

**DEĞİŞKEN PARAMETRELİ BİNOM DAĞILIMI VE
ÖZELLİKLERİ**

Muhammet Burak KILIÇ

**Yüksek Lisans Tezi
İstatistik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN
ARALIK -2010**

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN PARAMETRELİ BİNOM DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammet Burak KILIÇ
(Enstitü No: 091133108)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 Aralık 2010
Tezin Savunulduğu Tarih:

Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri	: Prof.Dr. Muammer GÖKBULUT(F.Ü.) Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK (F.Ü.)

ARALIK-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve verdiği önerileriyle beni yönlendiren kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN'a ve yine çalışmalarım esnasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR'e en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bulduğum süre içerisinde bana katkı sağlayan Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü öğretim üyeleri Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK, Sayın Yrd. Doç. Dr. Cemil ÇOLAK'a ve ayrıca İstatistik Bölümündeki yüksek lisans arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Özellikle her zaman yanımda olup, yardımlarını benden esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Maddi ve manevi desteklerinden dolayı da TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Muhammet Burak KILIÇ

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE METOD	3
2.1. Kesikli Dağılımlar	3
2.1.1. Bernoulli Dağılımı	3
2.1.2. Binom Dağılımı ve Özellikleri	3
2.1.3. Hipergeometrik Dağılım	8
2.1.4. Negatif Binom Dağılımı.....	8
2.2. Değişken Parametrelili Binom Dağılımı	9
2.3. Binom Dağılımı Yardımıyla Oluşturulan Operatörler	10
2.3.1. Bernstein Polinomları	10
2.3.2. Bernstein Çekirdeğinin Özellikleri	12
2.4. Bernstein Polinomlarının Bazı Karakteristikleri	12
2.5. Süreklilik Modülünün Özellikleri.....	18
2.6. Bernstein Polinomunda İteratif Hesaplamalar.....	21
2.7. Lineer Pozitif Operatörler ve Özellikleri	23
2.8. Bernstein Tipli Operatörler.....	30
3. BULGULAR	32
3.1. Dijital Sayı Değerli Tesadüfi Değişken.....	32
3.2. Değişken Parametrelili Binom Tesadüfi Değişkeninin Olasılıkları	34
3.3. Bernstein Polinomlarının Regresyon Tahmininde kullanılması	39
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	47
5. ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR.....	50
EKLER	52
ÖZGEÇMİŞ.....	63

ÖZET

Bu çalışmada değişken parametrelili binom dağılımının araştırılması ve uygulama alanlarının geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Çalışmada ilk olarak yaklaşım teorisinin önemli materyallerinden olan Bernstein polinomları ve karakteristikleriyle ilgili bilgiler verilmiştir. Daha sonra değişken parametrelili binom dağılımının olasılıklarının bulunmasına ilişkin yöntemler gösterilmiştir.

Çalışmada elde edilen değişken parametrelili binom dağılımının binom dağılımına yaklaşımı Bernstein tipli lineer pozitif operatörler açısından önemli bir sonuçtur. Ayrıca Bernstein polinomlarının istatistiksel özellikleri lineer olmayan regresyon modellerinde daha etkin sonuçlar vermiştir. Veri sayısı sabit kalmak koşuluyla Bernstein polinomunda iteratif sürecin kullanılması hata payını daha hızlı düşürmüştür.

Anahtar Kelimeler: Binom dağılımı, Değişken olasılıklı Bernoulli denemeleri, Bernstein polinomu, Veri analizi.

SUMMARY

DIFFERENT PARAMETERS BINOMIAL DISTRIBUTION AND ITS PROPERTIES

In this study, binomial distribution of the different parameters is aimed to investigate the development and application areas. Initially, in the study is given information about Bernstein polynomials and properties. Then, methods are given about obtained probabilities of different parameters binomial distribution.

In study, different parameter binomial distribution approaches binomial distribution. At the same time this approach is an important result for Bernstein-type linear operators. In addition, the statistical results of Bernstein polynomials have resulted in more efficient non-linear regression models. On condition the number of data remains constant, in Bernstein polynomial, using an iterative process lowered faster than margin of error.

Key Words : Binomial distribution, Different parameter Bernoulli trials, Bernstein polynomial, Data analysis.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1: n ve p değerlerine göre binom dağılımı	5
Şekil 2.2: Binom dağılımının Normal Dağılıma Yaklaşımı.....	6
Şekil 2.3: Bir dereceli Bernstein çekirdeği.....	10
Şekil 2.4: İki dereceli Bernstein çekirdeği	11
Şekil 2.5: Üç dereceli Bernstein çekirdeği	11
Şekil 3.1: $f(x)$ ile $I(2)B_n(f)(x)$ grafiği	43
Şekil 3.2: $f(x)$ ile Gompertz modelinin grafiği.....	43
Şekil 3.3: Monomoleküler model ile $f(x)$ grafiği	44
Şekil 3.4: Üstel Model ile $f(x)$ grafiği	45
Şekil 3.5: Lojistik model ile $f(x)$ grafiği.....	45
Şekil 3.6: $B_{n_1,n_2}f(x_1, x_2)$ ile $f(x_1, x_2)$ 'in grafiği.....	46

TABLolar LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2 1: n ifadesinin farklı değerlerine göre $B_n(e^{2x}; x)$ polinomu	16
Tablo 2.2: İki değişkenli Bernstein polinomu ile $f(x_1, x_2)'$ e ilişkin örnek	18
Tablo 2.3: Bernstein polinomu ile İteratif Bernstein polinomunun tahmin değerleri.....	22
Tablo 3.1 : $n = 3$ için X tesadüfî değişkeninin olasılıkları.....	33
Tablo 3.2: $p = q = 1/2$ değeri için X tesadüfî değişkeninin olasılıklarının hesaplanması.....	33
Tablo 3.3: $n = 3$ için değişken parametrelili binom yardımıyla oluşturulan X tesadüfî değişkeninin olasılıkları $\alpha = P(S_3 > 0)$	34
Tablo 3.4: $S_5, (5, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4)$ Değişken parametrelili binom dağılımı olasılıkları ile $S_5, (5, 0.3)$ binom dağılımı olasılıkları	38
Tablo 3.5: $f(x)$ fonksiyonunun Bernstein polinomu yardımıyla tahmin edilen değerleri	41
Tablo 3.6: Lineer Olmayan yöntemler ile İteratif Yöntemin HKT Karşılaştırılması	42
Ek-Tablo 1.1: İki değişkenli $f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun tahmin değerleri	52
Ek 2 : Değişken parametrelili binom dağılımının olasılıklarının bulunmasına ilişkin Matlab programı	62

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$B_n(f; x)$	: f fonksiyonunun n 'inci Bernstein polinomu
$\binom{n}{k}$	: $\frac{n!}{(n-k)!k!}$
$C[a, b]$	: $[a, b]$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$L(f; x)$	: L lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\Rightarrow$	: Düzgün yakınsama
$\sup x_n$	: x_n üst sınırların en küçüğü (supremum)

1.GİRİŞ

Olasılık ve istatistiksel analizlerde kullanılan dağılımlar arasında en önemli dağılımlardan biride binom dağılımıdır. Binom dağılımının kullanım alanı oldukça geniştir. Bilimsel alanlarda klasik örnekler atomların nükleer parçalanması veya verilen bir DNA zincirinde ortaya çıkan mutasyon sayısı vb. bu örneklerle ve diğer birçok örnek için, ortaya çıkan olaylarda binom dağılımı kullanılabilir.

Binom dağılımı ve binom tipli dağılımlar aileleri birçok istatistiksel modellerde, uyumluluk tablolarında, parametrik olmayan testlerde, yaşam analizlerinde, oyun teorilerinde vb. birçok alanda önemli kullanımlara sahiptir.

Binom dağılımı ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında, Aitken ve Gonin (1935), dört katlı popülasyondan iadeli örnekleme yöntemini göz önüne alarak iki değişkenli binom olasılık fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Krishnomoorth (1951), çok değişkenli binom dağılımı üzerine çalışmış ve Aitken ve Gonin'in iki değişkenli binom dağılımının serilerini genişletmiştir. Hamdan (1972, 1975), Hamdan ve Jensen (1976), Papageorgiou ve David (1994) çalışmalarında üç ve çok değişkenli binom dağılımlarına ilişkin koşullu dağılımlara değinmiştir. Son yıllarda, Chandrasekar ve Balakrishnan (2002), üç değişkenli binom dağılımını göz önüne almışlar ve bu dağılımın regresyon eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Aynı zamanda Hamdan (1975) iki değişkenli binom dağılımının trinomial dağılım ile olan ilişkisini incelemiştir. Mishra (1996) çalışmasında genelleştirilmiş binom dağılımlarına yer vermiştir. Marshall ve Olkin (1985) ise iki değişkenli Bernolli dağılımından yola çıkarak iki değişkenli binom dağılımına ilişkin bilgilere değinmiştir. Ayrıca iki değişkenli binom dağılımına ilişkin çeşitli makaleler Biswas ve Hwang(2002), Kocherlakota (1989), Ong (1992) tarafından da ortaya konmuştur. Le (1984) simetrik iki değişkenli binom dağılımını tıbbi araştırmalarda kümelenmiş örneklemelerin analizinde kullanmıştır. Hamdan ve Al-Bayyati (1969) iki değişkenli binom dağılımının iki değişkenli Poisson dağılımına yaklaşımına değinmiştir. Holgate (1964), Papageorgiou ve Kemp (1988) ise çalışmalarında iki değişkenli Poisson dağılımına ve bu dağılıma ilişkin tahminlere yer vermiştir.[18]

Değişken parametrelili binom dağılımının kesikli olasılık dağılımları ailesi içerisinde önemli bir yeri bulunmaktadır. Değişken parametrelili binom dağılımına sahip bir tesadüfi değişkenin temel karakterizasyonlarının hesaplanması önemli matematiksel yöntemlere dayanmaktadır. Bu özelliğinden dolayı gerek matematiksel analizde gerekse istatistiksel analizde geniş bir uygulama sahası bulmuştur.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Kesikli Dağılımlar

Olasılık teorisinde örneklem uzayının yapısına bağlı olarak genelde iki tip olasılık fonksiyonu vardır. Bazı deneylerle ya sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıda sonuçları içeren örneklem uzayları oluşturulur. Herhangi bir olasılık fonksiyonu böyle bir örneklem uzayı üzerinde tanımlanmışsa ona kesikli olasılık fonksiyonu veya olasılık fonksiyonu denir. Sonuçların sayılamayacak sonsuz sayıda oluşmasından doğan örneklem uzaylarında tanımlanmış fonksiyonlara da sürekli olasılık fonksiyonu veya olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. [3] Alacağı değeri belli bir tesadüfi deneyin sonucuna bağlı olan değişkenlere de tesadüfi değişken denir.

Kesikli dağılımlar, kesikli tesadüfi değişken ya da değişkenlerin oluşturduğu özel olasılık dağılımlarıdır. Bazı önemli kesikli dağılımlar aşağıda verilmiştir.

2.1.1. Bernoulli Dağılımı

Bernoulli dağılımı bir tesadüfi deney yapıldığında yalnızca iyi-kötü, olumlu-olumsuz, başarılı-başarısız gibi sadece iki sonuç içeriyorsa bu deneye Bernoulli deneyi denir. Bu deneyin başarılı sonuçlanma olasılığı p ise, Bernoulli dağılımının olasılık fonksiyonu şöyledir.[3]

$$P(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

2.1.2. Binom Dağılımı ve Özellikleri

Bernoulli dağılımında deney bir kez yapılıyor ve olumlu veya başarılı sonuçla ilgileniliyordu. Eğer deney bir defa değil, n defa art arda birbirinden bağımsız olmak üzere tekrarlandığında yine olumlu veya başarılı sonuçla ilgileniliyorsa, Bernoulli dağılımının genel hali ortaya çıkar ve dağılıma Binom dağılımı denir. [3]

Binom dağılımından faydalanmak isteniliyorsa aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

- Tesadüfi deney aynı koşullar altında n defa tekrarlanmalıdır.
- Her denemenin ancak iki sonucu olmalıdır.
- Her bir sonucun gerçekleşme olasılığı aynı p sayısına eşit olmalıdır.
- Her deney birbirinden bağımsız olmalıdır.

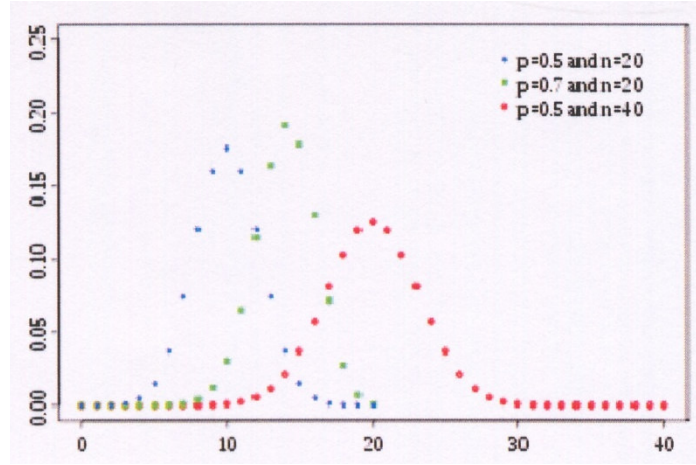
Bir binom dağılımı n tane bağımsız ve aynı denemeleri içerir. Her bir deneyin başarılı veya başarısızlık gibi iki muhtemel sonucu vardır. Her bir denemede başarılı olma olasılığı p ise X tesadüfi değişkeni başarı sayısı olmak üzere bu n tane denemeden k . denemenin olma olasılığı aşağıdaki eşitlik ile gösterilir,

$$P(X = k / n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

X tesadüfi değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu ise aşağıdaki şekilde gösterilir,

$$P(X \leq k / n, p) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Binom dağılımı ilk zamanlarda popülasyondaki bireylerin oranlarını belirlemek veya tahmin etmek amacıyla kullanılmıştır. Binom dağılımını n deneme, p başarılı olma olasılığı olmak üzere $b(n, p)$ ile gösterebiliriz. Bu dağılım $p < 0.5$ ise sağa çarpık, $p > 0.5$ ise sola çarpık, $p = 0.5$ olduğu zaman simetrik bir dağılımdır. n 'nin büyük değerleri için ise binom dağılımı np ortalamalı simetrik dağılıma yaklaşır.



Şekil 2.1.: n ve p değerlerine göre binom dağılımı

Binom dağılımının bazı önemli karakteristiklerini verelim.

Ortalama : np

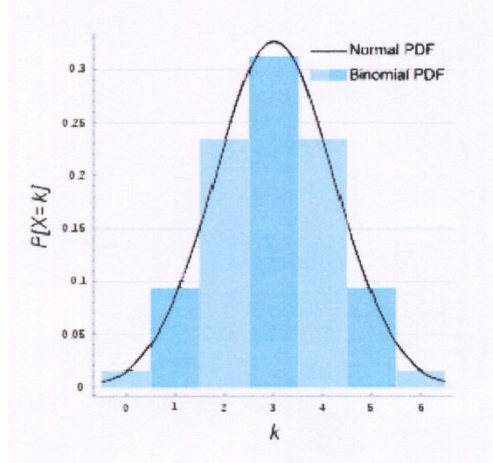
Varyans : $np(1-p)$

Standart Sapması: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Moment Çıkaran fonksiyonu: $(pe^t + (1-p))^n$

Binom dağılımının en önemli özelliklerinden birisi de normal dağılıma yaklaşımıdır. Bu özellik ilk olarak 1733’de Abraham de Moivre tarafından ispatlanmıştır. Binom tesadüfi değişkenini oluşturan Bernoulli denemelerinin sayısı oldukça büyük değerler aldığı anda olasılıkların hesaplanabilmesi zorlaşacağından bu yaklaşım olasılık hesaplamalarında büyük kolaylık sağlamıştır.

Binomun normale yaklaşımı merkezi limit teoreminin bir sonucudur. Merkezi limit teoremi, μ ortalamalı σ standart sapmaya sahip bir popülasyondan seçilmiş n birimlik bir örneklemin yeterince büyük örneklem çapı için normal dağılıma yaklaşacağını belirtmektedir. Bu durumda ortalama $\mu_{\bar{x}} = \mu$ standart sapma $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ olur. Yaklaşımın istenen seviyede olabilmesi için örnek çapının artırılması yeterli olmaktadır. Bu durumda örnek hacmi ne olmalıdır?[4] . Bu sorunun cevabı, $\bar{x}$ ’nin örnekleme dağılımının şekline bağlıdır. Genel olarak araştırmacılar $n \geq 30$ için normal dağılıma yaklaşımı kabul etmişlerdir. Bu yüzden örneklem hacmi en az 30 olduğu zaman $\bar{x}$ ’nin örnekleme dağılımı için normal dağılımı kullanabiliriz.



Şekil 2.2.:Binom dağılımının Normal Dağılıma Yaklaşımı

Örnek çapı olarak kullanılan n yeterince büyükse $b(n, p)$ binom dağılımı yerine $N(np, np(1-p))$ ile tanımlanan normal dağılım çok iyi bir yaklaşık olarak kullanılabilir.

Binom dağılımının Poisson dağılımına yaklaşımını inceleyelim. $b(n; k, p)$ olasılığın ifadesinde $n!$ sayısı bulunmaktadır ve bu sayı n 'nin artması ile hızla artar. Örneğin $10! = 3.62 \times 10^6$, $50! = 3.04 \times 10^6$, $100! = 9.33 \times 10^{157}$. Bu sebepten dolayı $b(n; k, p)$ nin n 'nin büyük değerleri için hesabını yapmak yorucu ve zaman alıcı bir iştir, buna göre sözü edilen olasılık yaklaşık olarak Poisson teoremiyle hesaplanabilir.

Teorem.2.1.(Poisson) $n \rightarrow \infty$ ve $np \rightarrow \lambda > 0$ koşulları altında aşağıdaki yaklaşım doğrudur,

$$b(k; n, p) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

İspat. $C(n, k) = n^{(k)}/k!$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak $b(k; n, p)$ olasılığı

$$b(k; n, p) = \frac{(np)^k}{k!} \frac{n^{(k)}}{n^k} (1-p)^{-k} (1-p)^{n-k}$$

biçiminde gösterelim. Yukarıda verilen koşullar altında $p \rightarrow 0$ olacağı açıktır. Bu takdirde (1.1) formülü aşağıdaki yaklaşık formüllerden elde edilir:

$$(1-p)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \frac{n^{(k)}}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1.$$

(1.1) formülüne binom dağılımına Poisson yaklaşımı veya Poisson formülü denir. Bu formülün sağ tarafında bulunan ifadeyi $\pi(k; \lambda)$ ile gösterelim:

$$\pi(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Bu dizi $\pi(k; \lambda) > 0$ ($k = 0, 1, \dots$) ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi(k; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

koşullarını sağlar, buna göre bir tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonudur.

(2.1.2) eşitliğiyle verilen olasılıkların tümüne λ parametrelili Poisson dağılımı veya Poisson olasılık fonksiyonu denir. Bir X tesadüfi değişkeninin rangı $R_x = \{0, 1, \dots\}$ ve $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ise, bu tesadüfi değişkene λ parametrelili Poisson dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ ile gösterilir.[1]

Poisson teoremi gereğince $n \rightarrow \infty$ ve $np \rightarrow \lambda$ ise (yani deneme sayısı çok büyük, başarılı olasılığı çok küçük ise), $b(k; n, p)$ olasılığı yaklaşık olarak şöyle bulunur:

$$b(k; n, p) = \pi(k; np)$$

n yeterince büyük olduğunda ($n \geq 30$) binom dağılımının normal ve poisson dağılımına yaklaşımında bazı ampric kurallar da uygulanabilir. $np < 5$ veya $nq < 5$ olduğunda poisson dağılımı kullanılabilir. $np \geq 5$ veya $nq \geq 5$ olduğu zaman normal dağılım kullanılabilir.

2.1.3.Hipergeometrik Dağılım

Kesikli dağılımlar ailesinden önemli bir dağılım olan hipergeometrik dağılımı da ele alalım. Binom dağılımı incelenirken bu dağılımın iadeli örneklem çekimi varsayımına dayandığı ve bu sayede her örneklem çekiminin olasılığının sabit kaldığı ve örneklem çekimlerinin birbirinden bağımsız olduğu bellidir. Bazı durumlarla sonlu bir kitleden iadesiz örneklem çekimi gerekli olabilir. Bu durumda hipergeometrik dağılım kullanır.

Hipergeometrik dağılım hem de binom dağılımının karakteristik şartı her denemede veya çekilişte iki ihtimalde birini şart koşar. Tesadüfi değişkenleri arasındaki en temel fark binom denemeleri bağımsız iken hipergeometrik denemeler bağımlıdır.

Genel olarak Hipergeometrik dağılım sayılabilir veri tipleri için realist bir model sağlar. Hipergeometrik dağılımın olasılık fonksiyonu ise

$$P(x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad [x = \max[0, n - (N - r)], \dots \min(r, n)]$$

N : Toplam eleman sayısı

r : Toplam eleman sayısındaki(N) başarı sayısı

n : Çekilen eleman sayısı

x : n tane elemandan çekilen başarı sayısı

2.1.4.Negatif Binom Dağılımı

Kesikli dağılımlar ailesinin bir diğer önemli dağılımı negatif binom dağılımıdır. Bir deneyde istenen sonucun meydana gelme olasılığı p , istenen sonucun meydana gelmeme olasılığı $(1-p)$, ve istenen sonucun elde edilmesi sayısına da k denilsin. Burada x tesadüfi değişkeni k 'nın meydana gelmesi için gerekli olan deney sayısını gösterir. Negatif binom dağılımının olasılık fonksiyonu ise şöyledir,

$$P(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, ..$$

2.2. Değişken Parametrelili Binom Dağılımı

Değişken parametrelili binom dağılımında olasılıkların bulunması, tekrar edilen Bernolli dağılımına dayanır, varsayalım ki k 'ıncı denemenin başarıyla sonuçlanma olasılığı p_k , başarısız sonuçla bitme olasılığı ise $q_k = 1 - p_k$ olur. Bu türlü n tane denemede başarı sayısı $S_n = X_1 + \dots + X_n$ biçiminde gösterilebilir, burada X_k 'lar bağımsız tesadüfi değişkendir ve her birisi 0 ve 1 değerlerini sırasıyla p_k ve q_k olasılığıyla alıyor. $b(k; n, p_1, \dots, p_n) = P(S_n = k)$ ile ifade edilebilir.

$u_k = b(k; n, p_1, \dots, p_n)$ olasılığı $(p_1x + q_1) \dots (p_nx + q_n)$ açılımındaki x^k 'nin katsayıdır. Olasılığın aditivlik aksiyomuna dayanarak

$$u_k = P(X_1 + \dots + X_n = k) = \sum_{a_1 + \dots + a_n = k} P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$

yazılabilir, burada $a_1 + \dots + a_n = k$ denkleminin 0 ve 1'lerden oluşan tüm çözümleri ele alınır. X_k 'ların bağımsızlığından

$$u_k = \sum_{a_1 + \dots + a_n = k} P(X_1 = a_1) \dots P(X_n = a_n)$$

bulunur, buradan da

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k x^k &= \sum_{a_1=0}^1 P(X_1 = a_1) x^{a_1} \dots \sum_{a_n=0}^1 P(X_n = a_n) x^{a_n} \\ &= (p_1x + q_1) \dots (p_nx + q_n) \end{aligned}$$

Elde edilir. Bu ise değişken parametrelili binom dağılımından olasılıkların bulunmasını ifade eder.[1]

2.3. Binom Dağılımı Yardımıyla Oluşturulan Operatörler

2.3.1. Bernstein Polinomları

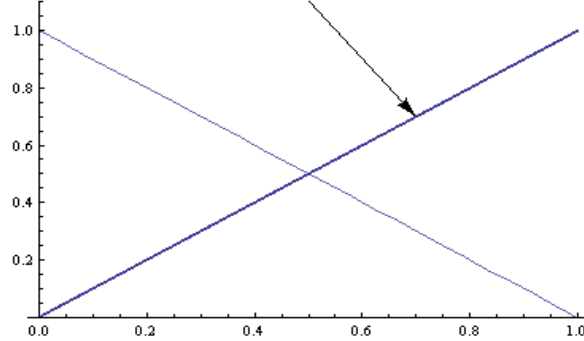
İlk olarak Sergei Natonovich Bernstein tarafından cebirsel bir polinom olarak kurulmuştur. Bernstein polinomu diğer araştırmacılar tarafından geliştirilerek Bernstein tipli polinomlar sınıfı oluşturulmuştur. Bernstein polinomları sürekli fonksiyonların polinomlarla yaklaşımı teorisinde sıkça kullanılan materyallerden birisidir. Bernstein polinomunun çekirdeği şu şekildedir:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Burada n polinomun derecesini göstermektedir. Bernstein çekirdeklerine örnekler verelim.

$$B_{0,1}(x) = (1-x), \quad B_{1,1}(x) = x$$

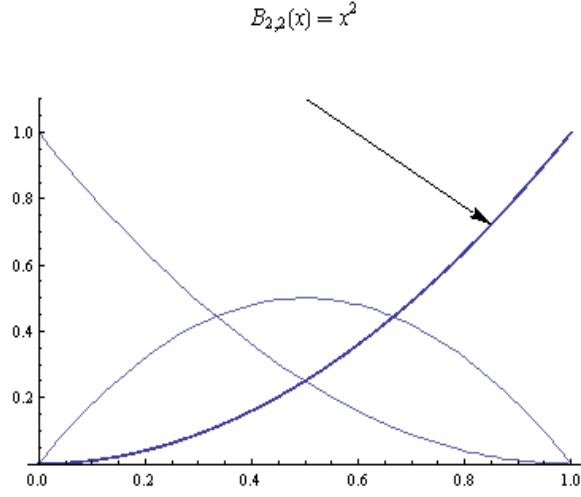
$$B_{1,1}(x) = x$$



Şekil 2.3.: Bir dereceli Bernstein çekirdeği

İkinci dereceli Bernstein çekirdeği ise

$$B_{0,2}(x) = (1-x)^2, \quad B_{1,2}(x) = 2x(1-x), \quad B_{2,2}(x) = x^2$$

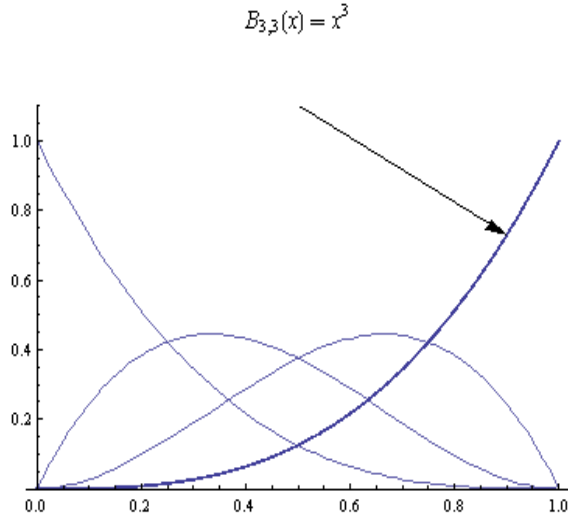


Şekil 2.4.:İki dereceli Bernstein çekirdeği

Üçüncü dereceli Bernstein çekirdeği ise

$$B_{0,3}(x) = (1-x)^3, \quad B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2,$$

$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x), \quad B_{3,3}(x) = x^3$$



Şekil 2.5:Üç dereceli Bernstein çekirdeği

ile gösterilmiş olur.

2.3.2. Bernstein Çekirdeğinin Özellikleri

Bernstein çekirdeklerinin çok sayıda özellikleri vardır. Bu özelliklerden bazıları

Simetri özelliği: $B_{i,n}(x) = B_{n-i,n}(1-x)$.

Pozitif tanımlılık özelliği: $B_{i,n}(x) \geq 0$

Olasılık özelliği: $0 \leq x \leq 1$ için $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1$

2.4. Bernstein Polinomlarının Bazı Karakteristikleri

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ve n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere n dereceli Bernstein polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f(i/n) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) f(i/n).$$

Genel olarak, Bernstein çekirdeğinin bir binom dağılımı için olasılık fonksiyonu olarak bilinir. Özellikle $B_{i,n}(x)$ n tane birbirinden bağımsız denemenin i . ıncı denemede başarılı olma olasılığıdır. Bundan dolayı Bernstein polinomunu (n, x) parametrelili binom dağılımından yararlanarak da yazabiliriz. $Y_n = S_n/n$ tesadüfı değişkeni için

$$E f(Y_n) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) f\left(\frac{i}{n}\right)$$

elde edilir. Bu durumda $E f(Y_n)$, Y_n tesadüfı değişkenin sürekli fonksiyon altındaki görüntüsünün beklenen değerini vermektedir. Bu polinom ise yazım kolaylığı bakımından

$$E f(Y_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \frac{x^i (1-x)^{n-i}}{(n-i)!} f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^n p_i q_i f\left(\frac{i}{n}\right)$$

bu şekilde ifade edilebilir.

S_n (n, x) parametrelı binom dağılıma sahip tesadıfi değişken olsun. Bu durumda binom dağılımının beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
 ES_n &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = nx \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} \\
 &= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\
 &= nx \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}(x) = nx
 \end{aligned}$$

Y_n tesadıfi değişkeni iin ;

$$EY_n = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(x) = x$$

elde edilir. Benzer şekilde $n \geq 2$ iin

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i^2 B_{i,n}(x) &= \sum_{i=0}^n i(i-1) B_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n i B_{i,n}(x) \\
 &= nx + \sum_{i=2}^n \frac{n!}{(n-i)!(i-2)!} x^i (1-x)^{n-i} \\
 &= nx + n(n-1)x^2 \sum_{i=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-i)!(i-2)!} x^{i-2} (1-x)^{n-i}
 \end{aligned}$$

$$= nx + n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j}$$

$$ES_n^2 = nx + n(n-1)x^2 = n^2x^2 + nx(1-x)$$

elde edilir. Bununla birlikte Y_n tesadüfî değişkeni için ;

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 B_{i,n}(x) = \frac{x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2$$

$$EY_n^2 = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

olur ve X tesadüfî değişkeninin varyansı ise

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

bu şekilde ifade edilir. Bu durumda S_n tesadüfî değişkeninin varyansı

$$V(S_n) = E((S_n - E(S_n))^2) = nx(1-x)$$

Y_n tesadüfî değişkeninin varyansı

$$V(Y_n) = \frac{x(1-x)}{n}$$

olur ve aynı zamanda

$$\sum_{i=0}^n (i - nx)^2 B_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^n i^2 B_{i,n}(x) - 2nx \sum_{i=0}^n i B_{i,n}(x) + n^2 x^2 \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x)$$

$$= nx + n(n-1)x^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx - nx^2 = nx(1-x).$$

Diğer taraftan

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n} - x\right)^2 B_{i,n}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \quad (2.3)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.1. (Bernstein, 1912). Her bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |B_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

İspat : S_n ile (n, x) parametrelili binom dağılımına sahip tesadüfî değişkeni gösterelim ve $Y_n = S_n/n$ olsun. Bu takdirde

$$P(S_n = i) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

olduğundan

$$Ef(Y_n) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) P(S_n = i) = B_n(f; x)$$

olur. Böylece Bernstein operatörü ile beklenti operatörü $E B_n(f; x) = Ef(Y_n)$ biçiminde gösterilebilir. Her bir $n \geq 1$ için

$$ES_n = nx, \quad ES_n^2 = n^2 x^2 + nx(1-x)$$

olduğundan $EY_n = x, \quad EY_n^2 = x^2 + x(1-x)/n$. Buradan ve $x(1-x) \leq 1/4$ eşitsizliğinden de

$$EY_n^2 \rightarrow x^2, \quad n \rightarrow \infty$$

ifadesi elde edilir.[1]

Teorem 2.2 .(Weierstrass, 1885). Her bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için öyle $p_n(x)$ polinomu vardır ki $n \rightarrow \infty$ iken

$$p_n(x) \Rightarrow f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

İspat. Her bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için $B_n(f, x)$ bir cebirsel polinomdur, buna göre bu teorem $[0,1]$ aralığı için direkt olarak Bernstein teoreminden elde edilir. Şimdi $[a, b]$ aralığı $[0,1]$ aralığından farklı olsun. Bu takdirde $h(y) = f[a + (b - a)y]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olur, buna göre öyle $q_n(y)$ polinomu vardır ki

$$q_n(y) \Rightarrow h(y), \quad y \in [0,1]$$

yaklaşımı doğrudur. Her bir $x \in [a, b]$ için $y = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$ olduğundan $p_n(x) = q_n(\frac{x-a}{b-a})$ Weierstrass teoremindeki aranan polinom olur.

Weierstrass teoremine göre; $[a, b]$ aralığında sürekli her bir fonksiyon bu aralıkta düzgün yakınsaktır.[1]

Örnek 2.1. $f(x) = e^{2x}$ olsun. $x = \frac{1}{3}$ alalım, Bu durumda, $f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{2/3} = 1.9477$

olur. $B_n(e^{2x}; x)$ ile farklı n değerleri için bu fonksiyona yaklaşalım.

$$B_n(e^{2/3}; 1/3) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1/3)^i (2/3)^{n-i} e^{2i/n}$$

Tablo 2.1: n ifadesinin farklı değerlerine göre $B_n(e^{2x}; x)$ polinomu

n	$B_n(e^{2x}; x)$
2	2,4736
5	2,1363
7	2,0793
11	1,9534

Böylece $n = 11$ değeri için fonksiyona daha iyi yaklaşıldığı görülmektedir.

İki değişkenli Bernstein polinomu ise

$$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} f\left(\frac{i_1}{n_1}, \frac{i_2}{n_2}\right) \binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2} x_1^{i_1} (1-x_1)^{n_1-i_1} x_2^{i_2} (1-x_2)^{n_2-i_2}$$

olarak tanımlanır. Bu polinom yazım kolaylığı bakımından;

$$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} f\left(\frac{i_1}{n_1}, \frac{i_2}{n_2}\right) p_{i_1} q_{i_1} p_{i_2} q_{i_2}$$

ile de ifade edilebilir.

$n_1, \dots, n_m \in N$ olmak üzere f m değişkenli bir fonksiyon olsun. Çok değişkenli Bernstein polinomu

$$B_{n_1, \dots, n_m} f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq i_j \leq n_j \\ j \in \{1, \dots, m\}}} f\left(\frac{i_1}{n_1}, \dots, \frac{i_m}{n_m}\right) \prod_{j=1}^m \binom{n_j}{i_j} x_j^{i_j} (1-x_j)^{n_j-i_j}$$

ile ifade edilir. Benzer şekilde yazım kolaylığı bakımından;

$$B_{n_1, \dots, n_m} f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq i_j \leq n_j \\ j \in \{1, \dots, m\}}} f\left(\frac{i_1}{n_1}, \dots, \frac{i_m}{n_m}\right) \prod_{j=1}^m p_{i_j} q_{i_j}$$

ifade edilebilir.

Örnek 2.2. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ olsun. $x_1, x_2 \in [0,1]$ $n_1 = n_2 = 3$ olmak üzere,

$$B_{3,3}f(x_1, x_2) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} f\left(\frac{i_1}{n_1}, \frac{i_2}{n_2}\right) p_{i_1} q_{i_1} p_{i_2} q_{i_2}$$

ile hesaplanabilir.

Tablo 2.2: İki değişkenli Bernstein polinomu ile $f(x_1, x_2)'$ e ilişkin örnek

x	y	$f(x_1, x_2)$	$B_{3,3}f(x_1, x_2)$
0	0	2	2
1/3	1/3	2,7912	2,9002
2/3	2/3	3,8955	4,0365
1	1	5,4366	5,4366

Böylece iki değişkenli Bernstein polinomunun değerleri fonksiyonun değerlerine yakın bulunmuştur.

2.5. Süreklilik Modülünün Özellikleri

Tanım 2.5..1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun $\delta > 0$ reel sayısı için $x_1, x_2 \in [a,b]$ olmak üzere

$$\omega(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

eşitliği ile tanımlanan $\omega(\delta)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Bu fonksiyon f' ye $[a,b]$ aralığında seçilen $\delta > 0$ sayısına bağlı olarak değer alacaktır. $\omega(\delta)$ fonksiyonunun özelliklerini verelim.

Lemma 2.1. Eğer $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ ise o zaman

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) .$$

Lemma 2.2. $f(x)$, $[a,b]$ de düzgün sürekli ise ancak ve ancak

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$$

Lemma 2.3. Eğer $\lambda > 0$, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur,

$$\omega(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(\delta).$$

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde sürekli f fonksiyonu ile onun Bernstein polinomu arasındaki fark ε 'dan küçük olacak şekilde en az bir n doğal sayısı için $B_n(f; x)$ polinomu bulunabilir. Bununla birlikte $|B_n(f; x) - f(x)|$ farkının süreklilik modülü yardımıyla da değerlendirilebilir.

Tanım 2.1. (Cauchy Schwartz Eşitsizliği): $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3. f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$\|f - B_n(f)\| \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.[5]

İspat: Süreklilik modülünün yardımıyla $\|f - B_n(f)\|$ tahmin edebiliriz. f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü

$$\omega_f(\delta) = \omega_f([a, b]; \delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta. \}$$

tanımlanır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \|f - B_n(f)\| &\leq \left| \sum_{i=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \omega_f\left(\left|x - \frac{i}{n}\right|\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

olup, $\omega_f\left(\left|x - \frac{i}{n}\right|\right)$ ifadesinde Lemma 2.3'ü kullanılırsa

$$\omega_f\left(\left|x - \frac{i}{n}\right|\right) = \omega_f\left(n^{\frac{1}{2}} \left|x - \frac{i}{n}\right| n^{-\frac{1}{2}}\right) \leq (1 + \sqrt{n} \left|x - \frac{i}{n}\right|) \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi (2.4) eşitsizliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} &\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sum_{i=0}^n \left[1 + \sqrt{n} \left|x - \frac{i}{n}\right|\right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (1 + \sqrt{n} \sum_{i=0}^n \left|x - \frac{i}{n}\right|) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \end{aligned}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\sum_{i=0}^n \left| x - \frac{i}{n} \right| \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

ifadesini

$$\leq \left(\sum_{i=0}^n \left| x - \frac{i}{n} \right|^2 \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right)^{1/2}$$

bu şekilde yazılabilir. (2.3.) ifadesinden dolayı

$$\sum_{i=0}^n \left| x - \frac{i}{n} \right| \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

elde edilir. Böylece

$$\|f - B_n(f)\| \leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \sqrt{n} \frac{1}{2\sqrt{n}} \right]$$

sonucu elde edilir. Bununla beraber teorem ispatlanmış olur ve süreklilik modülü kullanarak hata tahmini yapılabilir.

2.6. Bernstein Polinomunda İteratif Hesaplamalar

İstatistiksel açıdan bakıldığından bir bilgi yardımıyla, tahmin problemlerinde veya yaklaşım problemlerinde istenilen sonuçlar elde edilebilir. Bu açıdan bakıldığında da bir ağırlık fonksiyonu kullanılarak bilinmeyen bir fonksiyon tahmin edilebilir. Bu ağırlık fonksiyonu da değiştirilirse veya yeniden inşa edilirse daha iyi bir sonuç elde edilebilir.

Polinomsal yaklaşımların beklenen değeri yani tahmin edilen $Q_n(f, x)$ n 'nin büyük değerleri için fonksiyona yaklaşmalıdır. $E\{Q_n(f, x)\} \rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$ olmalıdır. Burada ise hatayı H ile gösterelim. Bu durumda $H(x) = B_n(f)(x) - f(x)$ olur. Elde edilen $H(x)$ 'e tekrar Bernstein polinomu operatörünü kullanırsak $H_n(f)(x) = B_n(B_n(f) - f)(x) = B_n^2(f)(x) - B_n(f)(x)$ ifadesi elde edilir. İteratif Bernstein polinom operatörünün birinci iterasyonunu $I(1)B_n(f)(x)$ ile gösterirsek [5]

$$\begin{aligned} I(1)B_n(f)(x) &= B_n(f)(x) - H_n(f)(x) = 2 B_n(f)(x) - B_n^2(f)(x) \\ &= 1 - (1 - B_n)^2(f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. İteratif Bernstein Polinom operatörü işletim sürecini ilerletirsek ikinci iterasyon aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} I(2)B_n(f)(x) &= I(1)B_n(f)(x) - B_n(I(1)B_n(f)(x) - (f)(x)) \\ &= 2 B_n(f)(x) - B_n^2(f)(x) - 2B_n^2(f)(x) + B_n^3(f)(x) + B_n(f)(x) \\ &= 3 B_n(f)(x) - 3B_n^2(f)(x) + B_n^3(f)(x) = 1 - (1 - B_n)^3(f)(x) \\ I(2)B_n(f)(x) &= 1 - (1 - B_n)^3(f)(x) \end{aligned}$$

Bu iteratif süreci benzer olarak aynı şekilde genelleştirilmiş hali k. İterasyon aşağıdaki gibi olur.

$$I(i)B_n(f(x)) = 1 - (1 - B_n)^{i+1}(f)(x), \quad i = 0, 1, \dots$$

Aşağıdaki örnekte ise Bernstein polinomsal yaklaşım operatörü ile iteratif Bernstein polinomu yaklaşımı karşılaştırılması aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3. : $f(x) = e^{2x}$ olsun. $x \in [0,1]$ olsun. Bu durumda tek değişkenli Bernstein polinomu ile, İteratif Bernstein polinomunun tahmin değerlerini aşağıdaki tabloda karşılaştıralım.

Tablo 2.3.: Bernstein polinomu ile İteratif Bernstein polinomunun tahmin değerleri

x	$f(x)$	$B_3(f, x)$	$I(1)B_3(f, x)$	$I(2)B_3(f, x)$
0	1	1	1	1
1/3	1,9477	2,2787	2,1316	2,0499
2/3	3,7936	4,3453	4,1001	3,9639
1	7,3891	7,3891	7,3891	7,3891

İteratif Bernstein polinomu operatörü fonksiyona yaklaşımda daha iyi bir sonuç vermiştir. Sonuç olarak İteratif Bernstein Polinomuyla ilgili en önemli özellik;

$$|I(i)B_n(f, x) - f(x)| \leq |B_n(f, x) - f(x)|$$

ifadesi olmaktadır.[5]

2.7. Lineer Pozitif Operatörler ve Özellikleri

Operatörler olasılık teorisinde, fonksiyonel analiz vb. birçok alanda yaygın kullanımlara sahiptir. Operatör kullanımı sayısal yöntemlerin çeşitli teorem ve sonuçlarının belirlenmesinde de önemli bir ihtiyaç konusu olmuştur.

Bu anlamda Hacıyev vd (1995) de lineer pozitif operatörlerin tanımını ve bazı önemli özelliklerini vermişlerdir.[19]

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. $L: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall f \in X$ fonksiyonuna karşılık gelen bir $g \in Y$ fonksiyonu varsa, L

$$g(x) = L(f; x)$$

şeklinde bir operatördür. L operatörünün tanım bölgesi $X = D(L)$, değer kümesi $R(L)$ ile ifade edilir.

Tanım 2.2. X bir vektör uzay olsun. $\forall f, g \in X$ için $a, b \in \mathbb{R}$ ve $af + bg \in X$ olmak üzere L operatörü

$$L(af + bg; x) = aL(f; x) + bL(g; x)$$

koşulunu sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

$c \neq 0$ için L lineer bir operatör olduğundan

$$L(0; x) = L(c0; x) = cL(0; x)$$

elde edilir. Buradan da ;

$$L(0; x) = 0$$

olduğu görülür.

Aynı zamanda B_n Bernstein operatöründe lineer bir operatör olduğu gösterilebilir. Her $f, g \in [0,1]$ için, λ, μ skalerler olmak üzere ;

$$B_n(\lambda f + \mu g) = \lambda B_n(f) + \mu B_n(g)$$

olduğundan Bernstein operatörü bir lineer operatördür.

Lineer operatörlerin çok önemli bir alt sınıfı da lineer pozitif operatörlerdir.

Tanım 2.3. $X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer bir operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa bu lineer operatöre lineer pozitif operatör denir. L lineer bir operatörü için $f \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ sağlanır.

Lineer pozitif operatörler aynı zamanda monotondur. Gerçekten her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $f(x) - g(x) \geq 0$ 'dır. L Operatörü pozitif olduğundan

$$L(f - g; x) \geq 0$$

olur ve L operatörünün lineerlik özelliğinden dolayı

$$L(f, x) - L(g, x) \geq 0$$

Elde edilir. Bu da Lineer pozitif operatörlerin monoton olduğunu gösterir. Bununla birlikte B_n Bernstein operatörünün de monoton olduğu gösterilebilir.

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [0,1] \Rightarrow m \leq B_n(f; x) \leq M, \quad x \in [0,1]$$

Özellikle $m = 0$ seçilirse ;

$$f(x) \geq 0, \quad x \in [0,1] \Rightarrow B_n(f; x) \geq 0, \quad x \in [0,1]$$

elde edilir.

Tanım 2.4.: $L: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall f \in X$ için

$$\|L(f, x)\| \leq c\|f\|$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer operatör adı verilir. Bu c sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir.

$$\|L\| = \inf \{c : \|L(f, x)\| \leq c\|f\|\}$$

şeklinde gösterilir. L lineer operatörü için

$$\|L\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|}{\|f\|}$$

$$\|L\| = \sup_{\|f\|=1} \|L(f, x)\|$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi ise yaklaşım teorisinin önemli materyalleri olan, Bernstein, Valle-Poussin, King, Korovkin operatörlerini beklenti operatörü biçiminde gösterilerek, bazı önemli teoremler aşağıdaki gibidir.

1. Her bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için $B_n(f, x)$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$B_n(f, x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C(n, i) x^i (1-x)^{n-i}, \quad n \geq 1$$

Bu operatöre Bernstein operatörü

$$B_{i,n}(x) = C(n, i) x^i (1-x)^{n-i}$$

fonksiyonuna ise Bernstein çekirdeği olduğunu bilinir. Her bir $f \in C[0,1]$ için Bernstein operatörünün değeri cebirsel bir polinomdur. [1]

$C[a, b]$ ile sürekli fonksiyonlar sınıfını gösterilerek, aşağıdaki Lemmayı verilebilir.

Lemma 2.4. $f \in C[a, b]$, X_n ise dağılım fonksiyonu n ve $\theta \in [a, b]$ parametrelerine bağlı tesadüfî değişken olsun. Eğer bu tesadüfî değişkenler $n \rightarrow \infty$ iken

$$E(X_n - \theta)^2 \Rightarrow 0, \quad \theta \in [a, b]$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman ;

$$Ef(X_n) \Rightarrow f(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$

sağlanır. ($\Rightarrow$ simgesiyle $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsama gösterilmektedir.)

Böylece Bernstein operatörünün yaklaşım özellikleri

$$EX_n \Rightarrow \theta, \quad EX_n^2 \Rightarrow \theta^2$$

koşullarının elde edilmesini sağlar. Bu koşullar altında ise

$$E(X_n - \theta)^2 = EX_n^2 - 2\theta EX_n + \theta^2 \Rightarrow 0, \quad \theta \in [a, b]$$

sonucu elde edilir.[1]

2. $C_{2\pi}(R)$ ile $R = (-\infty, \infty)$ de sürekli ve 2π periyotlu fonksiyonlar sınıfını gösterilerek ve her bir $f \in C_{2\pi}(R)$ fonksiyonu için $V_n(f, x)$ operatörü şöyle tanımlanır.

$$V_n(f, x) = \frac{1}{2\pi k_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt$$

$$k_n = 2^{-2n} C \binom{2n}{n}.$$

Teorem 2.4. (Vallee-Poussin, 1911). Her bir $f \in C_{2\pi}(R)$ fonksiyonu için

$$\sup_{x \in R} |V_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

İspat. $V_n(f, x)$ operatörünü beklenti operatörü biçiminde göstermek için her bir $n = 1, 2, \dots$ ve sabit tutulan $x \in R$ için

$$q_n(t, x) = \frac{1}{2\pi k_n} \cos^{2n} \frac{t-x}{2}, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

fonksiyonu ele alınır. Bu fonksiyon aynı zamanda Vallee-Poussin çekirdeği

$$q_n(t, x) \geq 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t, x) dt = 1$$

koşullarını sağlar. Gerçekten $\cos^{2n} \frac{t-x}{2}$, 'nin 2π periyotlu çift fonksiyon olduğunu ve

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y dy = \frac{\pi}{2} k_n$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2\pi k_n \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t, x) dt &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \cos^{2n} \left(\frac{y}{2} \right) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{y}{2} \right) dy \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{y}{2} \right) dy = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y dy = 2\pi k_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre yukarıda verilen koşullara göre $q_n(t, x)$ bir Y_n tesadüfî değişkeninin yoğunluk fonksiyonu olup, $V_n(f, x) = Ef(Y_n)$ şeklinde gösterilebilir.[1]

3. Her bir $f \in C[0, 1]$ fonksiyonu için

$$A_n(f, x) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) a_{ni}(x)$$

olsun, burada $a_{ni}(x)$ fonksiyonları

$$\prod_{i=1}^n [p_i(x)z + 1 - p_i(x)] = \sum_{i=1}^n a_{ni}z^i \quad (2.5)$$

eşitliği ile tanımlanır ve her bir $p_i: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

Teorem 2.5.(King 1966). Eğer $n \rightarrow \infty$ iken

$$n^{-1}[p_1(x) + \dots + p_n(x)] \Rightarrow x, \quad x \in [0,1] \quad (2.6)$$

ise o zaman ;

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |A_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur.

İspat. $X_1, \dots, X_n$ bağımsız tesadüfî değişkenler ve sabit tutulan $x \in [0,1]$ için her bir $P(X_i = 1) = p_i(x)$, $P(X_i = 0) = q_i(x) = 1 - p_i(x)$ olsun ; X_i 'nin üreten fonksiyonu $Ez^{X_i} = p_i(x)z + q_i(x)$ olduğundan $S_n = X_1 + \dots + X_n$ toplamının üreten fonksiyonu (2.5) eşitliğinin sol tarafında bulunan ifadeye eşit olacaktır, buna göre $P(S_n = i) = a_{ni}(x)$ olur. Bu durumda $Y_n = S_n/n$ tesadüfî değişkeni için

$$Ef(Y_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) P(S_n = i) = A_n(f, x)$$

yazılabilir. (2.6) şartı kullanılırsa;

$$E(Y_n) = n^{-1}(EX_1 + \dots + EX_n) = n^{-1}(p_1(x) + \dots + p_n(x)) \Rightarrow x$$

$$EY_n^2 = [EY_n]^2 + VarY_n$$

$$= [EY_n]^2 + n^{-2} \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(x).$$

Sağ taraftaki birinci toplam $n \rightarrow \infty$ iken x^2 , ye, ikinci toplam ise $p_i(x)q_i(x) \leq 1$ eşitsizliği ise sıfıra yaklaşır, Buna göre $EY_n^2 \rightarrow x^2$, $x \in [0,1]$ olur.[1]

4. Her bir $f \in C_{2\pi}(R)$ fonksiyonu için $K_n(f, x)$ operatörü

$$K_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_n(t)dt$$

olacak şekilde tanımlansın, burada

$$g_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \rho_{in} \cos it, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

biçiminde tanımlanır, $\rho_{1n}, \dots, \rho_{nn}$ ise öyle reel sayılardır ki $g_n(t) \geq 0, -\pi \leq t \leq \pi$ koşulu sağlanır.

$g_n(t) \geq 0$ ve $\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)dt = 1$ olduğundan $g_n(t)$ bir Y_n tesadüfî değişkeninin yoğunluk fonksiyonu olup, $K_n(f, x) = Ef(x + Y_n)$ biçiminde gösterilebilir.[1]

Teorem 2.6.(Korovkin, 1959). Eğer $f \in C_{2\pi}(R)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{1n} = 1$ ise, o zaman

$$\sup_{x \in R} |K_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

İspat. 1, $\cos kx, \sin kx, k \geq 1$ Fonksiyonları $[-\pi, \pi]$ aralığında ortagonaldır. Buradan da $n \rightarrow \infty$ için

$$E \sin(x + Y_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+t) g_n(t)dt = \rho_{1n} \sin x \rightarrow \sin x$$

$$E \cos(x + Y_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+t) g_n(t)dt = \rho_{1n} \cos x \rightarrow \cos x$$

bulunur.[1]

2.8. Bernstein Tipli Operatörler

Bernstein polinomlarıyla tip olarak aynı özelliklere sahip polinomlarla ilgili de literatürde pek çok çalışma yapılmıştır. Bu operatörler literatürde Bernstein tipli operatörler olarak bilinir. Bazı Bernstein tipli operatörleri verelim.

Szasz-Mirakiyan : $[0, \infty)$ için

$$S_n(f, x) = \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) e^{-nx} \frac{(nx)^i}{i!}$$

şeklinde tanımlanır. Szasz-Mirakiyan operatörü Bernstein polinomu yaklaşımının bir uzantısıdır. Szasz-Mirakiyan operatörünün çekirdeği

$$P_{i,n}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^i}{i!}$$

olarak ifade edilebilir. $P_{i,n}(x)$ nx Ortalamalı Poisson tesadüfî değişkenine sahip olasılığı ifade etmektedir. Bu operatör içinde iteratif açılım yapılabilir. Hatayı H ile ifade edilirse;

$$H(x) = S_n(f)(x) - f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) P_{i,n}(x) - f(x) \quad x \in [0, \infty)$$

Elde edilen $H(x)$ 'e tekrar Szasz-Mirakiyan operatörünü kullanılırsa

$$\begin{aligned} H_n(f)(x) &= S_n(S_n(f) - f)(x) = S_n^2(f)(x) - S_n(f)(x) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) S_n P_{i,n}(x) - f(x) \quad x \in [0, \infty) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bununla birlikte ikinci Szasz-Mirakiyan iteratifi kullanılırsa

$$S_n^{(2)} f(x) = S_n f(x) - S_n \{H(S_n f)\}(x), \quad x \in [0, \infty)$$

Bu şekilde tanımlanır. [6]

Diğer taraftan Meyer-Konig ve Zeller tarafından tanımlanan

$$M_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}, \quad 0 \leq x < 1$$

Operatör ise Meyer-Konig-Zeller olarak bilinir. Cheney ve Sarma ise Meyer-Konig Zeller operatörünü Bernstein operatörünün kuvvet serisi olarak tanımlamışlardır.[17]

$$M_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}$$

Meyer-Konig ve Zeller operatörünü Negatif binom dağılımı yardımıyla da elde edilebilir.

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n$$

$r-1 = k$ denilirse;

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} p^{k+1} q^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1} q^k$$

$(*) \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$ olduğundan

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} p^{n+1} q^k$$

$p = (1-x)$ ve $q = x$ ise

$$M_n(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} f\left(\frac{k}{k+n}\right) x^k$$

ifadesi elde edilir.

3. BULGULAR

3.1. Dijital Sayı Değerli Tesadüfi Değişken

$S_n, (n, p)$ parametrelili binom tesadüfi değişkeni olsun. X tesadüfi değişkeninin durum uzayı $\{1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ olmak üzere olasılıkları

$$P\left(X = \sum_{k=0}^n a_k 2^k\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n a_k P(S_n = k)$$

binom olasılıkları yardımıyla tanımlanır. Burada a_k ile 0 ya da 1 değeri gösterilmiştir.

Benzer şekilde X tesadüfi değişkeninin olasılıklarını $S_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ değişken parametrelili binom tesadüfi değişkeni olmak üzere

$$P\left(X = \sum_{k=0}^n a_k 2^k\right) = \frac{1}{\alpha} \prod_{k=0}^n a_k(p_k)$$

eşitliği ile de tanımlanabilir. Burada $\alpha = P(S_n > 0)$ olasılığını göstermektedir ve

$$a_k(p_k) = \begin{cases} p_k, & a_k = 1 \\ q_k, & a_k = 0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır.

Ayrıca X tesadüfi değişkeninin olasılıklarını Bernstein polinomunun terimleri olarak da alınabilir. $f \in C(0,1)$ olmak üzere olasılıklar aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$P\left(X = \sum_{k=0}^n a_k 2^k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(p)} \sum_{k=0}^n a_k f(k/n) P(S_n = k).$$

Örnek olarak $n = 3$ alırsak X tesadüfi değişkeninin durum uzayı $\{1, 2, \dots, 15\}$ olup olasılık değerleri aşağıdaki tablodaki gibi olacaktır.

Tablo 3.1 : $n = 3$ için X tesadüfi değişkeninin olasılıkları

$X = j$	a_0	a_1	a_2	a_3	$P(X = j)$
1	1	0	0	0	$q^3/8$
2	0	1	0	0	$3pq^2/8$
3	1	1	0	0	$(q^3 + 3pq^2)/8$
4	0	0	1	0	$3p^2q/8$
5	1	0	1	0	$(q^3 + 3p^2q)/8$
6	0	1	1	0	$(3pq^2 + 3p^2q)/8$
7	1	1	1	0	$(q^3 + 3pq^2 + 3p^2q)/8$
8	0	0	0	1	$p^3/8$
9	1	0	0	1	$(q^3 + p^3)/8$
10	0	1	0	1	$(3pq^2 + p^3)/8$
11	1	1	0	1	$(q^3 + 3pq^2 + p^3)/8$
12	0	0	1	1	$(3p^2q + p^3)/8$
13	1	0	1	1	$(q^3 + 3p^2q + p^3)/8$
14	0	1	1	1	$(3pq^2 + 3p^2q + p^3)/8$
15	1	1	1	1	$(q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3)/8$

Yukarıdaki tabloda gösterilen olasılıkların $p = q = 1/2$ değeri için hesabı aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.2: $p = q = 1/2$ değeri için X tesadüfi değişkeninin olasılıklarının hesaplanması

$X = j$	$P(X = j)$	$X = j$	$P(X = j)$	$X = j$	$P(X = j)$
1	0.015625	6	0.09375	11	0.078125
2	0.046875	7	0.109375	12	0.0625
3	0.0625	8	0.015625	13	0.078125
4	0.046875	9	0.03125	14	0.109375
5	0.0625	10	0.0625	15	0.125

Benzer şekilde yine $n = 3$ için değişken parametrelili binom dağılımının olasılıkları yardımı ile kurulan X tesadüfi değişkeninin olasılıkları aşağıdaki tabloda hesaplanmıştır.

Tablo 3.3: $n = 3$ için değişken parametrelili binom yardımıyla oluşturulan X tesadüfi değişkeninin olasılıkları $\alpha = P(\mathcal{S}_3 > 0)$.

$X = j$	a_0	a_1	a_2	a_3	$P(X = j)$
1	1	0	0	0	$p_1 q_2 q_3 q_4 / \alpha$
2	0	1	0	0	$q_1 p_2 q_3 q_4 / \alpha$
3	1	1	0	0	$p_1 p_2 q_3 q_4 / \alpha$
4	0	0	1	0	$q_1 q_2 p_3 q_4 / \alpha$
5	1	0	1	0	$p_1 q_2 p_3 q_4 / \alpha$
6	0	1	1	0	$q_1 p_2 p_3 q_4 / \alpha$
7	1	1	1	0	$p_1 p_2 p_3 q_4 / \alpha$
8	0	0	0	1	$q_1 q_2 q_3 p_4 / \alpha$
9	1	0	0	1	$p_1 q_2 q_3 p_4 / \alpha$
10	0	1	0	1	$q_1 p_2 q_3 p_4 / \alpha$
11	1	1	0	1	$p_1 p_2 q_3 p_4 / \alpha$
12	0	0	1	1	$q_1 q_2 p_3 p_4 / \alpha$
13	1	0	1	1	$p_1 q_2 p_3 p_4 / \alpha$
14	0	1	1	1	$q_1 p_2 p_3 p_4 / \alpha$
15	1	1	1	1	$p_1 p_2 p_3 p_4 / \alpha$

3.2. Değişken Parametrelili Binom Tesadüfi Değişkeninin Olasılıkları

$\mathcal{S}_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ değişken parametrelili binom dağılımına sahip olsun. $P(\mathcal{S}_n = k)$ olasılığı $(p_1 x + q_1) \dots (p_n x + q_n)$ çarpımında x^k 'nin katsayısıdır. [1] Bu katsayı farklı bir formda rahatlıkla ifade edilebilir. $\{\mathcal{S}_n = 0\}$ olayı, gerçekleştirilen birbirinden farklı n tane Bernoulli denemesinin tamamının başarısız olması olduğundan olayın gerçekleşme olasılığı aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$P(\mathcal{S}_n = 0) = q_1 \cdots q_n$$

$\{\mathcal{S}_n = 1\}$ olayı gerçekleştirilen birbirinden farklı n tane Bernoulli denemesinde herhangi bir tanesinin başarılı olma olayı olduğundan olasılığı aşağıdaki formda yazılabilir,

$$P(\mathcal{S}_n = 1) = q_1 \cdots q_n \left\{ \frac{p_1}{q_1} + \cdots + \frac{p_n}{q_n} \right\}$$

$\{\mathcal{S}_n = 2\}$ olayı için ise iki tane başarı söz konusu olduğundan n tane denemenin mümkün olan tüm ikili durumları göz önünde tutularak olasılık aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$P(\mathcal{S}_n = 2) = q_1 \cdots q_n \left\{ \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{p_{n-1} p_n}{q_{n-1} q_n} \right\}$$

$\{\mathcal{S}_n = k\}$ olayını incelersek n tane denemenin mümkün olan k tanesi göz önünde bulundurulmalıdır. Yazım kolaylığı bakımından

$$\frac{p_j}{q_j} = \rho_j$$

İfadesi kullanılırsa $\{\mathcal{S}_n = k\}$ olayının olasılığı ;

$$P(\mathcal{S}_n = k) = q_1 \cdots q_n \sum_{j_1 \neq \cdots \neq j_k} \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_k}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\Lambda(k) = \sum_{j_1 \neq \cdots \neq j_k} \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_k}$$

ile gösterilirse olasılık aşağıdaki formda yazılabilir,

$$P(\mathcal{S}_n = k) = q_1 \cdots q_n \Lambda(k)$$

Burada dikkat edilecek olursa $\Lambda(0) = 1$ ve

$$\Lambda(n) = \frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_n}$$

olacağı görülebilir.

Teorem 3.1 $\mathcal{S}_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ değişken parametrelili binom dağılımına sahip olsun. $p_1, \dots, p_n$ olasılıkları

$$\bar{p} = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$$

olmak üzere yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değeri için $(\bar{p} - \varepsilon, \bar{p} + \varepsilon)$ aralığına düştüğünde $\mathcal{S}_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ dağılımı $(n, \bar{p})$ parametrelili binom dağılımına yaklaşacaktır. Arada kalan hata payı ise aşağıdaki üst sınıra sahiptir,

$$|P(\mathcal{S}_n = k) - P(S_n = k)| < (2^k - 1)(2^{n-k} - 1) \varepsilon^2$$

İspat : Bu yakınsamanın doğruluğunu gösterebilmek için

$$|P(\mathcal{S}_n = k) - P(S_n = k)|$$

her bir $|p_k - \bar{p}| < \varepsilon$ şartı altında değerlendirilirse yukarıdaki mutlak değer

$$\left| q_1 \cdots q_n \Lambda(k) - \binom{n}{k} \left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \right)^k \left(\frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n} \right)^{n-k} \right|$$

şeklinde olup her bir $p_k < \bar{p} + \varepsilon$ olmak üzere

$$|P(\mathcal{S}_n = k) - P(S_n = k)| < \left| \binom{n}{k} (\bar{p} + \varepsilon)^k (\bar{q} + \varepsilon)^{n-k} - \binom{n}{k} (\bar{p})^k (\bar{q})^{n-k} \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ;

$$|P(\mathcal{S}_n = k) - P(S_n = k)| < \binom{n}{k} |(\bar{p} + \varepsilon)^k (\bar{q} + \varepsilon)^{n-k} - (\bar{p})^k (\bar{q})^{n-k}|$$

olup $(\bar{p} + \varepsilon)^k$ ve $(\bar{q} + \varepsilon)^{n-k}$ terimler açılacak olursa eşitsizliğin sağ tarafındaki mutlak değer

$$\left| \sum_j \binom{k}{j} (\bar{p})^j \varepsilon^{k-j} \sum_i \binom{n-k}{i} (\bar{q})^i \varepsilon^{n-k-i} - (\bar{p})^k (\bar{q})^{n-k} \right| <$$

$$< \sum_{j \neq k} \binom{k}{j} (\bar{p})^j \varepsilon^{k-j} \sum_{i \neq n-k} \binom{n-k}{i} (\bar{q})^i \varepsilon^{n-k-i}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadede $\bar{p} \leq 1$ olduğundan

$$(\bar{p})^j \varepsilon^{k-j} \leq 1 \text{ ve } (\bar{q})^i \varepsilon^{n-k-i} \leq 1$$

olup

$$\sum_{j \neq k} \binom{k}{j} (\bar{p})^j \varepsilon^{k-j} \sum_{i \neq n-k} \binom{n-k}{i} (\bar{q})^i \varepsilon^{n-k-i} < \sum_{j \neq k} \binom{k}{j} \sum_{i \neq n-k} \binom{n-k}{i} \varepsilon^2$$

$$< (2^k - 1)(2^{n-k} - 1) \varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise her bir k için

$$|P(\mathcal{S}_n = k) - P(S_n = k)| \rightarrow 0$$

farkının değerlendirilmesini sağlar. Böylece $\varepsilon \rightarrow 0$ olmak üzere, bu son ifadeye dayanılarak $\mathcal{S}_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ değişken parametrelili binom dağılımının, $S_n, (n, \bar{p})$ parametrelili binom dağılımına yaklaştığı görülür.

$n = 5$ için değişken parametrelili binom dağılımı olasılıkları $p_1 = 0.2, p_2 = 0.25, p_3 = 0.3, p_4 = 0.35, p_5 = 0.4, \bar{p} = 0.3$ olmak üzere $P(\mathcal{S}_5 = k)$ olasılıklarını hesaplayalım.

Tablo 3.4: $\mathcal{S}_5, (5, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4)$ Değişken parametrelili binom dağılımı olasılıkları ile $\mathcal{S}_5, (5, 0.3)$ binom dağılımı olasılıkları

k	$\mathcal{S}_5, (5, 0.3)$	$\mathcal{S}_5, (5, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4)$
0	0.1681	0.1638
1	0.3601	0.3631
2	0.3087	0.3131
3	0.1323	0.1311
4	0.0283	0.0267
5	0.0024	0.0021

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü $\mathcal{S}_5$ dağılımının olasılıkları $\mathcal{S}_5$ binom dağılımının olasılıklarına yakın olarak bulunmuştur.

Bernstein polinomunu (n, p) parametrelili binom dağılımı yerine $\mathcal{S}_n, (n, p_1, \dots, p_n)$ değişken parametrelili binom dağılımı kullanılabilir. Bu durumda Bernstein polinomu şu şekilde ifade edilebilir;

$$\mathcal{B}_n(f) = E \left\{ f\left(\frac{\mathcal{S}_n}{n}\right) \right\}$$

Bu durumda $\mathcal{B}_n(f)$ polinomu $f(\bar{p})$ değerine düzgün yaklaşacaktır;

$$\mathcal{B}_n(f) \Rightarrow f(\bar{p}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

3.3. Bernstein Polinomlarının Regresyon Tahmininde kullanılması

Fonksiyonel ilişkinin bilinmediği ya da bilinen parametrik yapılardan birine uymadığı durumlar için birçok regresyon yöntemi geliştirilmiştir. Parametrik olmayan regresyon yaklaşımında sabit düzen (fixed design) ve rasgele düzen (random design) regresyon modeli olmak üzere iki tür model söz konusudur. Sabit düzen modelinde veri noktaları, ordinatları belirleyici değerler olarak düşünülür. Bu ordinat değerler, planlanmış bir denemede genellikle araştırmacı tarafından seçilirler. Bu şekilde alınan örnek noktalar eşit uzaklıkta olur. Eğer veri noktaları, X rasgele değişkeninin bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değerleri ise model rasgele düzen modelidir.

$(x_i, y_i) \ i = 1, 2, \dots, n$), gözlem çifti olmak üzere regresyon modeli, aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_i = f(x_i; \theta) + \varepsilon_i$$

Burada f bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki link fonksiyonudur. Parametre tahmini ise [2]

$$f_{k+1}(T^{k+1}\theta) = \sum_u w(T\theta - u) f_k(T^k u)$$

iteratif sürecinin uygun koşullar altında kullanılmasıyla bulunur.

Lineer olmayan regresyon yöntemlerinden büyüme modeli olarak bilinen Gompertz modeli aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$Y = \alpha \exp \{-e^{-k(x-\gamma)}\}$$

Bir diğer model olan Monomoleküler model

$$Y = \alpha(1 - e^{-k(x-\gamma)})$$

şekilde tanımlanır. Üstel model,

$$Y = e^{-k(x-\gamma)}$$

şekilde tanımlanır. Lojistik model ise

$$Y = \alpha / (1 + \beta e^{-kx})$$

şekilde tanımlanır. Bu modellerle ilgili bazı parametreler

α : En yüksek büyüklüğe ait asimptot ile ilgili bir parametredir.

β : Büyüme eğrisini tanımlayan bir sabit ile ilişkili bir parametredir.

k : Büyüme hızı ya da oranı ile ilgili bir parametredir.

Çalışmada sabit düzen regresyon modeli ele alınarak, lineer olmayan regresyon yöntemlerinden, Gompertz modeli, Monomoleküler modeli, Üstel model, Lojistik model ile Bernstein polinomunun iteratif adımlarıyla karşılaştırılmıştır.

Hipotetik bir veri kümesi üzerinde de Lineer olmayan regresyon yöntemleri ile Bernstein polinomu yardımıyla elde edilen iteratif adımların nasıl sonuçlar verdiği aşağıda incelenmiştir. İncelemede Richards eğrisi,

$$f(x) = \alpha [1 - (m - 1)e^{-k(x-\gamma)}]^{\frac{1}{(m-1)}}$$

alınmış ve parametreleri $\alpha = 2$, $m = 1,5$, $k = 0.5$, $\gamma = 0$ olarak seçilmiştir,

$$Y = f(x) = 2[1 - \frac{1}{2}e^{-(\frac{1}{2})x}]^2$$

Bernstein polinomunun iteratif hesaplamasında kullanılan recurrent eşitlik ise aşağıdaki şekildedir;

$$I(i)B_n(f(x)) = 1 - (1 - B_n)^{i+1}(f)(x), \quad i = 0, 1, \dots$$

Tablo 3.5: $f(x)$ fonksiyonunun Bernstein polinomu yardımıyla tahmin edilen değerleri

x	$f(x)$	$B_n(f; x)$	$I(1)B_n(f(x))$	$I(2)B_n(f(x))$
0	0.5	0.5	0.5	0.5
1/20	0.5249	0.5250	0.5250	0.5250
2/20	0.5499	0.5499	0.5499	0.5499
3/20	0.5748	0.5748	0.5748	0.5748
4/20	0.5996	0.5995	0.5996	0.5996
5/20	0,6244	0,6242	0,6242	0,6242
6/20	0,6489	0,6487	0,6487	0,6488
7/20	0,6734	0,6730	0,6731	0,6732
8/20	0,6976	0,6973	0,6973	0,6974
9/20	0.7218	0,7213	0,7214	0,7214
10/20	0,7456	0,7451	0,7452	0,7453
11/20	0,7693	0,7688	0,7689	0,7690
12/20	0,7928	0,7922	0,7923	0,7924
13/20	0,8159	0,8154	0,8155	0,8156
14/20	0,8389	0,8384	0,8385	0,8386
15/20	0,8616	0,8611	0,8612	0,8613
16/20	0,8840	0,8836	0,8837	0,8838
17/20	0,9061	0,9058	0,9059	0,9060
18/20	0,9280	0,9278	0,9278	0,9279
19/20	0,9496	0,9495	0,9495	0,9495
1	0,9709	0,9709	0,9709	0,9709

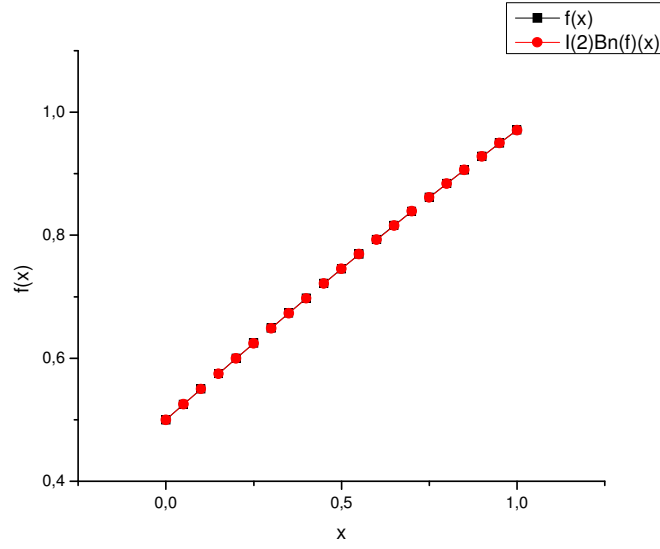
Richards eğrisinden elde edilen hipotetik veriler yukarıdaki tablo da gösterilmiştir. Fonksiyon değerlerini en iyi tahmin eden $I(2)B_n(f(x))$ ile lineer olmayan regresyon modelleri aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.6: Lineer Olmayan yöntemler ile İteratif Yöntemin HKT Karşılaştırılması

Modeller	Model Fonksiyonu	HKT	R^2
İteratif Yöntem	$I(2)B_{20}(f(x)) = 1 - (1 - B_{20})^3(f)(x)$	0,0000009	1.00**
Gompertz	$Y = \alpha \exp \{-e^{-k(x-\gamma)}\}$	0,000004	1.00**
Monomoleküler	$Y = \alpha(1 - e^{-k(x-\gamma)})$	0,0000047	1.00**
Üstel	$Y = e^{-k(x-\gamma)}$	0,00505	0.994**
Lojistik	$Y = \alpha / (1 + \beta e^{-kx})$	0,00004	1.00**

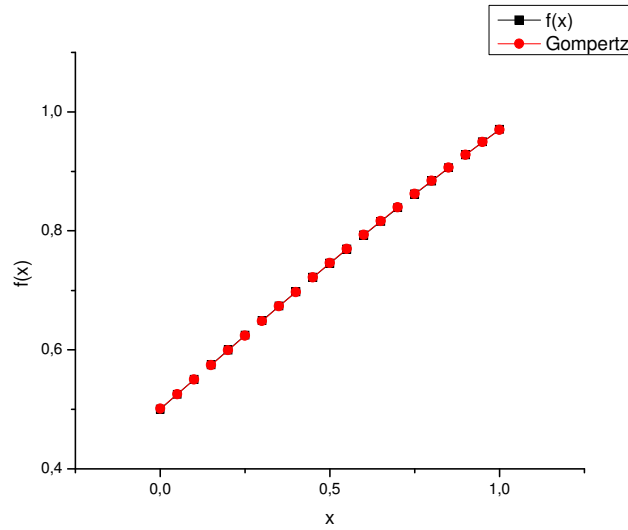
Modellerin HKT karşılaştırıldığında ise Bernstein polinomundan elde edilmiş İteratif Yöntemin HKT' mı diğer Lineer Olmayan Regresyon Modellerinden daha küçük bulunmuştur.

İteratif Bernstein yöntemi diğer modellere göre daha hassas bir sonuç vermiştir. Bu modellerin grafikleri ise aşağıda verilmiştir.



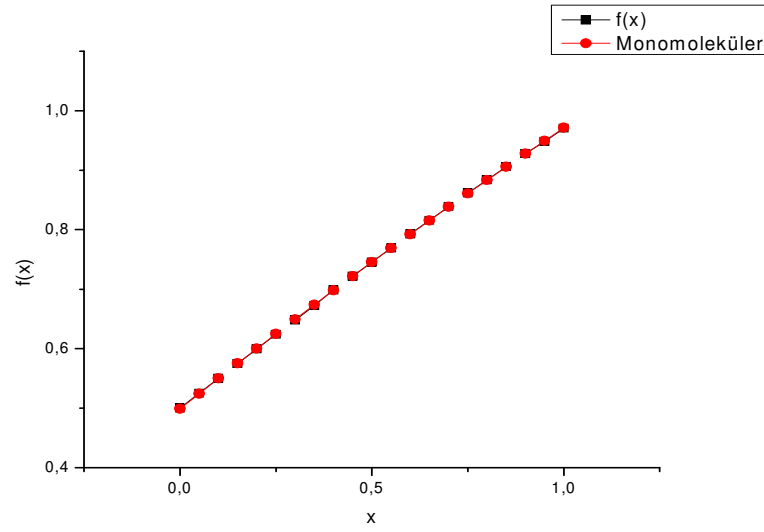
Şekil 3.1: $f(x)$ İle $I(2)B_n(f)(x)$ grafiği

$f(x)$ İle $I(2)B_n(f)(x)$ Bernstein iteratif yöntemin grafiği incelendiğinde, ise hipotetik veri kümesi üzerinde gözlem değerleri birbirine çok yakın sonuçlar verdiğinden dolayı grafik üzerinde bu değerler birbirine çakışık şekilde görülmektedir.



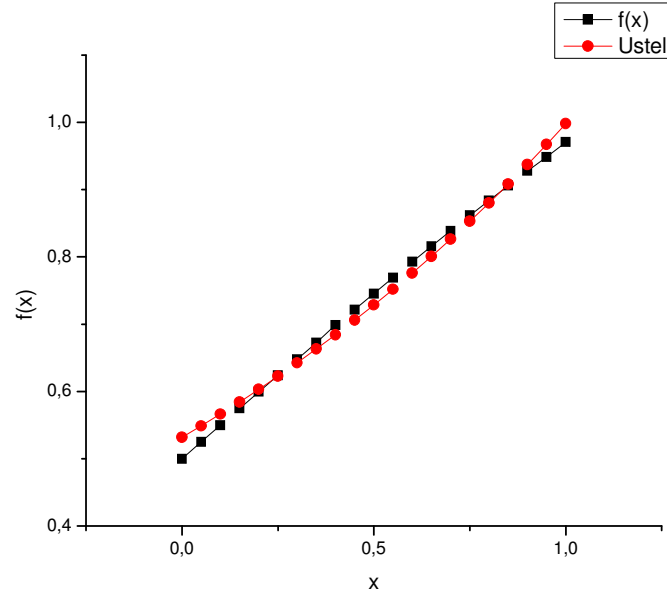
Şekil 3.2: $f(x)$ ile Gompertz modelinin grafiği

Yukarıdaki grafikte $f(x)$ ile Gompertz modelinin grafiği verilmiştir. Gözlem değerleri yine birbirine çok yakın olduğundan çakışık durumda görülmektedir.



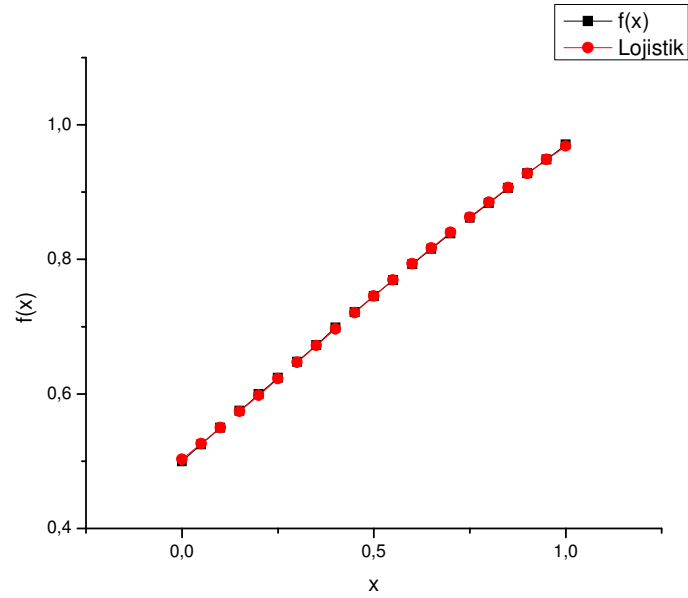
Şekil 3.3: Monomoleküler model ile $f(x)$ grafiği

Lineer olmayan büyüme modellerinden monomoleküler model ile $f(x)$ 'in incelediğinde benzer şekilde tahmin edilen değerler ile hipotetik değerler birbirine yakın olmasından dolayı grafik üzerinde çakışık durumda yer almaktadır.



Şekil 3.4: Üstel Model ile $f(x)$ grafiği

Üstel model ile $f(x)$ 'in grafiği incelendiğinde ise, tahmin edilen değerler ile elde edilen değerler diğer modellere göre birbirine yakın olmadığından, değerler grafik üzerinde daha belirgin bir biçimde görülmektedir.



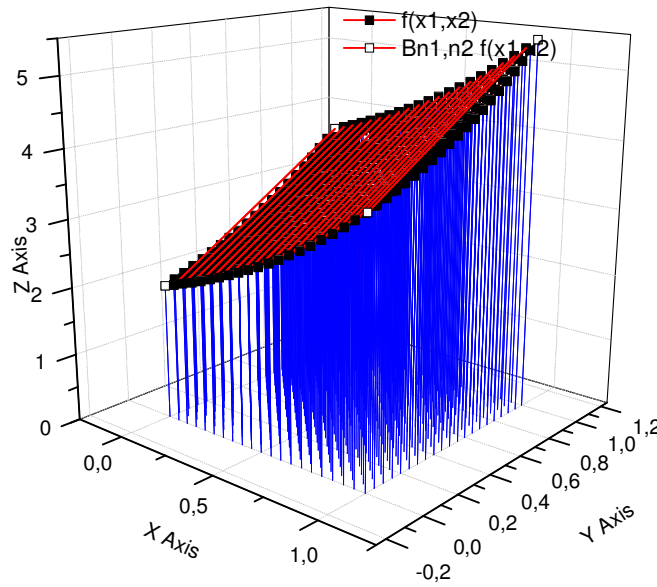
Şekil 3.5: Lojistik model ile $f(x)$ grafiği

Lojistik model kullanılarak tahmin edilen değerler ile $f(x)$ gerçek değerleri birbirine yakın olduğundan grafikteki noktalar çakışık durumda yer almıştır.

İki değişkenli Bernstein polinomu içinde hipotetik bir veri kümesi üzerinde bir uygulama çalışması yapılmıştır. Bu hipotetik veri kümesi Ek-Tablo 1.1' de verilmiştir.

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$$

Fonksiyonu incelemeye alınmış ve $x_1, x_2 \in [0,1]$ olmak üzere $n = n_1 = n_2 = 20$ seçilmiştir. Hipotetik veri kümesi üzerinde yapılan incelemede ise İki değişkenli Bernstein polinomunun da $B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$ $f(x_1, x_2)$ 'e yaklaştığı görülmüştür. Aynı zamanda $R^2 = 0,999952$ ve HKO ise 0,000205 bulunmuştur.



Şekil 3.6: $B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$ ile $f(x_1, x_2)$ 'in grafiği

$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$ ile $f(x_1, x_2)$ grafiğini incelediğimizde tahmin edilen değerler ile fonksiyonunun gerçek değerleri birbirine çok yakın olduğundan grafik üzerindeki değerler üst üste yer almıştır. Böylece Bernstein polinomu yöntemleri regresyon tahminlerinde daha hassas sonuçlar verdiği için kullanılabilir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Son yıllarda bilim ve teknolojiye ortaya çıkan gelişmelerle birlikte istatistik biliminin de analiz ve değerlendirme metotları gelişerek eski bilinen metotlara nazaran birtakım farklılaşmalar göstermiştir. Özellikle sayısal algoritmaların gelişmesi ve bilgisayar yazılımlarının güçlenmesiyle teorik yapıların büyük ölçüde uygulanabilir hale gelmesi mümkün olmuştur. Günümüzde, olasılık kuramı ve bu kurama bağlı olarak geliştirilen teoriler ve uygulamalar bilgisayarların hızlı gelişmesiyle beraber çok daha geniş alanlarda uygulanma imkânı bulmuştur. Olasılık problemlerinde deney yapılmasının zor olduğu durumlarda veya çeşitli nedenlerden kaynaklanan sorunların giderilmesinde bilgisayar destekli benzetim çalışmalarından yararlanılabilir. Bundan dolayı bilgisayar destekli benzetim çalışmalarının giderek yaygınlaşması teorik çalışmalara da uygulama alanı oluşturmıştır.

Bilgisayarların hızlı gelişimi doğrusal olmayan modellerin kullanımını oldukça kolaylaştırır. Model seçiminin sağlıklı yapılabilmesi ve seçilen modelin hata oranının düşük olması oldukça önemli bir seçim kriteridir. Tüm bunların doğrultusunda yapılan çalışmada seçilen modelde hata oranının nasıl düşürülebileceğine ve modelin nasıl uygulanabileceğine dair önemli bulgular elde edilmiştir. Bu bulguların en önemlilerine kısaca aşağıdaki şekilde değinilmiştir.

- Bernstein polinomunun istatistiksel çıkarsamaları ve sonuçları lineer olmayan model denklemlerinde oldukça tatmin edici sonuçlar verebilmektedir. Yapılan uygulamalarda bu sonuçların diğer bilinen lineer olmayan modellere göre daha avantajlı olduğu görülebilmektedir.
- Değişken parametrelili binom dağılımının binom dağılımına yaklaşımının gösterilmesi ve kullanılması Bernstein tipli lineer pozitif operatörler sınıfı içerisinde oldukça önemlidir.
- Değişken parametrelili binom dağılımının binom dağılımına yaklaşması aynı zamanda Poisson ve normal dağılıma yaklaşmasını da göstermektedir.

- Değişken parametrelili binom dağılımının Bernstein tipli lineer pozitif operatörler sınıfı içerisinde kullanılması yapay sinir ağlarının lineer pozitif operatörler sınıfı içerisinde kullanılabilirliğini sağlamıştır.
- Bernstein polinomunda iteratif sürecin kullanılması hata payını daha hızlı düşürerek kullanılan verinin modellenenbilmesine yardımcı olmaktadır. Kullanılan veri sayısının artırılmaması koşuluyla iteratif süreç yardımıyla daha düşük hata oranına sahip modeller kurulabilmesi bu alanda oldukça önemli bir sonuçtur.
- Çalışmada çok değişkenli Bernstein polinomlarına da değinilmiş ve çoklu lineer olmayan regresyon modellerinde kullanılabilir sonuçlar elde edilmiştir.

5. ÖNERİLER

Bernstein polinomu ve değişken parametrelili binom dağılımı yardımıyla elde edilen Bernstein tipli lineer pozitif operatörler sınıfı matematiksel analizin istatistiksel metotlara kazandırdığı en önemli materyallerden birisidir. Aynı zamanda yine bu tipli operatörler sınıfı olasılık teorisinin matematiksel analize kazandırdığı oldukça önemli bir sonuçtur. Bilimin ve teknolojinin ilerleyen her aşamasında kendisine uygulama alanı bulabilen bu tipli operatörler sınıfı istatistiksel analiz alanında hipotez tezleri gibi oldukça önemli olan bir sahaya da ileriki çalışmalarda göz ardı edilemeyecek yenilikler getirebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Shahbazov A.** 2005. Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [2] **Öner Y. ve M. Gürcan,** 1997.The Basic Algorithm for Parameter Estimation in Nonlinear Models. *Omü, Fen Dergisi*, 8(1), 119-125
- [3] **Aytaç M.**2004.Matematiksel İstatistik, Ezgi Yayınevi. Bursa
- [4] **Mclave T.J. and Sincich T.**2003. Statistics, Pearson Education International, USA.
- [5] **Sahai A.** 2004. An Iterative Algorithm for Improved Approximation by Bernstein's Operator Using Statistical Perspective. *Applied Mathematics and Computation*, 149 327-335.
- [6] **Guan Z.** 2009.İterated Bernstein polynomial approximation.
- [7] **Altomare F.**2010.Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators
- [8] **Sahai A.,Antonie.R, Chami P.S.** 2010 A Two-phase Iterative Algorithm for Improved Approximation by Szasz Operator Using Statistical Perspectives. *Journal of Mathematics Research* Vol. 2, No. 2,
- [9] **Gonska H. Pitul P.**2005. Remarks on an article of J.P. King. *Comment.Math.Univ.Carolin.* 46,4 645–652
- [10] **Doğru O.Duman O.** 2005. Statistical approximation of Meyer-Konig and Zeller operators based on q -integers *Publ. Math. Debrecen*, Ref. No. 3306, 1–16
- [11] **King J.P.**2003.Positive Linear Operators which Preserve x^2 .*Acta Math Hungar* 99(3) 203-208.
- [12] **Agratini O.**2006. On A Class Of Linear Positive Bivariate Operators Of King Type, *Studia Univ. "Babes,–Bolyai", Mathematica*, Volume L1, Number 4,
- [13] **Gonska H. Pitul P.and I.Paşa.** 2009.General King-Type Operators. *Result. Math.* 53, 279–286
- [14] **Dirican A.**2001. Evaluation of the diagnostic test's performance and their comparisons. *Cerrahpaşa J Med.*32 (1): 25-30.
- [15] **Paltanea R.**2004. Approximation Theory Using Positive Linear Operators. Birkhauser Boston-Basel-Berlin.

- [16] **Altomare F., M. Campiti**, (1994).Korovkin-type Approximation Theory and Applications, de Gruyter Studies in Mathematics 17 (ed. H. Bauer, J. L. Kazdan, E. Zehnder, Berlin-New York,
- [17] **İçöz G.**2008. Doğurucu fonksiyonlar içeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri *Yüksek Lisans Tezi* A.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara .
- [18] **Gültekin. Ö. E.** 2006. İki boyutlu Binomial Dağılımın Genelleşmeleri ve Uygulamaları. *Yüksek Lisans Tezi* E.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü İzmir.
- [19] **Hacıyev. A, Hacısalıhoğlu, H.H** 1995.Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklığı.1-71p Ankara.
- [20] **Korovkin, P.P.** 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Russian Monographs and Texts on advanced Math. III, 1-63p. Gordon&Breach.
- [21] **Kenneth I. Joy.**2000 On-Line Geometric Modeling Notes Bernstein Polynomials.
- [22] URL-1 <http://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html>
- [23] URL-2 <http://tr.wikipedia.org/wiki/ROC>
- [24] URL-3 http://tr.wikipedia.org/wiki/Binom_da%C4%9F%C4%B1%C4%B1m%C4%B1

EKLER :

Ek-Tablo 1.1:İki değişkenli $f(x_1, x_2)$ fonksiyonunun tahmin değerleri

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2}f(x_1, x_2)$
0	0	2	2
	1/20	2,0513	2,0525
	2/20	2,1052	2,1077
	3/20	2,1618	2,1656
	4/20	2,2214	2,2263
	5/20	2,2840	2,2901
	6/20	2,3499	2,3570
	7/20	2,4191	2,4272
	8/20	2,4918	2,5008
	9/20	2,5683	2,5781
	10/20	2,6487	2,6591
	11/20	2,7333	2,7440
	12/20	2,8221	2,8330
	13/20	2,9155	2,9264
	14/20	3,0138	3,0243
	15/20	3,1170	3,1269
	16/20	3,2255	3,2344
	17/20	3,3396	3,3470
	18/20	3,4596	3,4651
	19/20	3,5857	3,5887
1/20	1	3,7183	3,7183
	0	2,0513	2,0525
	1/20	2,1025	2,1051
	2/20	2,1564	2,1602
	3/20	2,2131	2,2181
	4/20	2,2727	2,2789
	5/20	2,3353	2,3426
	6/20	2,4011	2,4096
	7/20	2,4703	2,4797
	8/20	2,5431	2,5534
	9/20	2,6196	2,6306
	10/20	2,7000	2,7116
	11/20	2,7845	2,7965
	12/20	2,8734	2,8856
	13/20	2,9668	2,9790
	14/20	3,0650	3,0768
	15/20	3,1683	3,1794

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
2/20	16/20	3,2768	3,2869
	17/20	3,3909	3,3996
	18/20	3,5109	3,5176
	19/20	3,6370	3,6413
	1	3,7696	3,7708
	0	2,1052	2,1077
	1/20	2,1564	2,1602
	2/20	2,2103	2,2154
	3/20	2,2670	2,2733
	4/20	2,3266	2,3340
	5/20	2,3892	2,3978
	6/20	2,4550	2,4647
	7/20	2,5242	2,5349
	8/20	2,5970	2,6085
	9/20	2,6735	2,6858
	10/20	2,7539	2,7668
	11/20	2,8384	2,8517
	12/20	2,9273	2,9407
	13/20	3,0207	3,0341
	14/20	3,1189	3,1320
3/20	15/20	3,2222	3,2346
	16/20	3,3307	3,3421
	17/20	3,4448	3,4547
	18/20	3,5648	3,5728
	19/20	3,6909	3,6964
	1	3,8235	3,8260
	0	2,1618	2,1656
	1/20	2,2131	2,2181
	2/20	2,2670	2,2733
	3/20	2,3237	2,3312
	4/20	2,3832	2,3919
	5/20	2,4459	2,4557
	6/20	2,5117	2,5226
	7/20	2,5809	2,5928
	8/20	2,6537	2,6664
	9/20	2,7301	2,7436
	10/20	2,8106	2,8246
	11/20	2,8951	2,9096
	12/20	2,9840	2,9986
	13/20	3,0774	3,0920
4/20	14/20	3,1756	3,1899
	15/20	3,2788	3,2925
	16/20	3,3874	3,4000
	17/20	3,5015	3,5126
	18/20	3,6214	3,6307
	19/20	3,7475	3,7543
	1	3,8801	3,8839
	0	2,2214	2,2263

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
5/20	1/20	2,2727	2,2789
	2/20	2,3266	2,3340
	3/20	2,3832	2,3919
	4/20	2,4428	2,4527
	5/20	2,5054	2,5165
	6/20	2,5713	2,5834
	7/20	2,6405	2,6535
	8/20	2,7132	2,7272
	9/20	2,7897	2,8044
	10/20	2,8701	2,8854
	11/20	2,9547	2,9703
	12/20	3,0435	3,0594
	13/20	3,1369	3,1528
	14/20	3,2352	3,2506
	15/20	3,3384	3,3532
	16/20	3,4469	3,4607
	17/20	3,5610	3,5734
	18/20	3,6810	3,6914
	19/20	3,8071	3,8151
	1	3,9397	3,9446
	0	2,2840	2,2901
	1/20	2,3353	2,3426
	2/20	2,3892	2,3978
	3/20	2,4459	2,4557
	4/20	2,5054	2,5165
	5/20	2,5681	2,5802
	6/20	2,6339	2,6471
	7/20	2,7031	2,7173
	8/20	2,7759	2,7909
	9/20	2,8523	2,8682
	10/20	2,9327	2,9492
	11/20	3,0173	3,0341
	12/20	3,1061	3,1232
	13/20	3,1996	3,2165
	14/20	3,2978	3,3144
	15/20	3,4010	3,4170
	16/20	3,5096	3,5245
	17/20	3,6237	3,6371
	18/20	3,7436	3,7552
	19/20	3,8697	3,8788
6/20	1	4,0023	4,0084
	0	2,3499	2,3570
	1/20	2,4011	2,4096
	2/20	2,4550	2,4647
	3/20	2,5117	2,5226
	4/20	2,5713	2,5834
	5/20	2,6339	2,6471
	6/20	2,6997	2,7140

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
7/20	7/20	2,7689	2,7842
	8/20	2,8417	2,8578
	9/20	2,9182	2,9351
	10/20	2,9986	3,0161
	11/20	3,0831	3,1010
	12/20	3,1720	3,1901
	13/20	3,2654	3,2834
	14/20	3,3636	3,3813
	15/20	3,4669	3,4839
	16/20	3,5754	3,5914
	17/20	3,6895	3,7040
	18/20	3,8095	3,8221
	19/20	3,9356	3,9457
	1	4,0681	4,0753
	0	2,4191	2,4272
	1/20	2,4703	2,4797
	2/20	2,5242	2,5349
	3/20	2,5809	2,5928
	4/20	2,6405	2,6535
	5/20	2,7031	2,7173
	6/20	2,7689	2,7842
	7/20	2,8381	2,8544
	8/20	2,9109	2,9280
	9/20	2,9874	3,0053
	10/20	3,0678	3,0863
	11/20	3,1523	3,1712
	12/20	3,2412	3,2602
	13/20	3,3346	3,3536
	14/20	3,4328	3,4515
	15/20	3,5361	3,5541
	16/20	3,6446	3,6616
	17/20	3,7587	3,7742
	18/20	3,8787	3,8923
	19/20	4,0048	4,0159
8/20	1	4,1373	4,1455
	0	2,4918	2,5008
	1/20	2,5431	2,5534
	2/20	2,5970	2,6085
	3/20	2,6537	2,6664
	4/20	2,7132	2,7272
	5/20	2,7759	2,7909
	6/20	2,8417	2,8578
	7/20	2,9109	2,9280
	8/20	2,9836	3,0017
	9/20	3,0601	3,0789
	10/20	3,1405	3,1599
	11/20	3,2251	3,2448
	12/20	3,3139	3,3339

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
9/20	13/20	3,4074	3,4272
	14/20	3,5056	3,5251
	15/20	3,6088	3,6277
	16/20	3,7174	3,7352
	17/20	3,8315	3,8479
	18/20	3,9514	3,9659
	19/20	4,0775	4,0896
	1	4,2101	4,2191
	0	2,5683	2,5781
	1/20	2,6196	2,6306
	2/20	2,6735	2,6858
	3/20	2,7301	2,7436
	4/20	2,7897	2,8044
	5/20	2,8523	2,8682
	6/20	2,9182	2,9351
	7/20	2,9874	3,0053
	8/20	3,0601	3,0789
	9/20	3,1366	3,1561
	10/20	3,2170	3,2371
	11/20	3,3016	3,3221
	12/20	3,3904	3,4111
	13/20	3,4839	3,5045
	14/20	3,5821	3,6023
	15/20	3,6853	3,7049
	16/20	3,7939	3,8124
	17/20	3,9080	3,9251
	18/20	4,0279	4,0431
	19/20	4,1540	4,1668
10/20	1	4,2866	4,2963
	0	2,6487	2,6591
	1/20	2,7000	2,7116
	2/20	2,7539	2,7668
	3/20	2,8106	2,8246
	4/20	2,8701	2,8854
	5/20	2,9327	2,9492
	6/20	2,9986	3,0161
	7/20	3,0678	3,0863
	8/20	3,1405	3,1599
	9/20	3,2170	3,2371
	10/20	3,2974	3,3181
	11/20	3,3820	3,4030
	12/20	3,4708	3,4921
	13/20	3,5643	3,5855
	14/20	3,6625	3,6833
	15/20	3,7657	3,7859
	16/20	3,8743	3,8934
	17/20	3,9884	4,0061
	18/20	4,1083	4,1241

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
11/20	19/20	4,2344	4,2478
	1	4,3670	4,3773
	0	2,7333	2,7440
	1/20	2,7845	2,7965
	2/20	2,8384	2,8517
	3/20	2,8951	2,9096
	4/20	2,9547	2,9703
	5/20	3,0173	3,0341
	6/20	3,0831	3,1010
	7/20	3,1523	3,1712
	8/20	3,2251	3,2448
	9/20	3,3016	3,3221
	10/20	3,3820	3,4030
	11/20	3,4665	3,4880
	12/20	3,5554	3,5770
	13/20	3,6488	3,6704
	14/20	3,7470	3,7683
	15/20	3,8503	3,8709
	16/20	3,9588	3,9784
	17/20	4,0729	4,0910
12/20	18/20	4,1929	4,2091
	19/20	4,3190	4,3327
	1	4,4515	4,4623
	0	2,8221	2,8330
	1/20	2,8734	2,8856
	2/20	2,9273	2,9407
	3/20	2,9840	2,9986
	4/20	3,0435	3,0594
	5/20	3,1061	3,1232
	6/20	3,1720	3,1901
	7/20	3,2412	3,2602
	8/20	3,3139	3,3339
	9/20	3,3904	3,4111
	10/20	3,4708	3,4921
	11/20	3,5554	3,5770
	12/20	3,6442	3,6661
	13/20	3,7377	3,7595
	14/20	3,8359	3,8573
	15/20	3,9391	3,9599
	16/20	4,0477	4,0674
13/20	17/20	4,1618	4,1801
	18/20	4,2817	4,2981
	19/20	4,4078	4,4218
	1	4,5404	4,5513
	0	2,9155	2,9264
	1/20	2,9668	2,9790
	2/20	3,0207	3,0341
	3/20	3,0774	3,0920

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
14/20	4/20	3,1369	3,1528
	5/20	3,1996	3,2165
	6/20	3,2654	3,2834
	7/20	3,3346	3,3536
	8/20	3,4074	3,4272
	9/20	3,4839	3,5045
	10/20	3,5643	3,5855
	11/20	3,6488	3,6704
	12/20	3,7377	3,7595
	13/20	3,8311	3,8528
	14/20	3,9293	3,9507
	15/20	4,0325	4,0533
	16/20	4,1411	4,1608
	17/20	4,2552	4,2734
	18/20	4,3751	4,3915
	19/20	4,5013	4,5151
	1	4,6338	4,6447
	0	3,0138	3,0243
	1/20	3,0650	3,0768
	2/20	3,1189	3,1320
	3/20	3,1756	3,1899
	4/20	3,2352	3,2506
	5/20	3,2978	3,3144
	6/20	3,3636	3,3813
	7/20	3,4328	3,4515
	8/20	3,5056	3,5251
	9/20	3,5821	3,6023
	10/20	3,6625	3,6833
	11/20	3,7470	3,7683
	12/20	3,8359	3,8573
	13/20	3,9293	3,9507
	14/20	4,0275	4,0486
	15/20	4,1308	4,1511
	16/20	4,2393	4,2587
	17/20	4,3534	4,3713
	18/20	4,4734	4,4894
	19/20	4,5995	4,6130
15/20	1	4,7320	4,7426
	0	3,1170	3,1269
	1/20	3,1683	3,1794
	2/20	3,2222	3,2346
	3/20	3,2788	3,2925
	4/20	3,3384	3,3532
	5/20	3,4010	3,4170
	6/20	3,4669	3,4839
	7/20	3,5361	3,5541
	8/20	3,6088	3,6277
	9/20	3,6853	3,7049

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
16/20	10/20	3,7657	3,7859
	11/20	3,8503	3,8709
	12/20	3,9391	3,9599
	13/20	4,0325	4,0533
	14/20	4,1308	4,1511
	15/20	4,2340	4,2537
	16/20	4,3425	4,3612
	17/20	4,4566	4,4739
	18/20	4,5766	4,5919
	19/20	4,7027	4,7156
	1	4,8353	4,8451
	0	3,2255	3,2344
	1/20	3,2768	3,2869
	2/20	3,3307	3,3421
	3/20	3,3874	3,4000
	4/20	3,4469	3,4607
	5/20	3,5096	3,5245
	6/20	3,5754	3,5914
	7/20	3,6446	3,6616
	8/20	3,7174	3,7352
	9/20	3,7939	3,8124
	10/20	3,8743	3,8934
	11/20	3,9588	3,9784
	12/20	4,0477	4,0674
	13/20	4,1411	4,1608
	14/20	4,2393	4,2587
	15/20	4,3425	4,3612
	16/20	4,4511	4,4687
	17/20	4,5652	4,5814
	18/20	4,6851	4,6994
	19/20	4,8113	4,8231
17/20	1	4,9438	4,9527
	0	3,3396	3,3470
	1/20	3,3909	3,3996
	2/20	3,4448	3,4547
	3/20	3,5015	3,5126
	4/20	3,5610	3,5734
	5/20	3,6237	3,6371
	6/20	3,6895	3,7040
	7/20	3,7587	3,7742
	8/20	3,8315	3,8479
	9/20	3,9080	3,9251
	10/20	3,9884	4,0061
	11/20	4,0729	4,0910
	12/20	4,1618	4,1801
	13/20	4,2552	4,2734
	14/20	4,3534	4,3713
	15/20	4,4566	4,4739

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
18/20	16/20	4,5652	4,5814
	17/20	4,6793	4,6941
	18/20	4,7992	4,8121
	19/20	4,9254	4,9358
	1	5,0579	5,0653
	0	3,4596	3,4651
	1/20	3,5109	3,5176
	2/20	3,5648	3,5728
	3/20	3,6214	3,6307
	4/20	3,6810	3,6914
	5/20	3,7436	3,7552
	6/20	3,8095	3,8221
	7/20	3,8787	3,8923
	8/20	3,9514	3,9659
	9/20	4,0279	4,0431
	10/20	4,1083	4,1241
	11/20	4,1929	4,2091
	12/20	4,2817	4,2981
	13/20	4,3751	4,3915
	14/20	4,4734	4,4894
19/20	15/20	4,5766	4,5919
	16/20	4,6851	4,6994
	17/20	4,7992	4,8121
	18/20	4,9192	4,9301
	19/20	5,0453	5,0538
	1	5,1779	5,1834
	0	3,5857	3,5887
	1/20	3,6370	3,6413
	2/20	3,6909	3,6964
	3/20	3,7475	3,7543
	4/20	3,8071	3,8151
	5/20	3,8697	3,8788
	6/20	3,9356	3,9457
	7/20	4,0048	4,0159
	8/20	4,0775	4,0896
	9/20	4,1540	4,1668
	10/20	4,2344	4,2478
	11/20	4,3190	4,3327
	12/20	4,4078	4,4218
	13/20	4,5013	4,5151
1	14/20	4,5995	4,6130
	15/20	4,7027	4,7156
	16/20	4,8113	4,8231
	17/20	4,9254	4,9358
	18/20	5,0453	5,0538
	19/20	5,1714	5,1775
	1	5,3040	5,3070
	0	3,7183	3,7183

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$B_{n_1, n_2} f(x_1, x_2)$
	1/20	3,7696	3,7708
	2/20	3,8235	3,8260
	3/20	3,8801	3,8839
	4/20	3,9397	3,9446
	5/20	4,0023	4,0084
	6/20	4,0681	4,0753
	7/20	4,1373	4,1455
	8/20	4,2101	4,2191
	9/20	4,2866	4,2963
	10/20	4,3670	4,3773
	11/20	4,4515	4,4623
	12/20	4,5404	4,5513
	13/20	4,6338	4,6447
	14/20	4,7320	4,7426
	15/20	4,8353	4,8451
	16/20	4,9438	4,9527
	17/20	5,0579	5,0653
	18/20	5,1779	5,1834
	19/20	5,3040	5,3070
	1	5,4366	5,4366

EK-2

Değişken parametrelili binom dağılımının olasılıklarının bulunmasına ilişkin Matlab programı

```
% close all;
% clear all;
% clc;

n=input('n=');
for i=1:n
    p(i)=input('p değeri= ');
    q(i)=1-p(i);
end
c=[];
syms x
for j=1:n
    y(j)=(p(j)*x+q(j));
end
z=expand(prod(y));
c=sym2poly(z);
disp(c)
```

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğan Muhammet Burak KILIÇ, ilk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamlamıştır. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümüne girmeye hak kazanmış ve 2009 yılında bölüm birincisi olarak lisans derecesi almıştır. Ayrıca 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde çift anadal yapmaya hak kazanmış ve 2009 yılında bu alanda da lisans derecesi almıştır. Eylül 2009'da Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, İstatistik Teorisi bilim dalında yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. Ağustos 2010'dan beri Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.