Limited animasyon tekniğinde ise daha az kare çizilerek yapılmaktadır. Bir animasyon filmi yapılmadan önce karakter tasarımları arkasından senaryonun storyboard çalışması ve en son layout çalışması yapılmaktadır. Profesyonel bir şekilde yapılması planlanan bir animasyon filmine bu aşamalar geçilmeden başlanamaz. Son zamanlarda yapılan uygulamalar göstermiştir ki animasyon tekniklerine sınır konulamamaktadır. Genel anlamda sınıflama yapılırsa 3D, 2D, stop motion, kesme çıkarma en yaygın teknikler olarak karşımıza çıkmaktadır.

İlk 3D filmleri, direkt programlamayla üretilmiştir. İlk olarak etkileşimli animasyon sistemleri (BBOP, TWIXT), anahtar-pozisyonu temel aldı. Buradaki Alias, Wavefront, Explore, SoftImage gibi araçlar ticari üretimde standart oldu. Anahtar pozisyon karmaşık hareketler için temeldir. Bu kameralar, aktörler ve ışıkları kullanıyor olan koreografileri tanımlamaya izin veren ara yüzleri temel alan komutlardır. Fiziksel tabanlı sistemler genellikle menü tabanlı ve grafik etkileşimi olmadan daha sonra ortaya çıktı.

Geçmişte canlandırılmış filmler elle çizilmekte, sonra da videokasete kare kare fotoğraflanmaktadır. Bu teknik, sürece yardımcı olması için kullanılan dijital teknoloji ile birlikte halen kullanılmaktadır. Geleneksel canlandırma süreçlerinde kullanılan bir takım teknik ve araçlar günümüzde hala geçerlidir ve çoğunda gerekli olan zamanı azaltmak ve emek sürecini kolaylaştırmak için dijital teknoloji ile birleşmiştir. Geleneksel canlandırma tekniklerinden bazıları; thaumatrope, flipbook, çizgi ve hücre animasyon, hareket durdurma-canlandırma, rotskoplama olarak sıralanır.

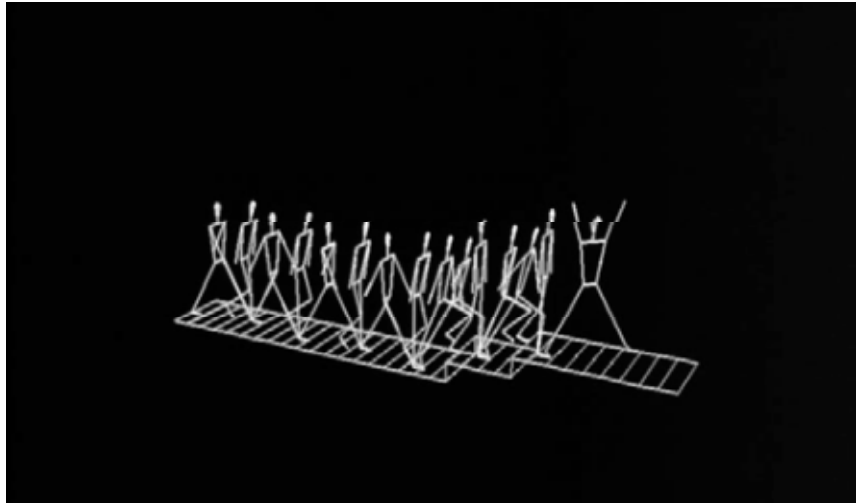
2.4. Animasyon Teknikleri

Bilgisayar animasyonunun ana teknikleri şunlardır:

- Hareket yakalama animasyonu
- Anahtar görüntü animasyonu
- Parametrik interpolasyon
- Prosedürel veya algoritmik animasyon

Hareket yakalama animasyonunda ölçüler ve kayıt hareketi, acil veya ertelenen analiz ve tekrarlama için bir aktör tarafından yapılır. Hareket ölçüleriyle dijital karakterin hareketleri denk olmalıdır. Direkt izlenebilir, sentetik bir aktörün kolunu kontrol ederken mesela insan kolunu. Dolaylı da izlenebilir, bilgisayar karakterinin başını ve gözünü kontrol ediyor olan fare hareketleri gibi. Sahnede odaklanan ve gerçek aktörün vücuduna bağlanan işaretçi diye adlandırılan yansıtıcı küçük resimler temelde yer alır. İşaretçiler sayesinde animasyon dünyasından uygun olanları hesaplayabiliriz. İşaretleyiciler, eklemlere bağlanır ve onların konumu, farklı açılardan kaydedilir. Sentetik bir aktöre uygulanan yürüyor olan insanın hareketi mükemmel sonuçları verir, çünkü veri, dosdoğru gerçek dünyadan gelir.

Anahtar görüntü animasyonunda, animatör anahtar karenin önemli özelliğidir. Bilgisayar aralarında otomatik olarak interpolasyon üretir. Katı animasyonlar için interpolasyona ihtiyaç duyulan geometrik iki özellik vardır, bunlar pozisyon ve yöndür. Lineer interpolasyonda bir problem vardır, bu uygulanmayan bozunmadır. Parametrik interpolasyon ile animasyonda, varlıklar (nesne, kamera, ışık) zaman içinde tanımlanmış değerleri ile parametreler tarafından karakterizedir. Bilgisayar, interpolasyon ile parametrelerin ara değerlerini hesaplar ve interpolasyonlu değerleri ile sahneyi yeniden hesaplar. Şekil 2.14’de anahtar kareler ayrıntılı olarak görülmektedir.



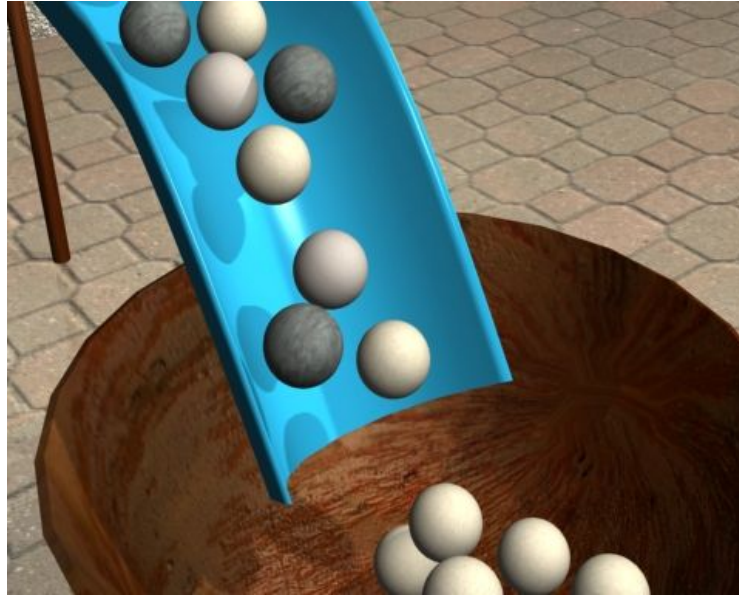
Şekil 2.14. Çizgi animasyonu [31].

Birkaç animasyon tekniği vardır ki istenen animasyonu yapmak için her teknik kategorisi bir programlama tekniği tanımlar.

- Katı yapıların animasyonu
- Taneciklerin animasyonu
- Fizik kurallarıyla animasyon
- Eklemlı nesnelerin animasyonu(2 ve 4 ayaklılar)
- Davranışlara göre nesnelerin animasyonu

2.4.1. Katı Yapıların Animasyonu

Katı yapıların animasyonu bilgisayar animasyonları içinden en basit ve akıcı olandır. Aşağıdaki örnekte yumurta nesnelerinin akışını görmekteyiz. Bu geçişler Şekil 2.15’de fark edilmektedir.

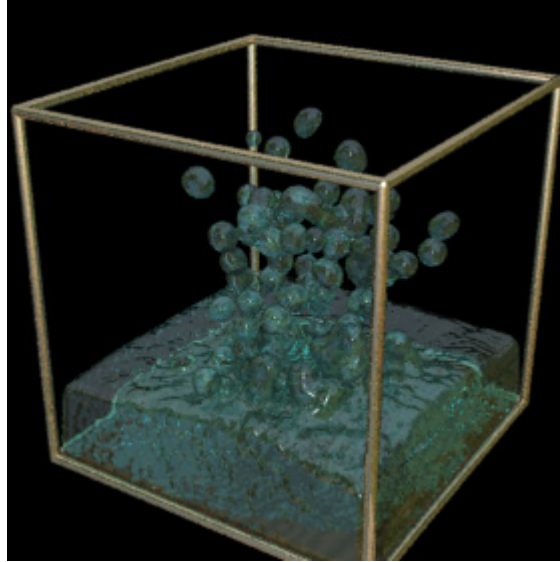


Şekil 2.15. Katı yapı animasyonu [32].

2.4.2. Taneciklerin Animasyonu

Tanecik animasyonu senaryo yazmayı ve sonraki çevirileri temel alır. Taneciklerin yazımı aşağıdaki özelliklerden her birini kontrol eder. Şekil 2.16’da tanecik yapısı görülmektedir.

- Taneciğin orijinal pozisyonu
- Taneciğin orijinal hızı(tanecik akıntıya girdiği zaman her tanecik için bir hız tayin edilir)
- Taneciğin orijinal hareket yönü(tanecikler özel bir açıdan tanecik akımına enjekte edilir)
- Taneciklerin fiziksel görünümü(tanecikler kesin kuralların uygulanmasıyla deforme olabilir)
- Taneciğin yaşaması için gerekli zaman veya görünür olduğu zaman miktarı(tanecik, yaşaması için gerekli olan zaman eşiğini geçtiğinde yok edilir)



Şekil 2.16. Tanecik animasyonu [33].

2.4.3. Üç Boyutlu Bilgisayarlı Animasyonun Oluşum Aşamaları

Üç Boyutlu bir animasyon oluşturmak için ilk yapılacak işlem model oluşturmaktır. Değişik teknik uygulamalarla üç boyutlu olarak oluşturulan objeler bir kere çizilir ve değişik açılardan görebilmek için objeyi döndürmek veya bakış açısını istenilen bölgeye yönleltmek gerekir. Animasyon oluşum aşamaları şunlardır:

- Model Oluşturma → Üç boyutlu modelleme bir grafik nesnesini üç boyutlu uzaysal mekanda x, y ve z koordinatlarında tanımlama işlemidir. Model bir bütün halinde

oluşturulabildiği gibi parçaların ayrı ayrı üretilip birleştirilmesiyle, istenilen model oluşturulabilir.

- Yüzey Nitelikleri Verme→ Bu işlem yüzeyin rengini, gölgesini ve dokusunu istenilen oranda yansıtmayı ya da şeffaflık vermeyi içerir. Obje cam, metal ya da diğer yumuşak nesneler, görünümünü bu bölümde seçilecek ve objeye uygulanacak olan renk, doku ve gölge çeşitleriyle kazanacaktır.

Modele verilecek gölgeleme niteliği oldukça önemlidir. Çünkü bu işlem, objenin perspektif özelliği hakkında ipuçları verir. Objenin parlaklığı, ışığın nesneye çarptığı ve nesnenin izlenildiği açıların fonksiyonudur.

- Sahne Oluşturma→ Üç boyutlu olarak üretilmiş olan modellerin animasyonunun ilk karesini oluşturacak görüntüdeki yerlerini alacak şekilde bilgisayar yazılımının uzaysal mekanı içinde yerleştirilmeleridir. Bu işleme kamera ve ışık kaynaklarının yerleştirilmeleri de dahildir.

Üç boyutlu modeller, animasyon boyunca gerçekleştirecekleri hareket ve değişimler doğrultusunda birbirleriyle ilişkilendirilerek yerleştirilirler. Yerleştirme işlemi, ileri aşamalarda uygulanacak hareketlendirme işlemine uygun bir sistemde olmalıdır. Bu aşamada daha önceden hazırlanacak bir storyboardun veya planlamanın gerekliliği ortaya çıkacaktır.

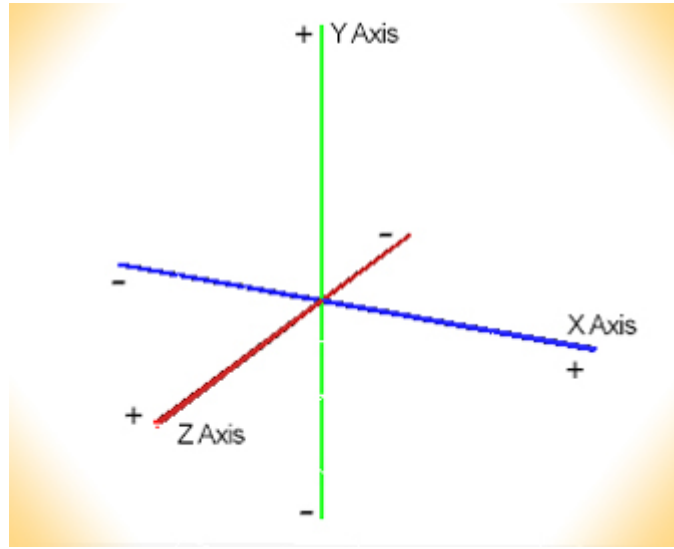
- Hareket Verme→ Oluşturulmuş ve yüzey nitelikleri belirlenmiş üç boyutlu modellerin oluşturulmuş sahne içerisinde hareketlendirilmesi bilgisayarlı animasyonun en önemli aşamasıdır.

Animasyonu oluşturacak görüntülerin bilgisayar tarafından hazırlanabilmesi için, düzenlenmiş olan sahnedeki hareketlerin belirlenmesi gerekir. Belirlenecek olan bu hareketler bilgisayara verilecek komutlar çerçevesinde üç boyutlu olarak hazırlanmış modelleri iki boyutlu resimlere dönüştürür. Bu resimlerin sıralanmış bir şekilde belli bir hızda gösterimiyle üç boyutlu bilgisayarlı animasyon oluşturma süreci tamamlanmış olur.

Animasyonlarda hareket verme işlemi, objelere hareket verme, kameralara hareket verme, ışıklara ve yüzey niteliklerine hareket verme olarak dört başlık altında toplanabilir.

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (2.1)$$

Denklem 2.1’de akışkanın hız bileşenlerini görmekteyiz. Bir akış ortamında akışkan taneciklerinin hızını veren hız profilini veya hız alanını ve taneciklerin ivmesi için bir bağıntı üretilim. Şekil 2.17’de de ise bir akım ortamındaki Kartezyen koordinat yapısını görmekteyiz.



Şekil 2.17. Üç boyutlu animasyonda Kartezyen koordinat yapısı [34].

Çözüm için gerekli koordinat sistemi gridden($x:y:z$) olarak seçilirse, akışkan taneciklerinin hızı x,y ve z ye göre değişecektir. Hız bir vektörel büyüklük olup her 3 eksen üzerinde de izdüşümü meydana gelebilir. Şekilde görüleceği üzere seçilen orijin noktasından uzaklaştıkça farklı hız değerlerine ulaşılabacaktır. Akış kanalının boyutları dolayısıyla akış kesiti değiştiği için kütlenin korunumu ilkesine göre hızda değişmelidir. Aynı zamanda her noktadaki hız değeri zamanla da değişebilir. Bu durumda hız x,y,z ve t nin fonksiyonu olacaktır. V hızının x,y ve z üzerindeki izdüşümleri u,v ve w olarak gösterilirse hız için şu işlemler yapılabilir:

$$\vec{V} = \vec{u}i + \vec{v}j + \vec{w}k \quad , \quad V = V(x, y, z, t) \quad \text{ise}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad (2.2)$$

yazılabilir. Denklem 2.2’de bulunan diferansiyel ifade dt ye bölünerek ivme bağıntısı bulunabilir:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \text{ ise} \quad (2.3)$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w + \frac{\partial V}{\partial t} \text{ olur.} \quad (2.4)$$

Son ifadedeki ilk üç terim konuma bağlı konvektif ivme, son terim ise zamana bağlı ivme olarak bilinir. Dolayısıyla hız sabit olsa da akışkanlar için ivme sıfır olmayabilir [30].

2.5. Gerçek Zamanlı Animasyon

Gerçek zamanlı üretim ve üç boyutlu karmaşık sahnelerin animasyonları hala zor bir iş olarak kabul edilmektedir ama oyunlar ve sanal gerçeklik uygulamalarındaki simülatörler için vazgeçilemez bir gereklilik haline gelmiştir. Özellikle, gerçekçi doğal olayların modellenmesinde çok sayıda çokgen kullanılır bu yüzden render yapılırken çok büyük rakamlar karşımıza çıkmaktadır [35].

Gerçekçi sahnelerin gerçek zamanlı animasyonları hala zordur. Bu zorluk gerçek zamanlı animasyon için gerekli performans ve gerçekçi render için gerekli ayrıntılar arasındaki denge yüzünden kaynaklanmaktadır.

Bazı modelleme teknikleri gerçekçi render elde etmek için önerilmektedir. Modellemenin temelinde Bezier eğrileri ve yüzeyleri bulunmaktadır. Bu yöntemler, nesneler izleyiciye çok yakın olsa bile herhangi bir durumdaki görüntünün render edilmesinde uygulanmaktadır. Reeves de modelleme için gerçekçi sahneler uygulanabilecek farklı bir yöntem önermektedir. Onun yöntemi parçacık sistemlerine dayanmaktadır. Ne yazık ki, her iki yöntemin de hesaplaması çok pahalıdır, bu yüzden gerçek zamanlı animasyon için uygun değildir [36].

Çoklu gösterimler, karmaşık sahnelerin gerçek zamanlı animasyonlarında oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Bu fikre göre insan gözünün ve çıkış cihazının sınırı yüzünden render yapılırken belli bir mesafenin dışındaki nesneler için daha az çokgen

kullanılırken ayrıntılı görüntüleri binlerce çokgen ile üreterek izleyiciye yakın nesneler oluşturulur. Örneğin, Perbet ve Cani rüzgarlı koşullarda çim alanların gerçek zamanlı animasyonu için ayrıntı üç düzeyde kullanılır. Benzer teknikler Di Giacomo tarafından kullanılmaktadır. Di Giacomo ve Markosian tarafından bir ormanın renderi yapılmıştır. Çimenli manzara oluşturmak için elle çizilmiş gibi ağaçlar veya tüylü hayvanlar kullanmışlardır. Görüntü tabanlı ve nokta tabanlı teknikler verimli render için kullanılırlar. Bununla birlikte orta mesafedeki renderlar gerçekçi olmamaktadır [36].

Sahne animasyonu sırasında gerçek zamanlı performans elde etmek için sistem ön hesaplamalar yapılır. Nesnelerin ilk ve son pozisyonlarını hesaplamak için ön bilgiler kullanılır.

Bilgisayar animasyonu gerçekçi senaryolar yazabilir. Bununla birlikte nesne yığınlarının etkisiyle sürtünme, momentum ve kuvvetler daima senaryoda görünür. Fiziğin yasaları hareket boyunca nesnelerle beraberdir.

Gerçek zamanlı animasyon(real time animation) denildiğinde karşımıza real time kavramı çıkmaktadır. Real time kelime manası olarak gerçek zaman demektir. Bu kavram video sistemlerinde kullanıldığı zaman belli bir süreye sahip olan videonun yine aynı sürede oynatılması ve işlenmesi olarak tanımlama getirilebilir.

Buradan şu sonuca ulaşılmaktadır ki, realtime sistemleri videoları bünyesindeki efekt ve animasyonlarla birlikte hiç beklemeden oynatan sistemlerdir. Örnek olarak beş kanal DV videoyu efektleriyle beraber hiç beklemeden oynatabilen Shadow DV Yellow sistemi verilebilir. Gerçek bir realtime sistemi aynı Shadow DV Yellow'da olduğu gibi, oynatma işlemini hem bilgisayar ekranında, hem de aynı anda video çıkışında yapabilmelidir. Yoksa sadece bilgisayar ekranında oynatmanın hiçbir anlamı olmayacaktır[37].

Bir 3 boyutlu animasyon üç unsurdan meydana gelir. Bunlar: Nesneler, kameralar ve ışıklardır. Nesneler için şu özellikler dikkat çekicidir; pozisyon, uyumlandırma, boyut, formu, renk ve saydamlıktır.

Bilgisayar sistemi, ekrandaki gerçek hızları bize göstermek için yeterli hızlarda hesaplamalar yapmaktadır. Örnek olarak; video oyunları ve uçuş simülatörleri gösterilebilir.

2.6.Sayısal Analiz

Sayısal analiz (nümerik analiz – sayısal çözümleme) matematik problemlerinin bilgisayaryardımı ile çözümlenmesi tekniğidir. Bu teknik sayesinde analitik olarak çözümleri çok zor veya imkânsız derecesinde olan matematik problemleri çözülür. Fakat bu çözümler belli hata aralıklarında olmaktadır [38].

Günümüzde en çok kullanılan metotlardan biri olan sonlu elemanlar metodunun teorisi 1930 lu yıllarda olmasına rağmen yöntem el ile yapılmaya uygun olmadığı için o zamanlarda yeterince kullanılamamıştır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucu sayısal analiz metotlarının bilgisayar ortamında yapılmaya başlanmasıyla birlikte kullanım alanı bulmuştur. Bu da bize sayısal çözüm için bilgisayar teknolojisinin oldukça önemli bir yere sahip olduğunu göstermektedir [38].

Sayısal hesaplamanın kararlılığı birçok faktöre bağlıdır. Kararlılık koşullarının matematiksel analizi uzundur. Parametrelerin yakınsaklığının seçimini daha sonra göstereceğiz. Her parametre bir simülasyonsırasında bile ayarlanabilir. Örneğin Reynolds sayısının değişimiyle ve akışkanın farklı davranışlarıyla akışkanın farklı türleri simule edilebilir. Bununla birlikte daha düşük Reynolds sayısı sayısal yakınsamaya neden olurken daha yüksek Reynold sayısı hesaplamada farklı sonuçlar doğurur ıraksamaya sebep olur. Bazı özel türbülanslı olayları yapabilmek için Reynolds sayısı arttırılabilir fakat sayısal hesaplama ıraksanmadan önce Reynold sayısı azaltılır. Bu yolla sabit bir parametre için davranışları başarmak için basit sayısal metotlar kullanılabilir. Bu akışkan hesaplamada tam bir çözüm olmamasına rağmen akışkan animasyonları bazı olaylar için yeterlidir. Eğer ∂t ve Reynold sayısı daha küçük dx, dy ve ε değeri daha büyük seçilirse sayısal hesaplamalar kararlılık eğiliminde olur. ∂t daha küçük seçilirse simülasyon daha yavaş olur. Re sayısının daha küçük olması akışkanı daha durgun hale getirir. dx, dy ve ε değerlerinin daha geniş tutulması simülasyonda daha büyük hatalara sebep olur.

Bir akışkanın hareketinde sayısal yaklaşım kavramı önemlidir. Sayısal yaklaşım matematiksel bir modelden başlar ve sayısal çözümleme ile son bulan adımlardan meydana gelmektedir. Birinci adım yaklaşım düzeyidir. Bu adım akış sistemini tanımlayan temel değişkenleri ve sistemin davranışını etkileyen diğer değişkenleri içerir. Örneğin koordinat sistemi değişkenleri ve zaman değişkeni vb. İkinci adım ayrıklaştırma adımdır. Ayrıklaştırma, bölge ayrıklaştırması ve denklem ayrıklaştırması diye ikiye ayrılır. Bölge

ayrıklaştırmada ortam düğüm noktalarından meydana gelen bir ağ gibi düşünülür. Bu düğüm noktalarındaki değişkenlerin sayısal değerleri hesaplanır. Bu hesaplamadan sonra sıra denklem ayrıklaştırmasına gelir. Bu kısımda integral veya diferansiyel formda olan denklemler düğüm noktalarındaki bilinmeyenleri içeren basit cebirsel denklemlere dönüştürülür. Bütün sayısal yöntemlerin temelinde diferansiyel denklemlerin basit denklemlere dönüşümü yer almaktadır.

Akış probleminin matematiksel denklemlerinin ayrıklaştırılması yöntemine sayısal yöntemler denilmektedir. Bugün en çok kullanılan sayısal yöntemler sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu hacimler yöntemidir. Sonlu farklar yönteminde türev ifadeleri Taylor serisi açılımına bağlı olarak yazılır. Bu bilinen en basit yöntemdir. Bu yöntemde kullanılan ağ yapısı düzenli olmalıdır. Sonlu elemanlar yöntemi 1940 lı yıllarda iskelet yapılar alanında geliştirilen bir sayısal yöntemdir. Bu yöntemde yapı değişik geometrilerdeki alt elemanlara bölünür, incelenir ve sonra tekrar birleştirilir. Bu yöntemde düzgün bir ağ yapısında olması gerekmeyen bölge ayrıklaştırılır. Düğüm noktaları civarında bilinmeyen fonksiyon değerleri için Taylor serisi açılımı yapılır. Diferansiyel denklemlerdeki türevler yerine sonlu farklar yaklaşımı yazılır. Sonlu hacimler yönteminde fiziksel bir bölge içerisinde korunum denklemleri integralleri alınarak ortalama değer teoremi yardımıyla ayrık denklemler elde edilir. Bir başka görüşe göre ise sonlu hacimler yöntemi, sonlu farklar yönteminin rastgele seçilmiş bir ağ yapısına uygulanmasıdır.

Sayısal yaklaşımda problemin zamana bağlı olup olmaması önemlidir. Eğer zamana bağımlı ise ilk değer probleminin zamana göre ayrıklaştırılması gerekmektedir. Bu durumda çözüm zaman duyarlı olmalıdır. Fiziksel olarak zamandan bağımsız(daimi) problemler için diferansiyel denklemler ya bölge ayrıklaştırmaya tabi tutulmalı ya da denklemler zaman bağımlı hale getirilerek hem bölge hem de zaman ayrıklaştırması işlemleri yapılır.

Zaman bağımlı problemlerde zaman ayrıklaştırması sonucu ortaya çıkan zaman adımlarının değerleri problemin sayısal duyarlılığını etkiler. Günümüzde yaygın olarak kullanılan zaman bağımlı adi diferansiyel denklemlerin çözüm algoritmaları; Runge-Kutta yöntemi, lineer çok adımlı yöntemler ve hesaplayıcı-düzeltilici yöntemler olarak sıralanabilir. Yukarıda bahsedilen işlemleri bir akış diyagramı ile Şekil 2.9'daki gibi gösterebiliriz.

3. AKIŞKANLAR

Maddeler doğada genel olarak katı, sıvı ve gaz halinde bulunurlar. Bazı cisimler ise katı ile sıvı arasında bir formda bulunurlar ve bu hal yapışkanlık yani viskozluk'tur. Katı cisimler mekaniği katı maddelerin özelliklerini ve bu maddelerin davranışlarını incelerken sıvı ve gaz halindeki maddelerin davranışlarını akışkanlar mekaniği incelemektedir. Günlük hayatta sıvı ya da gaz adı altında bildiğimiz bütün maddeler akışkandır diyebiliriz. Akışkan maddelerin fiziksel özelliklerinden bazıları şunlardır: Basınç, sıcaklık, yoğunluk vs.dir.

Büyük bir kuvvete ihtiyaç duymadan küçük kuvvetlerin etkisiyle biçim değişikliğine uğrayan akıcı cisimlere akışkan denir. Katılık ile akışkanlık birbirinin tersidir. Sıvılar ve gazlar akışkan maddelerdir. Akışkanlar kayma gerilimlerinin etkisiyle devamlı olarak formunu değiştiren maddelerdir. Akışkanlar akabilir ve içinde bulundukları kabın şeklini alırlar. Akışkan maddelerin akışkanlıkları birbirinden farklılık göstermektedir. Örneğin sıvılar içinde suyun akışkanlığı çok yüksektir. Öyle ki normal formu gaz olan bazı akışkanları dışarıda tuttuğumuzda suyun akışkanlık değerinin sıvılar içinde en yüksek değerde olduğu bilinmektedir.

Akışkanlarla ilgili çalışmalarda en çok kullanılan ifadelerden biri de uniform akımdır. Uniform akımda akım bölgesindeki bütün noktalar aynı hız vektörüne sahiptir. Yani bir düzenlilik mevcuttur.

3.1.İdeal Akışkan

Sonsuz küçük bir zorlama etkisinde dahi hiç direnç göstermeden akış eylemine geçen akışkanlara ideal akışkan denir ve viskoziteleri sıfırdır. Sıvı içerisindeki herhangi bir moleküle her yönden çekme kuvvetleri etki etmektedir ve bu kuvvetlerin vektörel toplamı sıfırdır. Ancak yüzeydeki bir molekül yapıştırıcı kuvvetin etkisindedir. Yüzeydeki moleküllerin enerjisi alt tabakadaki moleküllere göre çok daha fazladır [39].

Sıvılar daima yüzeylerini küçültme eğilimindedirler bu yüzden damlacıklar küresel bir şekil alırlar. Yüzey gerilimi herhangi bir sıvının yüzeyinin bir lastik gibi gerilmesi eğiliminin ifadesidir. İdeal akışkanlar yüzey gerilimine hiç direnç göstermeyen

akışkanlardır ve bu akışkanların molekülleri arasında kayma gerilmesi yoktur. Fakat gerçekte böyle bir akışkan yoktur. Sadece matematiksel problemlerin çözümünü kolaylaştırması bakımından ideal akışkanlar üzerinden işlemler yapılmaktadır.

İdeal bir akışkan için bir boru içindeki süreklilik denklemi aşağıdadır:

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 \quad (3.1)$$

Burada u hız, dA ise kesit alanıdır. Denklemin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$\int_{A_1} u_1 dA_1 = \int_{A_2} u_2 dA_2 \text{ olur.} \quad (3.2)$$

İdeal akışkanda sürtünme söz konusu olmadığı için kesit içerisindeki akışta hız değişmez, her noktada aynıdır,

$$u_1 = V_1 = \text{sabit} \quad u_2 = V_2 = \text{sabit}$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \text{ olur.} \quad (3.3)$$

3.2.Viskozite(Kıvamlılık)

Herhangi bir akışkana dışarıdan kuvvet uygulandığında kuvvet uygulanan akışkanlar biçim değiştirir. Bu akışkan maddelerin, kuvvetlere karşı gösterdiği direnç viskozitedir. Akışkan madde kendisine etki eden kuvvetlere karşı direnç gösterip ne kadar zor şekil değiştirebiliyorsa bu madde o kadar viskozdur ve ne kadar kolay şekil değiştirebiliyorsa o kadar az viskozdur. Su gibi sıvılar ile gazlar az viskoz iken, yağ gibi akışkanların viskoz değerleri daha fazladır. Gerçekten de aynı kaplara su ve yağ konulduğunda suyun daha çabuk boşaldığı görülür [40].

Viskozite bir akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak da tanımlanabilir. Buradan da viskozitenin akışkanlığın tersi olduğu sonucuna varılabilir. Gerçekte her akışkan maddenin az ya da çok viskozitesi vardır. Sadece ideal akışkanların viskozitesi sıfırdır [41].

Bir akışkan hareket ettiğinde akışkanın tabakaları farklı hızlarda hareket eder. Örneğin akışkanın üst tarafında bir kuvvet akışkanı harekete zorluyorsa kuvvetin temas

ettiği yüzeyin hızı en yüksek olan yüzeydir. Hız alt tabakalara inildikçe azalır. Akışkanın viskozitesi ise akışkana uygulanan kuvvet sonucu direnç gösteren tabakalar arasında meydana gelen yüzey geriliminden meydana gelir. Akışkanların akımını etkileyen en temel iki özellik viskozite ve yoğunluktur.

Newton'a göre laminar ve paralel bir akışta tabakalar arasındaki yüzey gerilimi(T) bu tabakalara dik yöndeki hız gradyeni ile orantılıdır. Bu denklem 3.4'deki gibi gösterilebilir.

$$T = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4)$$

Buradaki μ sabiti, viskozite sabiti, viskozite veya dinamik viskozite olarak bilinir. Su ve gazların çoğu Newton yasasına uyarlar ve Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılırlar. Newtonyen olmayan akışkanlarda ise, yüzey gerilimi ile hız gradyeni arasındaki basit lineer ilişki çok daha karmaşık bir hal alır [42].

Pek çok durumda, viskoz kuvvetlerin atalet kuvvetlerine olan oranı ile ilgilenilir. Atalet kuvvetlerinin akışkanın yoğunluğu (ρ) ile karakterize edildiği bilindiğinden bu oran kinematik viskozite olarak adlandırılır yani kinematik viskozite akışkanın viskozitesinin yoğunluğuna olan oranıdır ve gösterimi denklem 3.5'deki gibidir:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.5)$$

Gazların viskozitesi sıcaklık arttıkça artar. Sıvıların viskozitesi ise sıcaklık arttıkça azalır. Akışkanların viskozitesi çok yüksek basınçlar hariç basınçtan etkilenmez.

3.3.Akışkanlarla İlgili İlk Çalışmalar

Akışkanlarla ilgili bilinen ilk çalışmalar Archimedes (MÖ 285-212) tarafından yapılmıştır. Archimedes suyun kaldırma kuvvetinden hareketle, akışkanlar için bir takım hesaplama yöntemleri geliştirmiştir. Ancak, akışkanlarla ilgili esas gelişmeler Rönesans'tan sonra olmuştur.

Akışkanlar mekaniğinde en önemli gelişmeyi Leonardo da Vinci (1452-1519) yapmıştır. Vinci, tek boyutlu-sürekli akış için süreklilik denklemini çıkararak dalga

hareketleri, jet akışları, hidrolik sıçramalar, eddy oluşumu ve sürüklenme kuvvetleri hakkında bilgiler vermiştir.

Newton'un (1642-1727) yerçekimi kanununu bulmasından sonra yerçekimi ivmesi de hesaplara katılmıştır. Sürtünmesiz akışlarda en önemli gelişmeleri Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) ve Pier Simon Laplace (1749-1827) yapmışlardır. Euler şimdi Bernoulli denklemi olarak bilinen bağıntıları ilk geliştirendir. Açık kanal akışları, boru akışları, dalgalar, türbinler ve gemi sürüklenme katsayıları üzerinde Antonie de Chezy (1718-1789), Henri Pitot (1695-1771), Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), James Bicheno Francis (1815-1892), Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869) yaptıkları deneysel çalışmalarla akışkanlar mekaniğinin geliştirilmesinde önemli katkılarda bulunmuşlardır [3].

William Froude (1810-1879) ve oğlu Robert (1846-1924) modelleme kanunlarını geliştirmesinden sonra, lordrayleigh (1842-1919) boyut analizi tekniğini ve Osborne Reynolds (1842-1912) klasik boru deneyini (1883) geliştirerek akışkanlar mekaniğinde çok önemli olan boyutsuz sayıları bulmuşlardır. Henrivier (1785-1836) ve George Stokes (1819-1903) Newtonian akışlara sürtünme terimlerini de ilave ederek, bütün akışları analiz etmede başarıyla uygulanan ve günümüzde Navier-Stokes denklemleri olarak bilinen momentum denklemlerini bulmuşlardır.

Ludwig Prandtl (1875-1953) yüzeye yakın yerlerde sınır tabakanın (1904) etkili olduğunu onun dışında ise sürtünme kuvvetlerinin olmadığı durumlarda Bernoulli denkleminin uygulanabileceğini göstermiştir. Aynı şekilde çok geniş teorik ve deneysel çalışmalar Theodore von Karman (1881-1963) ve Geoffrey Taylor (1886-1975)'un yanında pek çok araştırmacı tarafından da yapılmış ve yapılmaktadır [43].

3.4.Akışkan Hareketinin Analizi

Hareket bir cismin sabit bir noktaya göre yerinin zamana göre değişimidir. Newton'un hareket kanunları şunları söyler:

1. Hareket kanunu yani eylemsizlik kanununda bir cisme uygulanan bir kuvvet yoksa o cisim durur veya sabit hızla doğrusal hareket ediyorsa bu hareketine devam eder.

2. Hareket kanununda ise bir cismin momentumunun değişimi o cisme etki eden kuvvetle orantılı ve aynı yöndedir.

3. Hareket kanunu ise etkiye karşı tepkidir, yani bir cisme dışarıdan bir kuvvet uygulandığında o kuvvete karşı cisimden zıt yönde aynı oranda tepki kuvveti oluşur.

Newton'un bu hareket kanunları sonraki dönemlerde Euler, Stokes ve Navier gibi bilim adamları tarafından geliştirilmiştir.

Navier-Stokes denklemleri akışkanlarla ilgili hesaplamalarda son derece başarılıdır ve akışkanlarla ilgili problemlerin çözümünde başvurulan temel denklemdir.

Akış maddenin moleküllerini bir arada tutan etkileşim kuvvetleriyle akışkanı akmaya zorlayan dış kuvvetler arasındaki dengeyle ilgilidir. Akışkanı oluşturan moleküller küçük ise moleküller arasında etkileşim kuvveti olsa bile etki eden dış kuvvete karşı kalıcı bir direnç göstermez.

Akışkanların hareketleri incelenirken bazı yöntemlere başvurulabilir. Bu yöntemlerden birisi sonlu bir bölge veya denetim hacmi için toplam etkilerin(kütle, enerji, kuvvet) bulunmasına çalışmak. Diğeri ise akış alanının sonsuz küçük bir bölgesini inceleyerek akış yapısını nokta nokta bulmaktır. Yani akışın noktasal olarak ayrıntılı analizi gerekiyorsa çok küçük(sonsuz küçük) bir bölgesi üzerinde analiz yapılır bu diferansiyel yaklaşımdır. Akış ile ilgili noktasal analiz gerekmiyorsa akışın toplam davranışı üzerinde durulur. Bu integral yaklaşımdır. Sonlu sistem ve kontrol hacmi üzerinde yapılan integrasyon ile analitik sonuca daha kolay ulaşılabilir.

Burada akışkan hareketini analiz etmek için küçük ölçek ya da diferansiyel analizini ele alacağız. Dört temel korunum yasasını sonsuz küçük bir denetim hacmine ya da değişik olarak sonsuz küçük bir akışkan sistemine uyguladığımızda her iki durumda da sonuçlar akışkan hareketinin diferansiyel denklemlerini verir. Analiz yapılırken uygun sınır koşulları geliştirilmelidir.

Hareketin diferansiyel denklemleri çok karmaşıktır ve matematiksel özellikleri hakkında çok az şey bilinmektedir. Ayrıca bunları en genel haliyle çözmek çok zordur. Bütün bunlara rağmen yine de bir şeyler yapılabilir. Diferansiyel denklemler akışkanın hareketini düzenleyen temel parametreleri bize verir. Ayrıca akışkanımızla ilgili bazı ön

kabullerin yapılması işimizi oldukça kolaylaştırır. Bu kabuller daimi akış, sıkıştırılmaz akış ve sürtünmesiz akıştır. Tabi ki akışkanımızın ideal akışkan olması birçok karmaşık problemlerden bizi kurtarır.

Akışkanımızın hız vektör alanının bilinmesi akış probleminin çözülmesinde önemlidir. Yer ve zamanda değişen hız alanının Kartezyen vektör gösterilişi denklem 3.6'da gösterilmiştir:

$$\vec{V}(r, t) = \vec{i}u(x, y, z, t) + \vec{j}v(x, y, z, t) + \vec{k}w(x, y, z, t) \quad (3.6)$$

Koordinatlarımız uzayda sabittir ve sonsuz küçük olarak aldığımız akışkan sistemimiz ve Newtonun ikinci yasası olan $F=ma$ denklemini yazmamız için akışın a ivme alanını hesaplamaya ihtiyacımız vardır. Bunun için de hız vektörünün zamana göre türevi hesaplanır.

Hareket eden akışkanın özelliklerinin incelenebilmesi için iki yol vardır. Örneğin atmosferdeki rüzgar hızının değişimlerinin ölçülmesi amacıyla meteoroloji istasyonu ölçüm cihazıyla(anemometre) veya bir hava balonu yardımıyla ölçülebilir. İlk durumdaki ölçümde cihaz sabit bir yerde durur ve o nokta boyunca geçen bütün parçacıkların hızını ölçer. İkinci durumda ise belirttiğimiz aygıt akışkan ile beraber hareket ederek ölçümünü gerçekleştirir.

Bu durumda sıcaklık, yoğunluk gibi parametreler değişimlerdeki ölçümü etkileyecektir. Bir alanın boşluktaki sabit bir pozisyona göre türevi uzaysal(spatial) veya Eulerian türev olarak adlandırılırken akımdaki hareketli bir parçacığın izlenmesi türevi gerçek türev Langrangyan veya maddi türev olarak adlandırılır.

Hareketini incelemek istediğimiz akışkan için bir kontrol yüzeyi ve kontrol hacmi belirlemeliyiz. Akışkanımızı çevresinden ayıran ve bizim belirlediğimiz sınıra kontrol yüzeyi ve kontrol yüzeyi içinde kalan hacme de kontrol hacmi denir.

Belirlediğimiz kontrol hacmi özellikle akışkanlar mekaniği açısından çok önemlidir. Akışkan hareketini inceleyen bütün çalışmalarda ilk önce kontrol hacmi oluşturulmasına ihtiyaç duyulur ve ancak bundan sonra problemin çözümüne geçilir. Kontrol hacminin doğru seçilmesi problem çözümünde işimizi oldukça kolaylaştıracaktır.

Fakat yanlış seçilen kontrol hacmi problemimizin çözümünü karmaşık hale getirecektir. Bu bakımdan kontrol hacmi seçimi kritik bir hal almıştır.

Kontrol hacmini belirlerken tamamen keyfi olarak ihtiyacımıza göre seçebiliriz. Seçtiğimiz kontrol hacminin sınırlarını belirleyen kontrol yüzeyi; katı bir nesnenin sınırında, kısmen başka bir akışkanın değme yüzeyi, kısmen de bir akışkan içinde belirlediğimiz bir yüzey olabilir. Kontrol hacminin büyüklüğü için herhangi bir sınırlama yoktur. Belirleyeceğimiz kontrol hacmi sonsuz büyük, sonsuz küçük veya sonlu büyüklükte alınabilir. Ayrıca kontrol yüzeyi incelenen akışkanı çevresinden tamamen ayırmalıdır.

Bütün maddeler ve akışkanlar moleküllerden meydana gelir. Akışkan molekülleri serbesttir ve geliş güzel hareket halindedir. Tek tek moleküllerle uğraşmak yerine bunların çok yüksek sayılarda birlikte bulunduğu grupları ele almak daha verimli olur. Bu amaçla zerre kavramı kullanılır. Zerre, sonsuz küçüklükteki kontrol hacmine verilen addır. Bir zerre ne kadar küçük seçilirse seçilsin akışkan özelliklerini kaybetmemelidir. Yani zerre içindeki herhangi bir noktada hız, basınç gibi özellikler tanımlı olabilmelidir. İşte bunu garanti altına alabilmek için bu noktada bazı kabuller yapılır. Örneğin bir akışkanın herhangi bir noktasında akışkanın sıcaklık, yoğunluk, basınç gibi fiziksel özellikleri ve hız, kuvvet gibi dinamik özellikleri tanımlıdır ve özel akışkanlar hariç bu noktadan noktaya sürekli değişim gösterir.

Hareket halinde bulunan bir akışkan kütlesi düşünelim. Bu kütle içinde seçtiğimiz noktasal bir zerrenin koordinatları, zerre hareket halinde olduğuna göre, zamana bağlı olarak: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ şeklinde ifade edilebilir. Doğal olarak zerrenin yer vektörü denklem 3.7'deki gibi olur:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (3.7)$$

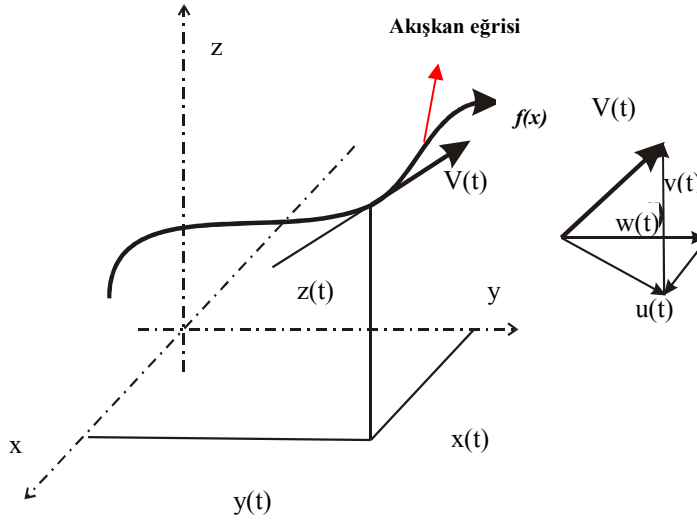
biçiminde yazılabilecektir. Bu yer vektörünün etki noktası daima o noktasıdır. Buna karşılık zerrenin hareketini takip eden uç noktası bir $C(x,y,z,t)$ eğrisi çizer. Yörünge ise hareket halindeki zerrenin çizdiği eğridir. Başka bir deyişle zerrenin uç noktasının geometrik yeri yani $C(x,y,z,t)$ eğrisine yörünge denir. Akışkan içindeki zerrenin hızı şöyledir:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\vec{k} \quad (3.8)$$

veya

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (3.9)$$

Biçiminde ifade edilebilir. $\vec{V} = (u, v, w)$ vektörü, $V = (x, y, z, t)$ biçimindedir. Yani akışkan hızı akım bölgesinin her noktasında farklı olabileceği gibi belli bir noktasında da zamanla değişebilir. Herhangi bir akışkanın hız vektörleri Şekil 3.1 de gösterilmektedir.



Şekil 3.1. Akışkan eğrisi

Böylece yörüngenin diferansiyel denklemi,

$$\frac{dx}{u}(x, y, z, t) = \frac{dy}{v}(x, y, z, t) = \frac{dz}{w}(x, y, z, t) \quad (3.10)$$

olarak elde edilebilir. Başlangıçta kısmi diferansiyel denklem için başlangıç değerleri şu şekildedir.

$$t = t_0 \text{ da; } x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

biçiminde verilebilir. Dolayısı ile çözüm, yani yörünge eğrileri:

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad (3.11)$$

Şeklinde ilk şartlara ve zamana bağlı olarak elde edilebilir.

3.5. Yoğunluk

Yoğunluk maddenin birim hacmindeki kütlesidir. Bir maddenin yoğunluğu maddeyi oluşturan moleküllerin kütlesine ve moleküller arasındaki mesafeye bağlıdır.

$$\rho = \frac{\text{kütle}}{\text{hacim}} = \frac{m}{V} \quad (3.12)$$

Sıvıların yoğunluğu moleküllerin ağırlığına değil, yapılarına ve moleküller arasındaki Waals kuvvetlerinin, özellikle de hidrojen bağlarının varlığına bağlıdır.

3.6. Reynolds Transport Teoremi

Bu teoremin amacı akışkan sisteminin analizini belirlenen kontrol hacmi analizine dönüştürmektir. Teoreme göre akışkanımızdan bir kontrol hacmi alınır ve bu kontrol hacmindeki fiziksel parametrelerin zamana göre değişimini verir. Bu parametreler momentum, kütle, enerji gibi belirtilebilir. Bu parametrelere B dersek denklem aşağıdaki gibi olur [44].

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{kh} \beta \rho dV \right) + \iint_{ky} \beta \rho U dVA \quad (3.13)$$

Burada $\beta = \frac{dB}{dm}$ şeklinde B parametresinin kütleye göre değişimini ifade eder.

Buradaki U kontrol hacminin hızı, dV hacim elemanı, dA da yüzey elemanıdır.

Eğer B parametresini momentum olarak alırsak bu durumda teorem $\frac{dB}{dt} = \sum F$ olur. Buradaki F belirlediğimiz kontrol hacmindeki kuvvetlerin vektörel toplamıdır. Non-uniform (düzgün olmayan) akışlarda, hesaplama yaparken düzeltme katsayısının da dikkate alınması gereklidir. Sıkıştırılamaz bir akışta lineer momentum için düzeltme katsayısı

$$\alpha = \frac{1}{A_0} \int \frac{U^2}{U_0^2} dA \text{ dir.} \quad (3.14)$$

Yüzeyden uzak kısımlarda, serbest akış alanında atalet kuvvetleri baskındır. Bu nedenle akış, hız ya da kuvvetler arasındaki orana göre sınıflandırılır. Atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranına Reynolds sayısı denir ve Re ile gösterilir. Reynolds sayısı, düzgün akış ve türbülanslı akış gibi değişik akış rejimlerini nitelemek için kullanılır.

Akışkanlar mekaniğinde Reynolds sayısı, bir akışkanın, atalet kuvvetlerinin ($v_s \rho$) nin viskozite kuvvetlerine (μ/L) olan oranıdır ve sonuç olarak bu değer bu iki tip kuvvetin belli bir akış şartı altında birbirine olan göreceli önemini verir. Bundan ötürü, Reynolds sayısı, düzgün akış ve türbülanslı akış gibi değişik akış rejimlerini nitelemek için kullanılır.

$$R_e = \frac{\rho v_s L}{\mu} = \frac{v_s L}{\nu} = \frac{\text{AtaletKuvvetleri}}{\text{ViskoziteKuvvetleri}} \quad (3.15)$$

v_s - akışkanın hızı

L – karakteristik uzunluk

μ – akışkanın dinamik viskozitesi

ν – akışkanın kinematik viskozitesi: $\nu = \mu / \rho$

ρ - akışkanın yoğunluğu

Laminar akış ifadesi bir akım özelliğini gösterir. Düzgün akım olarak tanımlanır. Bu akım Reynolds sayısı ile belirlenir. Düşük Reynolds sayıları için sınır tabaka laminardır. Türbülans akış ise akışkanın doğrusal olmayan bir şekilde akmasıdır. Ters laminar akıştır. Yüksek Reynolds sayıları için sınır tabaka laminardır. Reynolds sayısı bir akışkanın karakterini (laminar veya türbülanslı) gösterir [45].

Akışkan sistemi kapalı bir yüzey ile tanımlanan alandır ve bu sistemin şekli zamanla değişebilir. Kontrol hacmi ise uzayda tanımlanan sabit bir bölgedir ve kontrol hacmi hareket etmez, şekli zamana göre değişmez, sabittir.

Sistem S, kontrol hacmi CV olsun. “X” akışkanın herhangi bir özelliğinin sistem (S) içerisindeki toplam miktarını simgelesin (kütle, enerji, momentum). Herhangi bir t anında, sistem (S) ve kontrol hacmi (CV) sınırları tamamenaynıdır.

$$(x_s)_t = (x_{CV})_t \quad (3.16)$$

$t + Dt$ anında S, CV boyunca yer değiştirir, ve bu sırada şekil de değiştirebilir. Küçük bir miktar yeni akışkan $\Delta \nabla_{CV}^{in}$ CV'ye girerken, küçük bir miktar da $\Delta \nabla_{CV}^{out}$ CV'yi terk eder. CV'ye giren ve çıkan bu akışkan içerisinde, belli miktarda x (Δx_{CV}^{in} and Δx_{CV}^{out}) taşınmaktadır.

$$(x_s)_{t+\Delta t} = (x_{CV})_{t+\Delta t} + \Delta x_{CV}^{out} - \Delta x_{CV}^{in} \quad (3.17)$$

Denklem (3.17) 'den (3.16) çıkarılıp;

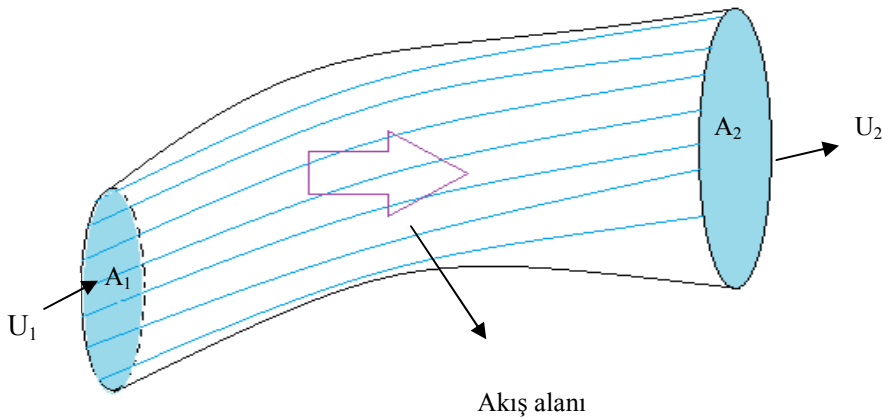
$$(x_s)_{t+\Delta t} - (x_s)_t = (x_{CV})_{t+\Delta t} - (x_{CV})_t + \Delta x_{CV}^{out} - \Delta x_{CV}^{in}$$

$$\Delta x_s = \Delta x_{CV} + \Delta x_{CV}^{out} - \Delta x_{CV}^{in}$$

dt 'ye bölünür ve limit alınırsa ($\Delta t \rightarrow 0$),

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{dx_{CV}}{dt} + \frac{dx_{CV}^{out}}{dt} - \frac{dx_{CV}^{in}}{dt} \quad (3.18)$$

Denklemini elde edilir.



Şekil 3.2. Akım tüpündeki akış olayı

Şekil 3.2'ye bakıldığında süreklilik denkleğinden kütleinin korunumu gereğı $m = \rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2$ ifadesi yazılabilir.

Akım çizgilerinden oluşan bir akım tüpü ele alınır. Akışkan streamtube içerisine U_1 hızında ve A_1 kesit alanından girip, U_2 hızında A_2 kesit alanından çıktığı varsayılır. Reynolds Transport Teorisi'ne göre aşağıdaki denklem yazılabilir [46];

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{dx_{CV}}{dt} + \frac{dx_{CV}^{out}}{dt} - \frac{dx_{CV}^{in}}{dt} \quad (3.19)$$

x: kütle (m) için eşitlik denklem 3.20'dedir:

$$\frac{dm_s}{dt} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \frac{dm_{CV}^{out}}{dt} - \frac{dm_{CV}^{in}}{dt} \quad (3.20)$$

3.7. Süreklilik Denklemi

Kütleinin korunumu prensibi; Fransız kimyacı, A.L. Lavoisier tarafından klasik olarak; “madde ne yoktan var edilebilir ne de yok edilebilir” şeklinde ifade edilmiştir. Bunun bir akım borusu içerisinde akmakta olan kararlı bir akışa uygulanmasına süreklilik denklemi denir. Bu tanım; bir akım tüpü içerisinde kesitten kesite akışın sürekliliğı anlamına gelir[47].

Süreklilik denklemi bir akışkanın kütle ve hacminin zamana ve konuma göre değişimini inceler. Akışkandan alınan bir kontrol hacminin genel süreklilik denklemi şöyledir:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Buradaki u, v, w ifadeleri x, y ve z yönlü hız bileşenleridir. Bir boru içindeki akış ele alınır, bir kesitten birim zamanda geçen kütle miktarı, boruya yeni akış eklenmediğı ya da dışarıya akış verilmediğı sürece sabittir.

3.8. Akışkan Hareketini Yöneten Genel Denklemler

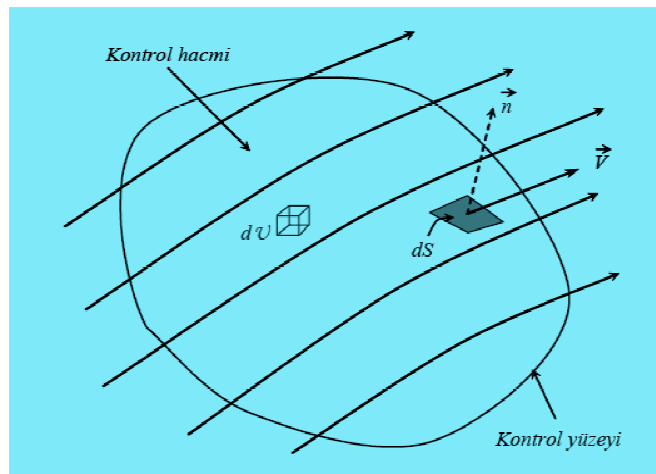
Akışkanların hareketleri incelenirken bir boyutlu akımların uygulamalarda çok önemli bir yeri vardır. Basitliği nedeniyle uygulamalarda ilk yaklaşımlarda akımlar bir boyutlu kabul edilerek incelenir. Bir boyutlu akımın incelenmesi tamamlandıktan sonra bu yeterli olmazsa iki ve üç boyutlu halleri ele alınır. Bu yapılırken bir boyutlu olan inceleme sonuçlarından yararlanmak gerekir. Burada akım çizgisi önemli bir yer tutmaktadır.

Akıştaki yoğunluk değişimleri ihmal edilebiliyorsa akış sıkıştırılamaz, ihmal edilemiyorsa sıkıştırılabilir akışkan olarak adlandırılır. Genellikle sıvılar sıkıştırılamaz gazlar ise sıkıştırılabilir akışkanlar olarak tanımlanırlar. Fakat her ikisi içinde bazı istisnalar vardır. Temel kriter Mach sayısıdır.

$$Mach = Ma = \frac{V}{C} < 0.3 \text{ ise} \quad (3.22)$$

akış sıkıştırılamaz olarak kabul edilir (V:akışkan hızı, C:yerel ses hızı).

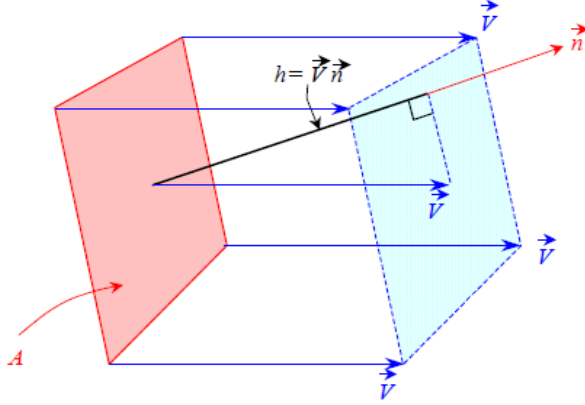
Akım çizgisi, bir akım bölgesi içinde bulunan ve üzerindeki her noktada, hareketli akışkanın o noktadaki, hız vektörünü teğet kabul eden eğridir. Buradan şu sonuçlara varılabilir: Akım çizgisinin bir tarafındaki akışkan diğer tarafa geçemez. Akım çizgileri birbiri ile kesişmezler. Akım çizgileri akım bölgesi içinde başlamazlar ve sonlanmazlar yani sonsuzdan sonsuza uzanır. Viskozitesiz akışkanlarda nesnenin sınırı ile akım çizgisi aynı anlamı taşır. Şekil 3.3'de uzayda sabit konumlu ve sonlu kontrol hacmi örneği verilmiştir:



Şekil 3.3. Sabit konumlu sonlu kontrol hacmi [48].

3.8.1. Debi

Debi, bir akışkanın aktığı yerin herhangi bir kesitinden birim zamanda geçen akışkan hacmidir. Boyutu *hacim / zaman*, genellikle kullanılan metrik birimi m^3/s dir. Yaygın göstergesi Q harfidir. Şekil 3.4’de bir prizmadaki akışkanın debisini göstermektedir.



Şekil 3.4. Prizmadaki akışkanın debisi [48].

A ,	Yüzey Alanı
V ,	Akışkanın birim zamanda aldığı yol
n ,	Yüzey normali
h ,	Prizmanın yüksekliği

hacimsel debi = Birim zamanda A yüzeyinden geçen akışkan hacmi = prizmanın hacmi = Taban alanı $\times$ Yükseklik

$$Q = A.(\vec{V} \cdot \vec{n}) \quad (3.23)$$

Kütlesel debi = Hacimsel debi $\times$ yoğunluk

$$m = \rho.Q = \rho.A.(\vec{V} \cdot \vec{n}) \quad (3.24)$$

3.8.2.Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Mühendislikte uygulamalarda karşımıza fiziksel problemler çıkmaktadır. Fiziksel problemler genellikle birer kısmi diferansiyel denklemle ifade edilir. Kısmi diferansiyel denklemlerini griddeki koordinat sisteminde genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (3.25)$$

Yukarıdaki denklemde a, b, c, d, e, f ve g katsayıları birer sabit olabileceği gibi bağımsız değişkenler olan x ve y nin de fonksiyonu olabilirler. Eğer böyle olursa bu tür diferansiyel denklemlere Lineer Diferansiyel Denklemler denmektedir. Katsayılar bağımlı değişken veya onun türevlerinin fonksiyonu olursa Nonlineer Diferansiyel Denklemler olarak adlandırılır. Yukarıdaki genel denklemde eğer;

1. $b^2 - 4ac < 0$ ise bu tür denklemlere parabolik
2. $b^2 - 4ac = 0$ ise bu tür denklemlere eliptik
3. $b^2 - 4ac > 0$ ise bu tür denklemlere hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler denir.

Örneğin aşağıdaki denklem elektrik mühendisliğinde elektrik ve manyetik alanını ve makine mühendisliğinde sıcaklık dağılımını karakterize etmektedir.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

Benzer şekilde aşağıdaki hiperbolik diferansiyel denklem mühendislik dallarında dalga denklemi olarak uygulamaya konmaktadır.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.27)$$

Aşağıda 3.28'deki diferansiyel denklem ise parabolik denklem olup difüzyon denklemi olarak bilinmektedir. Bu denklem ısı iletimi gibi difüzyon problemlerini karakterize etmektedir.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.28)$$

Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için üç yöntem kullanılmaktadır. Bunlar, sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sonlu hacimler yöntemleridir.

3.8.3. Genel Denklemlerin İntegral Formları

Süreklilik denkleminin integral formu;

Kütlenin korunumu prensibi : Kütle yok edilemez / yoktan var edilemez

ν kontrol hacminin S yüzeyinden birim zamanda çıkan net kütle miktarı	ν kontrol hacmindeki kütle miktarının birim zamandaki değişimi
--	---

$$= \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot d\nu$$

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot d\nu \quad (3.29)$$

Sonuç olarak süreklilik denkleminin integral formu[48]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot d\nu + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.30)$$

Momentum denkleminin integral formu ise aşağıdadır;

Hareketin korunumu prensibi: Dış kuvvetler toplamı atalet kuvvetine eşittir [48].

Sabit kütle için,

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}) \quad (3.31)$$

Dış kuvvetler toplamı = Momentumun birim zamandaki değişimi

Dış Kuvvetler

Bünyesel Kuvvetler

Gravitasyonel kuvvetler

Elektromanyetik kuvvetler

$$\iiint_V f \cdot \rho \cdot dv$$

Not: f birim kütleye etkiyen bünyesel kuvvettir.

Yüzeysel kuvvetler

Basınç kuvvetleri;

$$- \iint_S \rho \cdot n \cdot dS$$

Teğetsel kuvvetler;

$$\vec{F}_{visc}$$

Momentumun birim zamandaki değişimi aşağıdaki gibi gösterilebilir;

Tablo 3.1. Kontrol yüzeyindeki momentum değişimleri

Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren kütlelerin taşıdıkları momentumlar arasındaki fark	$\iint_S (\rho \cdot V \cdot n \cdot dS) \cdot V$
Kontrol yüzeyindeki kütle miktarının değişiminden kaynaklanan momentum değişimi	$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \cdot dv) \cdot V$

Sonuç olarak momentum denkleminin integral formu şöyle olur [48]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho dv) V + \iint_S (\rho V \cdot nds) V = - \iint_S \rho \cdot nds + \vec{F} + \iiint_V f \cdot \rho dv \quad (3.32)$$

3.8.4. Genel Denklemlerin Diferansiyel Formları

Süreklilik denkleminin diferansiyel formu aşağıdaki işlemler sonucunda bulunabilir;

Süreklilik denkleminin integral formu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dv + \iint_S \rho V \cdot ndS = 0 \quad (3.33)$$

Yüzey integrali hacim integraline dönüştürülerek,

$$\iint_S (\rho V) \cdot ndS = \iiint_V \nabla(\rho V) dv \quad (3.34)$$

İntegraller birleştirilerek,

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) \right] dv = 0 \text{ şeklinde denklem elde edilir [48].} \quad (3.35)$$

Kontrol hacmi sonsuz küçük yapıldığında integrand sıfıra eşitlenerek süreklilik denkleminin diferansiyel formu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \text{ Daimi akım için } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \nabla(\rho V) = 0 \text{ dır.}$$

Materyal türev tanımını kullanarak

$$\frac{D\rho}{Dt} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ Daimi, sıkıştırılmaz akım } \frac{D\rho}{Dt} = 0, \vec{V} \cdot \nabla = 0 \text{ olur.}$$

Momentum denkleminin diferansiyel formu aşağıdaki işlemler sonucu elde edilmektedir;

Momentum denkleminin integral formu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho dv) V + \iint_S (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds) V = - \iint_S \rho \vec{n} ds + \vec{F} + \iiint_V f \cdot \rho dv \quad (3.36)$$

Basınçla ilgili yüzey integrali hacim integraline dönüştürülerek aşağıdaki denklem elde edilir [48]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho dv) V + \iint_S (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds) V = - \iiint_V \nabla \rho dv + \vec{F} + \iiint_V f \cdot \rho dv \quad (3.37)$$

Bu vektörel eşitlik örneğin bir (x,y,z) kartezyen koordinat sisteminde

$$\text{Hız vektörü} \quad : \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

$$\text{Teğetsel kuvvet vektörü} \quad : \vec{F}_{\text{visc}} = F_{x-\text{visc}} \vec{i} + F_{y-\text{visc}} \vec{j} + F_{z-\text{visc}} \vec{k}$$

$$\text{Bünyesel kuvvet vektörü} \quad : \vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

Olmak üzere üç bileşene ayrılarak örneğin x bileşeni aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho dv) u + \iint_S (\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds) u = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dv + F_{x-\text{visc}} + \iiint_V \rho \cdot f_x \cdot dv \quad (3.38)$$

Akı terimi hacim integraline dönüştürülerek ve integraller birleştirilerek

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot u) \right] dv = \iiint_V \left[- \frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-\text{visc}} + \rho \cdot f_x \right] dv \quad (3.39)$$

Kontrol hacmi sonsuz küçük yapılarak Momentum denkleminin diferansiyel formu veya Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki gibi olur [49]:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot u) = - \frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-\text{visc}} + \rho \cdot f_x \quad (3.40)$$

Benzer şekilde y bileşeni,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot v) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y \quad (3.41)$$

Benzer işlemlerle z bileşeni,

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot w) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z \quad (3.42)$$

$$\text{Daimi akım } \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

$$\text{Bünyesel kuvvet ihmal edilirse } \vec{f} \equiv 0$$

$$\text{Viskoz etkiler ihmal edilirse } \vec{f}_{visc} \equiv 0$$

Euler denklemi ise aşağıdaki gibi olur [49]:

$$\nabla(\rho \vec{V} \cdot u) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.43)$$

$$\nabla(\rho \vec{V} \cdot v) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (3.44)$$

$$\nabla(\rho \vec{V} \cdot w) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (3.45)$$

Veya Navier-Stokes denklemlerinde,

x bileşeninde,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot u) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (3.46)$$

Soldaki terimler açılırsa aşağıdaki denklem elde edilir,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla u + u \nabla (\rho \vec{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (3.47)$$

Düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir,

$$u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{V}) \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u \right] = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (3.48)$$

İlk terim süreklilik denklemi gereği sıfır olup,

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u \right] = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (3.49)$$

Materyal türev kavramı kullanılarak $\rho \frac{Du}{Dt} = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (3.50)$

Aynı şekilde y bileşeni, $\rho \frac{Dv}{Dt} = - \frac{\partial \rho}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y \quad (3.51)$

Aynı şekilde z bileşeni $\rho \frac{Dw}{Dt} = - \frac{\partial \rho}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z \quad (3.52)$

Denklemleri elde edilir.

4. NAVIER-STOKES DENKLEMLERİ

İsmi Claude-Louis Navier ve George Gabriel Stokes'ten almıştır. Bu denklemler sıvılar ve gazlar gibi akışkanların hareketlerini tanımlamayı sağlayan denklemlere sahiptir. Navier-Stokes denklemleri, sıkıştırılmaz sıvıların akışlarını açıklayan temel diferansiyel denklemlerdir. Akışkan hareketleri Navier-Stokes ve süreklilik denklemiyle tanımlanabilir[49].

Navier-Stokes denklemleri akışkanlar dinamiğinin en çok bilinen temel denklemlerindendir. Teorik çalışmalarda bu denklemlerin basitleştirilmiş şekillerinin analitik çözümleri yapılmakta ve uygun sonuçlar elde edilmektedir. Fakat teorik çalışmalar çok kısıtlı durumlar için yapılabildiğinden günümüzde büyük ölçüde terk edilmiş ve sayısal çalışmalara ağırlık verilmiştir [50].

Navier-Stokes denklemleri bir akışkanın bünyesinde bulunan birim kütledeki momentum değişimlerinin, basınç değişimleri ve viskoz kuvvetlerinin toplamına eşit olduğunu belirtir. Bu denklemler uygulamaya konmadan önce bazı ön kabullerin yapılması gerekmektedir. Aksi takdirde bu denklemlerin analitik çözümlerinde oldukça zorluklar yaşanır. Öncelikle akışkanın sürekli olduğu kabul edilir. Yani akışkanın tamamının aynı özellikte olduğu içinde farklı formlar bulunmadığı kabul edilir. Bir başka kabulde tüm alanların basınç, hız, yoğunluk, sıcaklık vs. diferansiyel olduğudur [51].

Matematikçilerin ve fizikçilerin çok fazla ihtiyaç duydukları denklemler olan Navier-Stokes denklemleri 19.yy'da yazılmıştır. Ancak günümüzde hala çok azı anlaşılabilmiştir. Bu denklemler ilk olarak 1800'lerde formüle edilmiştir ve bir katı maddenin etrafındaki suda, bir uçağın kanadı üzerindeki havada veya kalpten pompalanan kanda olduğu gibi akışkan ve gazların hareketini ifade eder. Navier-Stokes denklemleri, fen ve mühendislik alanındaki denklem türlerine benzer. Fakat bu durumda, görünüş aldatıcı olabilir. Şimdiye kadar, bu denklemlerin çözüldüğü genel bir formülün nasıl bulunacağına dair bir ipucu bulunamamıştır. Fakat denklemlerin kendileri, bu problemlerin anlaşılmasını sağlar. Bu denklemlerin çözüldüğü genel bir formülün olmayışı; gemi mühendislerinin daha iyi gemiler tasarlamasına, uçak mühendislerinin daha iyi uçaklar yapmasına veya tıbbî cihaz yapan mühendislerin yapay organlar geliştirmesine engel

olmamaktadır.

Navier-Stokes denklemlerinin düzlem levha etrafındaki akım problemi gibi çok basit problemlerde bile yetersiz olabilme ihtimali vardır. Durum böyleyken incelemesini yaptığımız akışkanın kenarında ya da içinde karmaşık biçimde katı cisimlerin olması durumunda bu denklemler yetersiz olabilmekte ve bulduğumuz çözümler anlamsız hale gelebilmektedir. Bu durumda kayma gerilme hesaplarını yaptığımız ya da akışkan ile katı cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin hesabı için bu denklemlere farklı yollardan yaklaşabiliriz. Örneğin prandtl kenar tabaka teorisi kullanılabilecek yöntemlerden biri olabilir [52].

4.1. Navier-Stokes Denklemlerinin Kullanım Alanları

Bu denklemler kullanışlı denklemlerdendir. Akışkanların davranışı, Navier–Stokes denklemlerini içeren, bir grup kısmî diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Özellikle akademik ve ekonomik birçok olayın fiziğini açıklamaktadır. Hava akımları ve okyanus akıntılarının, boru içindeki su akışının, galaksideki yıldız hareketlerinin, kanat etrafındaki hava akımlarının modellenmesinde ve hesaplarında sıkça kullanılırlar [49].

Bu denklemler ve bunların türevleri elektriğin çalışmasından uçakların yapımına hava tahminlerinden gemilerin inşasına kadar pek çok alanda kullanılan ve işleri kolaylaştıran denklemlerdendir.

Akışkanların hareketi ile ilgili olarak pratikte karşımıza çıkan durum genellikle türbülansdır. Türbülans akışkan hareketinde, akımı meydana getiren büyüklüklerin zaman ve konuma göre değişimlerin düzenli olmaması nedeniyle, türbülanslı akışkanların çözümlenmesinde istatistiksel ortalama büyüklükler göz önünde bulundurulur. Günümüzde yapılan CFD çalışmalarında; türbülanslı akışı karakterize eden zaman ortalamalı Navier-Stokes denklemleri kullanılmaktadır [53].

Özellikle türbülanslı akışların çözümlenmesi gerektiği durumlarda bu denklemlere sıkça başvurulur. Çünkü bu tür problemlerin sayısal olarak çözülmesindeki en büyük sorun yüksek bilgisayar kapasitesi gerektirmesidir. Fakat türbülans çok küçük ölçek ve zaman aralığında meydana gelmektedir. İşte bu yüzden zamana bağlı Navier-Stokes denklemlerinin çözümünden yararlanılır.

Ayrıca bu denklemler sıg su denklemlerini ortaya çıkarmada, hesaplamalı

akışkanlar dinamiğini ilgilendiren çalışmalarda, Makine mühendisliğinde, Bilgisayar mühendisliğinde, Tesisat mühendisliğinde, Gemi mühendisliğinde ve maliyet ve zamandan sağlanan kazanımlarından dolayı akışkanların modellenmesi esnasında ortaya çıkan problemleri çözmede kullanılmaktadır.

4.2. Navier-Stokes Denklemlerinin Türetilmesi

Mühendislikte analitik çözümleri bulunamayan diferansiyel denklemlerin çözümü sayısal metotlarla yapılır. Denklemler, 3 temel korunum kanunu olan momentum, enerji ve kütle korunumunun temel prensiplerinden elde edilir. Bu yüzden, bazı durumlarda kontrol hacmi dediğimiz, rastgele seçilmiş sonlu bir hacim belirlemek gereklidir, bu hacim üzerinde bu prensipler kolayca uygulanabilir. Bu sonlu hacim Ω ile gösterilir ve akım yüzeyi sınırlandırılır. Kontrol hacmi, sabit kalabilir veya akışkan ile hareket edebilir. Temel kabuller bunlardır, bununla beraber, farklı uygulamalarda özel kabullerde yapılabilir.

Navier-Stokes denklemleri, aşağıdaki korunum kanunlarından türetilir:

- ✓ Kütle
- ✓ Enerji
- ✓ Momentum
- ✓ Açısal momentum

Bir cismin kütlesiyle hızının çarpımına o cismin momentumu denir. Hız vektörel bir büyüklük olduğundan momentum da vektöreldir. Fakat önemli olan momentum korunumudur. Ayrıca, akışkan için bir durum denklemi bağıntısı kabulü yapılması gereklidir. En genel biçimde, bir korunum kanunu şunu ifade eder, bir kontrol hacmi üzerinde tanımlanmış hacim özelliği (bulk property) değişiminin oranı L hacim sınırları boyunca hareket eden akışkanın dışarı taşıdığı kayıp ve artı kontrol hacminin iç tarafındaki kazançlar ve kayıplara eşit kabul edilir. Bu, aşağıdaki integral denklemi ile ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} L d\Omega = - \int_{\partial\Omega} L v \cdot n d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.1)$$

Bu denklemde v akışkanın hızı ve Q akışkan içindeki kazançlar ve kayıplar olarak ifade edilir. Eğer kontrol hacmi boşluk içinde sabitlenmiş ise bu integral denkleminde

aşağıdaki şekilde bir ifade yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} L d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (L \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (4.2)$$

Kontrol hacmini sonsuz küçük yaparak momentum denkleminin diferansiyel formunu veya Navier-Stokes denklemleri aşağıda görülebilir [54]:

$$\text{x bileşeni} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} u) = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x \quad (4.3)$$

$$\text{y bileşeni} \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} v) = - \frac{\partial \rho}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y \quad (4.4)$$

$$\text{z bileşeni} \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} w) = - \frac{\partial \rho}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z \quad (4.5)$$

Akışkanların genel navier-stokes denklemi aşağıdaki gibidir [54]:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Sıkıştırılmaz akışkanların denklemi aşağıda verilmiştir,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.7)$$

Buradaki ν kinematik viskozite, u akışkanın hızı, μ viskozite sabiti, p basınç ve ρ akışkanın yoğunluğudur. Momentumun korunumu için Navier-Stokes denklemlerinin genel biçimi aşağıdaki denklemde verilmiştir:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \rho \cdot \mathbf{f} \quad (4.8)$$

Buradaki ρ akışkanın yoğunluğu, $\mathbf{v}$ hız vektörü ve $\mathbf{f}$ kitle kuvvet vektörüdür. $\mathbb{P}$ tensörü ise akışkan parçacığı üzerindeki yüzey kuvvetleridir.

Navier-Stokes denklemleri en genel manada 2 bölüm içermektedir. Bunlar momentum denklemi ve sıkıştırılmazlık şartı denklemi(kütle korunumu denklemi). Momentum denklemi Newtonun ikinci yasasından ($F=m.a$) türetilir. Bu karmaşık bir

denklemdir. Bu denklem 4 adımla açıklanabilir.

- Suyun yatay hareketi
- Dağılma, dökülme
- Projeksiyon
- Kuvvet

Sıkıştırılmazlık şartı veya kabulü $\nabla \cdot u = 0$ dır.

Momentum denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_t = -(u \cdot \nabla)u + \nu \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \nabla P + f \quad (4.9)$$

Notation açıldığında,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Kütlenin korunumundan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

Navier-Stokes denkleminin bölümlerinden olan momentum korunumu aşağıdaki denklemlerle matematiksel olarak ifade edilebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4.13)$$

Yukarıdaki denklemlerde u, v, w x, y, z yönündeki hızlardır.

2 Boyutlu düşünülürse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.14)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.16)$$

Euler denklemi aşağıda verilmiştir, sürtünmesiz akış ($\mu = 0$) kabul edilir.

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \quad (4.17)$$

Navier-Stokes denklemi aşamalı olarak denklemlerle aşağıdaki gibi yazılabilir:

Akışkandaki damlanın hızı

$$\frac{Du}{Dt} \text{ dir.}$$

Newtonun yasası gereği ($F=ma$)

$$m \frac{Du}{Dt} = F \text{ olur.}$$

Yukarıdaki denkleme yer çekimi kuvveti de eklenirse,

$$m \frac{Du}{Dt} = mg + K \text{ denklemi elde edilir.}$$

Yukarıdaki denkleme basınç da eklenirse,

$$m \frac{Du}{Dt} = mg - v \nabla P + K \text{ olur.}$$

Yukarıdaki denkleme akışkanın viskozitesi de eklenirse,

$$m \frac{Du}{Dt} = mg - v \nabla P + v \mu \nabla g \nabla u \text{ denklemi elde edilir.}$$

Yukarıdaki denklemde her iki taraf m ye bölünürse,

$$\frac{Du}{Dt} = g - \frac{\nu}{m} \nabla P + \frac{\nu}{m} \mu \nabla g \nabla u \text{ denklemi elde edilir.}$$

Yukarıdaki denklemde $\rho = \frac{m}{\nu}$ gereği yoğunluk yerleştirilirse,

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P = g + \frac{\mu}{\rho} \nabla g \nabla u \quad (4.18)$$

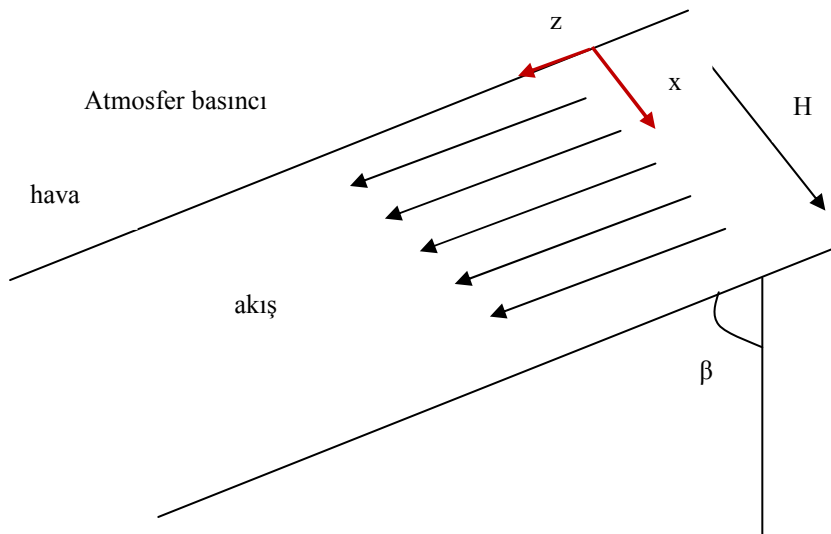
olarak Navier-Stokes genel denklemi elde edilmiş olur.

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u (\lambda > 0) \text{ dır.}$$

Navier-Stokes denklemleri çalışmalarda ihtiyaca göre bazı durumlarda değişik formlara basitleştirilerek, sadeleştirilerek kullanılır. Örneğin Newtonyen akışkanlar, Brigham akışkanları, Powe-law akışkanı, Sıkıştırılmaz akışkanlar vs. gibi akışkanların her birinde Navier Stokes'in farklı bir biçimi kullanılır.

4.3. Navier-Stokes Denklemlerinin Sayısal Çözümü

Navier-Stokes denkleminin genel formu, $\rho \left(\frac{dv}{dt} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + \rho g$



Şekil 4.1. Akışta Navier-Stokes denklemi

Şekil 4.1’de akışkanın hızı x,y,z koordinat sisteminde v_x, v_y ve v_z dir. Şekil 4.1’i göz önüne alırsak akışkan z yönünde gitmektedir. Bu yüzden v_x, v_y hızları sıfır olarak

kabul edilir.
$$V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix}_{xyz}$$

Kütle korunumu gereği, süreklilik denklemi aşağıdadır.

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + (v_x \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial z}}) + \rho(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) = 0 \quad (4.19)$$

Düzgün akımlar, sürekli akış $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ dır.

Sürekli sıkıştırılmaz akışkanlar $\rightarrow \rho$ içerir.

$$v_x = v_y = 0 \text{ dır.}$$

Buradan kütle korunumu için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Sıkıştırılmaz akışkanlar için Kartezyen koordinat sisteminde 3 bileşen aşağıda gösterilmiştir:

$$\rho(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}) + \rho g_x \quad (4.20)$$

$$\rho(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}) + \rho g_y \quad (4.21)$$

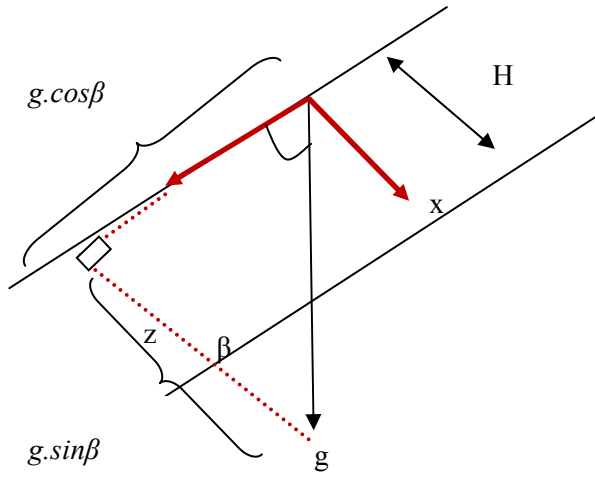
$$\rho(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}) + \rho g_z \quad (4.22)$$

Yukarıdaki denklemler üzerinde gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\text{x bileşeni: } 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\text{y bileşeni: } 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\text{z bileşeni: } 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) + \rho g_z$$



Şekil 4.2. Akışkanın hız bileşenleri

Yer çekiminin bileşenlerine bakıldığında aşağıdaki ifade yazılabilir,

$$g = \begin{pmatrix} g \sin \beta \\ 0 \\ g \cos \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{matrix}$$

Bu sonuca göre denklemler tekrar düzenlenirse,

$$\text{Navier-Stokes } x \text{ bileşeni : } 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \beta$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \beta \quad (4.23)$$

$$\text{Navier-Stokes } y \text{ bileşeni : } 0 = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.24)$$

$$\text{Navier-Stokes } z \text{ bileşeni : } 0 = -\cancel{\frac{\partial P}{\partial z}} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}} \right) + \rho g \cos \beta \quad (4.25)$$

P atmosfer basıncına bakıldığında z yönündeki değerinin sıfır olduğu görülür. Aynı şekilde akım yönüne bakıldığında y bileşeninin sıfır olduğu görülür. Sonuç olarak z bileşeni aşağıdaki gibi olacaktır.

$$P \neq f(z)$$

$$V_z \neq f(y) \text{ (wide)} \quad 0 = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \rho g \cos \beta \text{ olur.}$$

$$\text{Kütle korunumu gereği, } \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Akımın yönü gereği, } \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} = a$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = a, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = ax + c_1$$

$$V_z = \frac{ax^2}{2} + c_1x + c_2 \quad (4.26)$$

olarak bulunur.

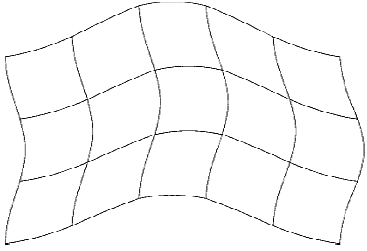
Sınır şartlarına bakıldığında karşımıza hız ve akımın bulunduğu yerin genişliği çıkacaktır. Burada hız $V_z = 0$ ve denklemdaki $x=H$ olursa denklem aşağıdaki gibi olacaktır.

$$0 = \frac{aH^2}{2} + c_1H + c_2 \quad (4.27)$$

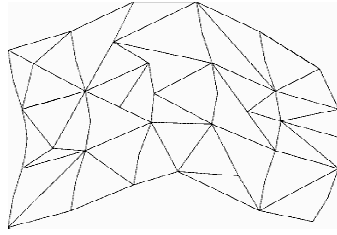
Navier-Stokes denklemleri sadece özel durumlarda cebirsel olarak çözülebilir. Sayısal çözüm yaklaşık olarak bulunur. Bilgisayar ile çözülebilen cebirsel denklem sistemi diferansiyel denklemlerin yaklaşık olarak ayrıştırılması metodunu kullanır. Bu metodlar şunlardır:

- Sonlu Hacimler Metodu(Finite Volume Method)
- Sonlu Farklar Metodu(Finite Difference Method)
- Sonlu Elemanlar Metodu(Finite Element Method)

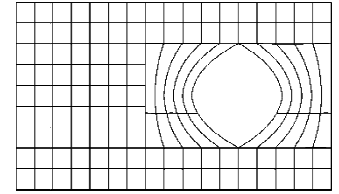
Sayısal metodlarda kullanılan grid yapıları; yapısal grid, yapısal olmayan grid ve blok-yapısal olarak üç bölüme ayrılabilir. Bu gridler aşağıda Şekil 4.3, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’de gösterilmektedir. Yapısal ağ sisteminde bütün düğümlerin etrafında aynı sayıda elemanlar bulunurken yapısal olmayan ağ sisteminde her türlü geometrilere rastlanabilmektedir ve düzensiz veri yapısına sahiptir.



Şekil 4.3. Yapısal ağ



Şekil 4.4. Yapısal olmayan ağ



Şekil 4.5. Hibrit ağ

4.3.1.Sonlu Hacimler Metodu

Hesaplama alanı belirli sayıda sonlu hacimlere bölünür. Sistemdeki her sonlu hacim parçasına korunum denklemleri uygulanır. Hesaplanacak bağımlı değişken sonlu hacmin merkezindeki kontrol noktasındaki değer ile ifade edilir. Sonlu hacim yüzeyindeki akılar interpolasyon ile bulunur. Elde edilen tüm cebirsel denklemler uygun metotlar ile çözümlenir.

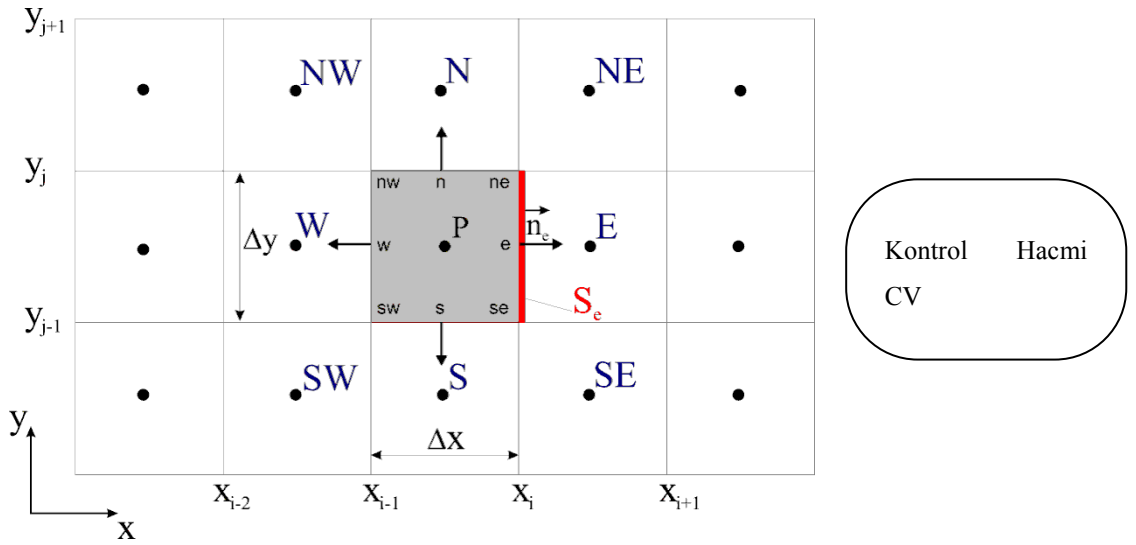
Sonlu hacimler metodunda yaklaşım üç seviyede gerçekleşir.

- Yüzey, hacim ve zaman için yaklaşık integraller hesaplanır.

- İnterpolasyon
- Türev alma

İntegral hesaplamada en çok aşağıdaki kurallara bakılır [55].

- Orta nokta kuralı
- Trapezoid kuralı
- Simpson kuralı



Şekil 4.6. Sonlu Hacimler Metodu [56].

Sonlu hacimler metodundaki ilk adım çözüm bölgesinin kontrol hacimlerine bölünmesidir. Şekil 4.6'ya bakıldığında göz önüne alınan bir kontrol noktası P ile, bunun solundaki (batısındaki) ve sağındaki (doğusundaki) kontrol noktaları sırasıyla W ve E olarak, P yi çevreleyen kontrol hacminin sol (batı) sınırı w ve sağ sınırı da e ile adlandırılmaktadır. Noktalar ve sınırlar arasındaki mesafeler ayrıca şekil üzerinde belirtilmiştir.

Sonlu hacimler metodunun en önemli adımı ikinci adımdır. Bu adımda problemi yöneten denklem veya denklemler P kontrol noktasında ayrıklaştırılmış bir denklem elde etmek için kontrol hacmi üzerinde integre edilir. Bu hesaplamalar yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left(\Gamma A \frac{d\theta}{d_x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\theta}{d_x} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.28)$$

Burada ΔV hücrenin hacmini, $\bar{S}$ kaynak büyüklüğünün bu hacim içerisindeki ortalama değerini (birim hacim başına ortalama değer), A ise hücre sınırının alanını belirtmektedir.

Sonlu hacimler metodunun üçüncü ve son adımında denklemler bütün kontrol noktalarında kurulur. Çözüm sınırındaki kontrol hacimleri için denklem sınır koşullarını da kapsayacak şekilde düzenlenmelidir. Sonuç olarak ortaya çıkan denklem takımı çözülerek θ büyüklüğünün kontrol noktalarındaki değerleri elde edilir [57].

4.3.2.Sonlu Elemanlar Metodu

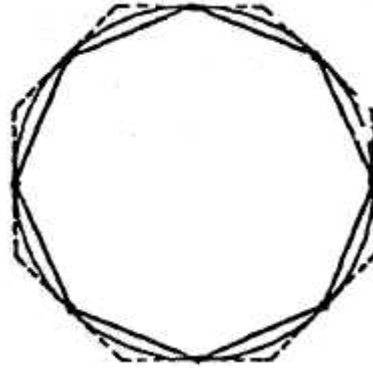
Sonlu elemanlar metodu, karmaşık olan mühendislik problemlerinde kullanılan sayısal metottur. İlk kullanımı 1950 li yıllarda inşaat mühendisliğinde olan bu method bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle beraber etkin olarak kullanılmaya başlandı. Son 40 yılda gelişen sayısal hesaplama yöntemleri içinde önemli bir yer tutmaktadır [58].

Sonlu elemanlar metodu yapısal mekanik problemleri için geliştirilmiş olmasına rağmen dayandığı esasların genelliği dolayısıyla yöntem akışkanlar mekaniği, zemin mekaniği, uçak mühendisliği, nükleer mühendislik, elektromanyetik alanlar, termal analiz ve daha sayabileceğimiz pek çok mühendislik ve fizik problemlerinin çözümünde araç olarak kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunda sistem parçalara ayrılarak çözümler bulunur. Bu metotta düzensiz ve karmaşık geometriye sahip sistemler incelenebilir. Ayrıca değişik ve karmaşık malzeme özellikleri olan yapı ve sistemlerde uygulanabilmektedir. Bu methodla fiziksel sistemler matematiksel olarak ifade edilir.

Sonlu elemanlar metodundaki mantık karmaşık problemleri basite indirgeyerek çözümü bulmaktır. Bu matodda esas problem basite indirgendiği için kesin çözümden uzaklaşılır ve yaklaşık çözümler bulunur. Fakat çözüm üzerinde uğraşarak kesin çözüme çok yakın çözümler bulunabilmektedir [59].

Sonlu elemanlar metodu 1950'lerde kullanılmaya başlansa da mantığı birkaç yüzyıl öncesine dayanmaktadır. Bir dairenin çevresini hesaplamak için matematikçiler çokgene indirgeyerek çözüm bulma yoluna gitmişlerdir. Şekil 4.7'deki gibi bu yöntemle dairenin çevresi dairenin dışındaki çokgenle içindeki çokgen arasındaki yaklaşık değer olarak bulunmaktadır. Kesin sonuca daha da yaklaşmak için çokgenin kenar sayısı arttırılabilir.



Şekil 4.7. Dairenin çevresinin sonlu elemanlar yaklaşımı ile bulunması

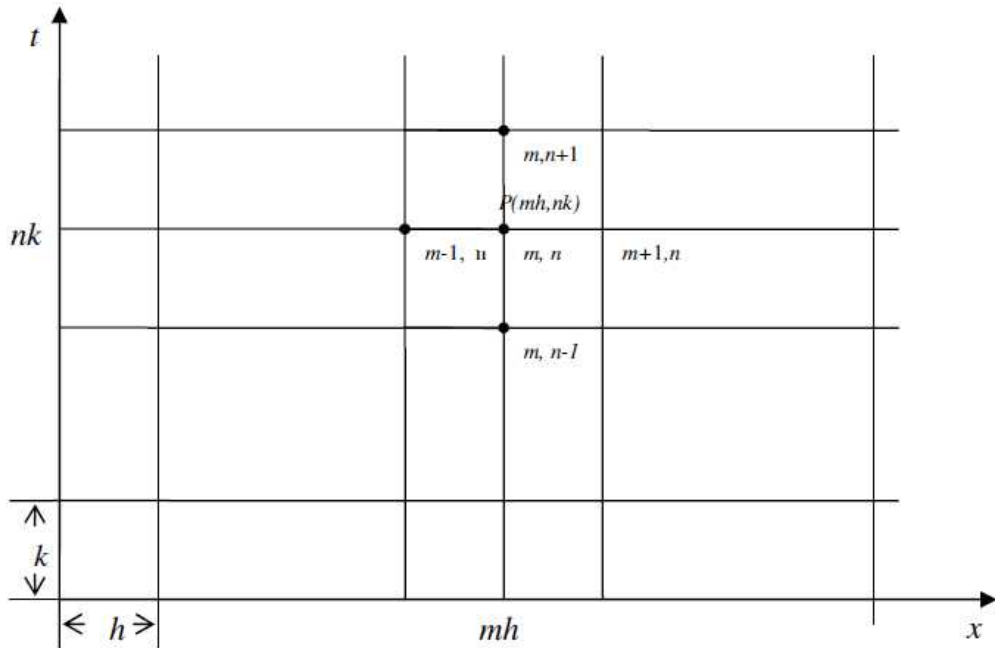
Sonlu elemanlar metodunda katı sıvı ve gaz gibi gerçek cisimler sonlu eleman adı verilen alt bölümlere ayrılarak birbirine bağlanırlar. Bu elemanlar birbirlerine düğüm noktası adı verilen noktalarda bağlanırlar.

Sonlu elemanlar metodunda ilk basamak sistemi sonlu elemanlara ayırmaktır. Sonraki işlem her elemanın özelliklerinin formüle edilmesidir. Ardından yapının ve çözüm bölgesinin modelinin oluşturulabilmesi için elemanlar birleştirilmelidir. Her bir eleman için bulunmuş olan denklemler birleştirilerek genel denklem elde edilir. Bilinmeyen düğüm noktasının özellikleri bulunur. Genel denge denklemleri, problemin sınır şartları uygulanarak düzeltilir ve daha sonra düğüm noktalarının özellikleri ve değerleri çözülür[59].

5. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Matematikteki birçok problem sürekli ve değişken olabilmektedir. Bundan dolayı problemler için fonksiyonlar formüller şeklinde verilebilir ve değişkenlere değerler verilerek fonksiyonun çözümleri bulunabilir. Fakat bazı durumlarda fonksiyonlar birtakım noktalarda belirlenmiş olabilir. Bu durumda sonlu farklar matematiği kullanılarak her bir noktada fonksiyonun çözümü için iyi bir tahmin yapılabilir.

Sonlu farklar yöntemi birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde kullanılmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklem sonlu farklar yaklaşımıyla çözülürken problemin çözüm bölgesi genellikle Şekil 5.1'deki gibi dikdörtgensel şekiller içeren bölmelere ayrılır. Ardından düğüm noktaları belirlenir. Problemin yaklaşık çözümü için her bir düğüm noktası üzerinde hesaplamalar yapılır. Sonra diferansiyel denklemlerdeki türev ve sınır şartları yerine Taylor serisi kullanılarak uygun sonlu farklar yaklaşımı yazılır. Böylelikle çoğunlukla karmaşık olan diferansiyel denklem çözüm problemleri, fark denklemlerinden oluşan matematiksel denklem çözümüne indirgenmiş olur. Bu matematiksel problemler ise direk veya dolaylı metodlar yardımıyla kolayca çözülebilir [60].



Şekil 5.1. Düğüm noktalarının gösterimi

Sayısal yöntemler en iyiye ulaşma çabasında birçok matematiksel, istatistiksel ve sınıflandırma yollu yöntem içerir. Sayısal yöntemler için sonlu elemanlar, sonlu farklar ve sınır elemanlar gibi sınıflandırmalar yapılmaktadır. Sonlu farklar metodunda her bir düğüm noktası için diferansiyel denklemler yazılmakta daha sonra türevler fark denklemleri ile yer değiştirmektedir.

Akışkanların hareketini bulmak için uygulanan Navier-Stokes denklemlerinin bilgisayar programı aracılığıyla çözülebilmesi için diferansiyel hesaplamalarda sonlu fark yöntemi uygulanır. Sınır şartlarındaki düğüm noktaları için ileri ve geri fark formülleri, diğer düğüm noktaları için ise merkezi fark formülü uygulanır. Buna göre bir f fonksiyonu için uygulanacak fark denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{İleri Fark : } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (5.1)$$

$$\text{Geri Fark : } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (5.2)$$

$$\text{Merkezi Fark : } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (5.3)$$

5.1. Sonlu Farklar Yönteminin Tercih Edildiği Durumlar

Sonlu farklar yöntemi, çeşitli diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilemediği zaman problem çözümünü mümkün kılmak hatta basitleştirmek için kullanılan sayısal ve yaklaşık yöntemlerdendir. Sonlu farklar metodu yardımıyla akışkanlar ile ilgili problemlerin çözümünde kullanılan birçok diferansiyel denklem kolaylıkla çözülmüştür.

Bilindiği gibi, fonksiyonların analitik olarak verildiği durumlarda, istenilen noktadaki fonksiyon değerlerini hesaplamak, fonksiyonun belirli noktalarında istenilen dereceden türevlerini bulmak ya da fonksiyonun belirli aralıklardaki integrallerini hesaplamak kolaylıkla yapılabilir. Ancak fonksiyonların bazı ayrık noktalardaki değerleri belli iken bu tür hesaplamalar sonlu farklar aritmetiği kullanılarak yaklaşık olarak yapılabilir. Hatta, analitik çözümlerin belli olduğu durumlarda bile sonlu farklar metodu tercih edilebilir. Çünkü sonlu farklar metodu problemlerin çözümünü basitleştirmekte ve kullanım kolaylığı sağlamaktadır [61].

5.2. Sonlu Farklar Yöntemiyle Türev Hesabı

Sonlu farklar metodu problem alanı içindeki düğüm noktaları üzerinde hesaplamalar yaparak uygulanır. Bir takım ayrık noktalarda değeri bilinen $y = f(x)$ fonksiyonunun, bir noktasındaki türevini, bilinen bu değerleri kullanarak, yaklaşık olarak hesaplamak mümkün hale gelmektedir. Bunun gibi $z = f(Y, y)$ türündeki çok değişkenli fonksiyonlar için yaklaşık kısmi türev formülleri de verilebilir. Bunun için genellikle bu fonksiyonun söz konusu nokta civarındaki Taylor serisi açılımından yararlanılır. Türev tanımı göz önüne alınarak İleri Fark Yaklaşımı, Geri Fark Yaklaşımı ve Merkezi Fark Yaklaşımı üzerinde durulabilir [62].

Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot her doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen grid dağılımıdır [63].

5.2.1. Taylor Serisi

Adını İngiliz matematikçi Brook Taylor'dan almıştır. Matematikte, bir fonksiyonun, o fonksiyonun terimlerinin tek bir noktadaki türev değerlerinden hesaplanan sonsuz toplamı şeklinde yazılması şeklindeki gösterimidir, açılımıdır. Taylor serileri, fonksiyonların verilen bir noktadaki sayısal değerlerini bulmak için kullanılabilirler [64].

Her dereceden türevli, gerçel ya da karmaşık bir $f(x)$ fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere $(a - r, a + r)$ aralığındaki Taylor serisi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (5.4)$$

Yukarıda verilen Taylor serisi $f(x)$ fonksiyonun $x = a$ noktası civarında açılımıdır. $f(x)$ fonksiyonun $x = 0$ noktası civarındaki açılım ise Maclaurian Serisi olarak adlandırılır.

Taylor serisi daha düzenli bir gösterim olan Sigma *gösterimi*yle ise şu şekilde yazılır:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (5.5)$$

Sonlu fark formülasyonları çoğu zaman Taylor seri açılımına dayanılarak yapılır. Bunun yanında polinomlar yardımıyla da ayrıklaştırma yapılabilir [65].

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $(x+\Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor serisi açılımı ile;

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (5.6)$$

$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad (5.7)$$

Şeklinde yazılabilir. Bu denklemden birinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots \quad (5.8)$$

veya

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots \text{ olur.} \quad (5.9)$$

Hata terimi olarak alınırsa kısaca şu şekilde yazılır,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.10)$$

Bu ifade f büyüklüğünün x 'e göre birinci türevi için yapılmış birinci dereceden bir yaklaşımdır. İndissel formda,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.11)$$

şeklinde gösterilir ve türev için birinci mertebeden ileri fark formülü olarak adlandırılır. Adım uzunluğu azaltıldıkça bu yaklaşık formül gerçek türeve o kadar yaklaşacaktır.

Taylor açılımı,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (5.12)$$

şeklinde yazılarak benzeri işlemlerle

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.13)$$

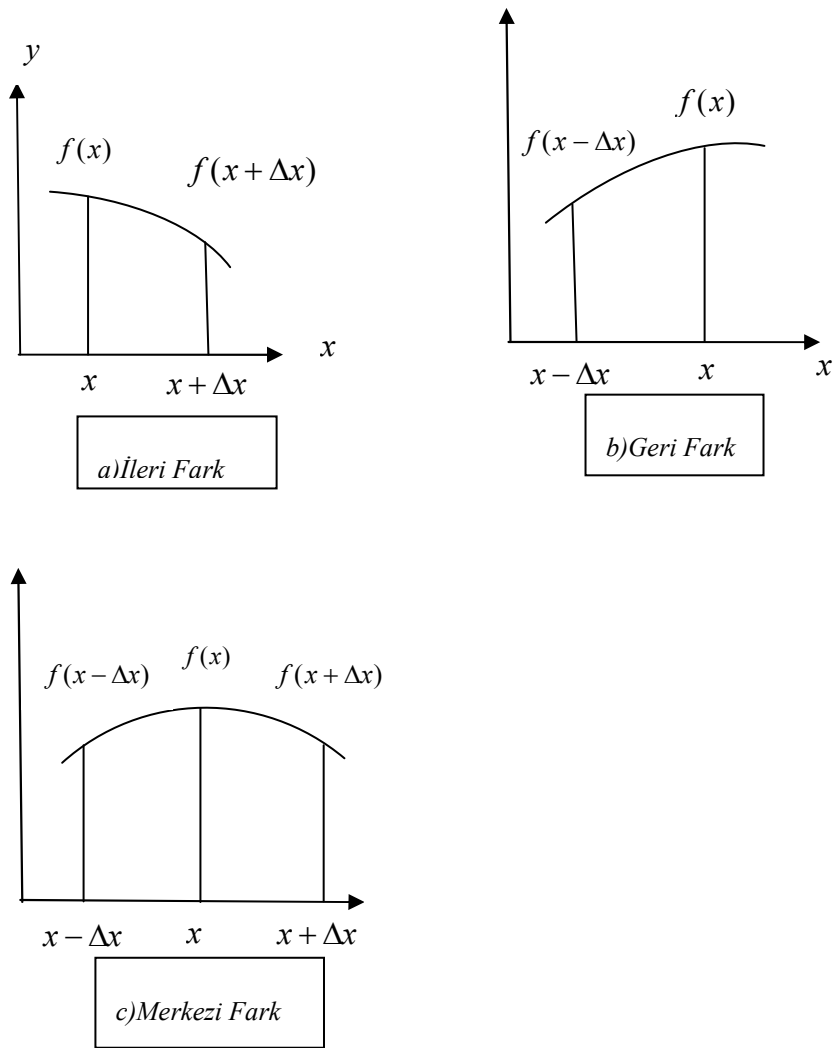
Şeklinde birinci mertebeden geri fark formülü, veya denklem (5.6) ve denklem (5.12) Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (5.14)$$

benzeri işlemler sonucu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (5.15)$$

Şeklinde merkezi fark formülü elde edilebilir. Bu formülün ikinci mertebeden olduğu dikkati çekmektedir. Birinci türev için yazılan formülü hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekil 5.2’de gösterilmektedir.



Şekil 5.2. İleri, geri ve merkezi fark yaklaşımları

5.2.2. İleri Fark Yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \dots \quad (5.16)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{1}{2} hf''_i - \frac{1}{6} h^2 f'''_i - \dots \quad (5.17)$$

Yazılabilir. Birinci terimden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (5.18)$$

İleri Fark Yaklaşımı elde edilir.

5.2.3. Geri Fark Yaklaşımı

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \dots \quad (5.19)$$

Taylor seri açılımından,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{1}{2} hf''_i - \frac{1}{6} h^2 f'''_i + \dots \quad (5.20)$$

yazılabilir. Birinci mertebeden sonraki terimler kesilerek,

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad (5.21)$$

elde edilir.

5.2.4. Merkezi Fark Yaklaşımı

$$f(x_i + h) = f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \dots \quad (5.16)$$

$$f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \dots \quad (5.19)$$

Taylor seri açılımları göz önüne alınarak, taraf tarafa çıkarma yapılırsa,

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{1}{3} h^3 f'''_i + \dots \quad (5.22)$$

sonucu elde edilir. Buradan da aşağıdaki denklem,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - \frac{1}{6} h^2 f'''_i + \dots$$

veya

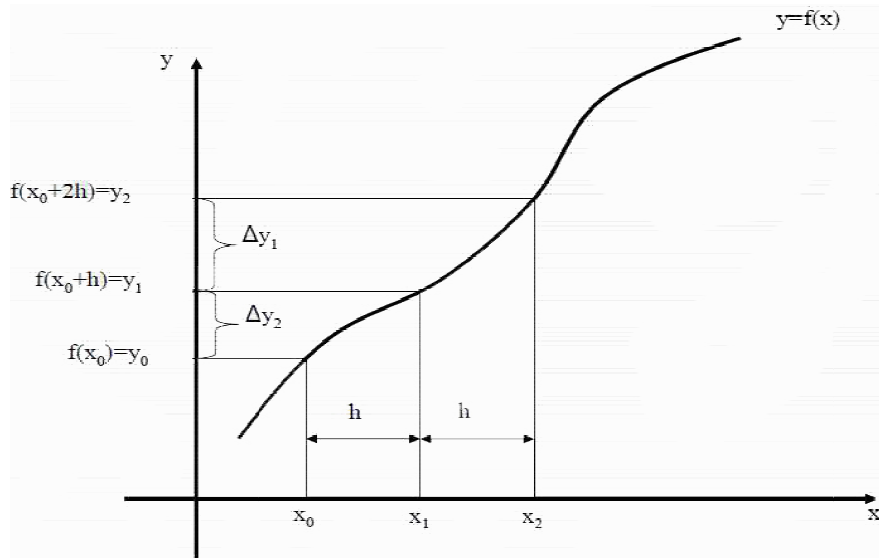
$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (5.23)$$

denklemini elde edilir.

5.2.5. Sonlu Farklar Yaklaşımı ile Diferansiyel Denklem Çözümü

Birbirini takip eden iki ayrık nokta arasındaki farka “fark aralığı” denir

$h = x_{k+1} - x_k$ ve h ile Şekil 5.3’deki gibi gösterilir.



Şekil 5.3. Sonlu farklar yaklaşımında fark aralığı gösterimi

Diferansiyel hesaplamalarda sonlu fark yöntemi uygulanacağı zaman, sistemin sınır şartlarındaki düğüm noktalarında ileri ve geri fark formülleri uygulanırken diğer düğümler için merkezi fark formülleri uygulanır [64].

Bir $f(x)$ fonksiyonu için adım uzunluğuna h dersek x noktası için 1. Derece ileri fark şöyledir:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \quad (5.24)$$

Buradaki Δ ileri fark operatörüdür.

Aynı şekilde geri fark şöyledir:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h) \quad (5.25)$$

Buradaki ∇ geri fark operatörüdür.

Merkezi fark operatörü ise şu şekilde formülize edilebilir:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (5.26)$$

Buradaki δ merkezi fark operatörüdür.

μ ortalama operatörü olarak kabul edilirse formülü şu şekilde olur,

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (5.27)$$

E kaydırma operatörü olarak alınırsa formül,

$$Ef(x) = f(x + h)$$

şeklinde olur.

Bu E operatörü $f(x)$ fonksiyonunu kendisinden sonraki ilk değere yükseltir.

$$Ef(x) = f(x + h) = f(x) + \Delta f(x)$$

$$\begin{aligned} Ef(x) &= f(x)(1 + \Delta) \\ E &= 1 + \Delta \end{aligned} \quad (5.28)$$

olarak bulunur.

Bir $f(x)$ fonksiyonuna 2 defa kaydırma operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E^2 f(x) &= E(Ef(x+h)) = Ef(x+2h) \\ &= Ef(x+2h) \end{aligned} \quad \text{olur.}$$

Bu formülü genelleştirilirse,

$$E^n f(x) = f(x+n.h) \quad (5.29)$$

İkinci ve daha yüksek dereceden ileri, geri ve merkezi farklar ile aralarındaki ilişkiler ve eşit aralıklarla verilen ayrık noktalar;

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

....

....

$$x_n = x_0 + n.h \text{ olur.}$$

$f(x)$ fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri aşağıdaki gibi belirtilebilir.

$$f(x_0) = f_0$$

$$f(x_1) = f_0$$

.

.

$$f(x_n) = f_n$$

Herhangi bir x_i noktasındaki;

1.dereceden ileri fark ise şöyledir:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad i=0,1,2,3,\dots,n \quad (5.30)$$

2. dereceden ileri fark ise,

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$$

$$= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \text{ olacaktır.}$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_i &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \\ &= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) \end{aligned}$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (5.31)$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde x_i noktasındaki 3. dereceden ileri fark aşağıda gösterilmektedir,

$$\begin{aligned} \Delta^3 f_i &= \Delta(\Delta^2 f_i) \\ &= \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\ &= \Delta f_{i+2} - \Delta 2f_{i+1} + \Delta f_i \end{aligned}$$

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - f_{i+2} - 2(f_{i+2} - f_{i+1}) + f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i \quad (5.32)$$

olur.

İkinci dereceden geri fark aşağıda gösterilmiştir,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \\
&= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\
\nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Aynı şekilde 2. dereceden merkezi fark aşağıda gösterilmiştir,

$$\begin{aligned}
\delta^2 f_i &= \delta(\delta f_i) \\
&= \delta(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) \\
&= \delta f_{i+\frac{1}{2}} - \delta f_{i-\frac{1}{2}} \\
\delta f_{i+\frac{1}{2}} &= f_{i+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= f_{i+1} - f_i \\
\delta f_{i-\frac{1}{2}} &= f_{i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= f_i - f_{i-1} \\
\delta^2 f_i &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

olarak bulunur.

n . dereceden ileri fark ise aşağıdaki gibi çıkartılır.

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \tag{5.35}$$

Aşağıdaki formül yoluyla da istenilen derecede katsayı hesaplanabilir.

$$\Delta^k f_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{k-i} \quad (5.36)$$

Burada $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$

İleri fark operatörü, geri fark operatörü ve merkezi fark operatörü arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir. Ayrıca tabloları Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4’de görülebilir.

$$\Delta f_i = \delta f_{i+\frac{1}{2}} = \nabla f_{i+1} \quad \Delta^2 f_i = \delta^2 f_{i+\frac{1}{2}} = \nabla^2 f_{i+1} \quad \Delta^r f_i = \delta^r f_{i+\frac{r}{2}} = \nabla^r f_{i+r} \quad (5.37)$$

İleri fark tablosu:

Tablo 5.1. İleri fark tablosu

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_0	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_0	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

Veya

Tablo 5.2. İleri fark tablosu değişik gösterimi

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$			
$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$	$\Delta f(x_0 + h)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
$x_0 + 2h$	$f(x_0 + 2h)$	$\Delta f(x_0 + h)$	$\Delta^2 f(x_0 + h)$	$\Delta^3 f(x_0 + h)$	$\Delta^4 f_0$
$x_0 + 3h$	$f(x_0 + 3h)$	$\Delta f(x_0 + 3h)$	$\Delta^2 f(x_0 + 2h)$		
$x_0 + 4h$	$f(x_0 + 4h)$				

Geri fark tablosu**Tablo 5.3.** Geri fark tablosu

x_i	$f(x_i)$	$\nabla f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$	$\nabla^3 f(x_i)$	$\nabla^4 f(x_i)$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1			
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

Merkezi fark tablosu

Tablo 5.4. Merkezi fark tablosu

x_i	$f(x_i)$	$\delta f(x_i)$	$\delta^2 f(x_i)$	$\delta^3 f(x_i)$	$\delta^4 f(x_i)$
x_0	f_0	$\delta f_{\frac{1}{2}}$			
x_1	f_1	$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
x_2	f_2		$\delta^2 f_1$		
x_3	f_3	$\delta f_{\frac{5}{2}}$	$\delta^2 f_2$	$\delta^3 f_{\frac{3}{2}}$	
x_4	f_4	$\delta f_{\frac{7}{2}}$	$\delta^2 f_3$	$\delta^3 f_{\frac{5}{2}}$	$\delta^4 f_2$

Sonlu farklarla ilgili bir örnek aşağıda gösterilmiştir:

Örneğin $k=4$ değerini vererek ileri fark formülü aşağıdaki gibi uygulanabilir,

$k=4$

$$\Delta^4 f_4 = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \binom{4}{i} f_{4-i}$$

$$i=0 \text{ için, } (-1)^0 = 1, \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1, f_4$$

$$i=1 \text{ için, } (-1)^1 = -1, \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4, -4 f_3$$

$$i=2 \text{ için, } (-1)^2 = 1, \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6, 6 f_2$$

$$i=3 \text{ için, } (-1)^3 = -1, \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \quad , -4 f_1$$

$$i=4 \text{ için, } (-1)^4 = 1, \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 \quad , f_0$$

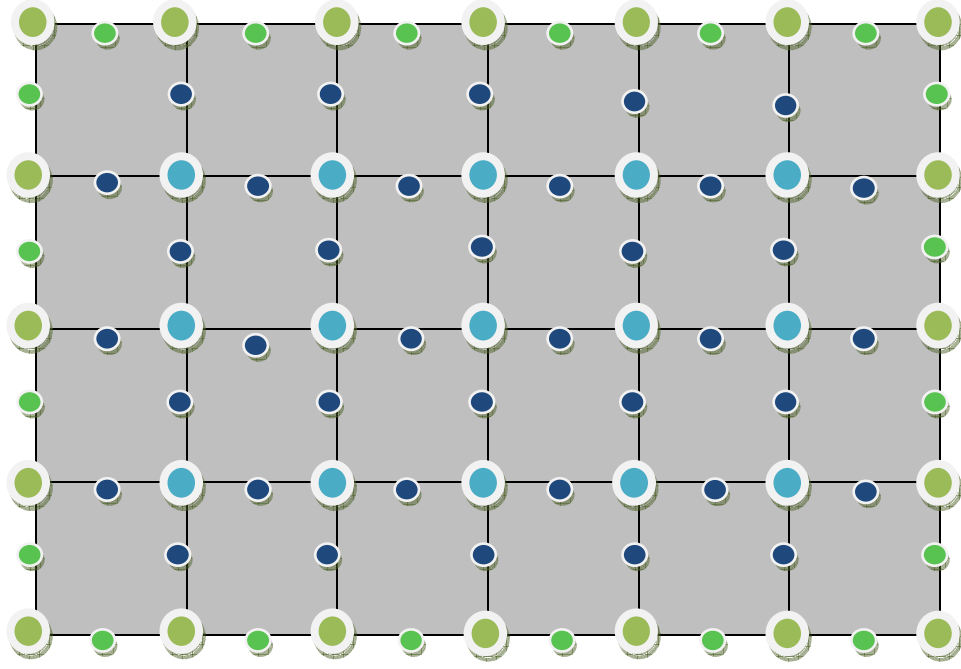
$$\Delta^4 f_k = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0 \text{ olarak bulunur.}$$

$F(x) = x^3 + 5x$ fonksiyonu için $h=1$ ve $[-4, 1]$ aralığındaki ileri fark tablosunu hazırlayalım.

Tablo 5.5. $x^3 + 5x$ fonksiyonu için ileri fark tablosu

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
-4	-84				
-3	-42	42			
-2	-18	24	-18		
-1	-6	12	-12	6	
0	0	6	-6	6	0
1	6	6	0	6	0

Kaydırılmış grid yapısında 6x4'lük bir ızgara yapısı için basınç ve hızlara ait düğüm noktaları Şekil 5.4'de olduğu gibidir. Tüm gösterimlerde basınçları içeren düğüm noktaları büyük küreler ile, u ve v hızlarına ait düğüm noktaları ise küçük kürelerle gösterilmiştir [66].

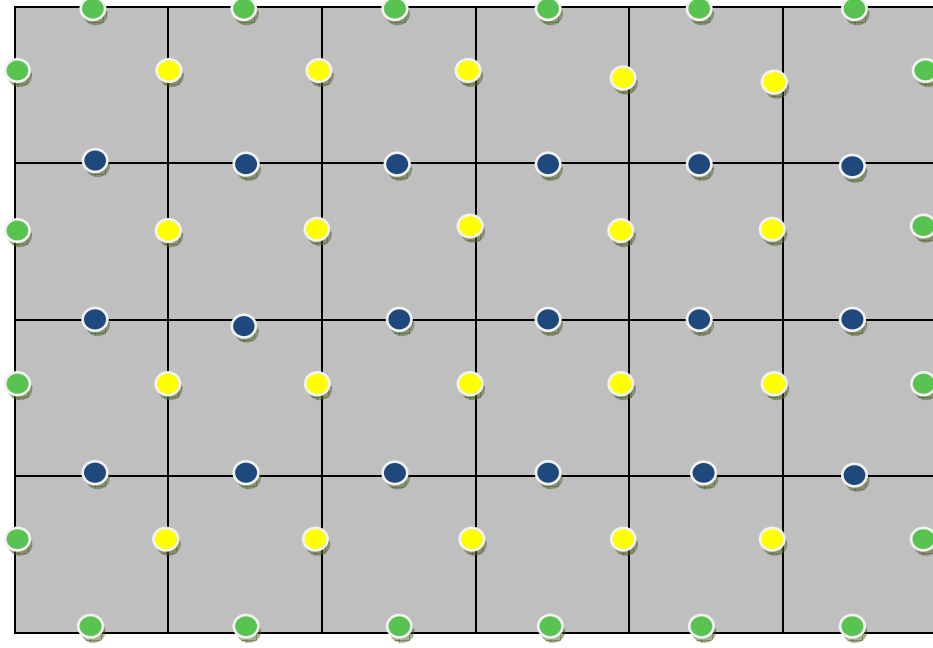


Şekil 5.4. Griddeki düğüm noktaları [66].

Yukarıda Şekil 5.4'deki grid yapısını çalışmamızdaki okyanus olarak düşündüğümüzde açık kanal akışlarında olduğu gibi bir tarafı açık bir sistemin aksine her tarafı kapalı olan bir sistem karşımıza çıkmaktadır.

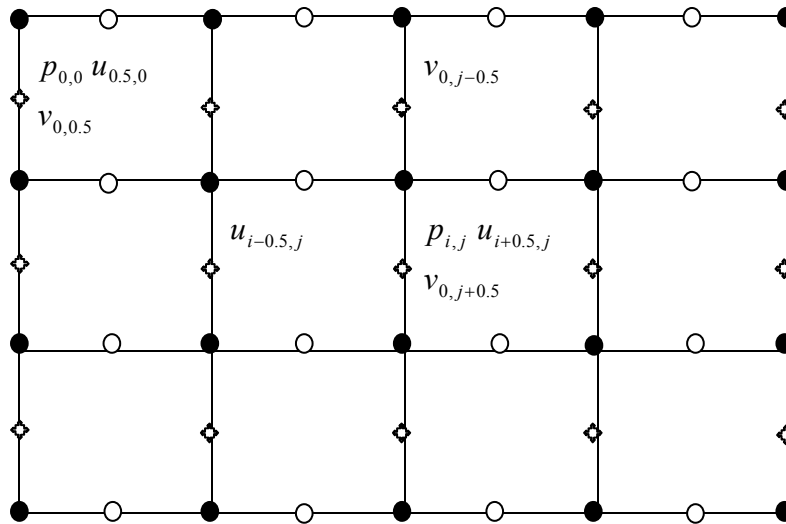
Yukarıdaki şekilde büyük yeşil küreler sınır düğümlerini gösterirken büyük mavi düğümler esas hareketin olduğu yüzeydeki düğümleri göstermektedir.

Kaydırılmış grid yapısında hız vektörü yatay hız vektörü u ve dikey hız vektörü v olarak yer alır. Aşağıdaki Şekil 5.5'de görüldüğü üzere u hız vektörüne ait değerlerinin hesaplandığı noktalar mavi ile v hız vektörüne ait v değerlerinin hesaplandığı noktalar sarı ile gösterilmiştir. Yine şekilde u ve v noktalarının formülasyonunda kullanılan temel hız değerleri görülmektedir.



Şekil 5.5. Griddeki düğüm noktaları ve hız bileşenleri [66].

Farklı uzunluktaki grid aralıkları için fark denklemleri çıkarılmalıdır. Diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması için grid yapısı kullanılabilir. Aşağıdaki şekilde kabataslak bir grid yapısı görülmektedir. Değişkenler farklı yerlere yerleştirilir. i ve j noktaları, grid üzerindeki P basınç değerleridir. $i + 0.5, j$ noktası griddeki hızın x bileşenidir. $i, j + 0.5$ noktası griddeki hızın y bileşenidir.



Şekil 5.6. Bileşenlerin griddeki gösterimi

Denklemleri kullanabilmek için Tablo 5.6'daki gibi ayrıklaştırma işlemleri yapılmalıdır:

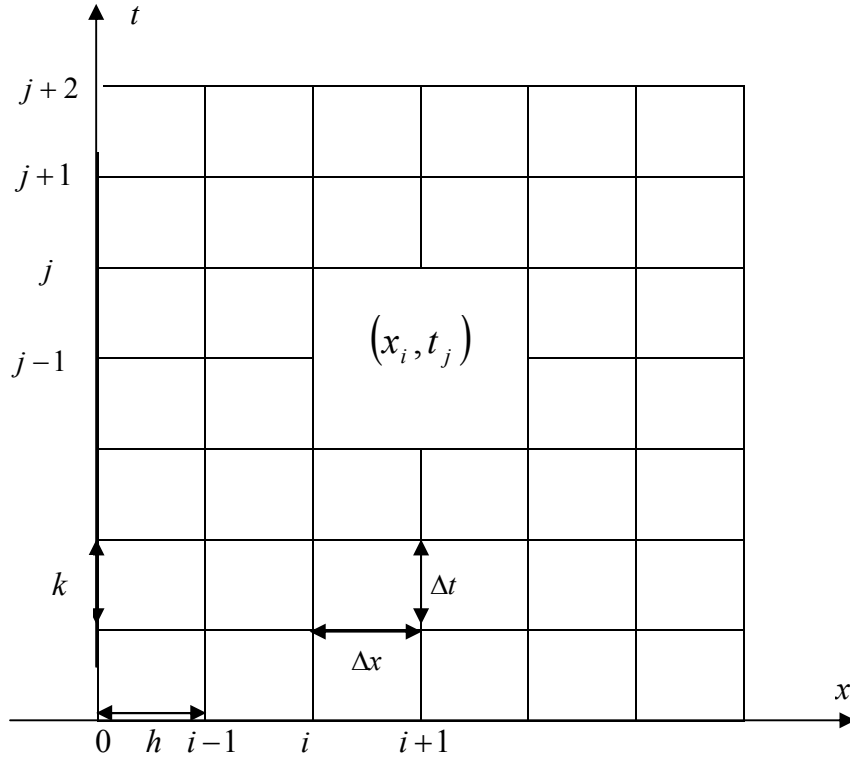
Tablo 5.6. Diferansiyel ayrıklaştırması

Diferansiyel Kısım	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial u^2}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial y}$
Ayrıklaştırma	$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$	$\frac{u_{i+1,j} - 2 * u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$	$\frac{u^2_{i+1,j} - u^2_{i-1,j}}{2\Delta x}$	$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}$	$\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}$

Yukarıdaki denklem ayrıklaştırmaları yapıldıktan sonra bulunan denklemler uygulama için programda kullanılabilir.

6. UYGULAMA

Buraya kadar incelenen sonlu farklar metodunu çalışmada uygulayabilmek için kullanılacak olan diferansiyel denklem Şekil 6.1'deki gibi elemanlarına ayrıştırılmalıdır. Ayrıştırma işleminde denklemdeki türevler yerine ikinci mertebeden türevler için merkezi farklar, birinci mertebeden türevler için ileri yön farklar alınmalıdır.



Şekil 6.1. Sonlu farklar metodunun düzlemdeki elemanları

Yukarıdaki şekle bakarak aşağıdaki denklem düzenlemeleri yapılabilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x^2)} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (6.2)$$

Olmak üzere (x_i, t_j) noktası için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad (6.4)$$

Yukarıdaki ifadeler denklemde yerine konup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

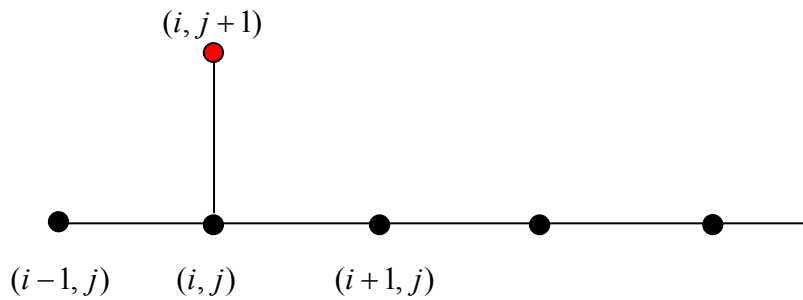
$$\beta = \frac{a.k}{h^2} \text{ olmak üzere,}$$

$$u_{i,j+1} = \beta.u_{i+1,j} + (1 - 2.\beta)u_{i,j} + \beta.u_{i-1,j} \quad (6.5)$$

cebrîk denklemi elde edilir.

Çözümün daha kararlı olması için $\beta \leq \frac{1}{2}$ olmak zorundadır. Bu şartla $k \leq \frac{h^2}{2a}$

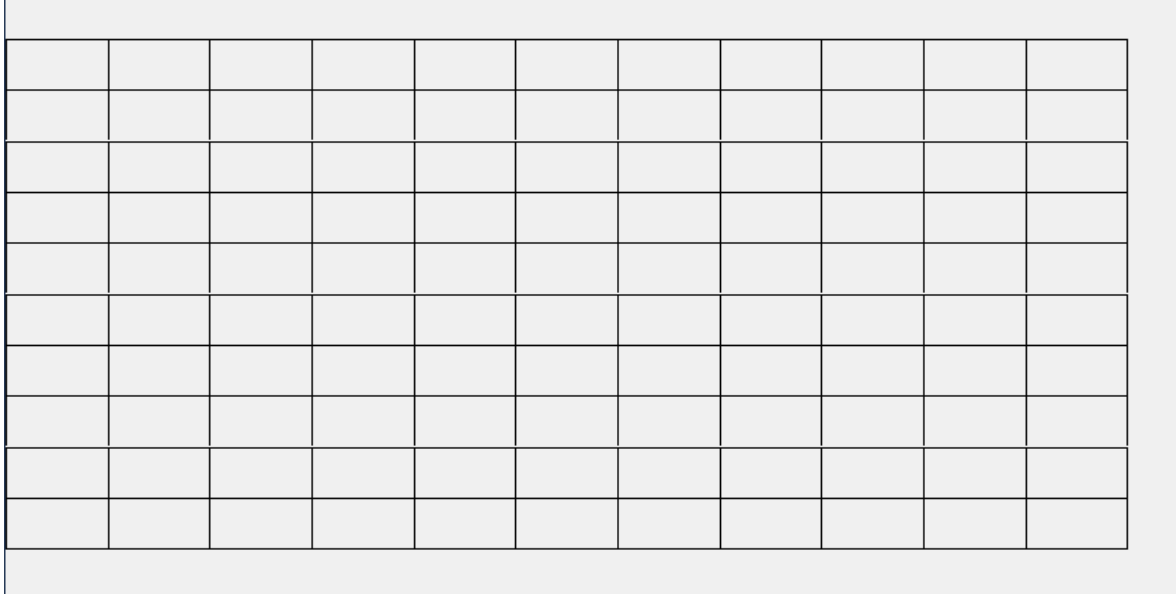
olacağından h seçilince k belirlenmiş olur. Denklem 6.5, $t=0$ anında x eksenî üzerindeki noktalara uygulanırsa bu noktaların değeri sınır şartlarından zaten belli olduğu için $t=\Delta t=k$ olan yatay doğru üzerindeki noktaların değeri belirlenmiş olur. Böylece x eksenî üzerindeki noktaları başlangıç değeri olarak alırsak her $k=\Delta t$ artırımında yeni noktaların değeri hesaplanmış olur. Kısaca $(i-1,j)$, (i,j) ve $(i+1,j)$ noktalarındaki değeri biliniyorsa $(i,j+1)$ noktasındaki değeri hesaplanabilir.



Şekil 6.2. Düğümlemlerin dizilimi

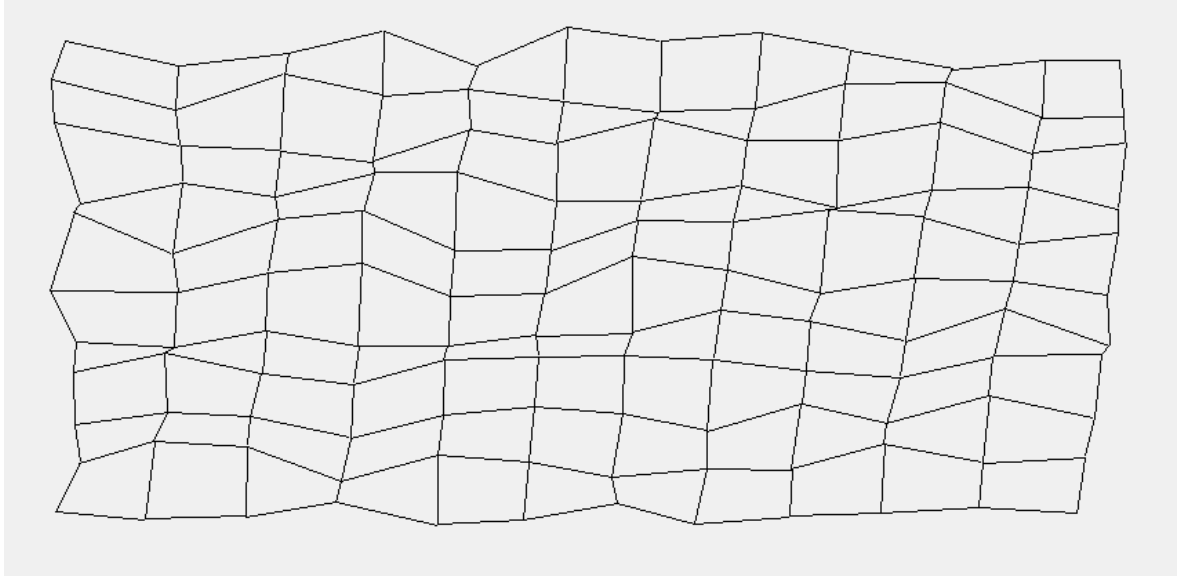
Yukarıdaki Şekil 6.2'e bakıldığında sınırdaki değeri zaten biliniyor. O halde denkleme göre 3 noktanın değeri biliniyorsa üstteki noktanın değeri de bulunabilir. Bu şekilde sınır boyunca gidilerek bir üstteki noktalar bulunur. Üstteki noktaları kullanarak bu

sefer daha da üste doğru çıkılır. Bu sayede sistemimizdeki noktaların değeri bulunur. Bu noktalar uygulamamızdaki dalgaların her bir parçasının hareket düğümü gibi düşünülmelidir. Bu düğümler programda aşağıdaki gibi görünecektir.



Şekil 6.3. Uygulamadaki düğüm noktaları ve grid yapısı

Yukarıdaki resim programın ilk halini yansıtmaktadır. Bu resim bir ağ yapısını bize hatırlatmaktadır. Yukarıdaki resimde dörtgenlerin köşeleri düğüm noktalarını göstermektedir. Yukarıda bahsettiğimiz gibi programımızda en alttan başlanarak üstteki noktaların yeni değerleri bulunacaktır. Bunun için belirlemiş olduğumuz kısmi diferansiyel denklem kullanılmıştır. Bu formülün uygulanmasıyla birlikte her bir düğüm noktasının x, y ve z değerleri ayrı ayrı listelenmiştir. Hareketin uygulanması için matematiksel formül programda uygulandığında ise aşağıdaki görüntü elde edilmiştir.



Şekil 6.4. Uygulamadaki formülün uygulanması

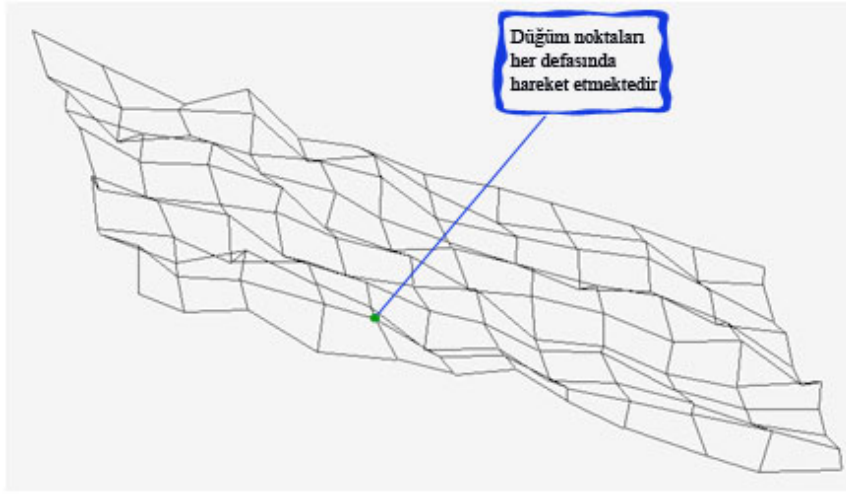
Yukarıdaki resimde formülün uygulanmasıyla birlikte artık düğüm noktalarının hareketi görülmektedir. Hareket belirlenen sınırlar çerçevesinde olmaktadır. Bu çerçeve verdiğimiz değerlere bağlı olarak değişebilmektedir. Bu sayede çalışma alanı genişletilebilir veya daraltılabilir. Bu görüntü elde edildikten sonra bu görüntü 3 boyutlu hale getirilmelidir.

Bulunan x, y ve z değerleri 3 sütunlu bir matris gibi düşünülerek verilerek korunur. Bu işlemden sonra sistemimizdeki dalgaların 3 boyutlu görünmesi sağlanmalıdır. Üç boyutlu görünüm için elimizdeki matris dönüşüm matrisiyle çarpılmalıdır. Dönüşüm matrisi aşağıda verilmiştir. Ayrıca dönüşüm matrisinde kullanılacak olan açı değerleri Tablo 6.1’de gösterilmektedir [67].

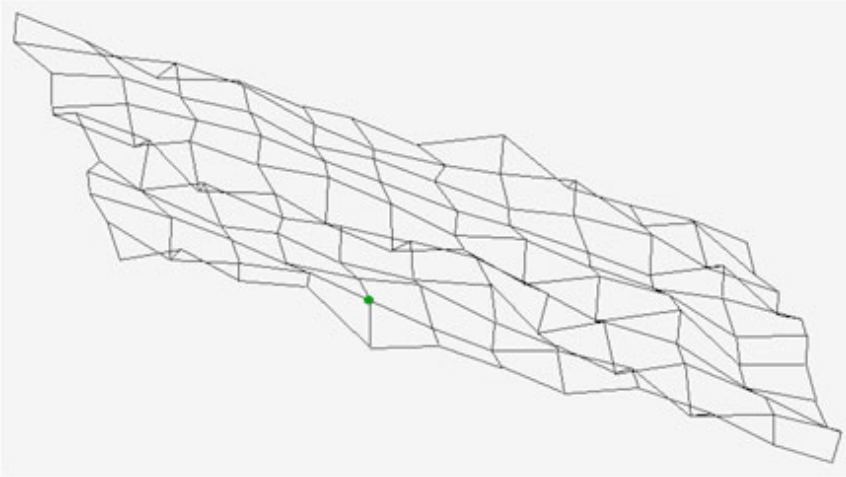
Tablo 6.1. Dönüşüm matrisi ve açı değerleri

$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cdot \sin \theta & -\sin \phi \cdot \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \phi & -\cos \phi \cdot \sin \theta & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$		
	θ	ϕ
	35.264°	45°
	20.705°	22°
	30°	30°

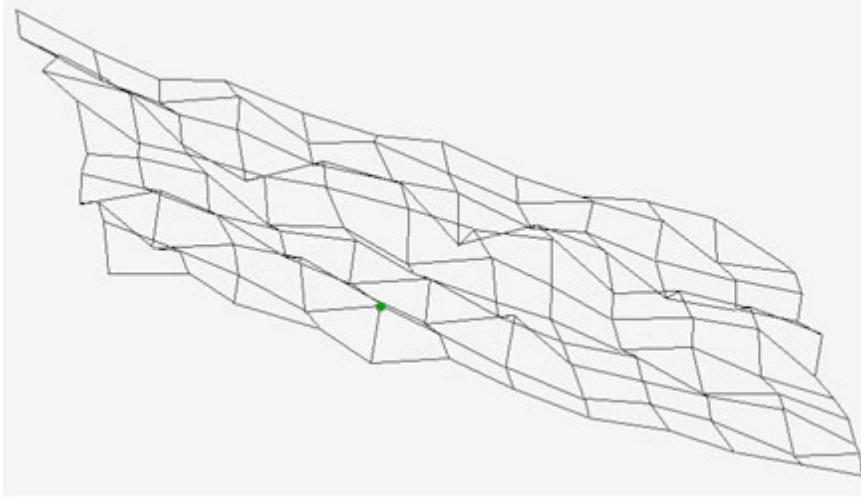
İlk matris şeklindeki veriler yukarıdaki dönüşüm matrisiyle çarpıldıktan sonra karşımıza yeni bir 3 sütunlu matris çıkmaktadır. Bu yeni matris çizdirilerek 3 boyutlu bir görüntü elde edilir. 3 boyutlu dalga animasyonu yukarıdaki basamaklar uygulanarak elde edilir. Dönüşüm matrisi uygulandıktan sonra elde edilen görüntü ise aşağıdaki resimde gösterilmektedir. Şekil 6.5 ile Şekil 6.14 arasında uygulama çalıştırıldığında düğüm noktalarının konumlarını değiştirdiği ve hareketlendiği görülmektedir.



Şekil6.5. Dönüşüm matrisinin etkisi



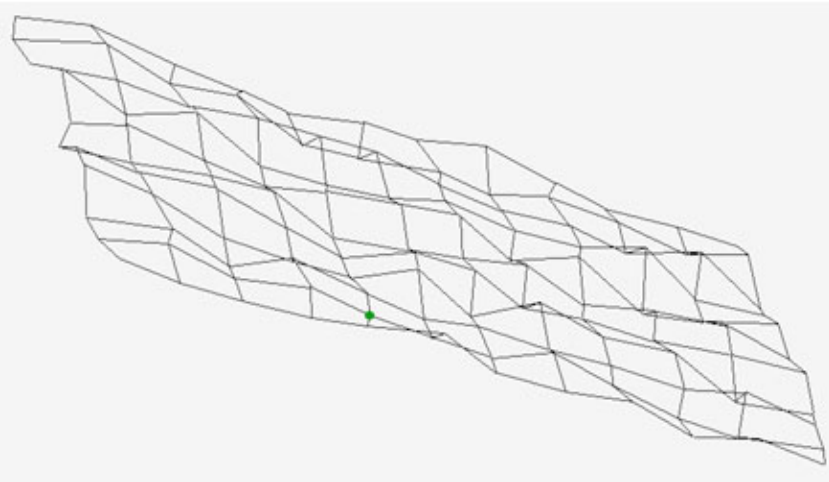
Şekil 6.6. Dönüşüm matrisinin etkisi



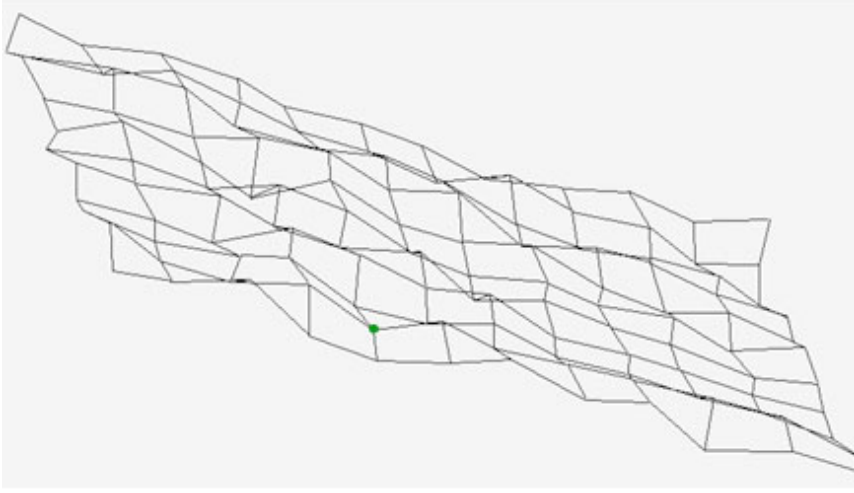
Şekil 6.7. Dönüşüm matrisinin etkisi



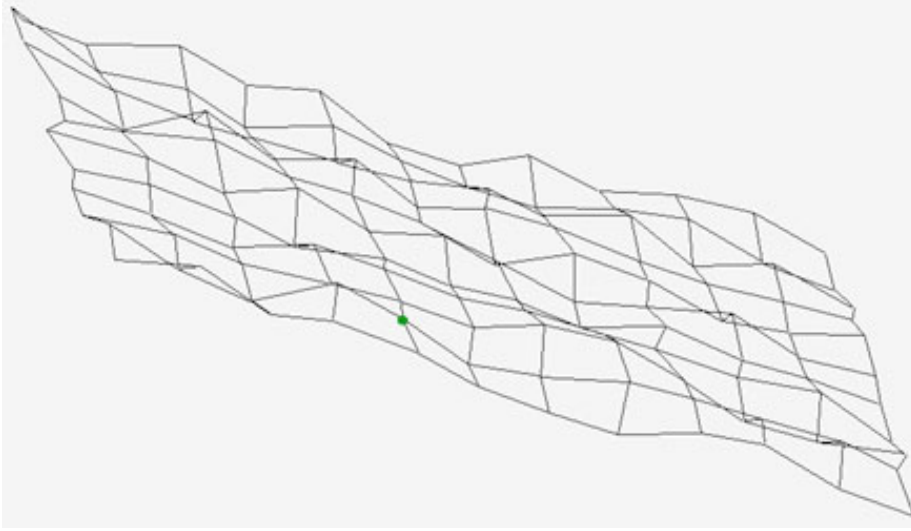
Şekil 6.8. Dönüşüm matrisinin etkisi



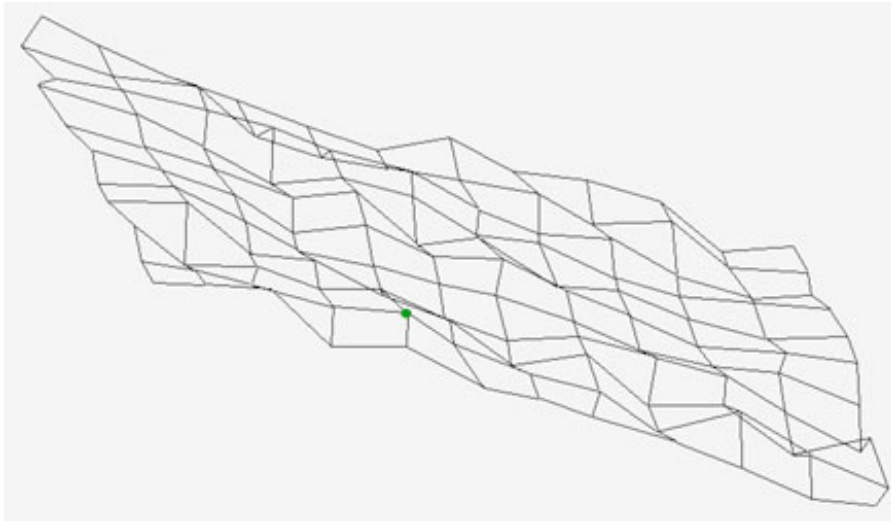
Şekil 6.9. Dönüşüm matrisinin etkisi



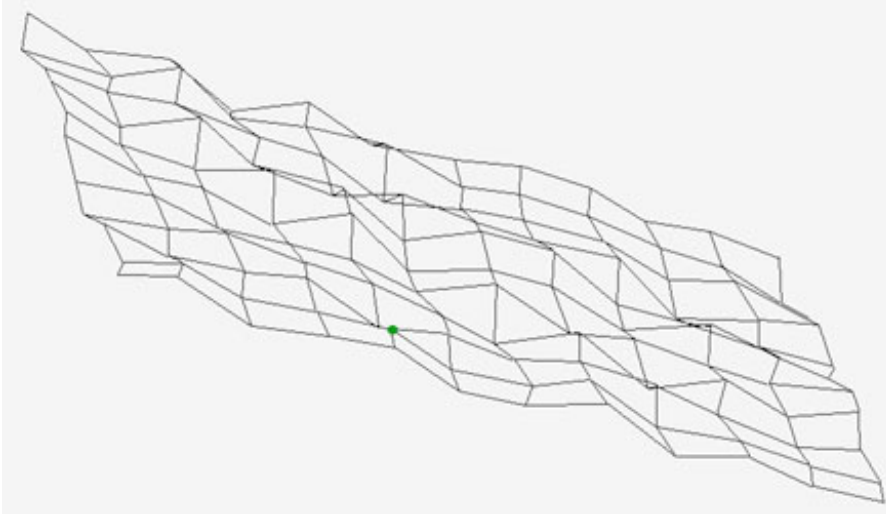
Şekil 6.10. Dönüşüm matrisinin etkisi



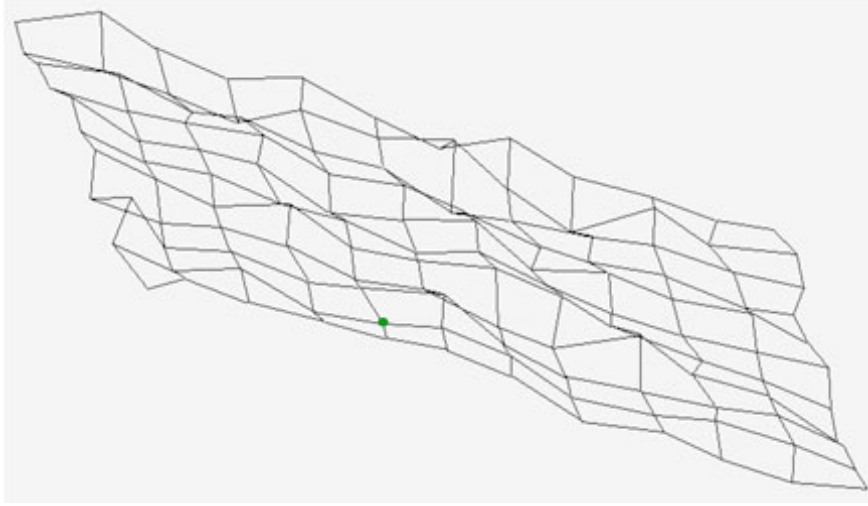
Şekil 6.11. Dönüşüm matrisinin etkisi



Şekil 6.12. Dönüşüm matrisinin etkisi



Şekil 6.13. Dönüşüm matrisinin etkisi



Şekil 6.14. Dönüşüm matrisinin etkisi

Yukarıdaki şekillere bakıldığında belirlenen diferansiyel denklemlerin basitleştirilerek bilgisayar programında uygulanmasıyla düğümlerin hareket ettiğini ve dalga animasyonunun gerçekleştirildiği görülmektedir.

7. SONUÇ

Bu çalışmada animasyon ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Bu kapsamda animasyon türleri, animasyon teknikleri ve derinlik kazandırma(rendering) başlıkları üzerinde durulmuştur. Render işleminin özellikle 3 boyutlu animasyonlarda kritik olduğu belirtilmiştir.

Animasyon ile ilgili kavramlara yer verildikten sonra animasyonda kullanılacak olan akışkanla ilgili önemli yerler üzerinde duruldu. Akışkanların viskozite ve yoğunluk gibi özelliklerinin uygulamalarda önemli olduğu vurgulandı. Ayrıca akışkanlarla ilgili problemlerde momentum kavramının da öneme sahip olduğu belirtildi. Akışkanların hareketleri incelenmiş ve karşımıza hareket denklemleri çıkmıştır. Bu denklemleri diferansiyel denklemler olduğu belirtilmiştir. Bu denklemlerin çözümünde bazı ön şartların ve ön bilgilerin olduğu ve bununla ilgili olarak başlangıç ve sınır koşullarının kritik bir durum oluşturduğu üzerinde durulmuştur.

Kısmi diferansiyel denklemlerin yüzyıllardır fizik ve matematikçiler tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Son yıllarda diğer bilim dallarında bilgisayara olan ihtiyacın ortaya çıkmasıyla bu denklemler bilgisayar mühendislerinin ve programcılarında ilgi alanı içine girmiştir. Bu denklemler sayesinde diğer bilim alanlarıyla bilgisayar mühendislikleri arasındaki etkileşim artmıştır.

Akışkanların hareket problemleri için Navier-Stokes denklemlerinin birçok uygulamada kullanıldığı ve içerdiği diferansiyel denklemler sayesinde istenen sonuca oldukça fazla yaklaşılabileceği sonucuna varılmıştır. Buna karşın Navier-Stokes denklemlerinin oldukça karmaşık ve çözümlerinin hala tam olarak bulunamadığı bilgisine de yer verilmiştir. Bu denklemlerin özellikle fizik ve mühendislik alanında çokça kullanıldığı tespiti yapılmıştır.

Akışkan probleminde problem alanı dörtgenlere bölünüp düğümlerin belirlenmesi gerekir. Düğümlerdeki diferansiyel denklemler Taylor serisi kullanılarak ve Sonlu Farklar yaklaşımı ile çevrilerek basitleştirilir. Bu işlemlerin ardından düğümlerdeki fonksiyonların çözülmesi işlemlerinin yapılması çözümü kolaylaştırıcı olduğu belirtilmiştir. Bunun için de Sonlu Farklar yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem kullanıldıktan sonra karmaşık denklemlerle uğraşmak yerine fark denklemleri bulunmuştur.

Düğümlerdeki değerlerin binmesiyle artık bilgisayar ortamında animasyon uygulanabilecektir. Burada nesne tabanlı programların işleri kolaylaştırıcı olduğu anlaşılmıştır. Visual Basic kullanılarak çizim işlemi gerçekleştirilmiş ve 3 boyutlu dalga animasyonu gerçekleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Kalra, P., Magnenat, N., Moccozet, L. and Sannier G.,** 1998, Real Time Animation of Realistic Virtual Humans, Swiss Federal Institute of Technology University of Geneva.
- [2] **Uğur, A.,** 1996, Üç Boyutlu Çizim ve Animasyon, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [3] http://eng.harran.edu.tr/moodle/moodledata/7/_yesilata/_01_Ders_Notlari/_01ch1.pdf Temel Kavramlar. 10.08.2010.
- [4] **Ünalın, S.,** 2003, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.
- [5] **Kurka, G.,** 2006, Character Animation in Real-Time, Johannes Kepler Üniversitesi, Linz.
- [6] **Solis, D.M.,** 2009, Illustrated WPF, Apress.
- [7] **Bell, C.S.,** 2000, Animated image presentations with personalized digitized images, Eastman Kodak Company.
- [8] **Huw, E.,** 2006, An exploration of the union of 2D animation with a 3D animated environment.
- [9] http://www.rpgrevolution.com/_forums/_index.php?_showtopic = 15773 Animation Basics for Sprites!. 10 Ağustos 2011.
- [10] **Fekete, J-D., Bizouarn, E., Cournarie, E., Galas, T. and Taillefer, F. ,** 2001, A Paperless System for Professional 2D Animation, pp. 6-7.
- [11] http://www.3dmax-tutorials.com/Animation_Concepts.html 3D Max- Tutorials.com. 10 Ağustos 2011.
- [12] <http://www.odev67.od.funpic.org/animasyon.doc> Animasyon Tarihi. 08 Mart 2011.
- [13] <http://nil-nova.blogspot.com/feeds/posts/default> Artc400 "progress" and Artist's Statement. 14 Ağustos 2011.

- [14] <http://sajjadbashir.wordpress.com> Photography balance and rule of three. 14 Ağustos 2011.
- [15] <http://www.nietland.com/fr/2009/03/27/99/> Paper animation. 14 Ağustos 2011.
- [16] <http://www.the-flying-animator.com/cut-out-animation.html> Cut Out Animation Rages Through The Ages. 14 Ağustos 2011.
- [17] <http://www.awn.com/articles/coveted-five-2006-s-oscar-nominated-animated-shorts/page/5,1> The Coveted Five: 2006's Oscar-Nominated Animated Shorts. 14 Ağustos 2011.
- [18] http://cedztreme97.multiply.com/journal?&page_start=40 Csz97 Design. 14 Ağustos 2011.
- [19] <http://www.dizifilm.com/forum/showthread.php?t=3798> Buz Devri 2: Erime Başlıyor (Ice Age 2: The Meltdown). 14 Ağustos 2011.
- [20] **Hodgins, J.K. and O'brien, J.F.**, Computer Animation, College of Computing and Graphics, Visualization, and Usability Center Georgia Institute of Technology Atlanta.
- [21] **Tiese, J.P.**, 2008, Real-time Character Animation Techniques – A Comprehensive Survey, University of Louisiana.
- [22] **Endo, L. C. Y., Morimoto, C. H. and Fabris, A.E.**, Real-time Animation of Underbrush, Computer Graphics and Applied Computational Geometry Project – CGCAP Instituto de Matematica e Estatística, Universidade de Sao Paulo.
- [23] **Sönmez, M.**, 2008, Sayısal Analiz Ders Notları, Aksaray Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü.
- [24] <http://www.3dmimarimodelleme.com/?Lang=TR&SyfNmb=2.3D>. Model Nedir?. 14 Ağustos 2011.
- [25] <http://www.renderray.com/> Render-Ray. 14 Ağustos 2011.
- [26] http://www.mikroegitim.com/vray_nedir.html V Ray Nedir. 12 Mayıs 2011.
- [27] **Erdinç, F.**, 2006. V-Ray 1.47 Ders Notları, pp. 1-7.

- [28] http://www.3dkingdom.org/m/_artgallery/_Bus-Terminal-_mental-ray-_rendering-engine.html Bus Terminal, mental ray rendering engine. 14 Ağustos 2011.
- [29] http://www.mentalfloss.com/_blogs/archives/_11720 10 Landmark Moments in Animation History. 14 Ağustos 2011.
- [30] **GÜRSAÇ, Y.**, 1993, Üç Boyutlu Bilgisayarlı Animasyon ve Yaratıcılık İlişkisi, Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- [31] Boole Polytechnique Federale De Lausanne, Computer Animation.
- [32] http://3dsmaxtu.blogspot.com/2011/09/8balls-_are-_falling-down-by-ride-_objects.html Free 3DSMAX Tutorials. 05 Eylül 2011.
- [33] [http://nylander.wordpress.com/2008/12/10/_smoothed-particle-_hydrodynamics-sph/_smoothed-particle-hydrodynamics\(sph\).](http://nylander.wordpress.com/2008/12/10/_smoothed-particle-_hydrodynamics-sph/_smoothed-particle-hydrodynamics(sph).) 19 Nisan 2011.
- [34] http://animationdynamics.com/2010/10/01/_this-is-your-brain-_on-animation-_part-1/_ This is your Brain on Animation part 1. 14 Ağustos 2011.
- [35] **Douglas, E., Stephen, M. and Ronald, F.**, Animation and Rendering of Complex Water Surfaces, pp.3-7, Stanford University.
- [36] **Crane, K.**, 2007, Real-Time Simulation and Rendering of 3D Fluids, From the new book GPU Gems 3, edited by Hubert Nguyen, published by Addison-Wesley Professional, *University of Illinois at Urbana-Champaign*.
- [37] http://www.videograph.com.tr/_web/detay.asp?id = 308 Video Graph. 21 Haziran 2011.
- [38] **Adam, L., Carl, M., Mark, H. and Marc, B.**, Stylized Rendering Techniques For Scalable Real-Time 3D Animation, pp. 3-7, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [39] **Şenol, S.**, 2005, Borularda Pürüzlülüğün Bulunabilmesi İçin Test Düzeneği Tasarımı ve İmalatı, *Yüksek Lisans Tezi*, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

- [40] **Resuloğlu, F.**, 2006, Bazı Sıvı Metallerin Bulk Viskozitesinin Hesaplanması, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [41] **Çengel, Y. and Cimbala, J.M.**, 2006, Fluid Mechanics Fundamentals and Applications, 1. Baskı, Sayfa 46-51.
- [42] **Toro, E.F.**, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, pp. 31-33.
- [43] **Umur, H.**, 1998, Akışkanlar Mekaniği Ders Notları, İstanbul.
- [44] **Martinec, Z.**,1999, Department of Geophysics Faculty of Mathematics and Physics Charles Universty.
- [45] <http://www.mm.anadolu.edu.tr/kimya/deneyler1/Deney1.pdf> Kapalı Bir Sistemde Akışkan Sürtünmesinin İncelenmesi. 04 Mayıs 2010.
- [46] **Uludağ, A.**, 2007, Basıncılı döküm yönteminde kalıp sistem tasarımı ve simülasyon analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [47] **Tanışlı, M.**, 1998, Fizik Fasikül, Anadolu Üniversitesi.
- [48] **Yükselen, M.A.**, 2006, UZB362 Sıkıştırılabilir Aerodinamik Ders Notları.
- [49] **Mazumdar, M. and Das, R.M.**, 2009, Solving 3-D Navier-Stokes' Equation for Incompressible fluids using Finite-difference Method.
- [50] **Buyruk, E., Fertelli, A.**, Saptırılmış Boru Demetinde Isı Transferi ve Akış Yapılarının Belirlenmesi İçin Teorik Çalışma, DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi Cilt: 3 sayı: 2 sh. 59-68 Mayıs 2001.
- [51] **Temam, R.**, Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis Second Edition, University of Paris, Orsay, France.
- [52] **Ertürk, Ş.N.**, 2003, Sıkıştırılmaz Viskoz Dış Akış, Akışkanlar Mekaniği Ders Notları 9.Bölüm, İTÜ.
- [53] **Kelager, M.**, 2006, Lagrangian Fluid Dynamics Using Smoothed Particle Hydrodynamics, Department of Computer Science University of Copenhagen.
- [54] **Dawson, C. and Mirabito, C.**, 2008, The Shallow Water Equations, Institute for Computational Engineering and Sciences University of Texas at Austin.

- [55] **Peric, M.**, Computation of Free- Surface Flows Using Finite-Volume Method.
- [56] **Torrecilla, M.M.**, 2004, Introduction to numerical simulation of fluid flows, Technical University of Munich.
- [57] **Versteeg, H.K. and Malalasekera, W.**, 1995, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method.
- [58] **Dixit, U.S.**, Finite Element Method, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology Guwahati, India.
- [59] **Arıkan, M.A.S.**, Sonlu Elemanlar Metodunun Mühendislikte Uygulamaları, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü.
- [60] **Uçar, Y.**, 2005, 1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri, MSc.Thesis, İnönü University, Turkey.
- [61] **LeVeque, Randall, J.**, 2006, FiniteDifferenceMethodsforDifferentialEquations, University of Washington.
- [62] **Başaran, S.C. ve Çakır,G.**, Zaman Düzleminde Sonlu Farklar Yöntemi İle Mikroşerit Hatlara Uygulanan Mur Ve Dispersive(Dbc) Sınır Koşullarının Analizi,Akdeniz Üniversitesi, Teknik Bilimler M.Y.O., Elektrik - Elektronik Programı, Antalya.
- [63] **Akyıldız, H. and Çelebi, M. S.**, Numerical Computation Of Hydrodynamic Loads On Walls Of A Rigid Rectangular Tank Due To Large Amplitude Liquid Sloshing, Istanbul Technical University, İstanbul.
- [64] **Ferziger, J.H. and Peric, M.**, Computational Methods for Fluid Dynamics third, rev. Edition.
- [65] **Yükselen, M.A.**, 2006, HM504 Uygulamalı Sayısal Yöntemler Ders Notları
- [66] **Yörü, Y.**, 2000, Dikdörtgen Kesitli Kanalda Akış İpçiklerinin İncelenmesi, Osmangazi Üniversitesi Makine Mühendisliği Anabilim Dalı.
- [67] **Rogers, D.F. and Adams, J.A.**, 1989, Mathematical Elements for Computer Graphics 2nd Edition.

Öz Geçmiş

Mehmet Akif TAN, 1984 yılında Malatya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya’da tamamladı. İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Öğretmenliği bölümüne 2002 yılında başladı. Mezun olduktan sonra 2006 yılında Malatya/Merkez Hacı İbrahim Işık İlköğretim Okulu’nda göreve başladı. Fırat Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Yüksek Lisans programına 2008 yılında başladı. Halen aynı okulda görevine devam etmektedir.