

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAÇILMA TERİMİNE SAHİP BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
Esmâ ATEŞ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa İNÇ

HAZİRAN-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAÇILMA TERİMİNE SAHİP BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Esmâ ATEŞ

(102121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Mayıs 2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 15 Haziran 2015

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Ahmet BEKİR (O.G.Ü.)

Doç. Dr. Ali YEŞİL (F.Ü)

Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL (Y.T.Ü)

HAZİRAN-2015

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa İNÇ' e teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Esma ATEŞ

Elazığ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLolar LİSTESİ.....	IX
SEMBOLLER LİSTESİ	X
KISALTMALAR.....	X
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	3
2. SOLİTONLAR VE KOMPAKTONLAR	10
2.1 Genelleştirilmiş KdV Denklemi.....	10
2.2 Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi.....	12
2.3 Kompaktonlar	15
2.4 Optik Solitonlar ve NLS Denklemi	16
3. JAKOBİ ELİPTİK FONKSİYONLAR	19
3.1 $K(n,n)$ Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyonlar ile Çözümü.....	22
3.2 Zamana Bağlı Katsayılara Sahip $K(m,n)$ Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyonlar ile Çözümü	29
3.3 Genelleştirilmiş NLS Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyonlar ile Çözümü.....	35
3.3.1 Kerr Yasası.....	36
3.3.2 Kuvvet (Power) Yasası.....	41
3.3.3 Parabolik Yasa	45
3.3.4 Çift-Etki (Dual-Power) Yasası	52
4. SONLU FARK YÖNTEMLERİ	59
4.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri	59
4.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi	61

	<u>Sayfa No</u>
4.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi	62
4.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	63
4.1.4 Ağırlıklı Averaaj Yöntemi	63
4.2 Bazı Temel Kavramlar	64
4.2.1 Lokal Kesme Hatası	64
4.2.2 Tutarlılık	64
4.2.3 Kararlılık	64
4.2.4 Yakınsaklık	65
4.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi	65
4.2.6 Kararlılık Analizi	65
4.3 $K(2,3)$ Denkleminin Sonlu Fark Yöntemi ile Nümerik Çözümleri	67
4.3.1 Sonlu Fark Yaklaşımı	67
4.3.2 Kararlılık Analizi	69
4.3.3 Nümerik Çözümler	72
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	81
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	87

ÖZET

Bu çalışma beş bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın amacı açıklanmış ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Genelleştirilmiş KdV denklemi ve NLS denklemi hakkında genel bilgiler verilmiş, bu denklemler için daha önce yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Ayrıca solitonlar, kompaktonlar ve optik soliton kavramları hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Jakobi eliptik fonksiyonlar anlatılmış ve bu fonksiyonlar kullanılarak $K(n,n)$ denklemi, zamana bağlı katsayı fonksiyonlarına sahip $K(m,n)$ denklemi ve genelleştirilmiş NLS denkleminin soliton ve kompakton çözümleri bulunmuştur.

Dördüncü bölümde, klasik sonlu fark yöntemleri ile birlikte bazı temel kavramlara yer verilmiştir. $K(2,3)$ denkleminin sonlu fark yöntemi ile nümerik sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde kullanılan sonlu fark yaklaşımının kararlılık analizi incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Jakobi Eliptik Fonksiyonlar, Solitonlar, Kompaktonlar, Optik Solitonlar, $K(m,n)$ Denklemi, Genelleştirilmiş Nonlinear Schrödinger (NLS) Denklemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Kararlılık Analizi.

SUMMARY

SOLITON SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISPERSION TERM

This study has been probed in five sections.

In the first chapter, the aim of this study has been explained. Some fundamental concepts which are going to be used in the next chapters have been presented.

In the second chapter, some information about the Generalized KdV and NLS equations has been given and then the previous studies about these equations have been mentioned. Moreover, some information about soliton, compacton and optic soliton concepts have been presented.

In the third chapter, Jacobi elliptic functions have been explained. Soliton and compacton solutions of $K(n,n)$ equation, $K(m,n)$ equation with t -dependent coefficients and generalized NLS equation have been obtained. .

In the fourth chapter, some fundamental concepts as well as the classical finite difference methods have been presented. Numerical solutions of $K(2,3)$ equation have been obtained using finite difference method. Moreover, in this chapter, the stability analysis of the finite difference approximation used in the thesis has been investigated.

In the fifth chapter, the results have been evaluated.

Key Words: Jacobi Elliptic Functions, Solitons, Compactons, Optic Solitons, $K(m,n)$ Equation, Generalized Nonlinear Schrödinger (NLS) Equation, Finite Difference Methods, Stability Analysis.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.2.1 Tek dalga	13
Şekil 3.1 $m = 1/3$ için $sn(x, m)$ ve $sin(x)$ fonksiyonunun grafiği	19
Şekil 3.2 $m = 1/3$ için $cn(x, m)$ ve $cos(x)$ fonksiyonunun grafiği	19
Şekil 3.1.1 (3.1.9) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen çözümün . üç boyutlu resmi	23
Şekil 3.1.2 (3.1.10) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen	
çözümün üç boyutlu resmi	24
Şekil 3.1.3 (3.1.14) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 1$ alınmasıyla elde edilen	
çözümün üç boyutlu resmi	25
Şekil 3.1.4 (3.1.21) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen	
çözümün üç boyutlu resmi	27
Şekil 3.1.5 (3.1.25) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen	
çözümün üç boyutlu resmi	28
Şekil 3.3.1 (3.3.19) çözümünde $a = 1, b = -1, m = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla	
elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	38
Şekil 3.3.2 (3.3.20) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2$, ve $t = 0$ alınmasıyla elde	
edilen çözümün iki boyutlu resmi	38
Şekil 3.3.3 (3.3.30) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde	
edilen çözümün üç boyutlu resmi	40
Şekil 3.3.4 (3.3.33) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde	
edilen çözümün iki boyutlu resmi	41
Şekil 3.3.5 (3.3.40) çözümünde $a = 2, b = -1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$	
alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	42
Şekil 3.3.6 (3.3.43) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla	
elde edilen çözümün iki boyutlu resmi	43
Şekil 3.3.7 (3.3.47) çözümünde $a = 2, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla	
elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	44
Şekil 3.3.8 (3.3.48) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde ..	
edilen çözümün iki boyutlu resmi	45
Şekil 3.3.9 (3.3.60) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$	
alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	48

Şekil 3.3.10 (3.3.61) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$	
alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi	48
Şekil 3.3.11 (3.3.71) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 7, n = 2$ ve $\ell = 0.5$	
alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	51
Şekil 3.3.12 (3.3.72) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla	
elde edilen çözümün iki boyutlu resmi	51
Şekil 3.3.13 (3.3.85) çözümünde $a = 2, b = 3, m = 2, n = 1.5$ ve $\ell = 0.5$	
alınmasıyla elde edilen çözümün boyutlu resmi	54
Şekil 3.3.14 (3.3.86) çözümünde $a = 2, b = 2, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla	
elde edilen çözümün iki boyutlu resmi	54
Şekil 3.3.15 (3.3.96) çözümünde $a = 3, b = 1, m = 2, n = 1.5$ ve $\ell = 0.5$	
alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi	57
Şekil 3.3.16 (3.3.97) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 1.5$ ve $t = 0$	
alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi	57
Şekil 4.1.1 Düğüm noktalarının gösterimi	59
Şekil 4.3.1 Tek kompaktın hareketi	74
Şekil 4.3.2 İki kompaktın girişimi	77
Şekil 4.3.3 Kompaktın dalga oluşumu	80

TABLOLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.3.1 Problem 1'in h ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum	
sabitleri ($v = 1, x_0 = 0$ ve $-20 \leq x \leq 80$)	73
Tablo 4.3.2 Problem 1'in $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanan	
korunum sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması ($v = 1, x_0 = 0$ ve . . .	
$-20 \leq x \leq 80$)	74
Tablo 4.3.3 Problem 2'nin h ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum	
sabitleri ($v_1 = 1.5, c_2 = 0.5, D_1 = 10, D_2 = 25$ ve $-20 \leq x \leq 120$)	76
Tablo 4.3.4 Problem 2'nin $h = 0.2$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanan	
korunum sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması ($v_1 = 1.5, c_2 = 0.5, \dots$	
$D_1 = 10, D_2 = 25$ ve $-20 \leq x \leq 120$)	76
Tablo 4.3.5 Problem 3'ün h ve k nın farklı değerleri için hesaplanan korunum	
sabitleri ($v = 1, D = 10$ ve $0 \leq x \leq 80$)	79
Tablo 4.3.6 Problem 3'ün $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanan korunum. . .	
sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması ($v = 1, D = 10$ ve $0 \leq x \leq 80$)	79

SEMBOLLER LİSTESİ

Δ	:Delta
∇	:Nabla
Ω	:Omega
Σ	:Toplam Sembolü
α	:Alpha
β	:Beta
δ	:Delta
ε	:Epsilon
η	:Eta
λ	:Lambda
ξ	:Xi
θ	:Theta
$\mathbf{O}(\mathbf{h})$	:Kesme hatası
$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar Cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Cümlesi

KISALTMALAR

KdV	:Korteweg-de Vries denklemi
GKdV	:Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi
FPU	:Fermi,Pasta,Ulam Sistemi
NLS	:Nonlinear Schrödinger denklemi
KDD	:Kısmi Diferansiyel Denklem

1 GİRİŞ

Dalga, bir ortamda veya boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşim olarak tanımlanır. Örneğin suda ilerleyen yüzey dalgaları, ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri dalga özelliğine sahiptir. Dalgaların tanımlanmasında üç fiziksel büyüklük önemlidir. Bunlar dalga boyu, frekans ve dalganın hızıdır. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar. Ses dalgaları ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama ihtiyaç duymaksızın boşlukta yayılabilirler. İlk olarak su dalgaları oluşumunun gözlemlenmesiyle ortaya çıkan dalga yayılımı, lineer olmayan özelliklerinden dolayı yüzyıllar boyunca bilim adamlarının ilgisini çekmiştir. Bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemde (kdd) bulunan bilinmeyen u değişkeni, bir dalganın su yüzeyinden itibaren yüksekliğini veya bir elektromanyetik dalganın boyunu temsil ettiğinde bağımlı değişkenini tespit etmek önemlidir. Burada amaç lineer olmayan kdd'in hareket eden dalga çözümlerini bulmaktır. Eğer çözümler, şekillerini değiştirmeden ilerliyorsa bu dalgalara tek dalgalar adı verilir. Soliton, soliton etkileşimi ve optik solitonlarla ilgili detaylı bilgiler daha sonraki bölümde ele alınacaktır.

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir.

Bu tezde ilk olarak matematiksel fiziğin en önemli denklemlerinden KdV denkleminin genelleştirilmiş formu olan $K(m,n)$ denklemi gözüne alınacaktır. Jakobi eliptik fonksiyonları yardımıyla bu denklemin önce sabit katsayılarla sahip formu ele alınarak kompakt ve soliton çözümleri elde edilecek, daha sonra katsayıları zamana bağlı fonksiyonlar olarak ele alınacak ve bu durumdaki çözümleri elde edilecektir. Ele alınacak olan bir diğer denklem optik solitonlar için yönetici denklem olarak bilinen ve güçlü matematiksel özel-

likleriyle uygulamalı matematik, teorik fizik ve mühendislikte büyük ilgi gören Nonlinear Schrödinger (NLS) denklemdir. NLS denklemi özellikle lineer olmayan optik, plazma fiziği, sıvı dinamiği, biyokimya gibi alanlarda yaygın şekilde kullanılır. Bu denklemin lineer olmayanlığın farklı türlerinden kaynaklanan çeşitli formları bulunmaktadır. Bu çalışmada genelleştirilmiş NLS denkleminin dört farklı formu ele alınarak optik soliton çözümleri elde edilecektir. Bunlar Kerr yasası, Kuvvet yasası, Parabolik yasa ve Çift-kuvvet yasasıdır.

Bu çalışmada analitik çözümlerin yanı sıra $K(m,n)$ denkleminin sonlu farklar metodu kullanılarak sayısal çözümleri de elde edilecektir. $K(m,n)$ denklemindeki U_x^2 ve U_{xxx}^3 lineer olmayan terimleri yerine değişik sonlu fark yaklaşımları kullanılacak, sonra denklemdaki zamana göre türev yerine ileri fark ve konuma göre türev yerine de değişik merkezi fark formülleri kullanılarak denklemin sonlu fark yaklaşımı elde edilecektir. Daha sonra sonlu fark yaklaşımından ortaya çıkan her bir lineer denklem sistemi direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözülerek bulunan nümerik sonuçlar, analitik sonuçlar ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1.1 Tanım

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

veya genel olarak

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [1].

1.1.2 Tanım

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [2].

z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ...) = 0,$$

şeklindedir.

1.1.3 Tanım

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [2].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y + R(x, y) z = S(x, y),$$

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y).$$

$$xz_x - yz_y = \sin x,$$

denklemleri birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir denklemdir.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3,$$

denklemleri ikinci mertebeden, ikinci dereceden, lineer olmayan bir denklemdir.

1.1.4 Tanım

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y = R(x, y, z),$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

Örneğin,

$$z_x z_{xx} + x z z_y = \sin y$$

$$z_y z_{xx} - 3x^3 z z_{xy} + 2z_x - x^3 y z = 0$$

denklemleri yarı-lineer denklemlerdir.

1.1.5 Tanım

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f 'in k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k - sınıfındandır denir.

1.1.6 Tanım

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 1$$

$$3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2u_x - u_y + xye^z = 0$$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

$$(x^2 - 1) z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$$

denklemini

$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x, y \in R\}$ bölgesinde hiperbolik;

$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ çemberi üzerinde parabolik;

$D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in R\}$ açık diskinde eliptik tiptendir.

$$x^2 z_{xx} + xyz_{xy} + z_{yy} + xz_x + yz_y + z = 0$$

denklemini ise

$y = \pm 2$ doğruları üzerinde parabolik;

$-2 < y < 2$ şeridi içinde eliptik;

$y < -2$ bölgesi ile $y > 2$ bölgesinde hiperbolik tiptendir.

1.1.7 Tanım

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının herbir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

1.1.8 Tanım

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklindeki bir denkleme de ∇' nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca ∇U , t ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [2].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [3];

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

c) İki boyutlu Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0,$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

f) Telegraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0.$$

1.1.1 Teorem

(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):

$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ve $R(x, y, z)$ fonksiyonları (x_0, y_0, z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset R^3$ bölgesinde C^1 sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0,$$

olsun. O zaman (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U 'nun içinde yatan $\check{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümü vardır.

1.1.2 Teorem (Cauchy-Kowalewski teoremi):

$$Lz = A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y),$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, xy -düzleminde, orjini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x, y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan

parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0, 0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır, Öyle ki N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$ sağlanır.

1.1.9 Tanım (Birinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral)

$$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 < k < 1,$$

şeklinde tanımlanır; ϕ ye $F(k, \phi)$ nin veya u nun genliği denir ve $\phi = am\ u$ yazılır, k ya da u nun modülü denir ve $k = mod\ u$ yazılır. Bu integrale birinci tür eliptik integralin Legendre şekli de denir.

Eğer $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise integrale birinci tür tam integral denir ve $K(k)$ veya sadece K notasyonu ile gösterilir. Bütün amaçlar için k nın verilmiş bir sabit olduğu kabul edilecektir.

1.1.10 Tanım (İkinci Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral)

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad 0 < k < 1,$$

şeklinde tanımlanır. Buna ikinci tür eliptik integralin Legendre şekli de denir.

Eğer $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise integrale ikinci tür tam eliptik integral denir ve $E(k)$ veya sadece E notasyonu ile gösterilir. Bu integral bir elips yayının uzunluğunun belirtilmesinde ortaya çıkar ve eliptik integral teriminin kullanılmasının bir nedenini teşkil eder.

1.1.11 Tanım (Üçüncü Tür Tam Olmayan Eliptik İntegral)

$$\pi(k, n, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 < k < 1,$$

şeklinde tanımlanır. Buna üçüncü tür eliptik integralin Legendre şekli de denir. Burada n sıfırdan farklı kabul edilmektedir. Çünkü $n = 0$ için birinci tür eliptik integrale indirgenmiş olur. Eğer $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise integrale üçüncü tür tam eliptik integral denir.

1.1.12 Tanım (Eliptik İntegraller İçin Jakobi Şekilleri)

Yukarıdaki eliptik integrallerin Legendre şekillerinde $v = \sin \theta$ dönüşümü yapılsa $x = \sin \phi$ olmak üzere, aşağıdaki integraller elde edilir. Bunlara sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integrallerin Jakobi şekilleri denir ve $x = 1$ için tam integral elde edilir.

$$F_1(k, x) = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}},$$

$$E_1(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}} dv,$$

$$\Pi_1(k, n, x) = \int_0^x \frac{dv}{(1+nv^2) \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}},$$

Yukarıdaki integraller sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü tür eliptik integralleri için Jakobinin şekillerini gösterir.

2 SOLİTONLAR VE KOMPAKTONLAR

Bu bölümde solitonlar, kompaktınlar ve optik solitonlar anlatılacak, sonraki bölümlerde kullanılacak denklemler hakkında bilgiler verilecektir.

2.1 Genelleştirilmiş KdV Denklemi

KdV denklemi olarak bilinen denklem, 1885 yılında Korteweg ve de Vries [4] adındaki iki bilim adamı tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu denklem geçen yüzyıldan beri bilinmesine rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1844’de John Scott Russell tarafından gözlemlenmiş tek dalgalar (solitary wave) için en basit ve faydalı modellerden biridir. Kruskal ve Zabusky [5] adındaki iki bilim adamı, dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemi ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir. Bu tek dalganın önemli özelliklerinden biri de birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Bu da tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. Dalganın doğal yapısından dolayı, Zabusky ve Kruskal bu tek dalga’yı “soliton” olarak adlandırmışlardır. Ayrıca Zabusky ve Kruskal [5], periyodik sınır şartlarıyla KdV denkleminin sayısal çözümünü gözlemlemişlerdir. Soliton kavramı ilk olarak Fermi, Pasta, Ulam [6] sistemindeki modelle anlatılmıştır.

Lineer olmayan dalga yapısı hakkındaki bilgiler, modern matematiksel fiziğin gelişmesinde önemli kavramlardan biri olan soliton tanımının kullanıldığı fizik ve matematik arasındaki ortak çalışmalarla elde edilir. KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Klasik KdV denklemi lineer olmayan bazı fiziksel bölgelerde gözlemlenebilir. Başlangıç olarak Karpman [7] ve Bisognano [8] tarafından lineer olmayan nötr yüzeylerdeki dalga hareketi ve dairesel bir çemberdeki şiddetli ışınlar için KdV denkleminin yararlanılarak teorik modeller geliştirilmiştir. Bu denklem; katı, sıvı, gaz ve plazma; soğuk bir yüzeydeki magnetik hidrodinamiklerde; lineer olmayan yaylarla birleştirilmiş eşit kütleli bir boyutlu kafeslerdeki boylamsal dalga yayılımlarında; Fermi probleminde; soğuk bir plazmadaki akustik iyon dalgalarında; tüpteki akışkanın yönünde ve elastiki çubuklardaki boylamsal dalgalarda ve bunlar gibi daha bir çok fiziksel uygulamaya sahiptir.

Geçen 50 yıl boyunca lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerinin yorumları için geniş bir araştırma sahası oluşturulmuştur. Lineer olmayan denklemler içerisinde en iyi bilinenlerden biride KdV denklemdir. Bununla birlikte matematik ve fiziğin çeşitli dallarında lineer olmayan KdV denklemi kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1.1)$$

şeklinde verilebilir. Buradaki ikinci $u^n u_x$ ve üçüncü u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve saçılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve saçılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur. Saçılma etkisi dalgaformunun hızını oluştururken lineer olmayan iletim etkisi de dalga formunun şeklini oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimlerinden sabit bir dalga formu oluşur (solitary wave). Her bir soliton karşılıklı etkileşimlerine rağmen değişmez. Solitonların yapısı sistemin parametrelerinin zamana bağlı olduğunu garanti eder ve böylece solitonların stabil (kararlı) olduğu görülür. GKdV denkleminin en önemli durumlarından biri modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemdir. Bu denklem $n = 2$ için GKdV denkleminin türetilmesiyle oluşur ve bu denklem elektrodinamiklerde, ince tabakalardaki elektromagnetik dalgalarda, yoğunluk katmanlarının iç kısımlarında, elastik araçlarda ve trafik akışları gibi birçok fiziksel uygulama alanına sahiptir.

KdV denklemi daha sonraları $K(m,n)$ denklemi adıyla verilen

$$u_t + (u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad m, n > 1 \quad (2.1.2)$$

formuna genelleştirilmiştir. Dikkat edilirse KdV denkleminde saçılma terimi lineer iken $K(m,n)$ denkleminde nonlineerdir. (2.1.2) denkleminde nonlinear konveksiyon terimi $(u^m)_x$ ile nonlinear saçılma terimi arasındaki etkileşim kompakt destekli solitonlar olan kompaktları oluşturur. Kompaktlar sonlu dalga uzunluğuna sahip dirençli solitonlardır. Solitonların aksine kompaktların genişliği genlikten bağımsızdır. Kompakt yapıların kararlılığı ve varlığı [29] de incelenmiştir. Ayrıca Wazwaz vd. [9]-[11] nonlinear saçılma sahip $K(m,n)$ denkleminin çeşitli kompakt ve solitary pattern çözümlerini elde etmiştir.

İlk zamanlar $K(m,n)$ denkleminde odaklanılan temel çalışma kompakt çözümlerinin araştırılmasıdır. Daha sonra bu denklem nonlinear evolüsyona sahip denkleme genelleştirilmiş ve soliton çözümleri elde edilmiştir [12]. Genelleştirilmiş evolüsyon terimine sahip $K(m,n)$ denklemi

$$(u^\ell)_t + au^m u_x + b(u^n)_{xxx} = 0, \quad (2.1.3)$$

formunda verilir. Burada ilk terim genelleştirilmiş evolüsyon terimi, ikinci terim nonlinear terim ve üçüncü terim saçılma terimidir. Ayrıca a, b, c reel sabitler ve ℓ, m, n pozitif tam sayılardır. (2.1.3) denklemi özel olarak $\ell = m = n = 1$ alınması durumunda KdV denkleminde indirgenir.

2.2 Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi

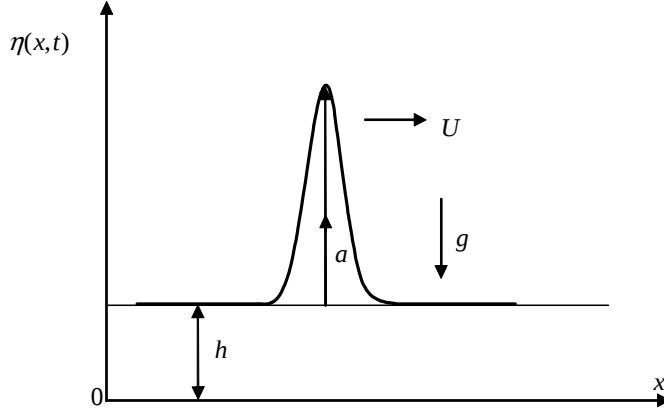
1834’de John Scott Russell soliter dalgayı, Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Bu dalgayı “büyük dalga kayması” olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844’de “Dalgalar üzerine rapor (Report on Wave)” makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, soliter dalga’nın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takiben, benzer dalgaların üretilmesiyle daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Russell, soliter dalga’nın u hızı ve sonlu bir h derinliğindeki sıvının serbest yüzey üzerindeki maksimum genliği arasında

$$u^2 = g(h + a) \quad (2.2.1)$$

formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, Airy ve Stokes’in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Russell’in soliter dalga hakkındaki yorumu, tek dalga’nın varlığı ve bu dalga’nın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870’lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871’de Boussinesq [13] ve 1876’da Rayleigh [14] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (2.2.1) formunda belirtmişlerdir. Gerçekten de onlar tek dalga profilini Şekil 2.2.1’deki, herhangi bir $a > 0$ için $z = \eta(x, t)$, $\beta^2 = 3a / \{4h^2(h + a)\}$ olmak üzere;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \{\beta(x - ut)\} \quad (2.2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.



Şekil 2.2.1 Tek dalga

Bu yazarlar sadece $a < h$ olmak üzere geçerli olan $\sec h^2$ çözümünü bulmalarına rağmen, (2.2.2)'yi çözüm kabul eden herhangi bir diferansiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq, $c = \sqrt{gh}$ sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böylesi uzun dalgalar için;

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} \right]$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu denklem Boussinesq [13] denklemi olarak bilinir ve bunun çözümü;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \left[\left(\frac{3a}{h^3} \right)^{1/2} (x \pm ut) \right]$$

şeklindeir. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1885'de Korteweg ve de Vries [4] adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matematiksel bir model ortaya koyarak, p yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[\left(\epsilon + \frac{3}{2} \eta \right) \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right]$$

denklemini elde etmişlerdir. Bu denklem KdV denklemi olarak bilinir.

1955'de Fermi Pasta ve Ulam'ın (FPU) [6], Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla, KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamada ki gelişmeler devam etmiştir. 1914'de Debye; "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler

yüzündendir.” iddiasında bulunmuştur. Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam’ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam’ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

(FPU)’nun dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky’nin [5], tekrarlamamanın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky Bölüm 2.1 de bahsedildiği gibi bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğerleri [15] ve Hirota [16]–[17] herhangi bir pozitif n tam sayısı için n –soliton arasındaki ekileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [18], Hammack ve Segur [19], Weidman ve Maxworthy [20] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metod geliştirilmiştir [21]–[22]. Son olarak aşağıdaki ifadeleri vermemiz uygun olacaktır. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir. KdV denkleminin ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir, fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denkleminin gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denkleminin (NLS) [23]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını temsil eder ve NLS denkleminin sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi daha

sonra Makhankov yaptığı çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir [24]–[26]. Bir başka önemli model denklemi de Sine-Gordon (SG) denklemidir. Bu denklemde elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemi ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalgaının genliğine bağlı değildir.

2.3 Kompaktonlar

1993 yılının başında Rosenau ve Hyman [27], kompakton olarak adlandırılan kompakt destekli soliter dalgaların bir sınıfını verdi. Kompaktonlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip veya üst üste gelmeyen solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir deyişle kompaktonlar, uçları sonsuza gitmeyen solitonlar olarak ifade edilir ve solitonların aksine bir kompaktonun genişliği, genlikten bağımsızdır. Rosenau ve Hyman doğa olaylarında, solitary dalgalarının; nitelik olarak büyük değişikliklere neden olabilen lineer olmayan bir saçılmanın etkisi altında kompaktlaşabileceğini ispatladı. Kompaktonların esnek bir şekilde çarpıştığı ve daha sonra benzer bir şekilde tekrar ortaya çıktığı ispatlanmıştır. Sonlu bir merkez bölgenin dışında ortadan kaybolan soliter dalga çözümleri;

$$u_t + (u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad n > 1$$

olarak verilen lineer olmayan $K(n,n)$ saçılma denklemlerinin iki parametreye sahip ailesinin çözümleridir.

Daha önce verildiği gibi, solitonlar; zayıf lineer olmayanlık ile saçılma arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bununla birlikte, dalga saçılması tamamen lineer olmayan olduğu zaman bazı orjinal özellikler gözlenebilir. Lineer olmayan saçılmanın en ilgi çekici özelliği, sonlu dalga uzunluğuna sahip ve üst üste gelmeyen solitonlar olan kompaktonların varlığıdır.

Kompaktonlar, solitonların olağanüstü bir özelliği olan, diğer kompaktonlarla çarpışmadan sonra aynı şekilde ortaya çıkma özellikli, soliter dalgaları olarak tanımlanır. Dalga saçılması tamamen lineer olmayan ise, bazı orjinal özelliklerin gözlemlenebildiği ve bu olağanüstü özelliklerden en kayda değer olanının kompaktonların varlığı olduğu [27]’de verilmiştir. Şu ana kadar verilen kompakton tanımları aşağıdaki gibidir:

- (i) Kompaktonlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip solitonlardır.

- (ii) Kompaktonlar, kompakt destekli soliter dalgalarlardır.
- (iii) Kompaktonlar, üst üste gelmeyen solitonlardır.
- (iv) Kompaktonlar, solitonlara benzer dirençli solitonlardır.

Lineer olmayan $K(n,n)$ saçılma denklemleri, $a > 0$ için kompakt soliter yapıya sahip ve

$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad a > 0, \quad n > 1 \quad (2.3.1)$$

formunda bir lineer olmayan KdV denklemi ailesidir. Kompakt yapıların kararlılığı ve varlığı [29] de incelenmiştir.

(2.3.1) denkleminde a ilave edilmesi ile elde edilen denklem odaklama kolu olarak adlandırılır. Bununla birlikte, [27] ve [28]'de çalışılan;

$$u_t - a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad a > 0, \quad n > 1 \quad (2.3.2)$$

denkleminde defocusing branch denklemi denilir. (2.3.1) denklemi focusing branch denklemi olup, (2.3.1) ve (2.3.2) denklemlerinin her biri farklı fiziksel yapılara neden olan iki farklı model sunar. Kompaktonların bu önemli keşfi, son yıllardaki birçok önemli çalışmaya öncülük etmiştir. Kompakton çalışması hidrodinamik modellerdeki demetlerin performansı, akışkan damlaların fizyonu ve eylemsiz fizyon gibi birçok bilimsel yöntemi anlayabilme imkanı verir.

Kompaktonlar hakkında daha fazla bilgi için [29]-[33] daki, ayrıca farklı denklemlerin soliton, kompakt, solitary pattern, periyodik dalga çözümleri için [34]-[38] deki referanslara bakılabilir.

2.4 Optik Solitonlar ve Nonlineer Schrödinger Denklemi

Optik soliton çalışması lineer olmayan dalgalar alanındaki çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Optik solitonlar kıta ötesi ve okyanus aşırı mesafeler boyunca bilgi taşıyıcı olarak görev yapan darbelerdir. Bu solitonlar fiber optik vasıtasıyla formlarında veya şekillerinde herhangi bir değişiklik olmadan yol alırlar. Çarpışmaları elastiktir ve sadece birbirleriyle çarpıştıktan sonra faz değişimi geçirirler. Bu güçlü özellikler bu alanda oldukça büyüyen araştırma ilgisine neden olmaktadır. Dünya genelinde çoğu uzun mesafeler arası iletişim bu teknolojinin kullanımı ile gerçekleştirilmiştir.

Bir fiber optik vasıtasıyla bu uzun mesafeler arası optik solitonların yayılımını yöneten denklem çoklu ölçek analizi yardımı ile Maxwell denkleminin türetilen Nonlineer

Schrödinger (NLS) denklemdir. NLS denklemi bu alandaki çalışmaların anahtar denklemdir. Lineer olmayan optik, protein kimyası, plazma fiziği, sıvı dinamiği gibi pek çok uygulama alanına sahip NLS denklemi,

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + F(|u|^2)u = 0 \quad (2.4.1)$$

şeklinde verilebilir. Burada F reel değerli cebirsel fonksiyon ve $F(|u|^2)u : C \rightarrow C$ kompleks düzgün fonksiyondur. Kompleks C düzlemi iki boyutlu lineer R^2 uzayı gibi düşünülerek $F(|u|^2)u$ fonksiyonunun k defa sürekli diferansiyellenebilir olduğu söylenebilir ve

$$F(|u|^2)u \in \cup_{m,n=1}^{\infty} C^k((-n, n) \times (-m, m); R^2)$$

yazılabilir. (2.4.1) denklemindeki ilk terim zaman değişimini, ikinci terim grup hız saçılmasını ve üçüncü terim lineer olmayanlığı (nonlineerliği) gösterir.

(2.4.1) denklemi su dalgaları, plazma fiziği ve lineer olmayan optik gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan dispersif ortamda lineer teoriden sapan bir dalga grubunun oluşumunu gösterir. Bu denklemin farklı lineer olmayan türleri için solitonları veya soliton çözümlerini desteklediği bilinmektedir.

2006-2008 yıllarında Wazwaz, NLS denklemini kapsamlı bir şekilde çalışmış, lineer olmayanlık türlerinden Kerr ve kuvvet yasasına sahip dördüncü dereceden optik solitonlar dinamiğini incelemiştir. Bunun yanında üstel-fonksiyon metodu, varyasyonel iterasyon metodu, Adomian ayrışım metodu gibi teknikler kullanarak optik solitonlar bağlamında oldukça faydalı sonuçlar elde etmiştir. Wazwaz'ın elde ettiği bu sonuçlar lineer olmayan optik, plazma fiziği ve doğa bilimlerinin diğer alanlarında özgün bir etki yaratmıştır [39]-[41]. Biswas, çeşitli lineer olmayanlık türüne sahip NLS denklemlerini ele alarak elde ettiği sonuçlarla lineer olmayan optik için büyük katkı sunmuştur [42]. Bunun yanında geliştirilmiş tanh metodu, Adomian ayrışım metodu, homotopi perturbasyon metodu, F-açılım metodu ve varyasyonel iterasyon metodu gibi metodlar kullanılarak NLS denkleminin nümerik ve analitik çözümleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada aşağıdaki şekilde verilen lineer olmayanlığın dört farklı yasası incelenecektir [27].

1. Kerr yasası: $F(s) = s$
2. Kuvvet (Power) yasası: $F(s) = s^n$
3. Parabolik yasa: $F(s) = s + k_1 s^2$

4. Çift-Kuvvet (Dual-Power) yasası: $F(s) = s^n + k_2 s^{2n}$

Burada n üssü kuvvet yasası ya da çift-kuvvet yasası nonlineerliğini belirler. k_1 ve k_2 sabitleri de sırasıyla parabolik yasa ve dual-power yasasındaki lineer olmayan terimleri bağlar. $k_1 = 0$ alınması durumunda parabolik yasa kerr yasasına; $k_2 = 0$ alınması durumunda ise çift-kuvvet yasası kuvvet yasasına dönüşür. Bunun yanında $n = 1$ alındığında kuvvet yasası kerr yasasına; çift-kuvvet yasası ise parabolik yasaya indirgenir.

3 JAKOBİ ELİPTİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde Jakobi eliptik fonksiyonlar anlatılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla önceki bölümde bahsedilen denklemlerin soliton, kompakt çözümleri elde edilecektir.

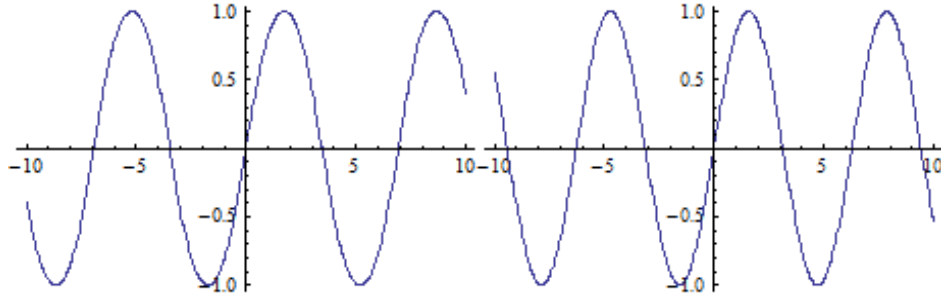
Birinci tür eliptik integralin Jakobi şeklindeki üst limit x , Legendre şeklindeki üst limit ϕ ye $x = \sin \phi$ bağıntısıyla bağlıdır. $\phi = am u$ olduğundan $x = \sin(am u)$ dur. Böylece eliptik fonksiyonların tanımına varmış oluruz.

$$x = \sin(am u) = sn u,$$

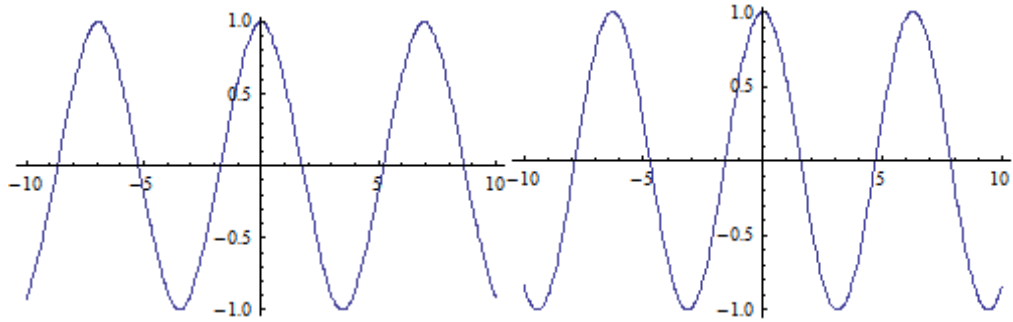
$$\sqrt{1-x^2} = \cos(am u) = cn u,$$

$$\sqrt{1-m^2x^2} = \sqrt{1-m^2sn^2u} = dn u,$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{sn u}{cn u} = sc u,$$



Şekil 3.1 $m = \frac{1}{3}$ için $sn(x, m)$ ve $\sin(x)$ fonksiyonunun grafiği.



Şekil 3.2 $m = \frac{1}{3}$ için $cn(x, m)$ ve $\cos(x)$ fonksiyonunun grafiği.

Bu fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlarınkine benzeyen pek çok önemli özelliğe sahiptirler.

$sn\xi = sn(\xi, m)$, $cn\xi = cn(\xi, m)$ ve $dn\xi = dn(\xi, m)$ sırasıyla Jakobi eliptik sine fonksiyon, Jakobi eliptik cosine fonksiyon ve Jakobi eliptik fonksiyon olarak isimlendirilir ve $0 < m < 1$ Jakobi eliptik fonksiyonun modülüdür. Glaisher'in sembolleri olarak gösterilen Jakobi eliptik fonksiyonları, aşağıdaki şekilde dört ana gruba ayrılır.

$$(1) : sn\xi, cn\xi, dn\xi$$

$$(2) : ns\xi = \frac{1}{sn\xi}, nc\xi = \frac{1}{cn\xi}, nd\xi = \frac{1}{dn\xi}$$

$$(3) : sc\xi = \frac{sn\xi}{cn\xi}, sd\xi = \frac{sn\xi}{dn\xi}, cd\xi = \frac{cn\xi}{dn\xi}$$

$$(4) : cs\xi = \frac{1}{sc\xi}, ds\xi = \frac{1}{sd\xi}, dc\xi = \frac{1}{cd\xi}$$

Bu on iki Jakobi eliptik fonksiyon arasında

$$(1) : cn^2\xi + sn^2\xi = 1, dn^2\xi + m^2sn^2\xi = 1, m^2(cn^2\xi - 1) = dn^2\xi - 1$$

$$(2) : ns^2\xi - cs^2\xi = 1, ns^2\xi - ds^2\xi = m^2, ds^2\xi + cs^2\xi = 1 - m^2$$

$$(3) : nc^2\xi - sc^2\xi = 1, dc^2\xi - (1 - m^2)sc^2\xi = 1, dc^2\xi - (1 - m^2)nc^2\xi = m^2$$

$$(4) : cd^2\xi + (1 - m^2)sd^2\xi = 1, nd^2\xi - m^2sd^2\xi = 1, m^2cd^2\xi + (1 - m^2)nd^2\xi = 1$$

bağıntıları mevcuttur. Ayrıca aşağıdaki özellikler mevcuttur.[43]

$$(1) : (sn\xi)' = cn\xi dn\xi, (cn\xi)' = -sn\xi dn\xi, (dn\xi)' = -m^2 sn\xi cn\xi$$

$$(2) : (ns\xi)' = -cs\xi ds\xi, (cs\xi)' = -ns\xi ds\xi, (ds\xi)' = -ns\xi cs\xi$$

$$(3) : (sc\xi)' = nc\xi dc\xi, (nc\xi)' = sc\xi dc\xi, (dc\xi)' = (1 - m^2) nc\xi sc\xi$$

$$(4) : (sd\xi)' = nd\xi cd\xi, (cd\xi)' = (m^2 - 1) sd\xi nd\xi, (nd\xi)' = m^2 cd\xi sd\xi$$

Jakobi eliptik fonksiyonların m modülü $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ için aşağıdaki trigonometrik fonksiyonlara dönüşür:

$m \rightarrow 0$ için;

$$\begin{aligned} sn\xi &\rightarrow \sin \xi, & cn\xi &\rightarrow \cos \xi, & dn\xi &\rightarrow 1, & sc\xi &\rightarrow \tan \xi, & sd\xi &\rightarrow \sin \xi, & cd\xi &\rightarrow \cos \xi, \\ ns\xi &\rightarrow \csc \xi, & nc\xi &\rightarrow \sec \xi, & nd\xi &\rightarrow 1, & cs\xi &\rightarrow \cot \xi, & ds\xi &\rightarrow \csc \xi, & dc\xi &\rightarrow \sec \xi. \end{aligned}$$

$m \rightarrow 1$ için;

$$\begin{aligned} sn\xi &\rightarrow \tanh\xi, & cn\xi &\rightarrow \sec h\xi, & dn\xi &\rightarrow \sec h\xi, & sc\xi &\rightarrow \sinh\xi, & sd\xi &\rightarrow \sin h\xi, & cd\xi &\rightarrow 1, \\ ns\xi &\rightarrow \coth\xi, & nc\xi &\rightarrow \cosh\xi, & nd\xi &\rightarrow \cosh\xi, & cs\xi &\rightarrow \csc h\xi, & ds\xi &\rightarrow \csc h\xi, & dc\xi &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Ters eliptik fonksiyonların tanımlanması da mümkündür. Örneğin $x = sn\ u$ ise $u = sn^{-1}x$ dir. Burada u , k ya bağlıdır. Bu bağımlılığı iyice belirtmek için bazen $u = sn^{-1}(x, k)$ veya $u = sn^{-1}x, \text{ mod } k$ yazılır.

3.1 K(n,n) Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyonlar ile Çözümü

(2.1.2) ile verilen K(m,n) denkleminde $m = n$ alınmasıyla elde edilen

$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad n > 1 \quad (3.1.1)$$

formundaki K(n,n) denklemini gözönüne alalım. (3.1.1) denkleminde

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x - vt)$$

dönüşümü uygulanır ve ξ ye göre integre edilirse, $u = u(\xi)$ için

$$-cu + au^n + k^2(u^n)_{\xi\xi} = 0, \quad (3.1.2)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.1.2) denkleminin Jakobi eliptik çözümlerini elde etmek için aşağıdaki çözüm fonksiyonunu kullanacağız.

$$u(\xi) = Asn^\beta(B\xi, \ell) \quad (3.1.3)$$

burada A ve B belirlenecek sabitler, v dalga hızı ve ℓ Jakobi eliptik fonksiyonun modülüdür. (3.1.3) bağıntısında gerekli türevler alınır;

$$\begin{aligned} u^n(\xi) &= A^n sn^{n\beta}(B\xi, \ell) \\ (u^n(\xi))' &= BA^n n\beta v n(B\xi, \ell) dn(B\xi, \ell) sn^{n\beta-1}(B\xi, \ell) \\ (u^n(\xi))'' &= B^2 A^n (n\beta - 1) n\beta sn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) \\ &\quad - B^2 A^n n\beta [\ell + \ell^2 (n\beta - 1) + n\beta] sn^{n\beta}(B\xi, \ell) \\ &\quad + B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) sn^{n\beta+2}(B\xi, \ell) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.1.2) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$-vAsn^\beta(B\xi, \ell) + aA^n sn^{n\beta}(B\xi, \ell) + k^2 B^2 A^n (n\beta - 1) n\beta sn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) \quad (3.1.5)$$

$$-k^2 B^2 A^n n\beta [\ell + \ell^2 (n\beta - 1) + n\beta] sn^{n\beta}(B\xi, \ell) + k^2 B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) sn^{n\beta+2}(B\xi, \ell) = 0,$$

elde edilir. (3.1.5) denklemini için iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1:

$$n\beta = n\beta,$$

$$\beta = n\beta - 2,$$

$$aA^n - k^2 B^2 A^n n\beta [\ell + \ell^2 (n\beta - 1) + n\beta] = 0, \quad (3.1.6)$$

$$-vA + k^2 B^2 A^n (n\beta - 1) n\beta = 0,$$

(3.1.6) cebirsel denklem sisteminden

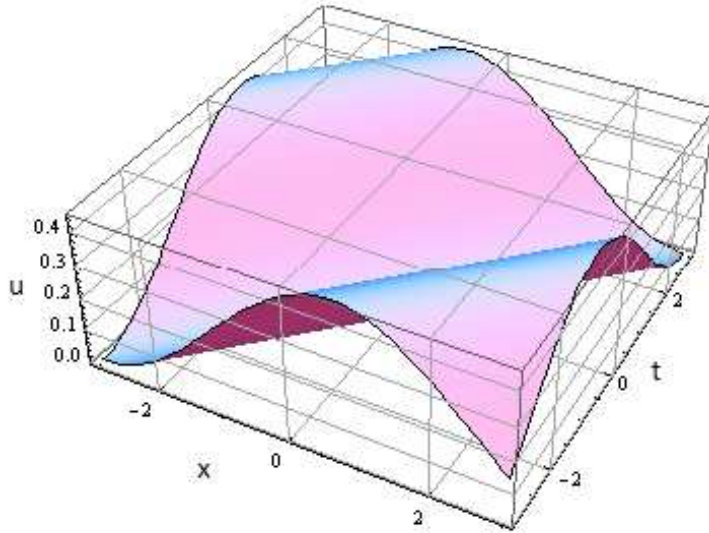
$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{n-1}, \quad k = \frac{n-1}{B\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(n+1) + 2n)}}\sqrt{a}, \\ A^{n-1} &= \frac{v(\ell(n-1) + \ell^2(n+1) + 2n)}{a(n+1)}, \quad n \neq 1, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

değerleri elde edilir. $K(n,n)$ denkleminin kompakt çözümlerini bulmak için (3.1.7) deki değerleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= \left\{ \frac{c(\ell(n-1) + \ell^2(n+1) + 2n)}{a(n+1)} \right. \\ &\quad \left. sn^2 \left[\frac{n-1}{\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(n+1) + 2n)}}\sqrt{a}(x-vt), \ell \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

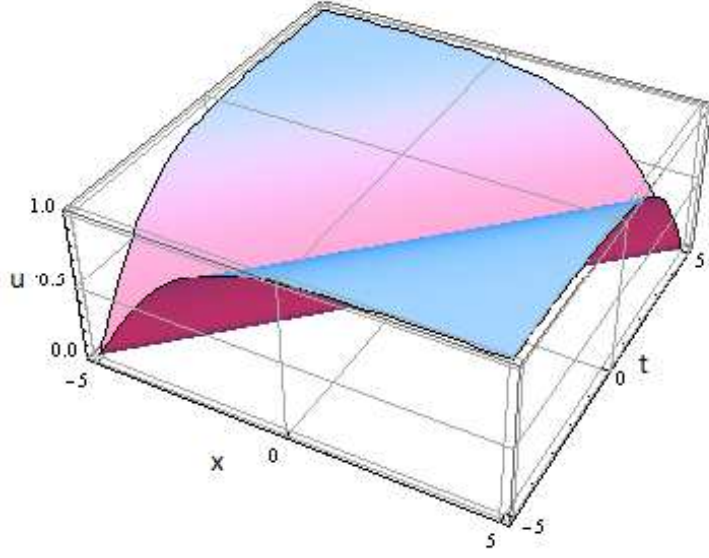
Jakobi eliptik çözümü elde edilir. (3.1.8) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ alırsak sırasıyla kompakt ve topolojik soliton çözümleri bulunur.

$$u_{1,1}(\xi) = \left[\frac{2nc}{a(n+1)} \sin^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{a}(x-vt) \right] \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (3.1.9)$$



Şekil 3.1.1 (3.1.9) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınarak elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

$$u_{1,2}(\xi) = \left\{ \frac{4nc}{a(n+1)} \tanh^2 \left[\frac{n-1}{2\sqrt{2n}} \sqrt{a}(x-vt) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}. \quad (3.1.10)$$



Şekil 3.1.2 (3.1.10) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

Durum 2:

$$n\beta = n\beta,$$

$$\beta = n\beta + 2,$$

$$aA^n - k^2 B^2 A^n n\beta [\ell + \ell^2 (n\beta - 1) + n\beta] = 0, \quad (3.1.11)$$

$$-cA + k^2 B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) = 0,$$

(3.1.11) cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle,

$$\beta = \frac{2}{1-n}, \quad k = \frac{1-n}{B\sqrt{2n(\ell(1-n) + \ell^2(3n-1) + 2n)}}\sqrt{a} \quad (3.1.12)$$

$$A^{1-n} = \frac{a\ell(1-n+2n\ell)}{v[\ell(1-n) + \ell^2(3n-1) + 2n]},$$

değerleri elde edilir.

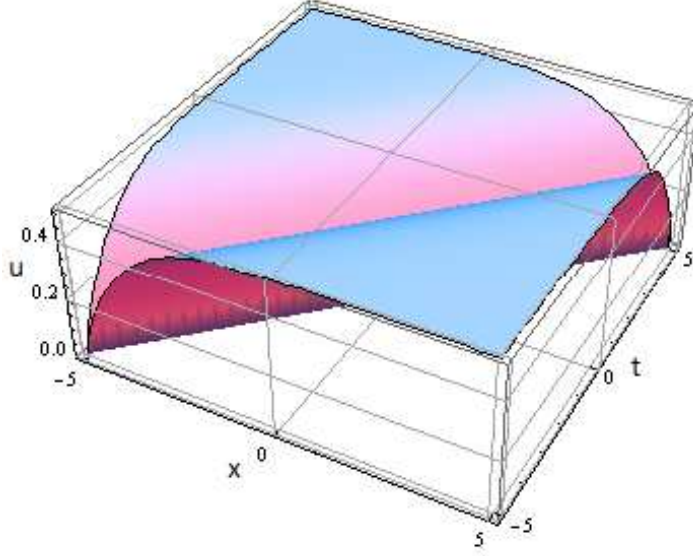
$K(n,n)$ denkleminin kompaktın çözümlerini bulmak için (3.1.12) deki değerleri (3.1.3) de yerine yazarsak,

$$u_2(\xi) = \left\{ \frac{a\ell(1-n+2n\ell)}{v[\ell(1-n) + \ell^2(3n-1) + 2n]} \right. \quad (3.1.13)$$

$$\left. sn^2 \left[\frac{1-n}{\sqrt{2n(\ell(1-n) + \ell^2(3n-1) + 2n)}}\sqrt{a}(x-vt), \ell \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

Jakobi eliptik çözümü elde edilir. (3.1.13) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $l \rightarrow 1$ alırsak topolojik soliton çözümü bulunur.

$$u_{2,1}(\xi) = \left\{ \frac{a(n+1)}{4nv} \tanh^2 \left[\frac{1-n}{2\sqrt{2n}} \sqrt{a}(x-vt) \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.1.14)$$



Şekil 3.1.3 (3.1.14) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 1$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

Burada (3.1.9) çözümü Wazwaz' ın [44] sine-cosine metoduyla elde ettiği çözüm ile aynı, (3.1.14) deki son çözüm ise [45] ile benzerdir.

(3.1.2) denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için

$$u(\xi) = A n^\beta (B\xi, \ell) \quad (3.1.15)$$

bağıntısını kullanacağız. (3.1.15) bağıntısından (3.1.2) denklemi için gerekli türevleri alırsak;

$$\begin{aligned} u^n(\xi) &= A^n n^{n\beta} (B\xi, \ell) \\ (u^n(\xi))' &= -B A^n n\beta sn(B\xi, \ell) dn(B\xi, \ell) n^{n\beta-1} (B\xi, \ell) \\ (u^n(\xi))'' &= -B^2 A^n (\ell^2 - 1) (n\beta - 1) n\beta n^{n\beta-2} (B\xi, \ell) \\ &\quad + B^2 A^n n\beta [\ell - n\beta + \ell^2 (2n\beta - 1)] n^{n\beta} (B\xi, \ell) \\ &\quad - B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) n^{n\beta+2} (B\xi, \ell) \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

bulunur. Bulunan bu türev değerlerini (3.1.2) denkleminde yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
& -vAcn^\beta(B\xi, \ell) + aA^n cn^{n\beta}(B\xi, \ell) - k^2 B^2 A^n (\ell^2 - 1) (n\beta - 1) n\beta cn^{n\beta-2}(B\xi, \ell) \quad (3.1.17) \\
& + k^2 B^2 A^n n\beta [\ell - n\beta + \ell^2 (2n\beta - 1)] cn^{n\beta}(B\xi, \ell) - k^2 B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) cn^{n\beta+2}(B\xi, \ell) = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.17) denklemini için de iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1:

$$n\beta = n\beta,$$

$$\beta = n\beta - 2,$$

$$aA^n + k^2 B^2 A^n n\beta [\ell - n\beta + \ell^2 (2n\beta - 1)] = 0, \quad (3.1.18)$$

$$-vA - k^2 B^2 A^n (\ell^2 - 1) (n\beta - 1) n\beta = 0,$$

Yukarıdaki eşitliklerin çözülmesiyle,

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2}{n-1}, \quad k = \frac{n-1}{B\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(3n+1) + 2n)}}\sqrt{a}, \quad (3.1.19) \\
A^{n-1} &= \frac{v(\ell(1-n) - \ell^2(3n+1) + 2n)}{a(n+1)(\ell^2-1)}, \quad n \neq 1
\end{aligned}$$

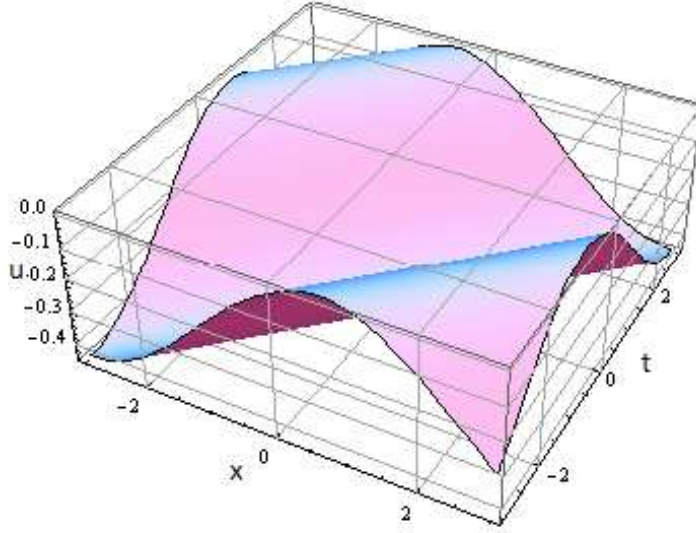
değerleri elde edilir. $K(n,n)$ denkleminin kompakton çözümlerini bulmak için (3.1.19) daki değerleri kullanırsak,

$$\begin{aligned}
u_3(\xi) &= \left\{ \frac{v(\ell(1-n) - \ell^2(3n+1) + 2n)}{a(n+1)(\ell^2-1)} \right. \\
&\quad \left. cn^2 \left[\frac{n-1}{\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(3n+1) + 2n)}}\sqrt{a}(x-vt), \ell \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.1.20)
\end{aligned}$$

Jakobi eliptik çözümü bulunur. (3.1.20) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ alırsak;

$$u_{3,1}(\xi) = \left\{ \frac{-2nc}{a(n+1)} \cos^2 \left[\frac{n-1}{2n} \sqrt{a}(x-vt) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}}. \quad (3.1.21)$$

kompakton çözümü bulunur.



Şekil 3.1.4 (3.1.21) çözümünde $v = 1, n = 2, a = 3$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

kompakton çözümleri bulunur.

Durum 2:

$$n\beta = n\beta,$$

$$\beta = n\beta + 2,$$

$$aA^n + k^2 B^2 A^n n\beta [\ell - n\beta + \ell^2 (2n\beta - 1)] = 0, \quad (3.1.22)$$

$$-vA - k^2 B^2 A^n n\beta \ell (1 + n\beta \ell) = 0,$$

eşitliklerinin çözülmesiyle

$$\beta = \frac{2}{1-n}, \quad k = \frac{1-n}{B\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(1-5n) + 2n)}}\sqrt{a} \quad (3.1.23)$$

$$A^{1-n} = \frac{a\ell(n-2n\ell-1)}{v[\ell(n-1) + \ell^2(1-5n) + 2n]}, \quad n \neq 1$$

değerleri elde edilir. (3.1.23) değerlerini kullanırsak,

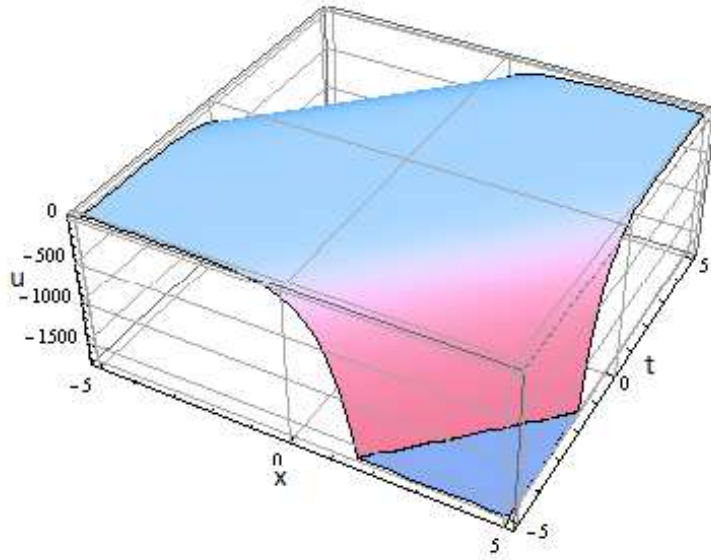
$$u_4(\xi) = \left\{ \frac{a\ell(n-2n\ell-1)}{c[\ell(n-1) + \ell^2(1-5n) + 2n]} \right. \quad (3.1.24)$$

$$\left. cn^2 \left[\frac{1-n}{\sqrt{2n(\ell(n-1) + \ell^2(1-5n) + 2n)}}\sqrt{a}(x-vt), \ell \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}},$$

Jakobi eliptik çözümü elde edilir. (3.1.24) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak;

$$u_{4,1}(\xi) = \left\{ \frac{a(n+1)}{2nv} \sec h^2 \left[\frac{1-n}{2n} \sqrt{-a} (x-vt) \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.1.25)$$

şeklindeki tek dalga çözümü bulunur.



Şekil 3.1.5 (3.1.25) çözümünde $v = 1, n = 2, a = -1$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.1.21) deki ilk çözüm Wazwaz' ın [44] sine-cosine metoduyla elde ettiği çözüm ile (3.1.25) ile verilen ikinci çözüm de [46] ile benzerdir.

3.2 Zamana Bağlı Katsayılara Sahip K(m,n) Denklemine Jakobi Eliptik Fonksiyonlar İle Çözümü

Genelleştirilmiş evlütasyon terimine ve zamana bağlı katsayılara sahip K(m,n) denklemi

$$\left(u^k\right)_t + a(t)u + cu^m u_x + b(t)(u^n)_{xxx} = 0, \quad (3.2.1)$$

formunda verilir. Burada $a(t)$ ve $b(t)$ reel değerli fonksiyonlar iken k, m ve n pozitif tamsayılardır. Dikkat edilirse burada $k = 1$, $a(t) = 0$ ve $b(t) = 1$ iken denklem klasik K(m,n) denklemine indirgenir.

(3.2.1) denkleminin Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u(x, t) = A sn^\beta [B(x - vt), \ell] \quad (3.2.2)$$

olsun. Burada A solitonun genliğini, B solitonun ters genişliğini ve v solitonun hızını temsil eder. Ayrıca ℓ , Jakobi eliptik fonksiyonun modülüdür ve β pozitif tamsayısı daha sonra k, m ve n nin bir fonksiyonu olarak tanımlanacaktır. $A = A(t)$, $B = B(t)$, $v = v(t)$ ve $\xi = B(x - vt)$ olmak üzere (3.2.2) bağıntısında gerekli türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} \left(u^k\right)_t &= kA^{k-1} \frac{dA}{dt} sn^{k\beta}(\xi, \ell) \\ &\quad - k\beta A^k B \left(v + t \frac{dv}{dt}\right) cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{k\beta-1}(\xi, \ell) \\ &\quad + \frac{k\beta A^k}{B} \frac{dB}{dt} \xi cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{k\beta-1}(\xi, \ell), \\ u^m u_x &= \beta A^{m+1} B cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{\beta(m+1)-1}(\xi, \ell), \\ (u^n)_{xxx} &= n\beta A^n B^3 (2 - 3\beta + \beta^2) cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta-3}(\xi, \ell) \\ &\quad + n\beta A^n B^3 [(2 - 3\beta + \beta^2)(-m^2 - 1) + (2 - 3\beta)(\ell + 1)] cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta-1}(\xi, \ell) \\ &\quad + n\beta A^n B^3 [m^2 \beta^2 - \ell(2 - 3\beta)] cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta+1}(\xi, \ell). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &kA^{k-1} \frac{dA}{dt} sn^{k\beta}(\xi, \ell) + k\beta A^k \left[\frac{\xi}{\beta} \frac{dB}{dt} - vB - tB \frac{dv}{dt}\right] cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{k\beta-1}(\xi, \ell) \\ &+ a(t) A sn^\beta(\xi, \ell) + c\beta A^{m+1} B cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{\beta(m+1)-1}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B^3 (2 - 3\beta + \beta^2) cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta-3}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B^3 [(2 - 3\beta + \beta^2)(-m^2 - 1) + (2 - 3\beta)(\ell + 1)] cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta-1}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B^3 [m^2 \beta^2 - \ell(2 - 3\beta)] cn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{n\beta+1}(\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Bu denklemde birinci ve üçüncü terim gözönüne alınırsa,

$$k\beta = \beta \quad (3.2.5)$$

$$kA^{k-1} \frac{dA}{dt} + a(t) A = 0$$

eşitliklerinden

$$k = 1, \quad (3.2.6)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\int a(t) dt} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Burada A_0 solitonun başlangıç genliğidir. (3.2.4) denklemde ikinci ve altıncı terim gözönüne alınırsa

$$k\beta - 1 = n\beta - 1 \quad (3.2.8)$$

olduğundan

$$k = n = 1 \quad (3.2.9)$$

bulunur. Şimdi dördüncü ve son terim gözönüne alınırsa,

$$\beta(m+1) - 1 = n\beta + 1, \quad (3.2.10)$$

$$c\beta A^{m+1} B + b(t)n\beta A^n B^3 [m^2\beta^2 - \ell(2 - 3\beta)] = 0$$

yazılır. (3.2.10) eşitliklerinden β ve $B(t)$ fonksiyonları

$$\beta = \frac{2}{m}, \quad (3.2.11)$$

$$B(t) = \left[\frac{mcA^m}{b(t)[\ell(2m-6) - 4m]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.12)$$

şeklinde elde edilir. İkinci terimde $\xi c n(\xi, \ell) d n(\xi, \ell) s n^{k\beta-1}(\xi, \ell)$ nin katsayısı sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad (3.2.13)$$

böylece,

$$B(t) = \text{sabit} \quad (3.2.14)$$

bulunur. Son olarak ikinci ve altıncı terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$k\beta A^k \left[-vB - tB \frac{dv}{dt} \right] = -b(t)n\beta A^n B^3 \left[(2 - 3\beta + \beta^2) (-m^2 - 1) + (2 - 3p) (\ell + 1) \right] \quad (3.2.15)$$

yazılır ve buradan solitonun hızı

$$v(t) = \frac{B^2}{m^2 t} \left[(2m^2 - 6m + 4) (m^2 + 1) + m(-2m + 6) (\ell + 1) \right] \int b(t) dt \quad (3.2.16)$$

olarak bulunur. (3.2.16) eşitliği, (3.2.12) gözönünde bulundurularak tekrar düzenlenirse

$$v(t) = \frac{cA^m}{mtb(t) [\ell(2m - 6) - 4m]} \left[(2m^2 - 6m + 4) (m^2 + 1) + m(-2m + 6) (\ell + 1) \right] \int b(t) dt \quad (3.2.17)$$

elde edilir.

(3.2.7) ve (3.2.12) ifadelerinden zamana bağlı $a(t)$ ve $b(t)$ katsayı fonksiyonları arasındaki ilişki c_0 sıfırdan farklı reel değerli sabit olmak üzere

$$e^{-m \int a(t) dt} = c_0 b(t), \quad m > 0 \quad (3.2.18)$$

şeklinde verilebilir.

Buna göre ele alınan denklem

$$u_t + a(t)u + cu^m u_x + b(t)(u)_{xxx} = 0, \quad (3.2.19)$$

formuna indirgenmiş olur ve denklemin çözümü

$$u_1(x, t) = Asn^{\frac{2}{m}} [B(x - vt), \ell] \quad (3.2.20)$$

şeklinde dir. (3.2.20) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ alırsak sırasıyla kompakt ve topolojik soliton çözümleri

$$u_{1,1}(x, t) = A \sin^{\frac{2}{m}} [B_1(x - v_1 t)], \quad (3.2.21)$$

$$u_{1,2}(x, t) = A \tanh^{\frac{2}{m}} [B_2(x - v_2 t)] \quad (3.2.22)$$

elde edilir. Burada kompakt çözümünde

$$B_1(t) = \left[-\frac{cA^m}{4b(t)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_1(t) = \frac{-cA^m}{4m^2 tb(t)} \left[(2m^2 - 6m + 4) (m^2 + 1) + m(-2m + 6) \right] \int b(t) dt$$

şeklinde, topolojik soliton çözümünde ise

$$B_2(t) = \left[\frac{mcA^m}{2b(t)(-m+3)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_2(t) = \frac{cA^m}{2m^2tb(t)(-m+3)} [(2m^2 - 6m + 4)(m^2 + 1) + 2m(-2m + 6)] \int b(t) dt$$

olarak tanımlıdır.

Zamana bağlı katsayılarla sahip K(m,n) denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için

$$u(x, t) = Acn^\beta [B(x - vt), \ell] \quad (3.2.23)$$

bağıntısını kullanacağız. $A = A(t)$, $B = B(t)$, $v = v(t)$ ve $\xi = B(x - vt)$ olmak üzere (3.2.23) bağıntısında gerekli türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} (u^k)_t &= kA^{k-1} \frac{dA}{dt} cn^{k\beta}(\xi, \ell) \\ &\quad + k\beta A^k B \left(v + t \frac{dv}{dt} \right) sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{k\beta-1}(\xi, \ell) \\ &\quad - \frac{k\beta A^k}{B} \frac{dB}{dt} \xi sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{k\beta-1}(\xi, \ell), \\ u^m u_x &= -\beta A^{m+1} B sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{\beta(m+1)-1}(\xi, \ell), \\ (u^n)_{xxx} &= n\beta A^n B^3 (1 - m^2) (-2 + 3\beta - \beta^2) sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta-3}(\xi, \ell) \\ &\quad + n\beta A^n B^3 [m^2 (-2 + 3\beta - \beta^2) + \ell (-2 + 3\beta)] sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta-1}(\xi, \ell) \\ &\quad + n\beta A^n B^3 (2\ell + 3\beta\ell - m^2\beta^2) sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta+1}(\xi, \ell). \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &kA^{k-1} \frac{dA}{dt} cn^{k\beta}(\xi, \ell) - k\beta A^k \left[\frac{\xi}{\beta} \frac{dB}{dt} - vB - tB \frac{dv}{dt} \right] sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{k\beta-1}(\xi, \ell) \\ &+ a(t) Acn^\beta(\xi, \ell) - c\beta A^{m+1} B sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{\beta(m+1)-1}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B^3 (1 - m^2) (-2 + 3\beta - \beta^2) sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta-3}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B^3 [m^2 (-2 + 3\beta - \beta^2) + \ell (-2 + 3\beta)] sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta-1}(\xi, \ell) \\ &+ b(t) n\beta A^n B (2\ell + 3\beta\ell - m^2\beta^2) sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{n\beta+1}(\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

elde edilir. Bu denklemde birinci ve üçüncü terim gözönüne alınırsa,

$$k\beta = \beta \quad (3.2.26)$$

$$kA^{k-1} \frac{dA}{dt} + a(t) A = 0$$

eşitliklerinden

$$k = 1, \quad (3.2.27)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\int a(t) dt} \quad (3.2.28)$$

elde edilir. Burada A_0 solitonun başlangıç genliğidir. (3.2.25) denkleminde ikinci ve altıncı terim gözönüne alınırsa

$$k\beta - 1 = n\beta - 1 \quad (3.2.29)$$

olduğundan

$$k = n = 1 \quad (3.2.30)$$

bulunur. Şimdi dördüncü ve son terim gözönüne alınırsa,.

$$\beta(m+1) - 1 = n\beta + 1, \quad (3.2.31)$$

$$-c\beta A^{m+1}B + b(t)n\beta A^n B(2\ell + 3\beta\ell - m^2\beta^2) = 0$$

yazılır. (3.6.31) eşitliklerinden β ve $B(t)$ fonksiyonları

$$\beta = \frac{2}{m}, \quad (3.2.32)$$

$$B(t) = \left[\frac{mcA^m}{b(t)[\ell(2m+6) - 4m]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.33)$$

şeklinde elde edilir. İkinci terimde $\xi sn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{k\beta-1}(\xi, \ell)$ nin katsayısı sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad (3.2.34)$$

böylece,

$$B(t) = \text{sabit} \quad (3.2.35)$$

bulunur. Son olarak ikinci ve altıncı terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$k\beta A^k \left[vB + tB \frac{dv}{dt} \right] = -b(t)n\beta A^n B^3 [m^2(-2 + 3\beta - \beta^2) + \ell(-2 + 3\beta)] \quad (3.2.36)$$

yazılır ve buradan

$$v(t) = \frac{B^2}{mt} [m(2m^2 - 6m + 8) + \ell(2m - 6)] \int b(t) dt \quad (3.2.37)$$

bulunur. (3.2.37) eşitliği, (3.2.33) gözönünde bulundurularak tekrar düzenlenirse, solitonun hızı

$$v(t) = \frac{cA^m}{mtb(t)[\ell(2m+6)-4m]} [m(2m^2-6m+8) + \ell(2m-6)] \int b(t) dt \quad (3.2.38)$$

olur.

(3.2.7) ve (3.2.12) ifadelerinden zamana bağlı $a(t)$ ve $b(t)$ katsayı fonksiyonları arasındaki ilişki c_0 sıfırdan farklı reel değerli sabit olmak üzere

$$e^{-m \int a(t) dt} = c_0 b(t), \quad m > 0 \quad (3.2.39)$$

şeklinde verilebilir. Böylece denklemin Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_2(x, t) = A c n^{\frac{2}{m}} [B(x - vt), \ell] \quad (3.2.40)$$

şeklinde dir. (3.2.40) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ alırsak sırasıyla, kompakt ve tek dalga çözümleri

$$u_{2,1}(x, t) = A \cos^{\frac{2}{m}} [B_1(x - v_1 t)], \quad (3.2.41)$$

$$u_{2,2}(x, t) = A \sec h^{\frac{2}{m}} [B_2(x - v_2 t)] \quad (3.2.42)$$

elde edilir. Burada kompakt çözümünde

$$B_1(t) = \left[-\frac{cA^m}{4b(t)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_1(t) = \frac{-cA^m}{4mtb(t)} [m(2m^2-6m+8)] \int b(t) dt$$

şeklinde, tek dalga çözümünde ise

$$B_2(t) = \left[\frac{mcA^m}{2b(t)(-m+3)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_2(t) = \frac{mcA^m}{2mtb(t)(-m+3)} [m(2m^2-6m+8) + 2m-6] \int b(t) dt$$

şeklinde tanımlıdır.

3.3 Genelleştirilmiş NLS Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyonlar İle Çözümü

Genelleştirilmiş Nonlinear Schrödinger (NLS) denklemi

$$i(u^m)_t + a(u^m)_{xx} + bF(|u|^2)u^m = 0, \quad m \geq 1 \quad (3.3.1)$$

formunda verilir. Burada u kompleks değerli bir fonksiyon olduğu için (3.3.1) denkleminin çözümünü

$$u(x, t) = P(x, t) \cdot e^{i\phi} \quad (3.3.2)$$

formunda yazabiliriz. Burada ϕ fazı

$$\phi = -\kappa x + wt + \theta \quad (3.3.3)$$

şeklinde tanımlıdır. P ise solitonun genliği olup söz konusu olan nonlinear F fonksiyonunun türüne bağlıdır ve darbenin şeklini temsil eder. (3.3.3) denkleminde κ solitonun frekansını, w solitonun dalga sayısını ve θ faz sabitini temsil eder. (3.3.1) denkleminin çözümü için (3.3.2) denkleminde gerekli türevleri alırsak,

$$(u^m)_t = \left(mP^{m-1} \frac{\partial P}{\partial t} + imwP^m \right) e^{im\phi}, \quad (3.3.4)$$

$$(u^m)_{xx} = \left(mP^{m-1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2im^2 \kappa P^{m-1} \frac{\partial P}{\partial x} + m(m-1)P^{m-2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - m^2 \kappa^2 P^m \right) e^{im\phi}, \quad (3.3.5)$$

bulunur. (3.3.4) ve (3.3.5) numaralı denklemleri (3.3.1) ile yerine yazarak imajiner ve reel kısımları ayrılırsa sırasıyla,

$$mP^{m-1} \frac{\partial P}{\partial t} - 2am^2 \kappa P^{m-1} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (3.3.6)$$

$$mwP^m - bF(P^2)P^m - a \left\{ mP^{m-1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + m(m-1)P^{m-2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - m^2 \kappa^2 P^m \right\} = 0, \quad (3.3.7)$$

elde edilir. (3.3.6) denklemi

$$\frac{\partial P}{\partial t} - 2am\kappa \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (3.3.8)$$

şeklinde yazılabilir. P 'nin hareketli dalga tipi formunda olması gerektiğinden v solitonun hızı olmak üzere

$$P = g(x - vt), \quad (3.3.9)$$

şeklinde yazılır. Buna göre (3.3.8) ifadesi gözönüne alınırsa solitonun hızı

$$v = \frac{dx^*}{dt} = -2am\kappa, \quad (3.3.10)$$

şeklinde bulunur. Burada x^* solitonun merkez pozisyonudur. (3.3.10) ile verilen solitonun hızı nonlineerliğin bütün türleri için geçerlidir.

3.3.1 Kerr Yasası

Kerr yasası lineer olmayan tepkilerle karşılaşan optik fiberdeki bir ışık dalgası gerçeğinden ortaya çıkmıştır. Lineer olmayan tepkiler oldukça zayıf olmalarına rağmen ışık dalga boyu bakımından ölçüldüğünde çok uzun mesafeli çeşitli yollarda yayılımın etkileri görülür. Lineer olmayan tepkinin kaynağı bir uygulama alanının etkisi altındaki bağlı elektronların harmonik olmayan hareketi ile ilgilidir. Sonuç olarak elektrik ikiz kutuplarından indüklenen polarizasyonun Fourier genliği elektrik alanında lineer olmamakla birlikte elektrik alan genliğinde yüksek terimler içerir [47].

Kerr yasası için genelleştirilmiş NLS denklemi

$$i(u^m)_t + a(u^m)_{xx} + b|u|^2 u^m = 0 \quad (3.3.11)$$

şeklinde dir. Kerr yasası nonlineerliği için P Jakobi eliptik fonksiyon cinsinden

$$P(x, t) = A sn^p(\xi, \ell) \quad (3.3.12)$$

şeklinde ele alalım. Burada ℓ Jakobi eliptik fonksiyonun modülü olup $\xi = B(x - vt)$ olarak tanımlıdır. A ve B sırasıyla solitonun genliğini ve ters genişliğini temsil eder. (3.3.12) bağıntısında gerekli türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= pABcn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) sn^{p-1}(\xi, \ell), \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= -p^2(\ell^2 + 1)A^2B^2sn^{2p}(\xi, \ell) + p^2A^2B^2sn^{2p-2}(\xi, \ell) + p^2\ell^2A^2B^2sn^{2p+2}(\xi, \ell), \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= (p-1)pAB^2sn^{p-2}(\xi, \ell) - p(p + \ell - \ell^2 + p\ell^2)AB^2sn^p(\xi, \ell) \\ &\quad + p\ell(1 + p\ell)AB^2sn^{p+2}(\xi, \ell), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& mwA^m sn^{mp}(\xi, \ell) - am(p-1)pA^m B^2 sn^{mp-2}(\xi, \ell) + amp(p+\ell-\ell^2+p\ell^2)A^m B^2 sn^{mp}(\xi, \ell) \\
& - amp\ell(1+p\ell)A^m B^2 sn^{mp+2}(\xi, \ell) + am(m-1)p^2(\ell^2+1)A^m B^2 sn^{mp}(\xi, \ell) \\
& - am(m-1)p^2 A^m B^2 sn^{mp-2}(\xi, \ell) - am(m-1)p^2 \ell^2 A^m B^2 sn^{mp+2}(\xi, \ell) \quad (3.3.14) \\
& + am^2 \kappa^2 A^m sn^{mp}(\xi, \ell) - bA^{m+2} sn^{(m+2)p}(\xi, \ell) = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.14) bağıntısında $(m+2)p$ ve $mp+2$ eşitlenirse

$$(m+2)p = mp+2, \quad (3.3.15)$$

$$p = 1, \quad (3.3.16)$$

elde edilir. Lineer bağımsız fonksiyonlar olduğundan $j = -2, 0$ için $sn^{mp+j}(\xi, \ell)$ nin katsayıları sıfıra eşittir. Bu durum ve (3.3.15) ile (3.3.16) bağıntıları gözönüne alınırsa w dalga sayısı ve B ters genişliği

$$w = aB^2 [\ell^2(1-m) - \ell - m] - am\kappa^2, \quad (3.3.17)$$

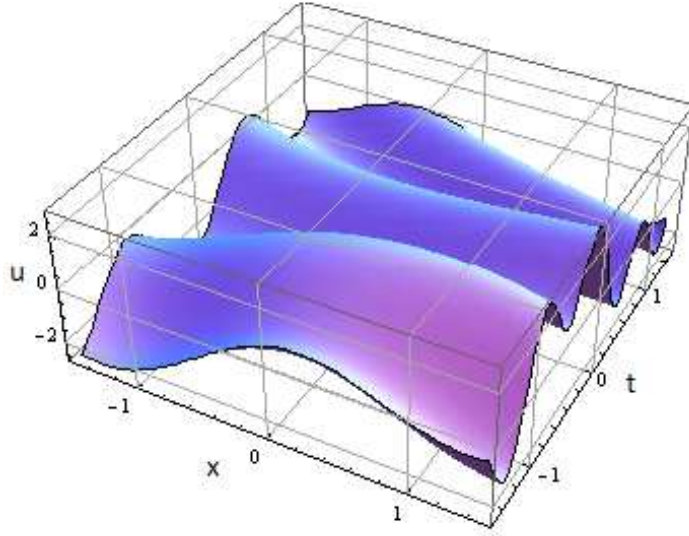
ve

$$B = \left[\frac{-bA^2}{a\ell m(1+\ell m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.18)$$

şeklinde elde edilir. Böylece Kerr yasası için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_1(x, t) = A sn[B(x-vt), \ell] e^{i(-\kappa x + wt + \theta)} \quad (3.3.19)$$

şeklinde bulunur. Buradaki A genliği ve B ters genişliği arasındaki ilişki (3.3.18) de, w dalga sayısı (3.3.17) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemden verilmiştir.



Şekil 3.3.1 (3.3.19) çözümünde $a = 1, b = -1, m = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen üç boyutlu resmi

(3.3.19) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak,

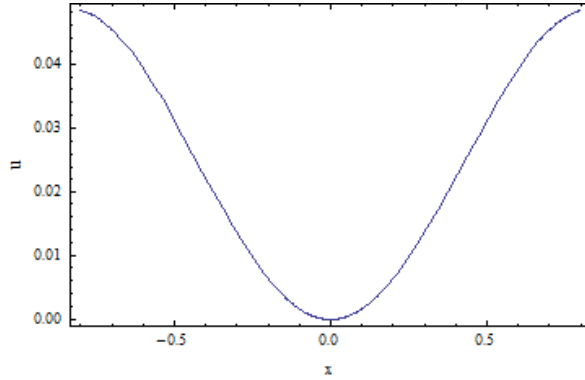
$$u_{1,1}(x, t) = A \tanh [B_1 (x - vt)] e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)} \quad (3.3.20)$$

dark optik soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = \left[\frac{-bA^2}{am(1+m)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.21)$$

$$w_1 = am(-2B_1^2 - \kappa^2) \quad (3.3.22)$$

dir.



Şekil 3.3.2 (3.3.20) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

Kerr yasasına sahip genelleştirilmiş NLS denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için

$$P(x, t) = A cn^p[\xi, \ell] \quad (3.3.23)$$

çözüm fonksiyonunu ele alalım. (3.3.23) bağıntısında gerekli türevler alınırsa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -pABsn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) cn^{p-1}(\xi, \ell), \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= p^2(2\ell^2 - 1)A^2B^2cn^{2p}(\xi, \ell) - p^2(\ell^2 - 1)A^2B^2cn^{2p-2}(\xi, \ell) \\ &\quad - p^2\ell^2A^2B^2sn^{2p+2}(\xi, \ell), \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= -(p-1)p(\ell^2 - 1)AB^2cn^{p-2}(\xi, \ell) + p(-p + \ell - \ell^2 + 2p\ell^2) \\ &\quad AB^2cn^p(\xi, \ell) - p\ell(1 + p\ell)AB^2cn^{p+2}(\xi, \ell) \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} mwA^m cn^{mp}(\xi, \ell) + am(p-1)p(\ell^2 - 1)A^mB^2cn^{mp-2}(\xi, \ell) - amp(-p + \ell - \ell^2 + 2p\ell^2) \\ A^mB^2cn^{mp}(\xi, \ell) + am p\ell(1 + p\ell)A^mB^2cn^{mp+2}(\xi, \ell) - am(m-1)p^2(2\ell^2 - 1) \\ A^mB^2cn^{mp}(\xi, \ell) + am(m-1)p^2(\ell^2 - 1)A^mB^2cn^{mp-2}(\xi, \ell) + am(m-1)p^2\ell^2 \\ A^mB^2cn^{mp+2}(\xi, \ell) + am^2\kappa^2A^m cn^{mp}(\xi, \ell) - bA^{m+2}cn^{(m+2)p}(\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

elde edilir. (3.3.25) bağıntısında $(m+2)p$ ve $mp+2$ eşitlenirse

$$(m+2)p = mp + 2, \quad (3.3.26)$$

$$p = 1, \quad (3.3.27)$$

elde edilir. $j = -2, 0$ için $cn^{mp+j}(\xi, \ell)$ nin katsayıları lineer bağımsız olarak sıfıra eşittir.

Bu durum ve (3.3.26).ile (3.3.27) bağıntıları gözönüne alınırsa

$$w = aB^2[\ell^2 + \ell - 1 + (m-1)(2\ell^2 - 1)] - am\kappa^2, \quad (3.3.28)$$

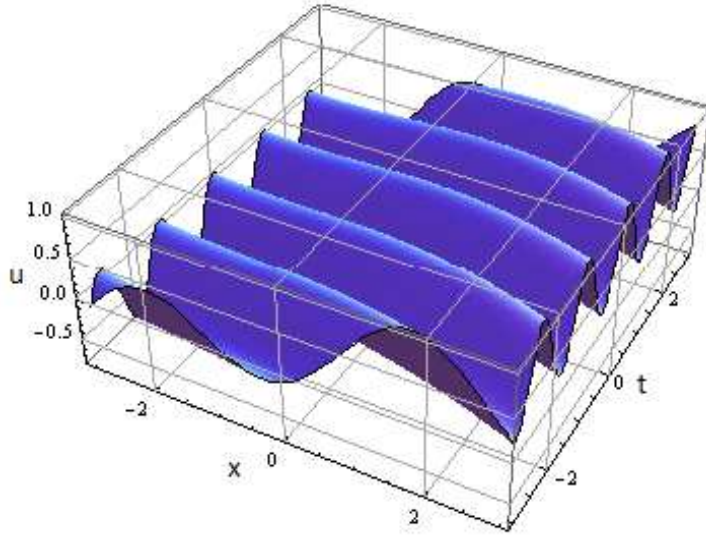
ve

$$B = \left[\frac{bA^2}{a\ell m(1 + \ell m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.29)$$

şeklinde elde edilir. Böylece Kerr yasası için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_2(x, t) = A cn[B(x - vt), \ell] e^{i(-\kappa x + wt + \theta)} \quad (3.3.30)$$

olur. Buradaki A genliği ve B invers genişliği arasındaki ilişki (3.3.29) da, w dalga sayısı (3.3.28) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.3 (3.3.30) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

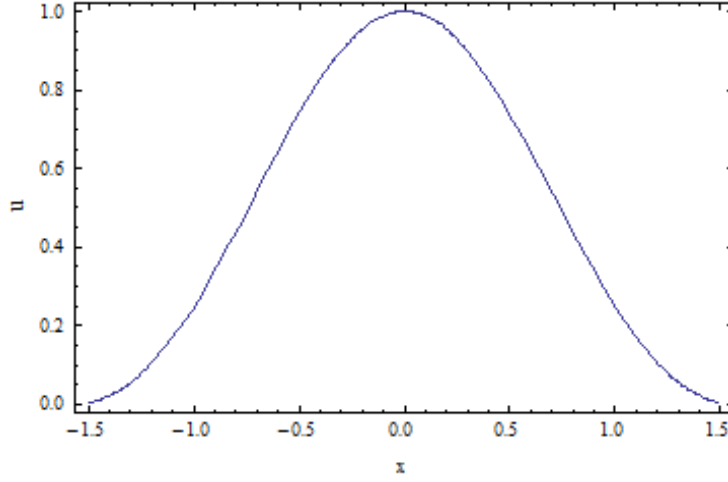
(3.3.30) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak,

$$B_1 = \left[\frac{bA^2}{am(1+m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.31)$$

$$w_1 = am(B_1^2 - \kappa^2), \quad (3.3.32)$$

olmak üzere

$$u_{2,1}(x, t) = A \operatorname{sech} [B_1(x - vt)] e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)}, \quad (3.3.33)$$



Şekil 3.3.4 (3.3.33) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

bright optik soliton çözümü elde edilir. Bu çözüm [48] de ansatz metodu kullanılarak elde edilen çözüm ile benzerdir.

3.3.2 Kuvvet (Power) Yasası

Bu yasa zayıf turbulans teorisindeki küçük K -yoğunlaşımı probleminin çözümüyle lineer olmayan plazmalarda ortaya çıkar [49]. Fiziksel olarak yarı iletkenler içeren çeşitli materyaller lineer olmayanlığın kuvvet yasası türünü sergilerler. Kuvvet yasası için genelleştirilmiş NLS denklemi

$$i(u^m)_t + a(u^m)_{xx} + b|u|^{2n}u^m = 0 \quad (3.3.34)$$

formunda yazılır. Bu lineer olmayanlık türüne sahip NLS denkleminin çözümü için P ifadesi (3.3.12) deki şekilde alınacaktır. Buna göre (3.3.13) ile verilen türevler (3.3.34) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} mwA^m sn^{mp}(\xi, \ell) - am(p-1)pA^m B^2 sn^{mp-2}(\xi, \ell) + amp(p+\ell-\ell^2+p\ell^2)A^m B^2 sn^{mp}(\xi, \ell) \\ - amp\ell(1+p\ell)A^m B^2 sn^{mp+2}(\xi, \ell) + am(m-1)p^2(\ell^2+1)A^m B^2 sn^{mp}(\xi, \ell) \\ - am(m-1)p^2 A^m B^2 sn^{mp-2}(\xi, \ell) - am(m-1)p^2 \ell^2 A^m B^2 sn^{mp+2}(\xi, \ell) \\ + am^2 \kappa^2 A^m sn^{mp}(\xi, \ell) - bA^{m+2n} sn^{(m+2n)p}(\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

elde edilir. (3.3.35) bağıntısında $(m + 2n)p$ ve $mp + 2$ eşitlenirse

$$(m + 2n)p = mp + 2, \quad (3.3.36)$$

$$p = \frac{1}{n}, \quad (3.3.37)$$

elde edilir. Kerr yasası durumunda olduğu gibi $j = -2, 0$ için $sn^{mp+j}(\xi, \ell)$ nin katsayıları sıfıra eşittir. Bu durum ve (3.3.36) ile (3.3.37) bağıntıları gözönüne alınırsa

$$w = -\frac{a}{n^2}B^2 [\ell^2 + 1 + n(\ell - \ell^2) + (m - 1)(\ell^2 + 1)] - am\kappa^2, \quad (3.3.38)$$

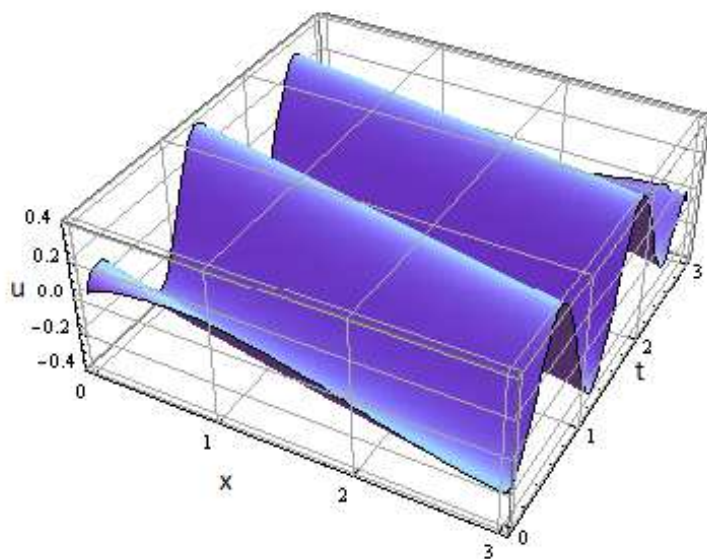
ve

$$B = \left[\frac{-bn^2A^{2n}}{alm(n + \ell m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.39)$$

bulunur. Böylece kuvvet yasası için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_1(x, t) = Asn^{\frac{1}{n}} [B(x - vt), \ell] e^{i(-\kappa x + wt + \theta)} \quad (3.3.40)$$

şeklinde dir. Buradaki A genliği ve B ters genişliği arasındaki ilişki (3.3.39) da, w dalga sayısı (3.3.38) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.5 (3.3.40) çözümünde $a = 2, b = -1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

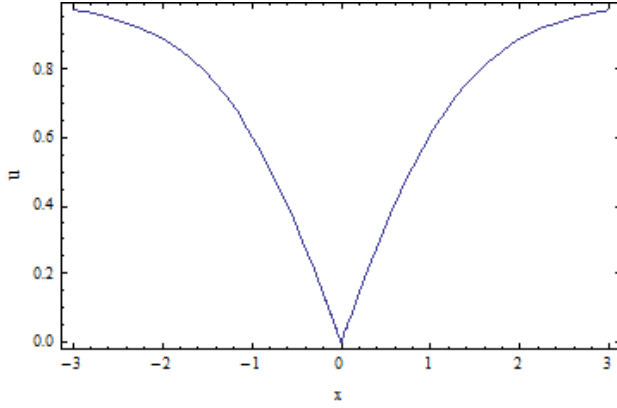
(3.3.40) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak

$$B_1 = \left[\frac{-bn^2 A^{2n}}{am(n+m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.41)$$

$$w_1 = -\frac{2}{n^2} am B_1^2 - am \kappa^2, \quad (3.3.42)$$

olmak üzere

$$u_{1,1}(x, t) = A \tan h^{\frac{1}{n}} [B_1 (x - vt)] e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)}, \quad (3.3.43)$$



Şekil 3.3.6 (3.3.43) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

dark optik soliton çözümü elde edilir.

Kuvvet yasasına sahip genelleştirilmiş NLS denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için (3.3.23) deki P ifadesi kullanılarak elde edilen türev değerleri (3.3.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & mw A^m cn^{mp}(\xi, \ell) + am(p-1)p(\ell^2-1) A^m B^2 cn^{mp-2}(\xi, \ell) \\ & - amp(-p + \ell - \ell^2 + 2p\ell^2) A^m B^2 cn^{mp}(\xi, \ell) + am p \ell(1+p\ell) A^m B^2 cn^{mp+2}(\xi, \ell) \\ & - am(m-1)p^2(2\ell^2-1) A^m B^2 cn^{mp}(\xi, \ell) + am(m-1)p^2(\ell^2-1) A^m B^2 cn^{mp-2}(\xi, \ell) \\ & + am(m-1)p^2\ell^2 A^m B^2 cn^{mp+2}(\xi, \ell) + am^2\kappa^2 A^m cn^{mp}(\xi, \ell) \\ & - b A^{m+2n} cn^{(m+2n)p}(\xi, \ell) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

bulunur. (3.3.44) bağıntısında $(m+2n)p$ ve $mp+2$ katsayıları eşitlenirse p nin değeri (3.3.37) deki şekilde bulunur. $j = -2, 0$ için $sn^{mp+j}(\xi, \ell)$ nin katsayıları lineer bağımsız olarak sıfıra eşitlenir ve (3.3.36) ile (3.3.37) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$w = \frac{a}{n^2} B^2 [n\ell(1-\ell) + m(2\ell^2-1)] - am\kappa^2, \quad (3.3.45)$$

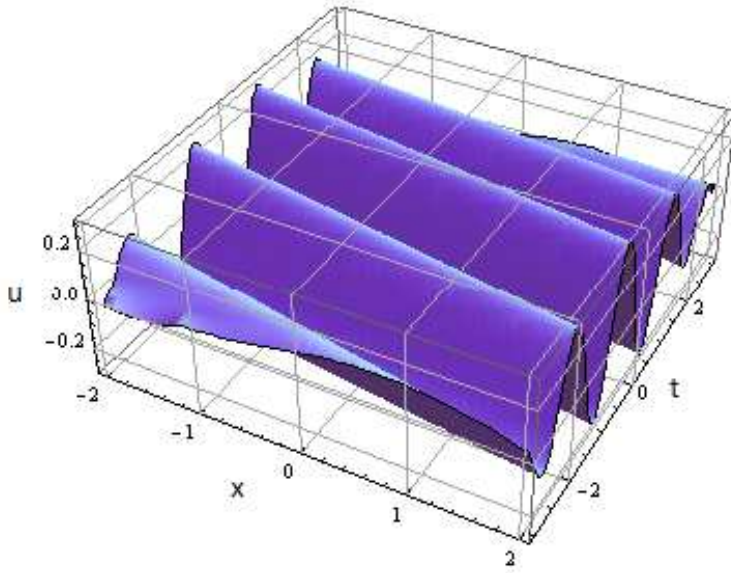
ve

$$B = \left[\frac{bn^2 A^{2n}}{a\ell m(n + \ell m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.46)$$

olur. Böylece kuvvet yasası için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_2(x, t) = A c n^{\frac{1}{n}} [B(x - vt), \ell] e^{i(-\kappa x + wt + \theta)} \quad (3.3.47)$$

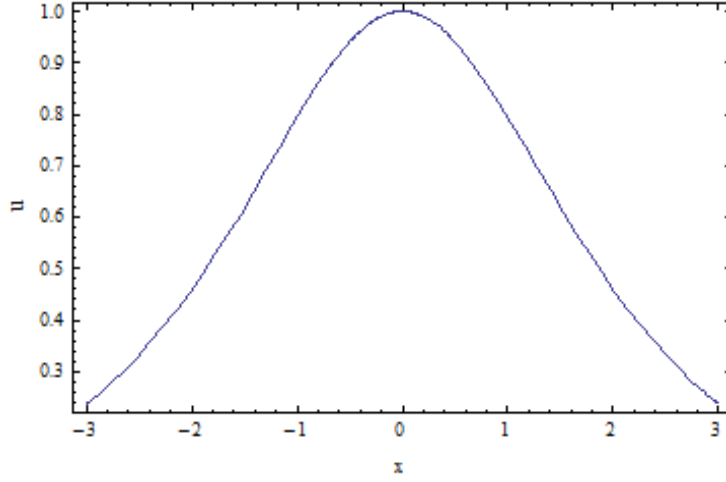
şeklinde bulunur. Burada genlik ve ters genişlik arasındaki ilişki (3.3.46) de, dalga sayısı (3.3.45) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.7 (3.3.47) çözümünde $a = 2, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.3.47) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak

$$u_{2,1}(x, t) = A \operatorname{sech}^{\frac{1}{n}} [B_1(x - vt)] e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)}, \quad (3.3.48)$$



Şekil 3.3.8 (3.3.48) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

bright optik soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = \left[\frac{bn^2 A^{2n}}{am(n+m)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.49)$$

$$w_1 = \frac{a}{n^2} m (B_1^2 - n^2 \kappa^2), \quad (3.3.50)$$

şeklindedir.

3.3.3 Parabolik Yasa

Bu yasa Langmuir dalgaları ve elektronlar arasındaki nonlinear etkileşimden ortaya çıkmıştır ve yüksek frekanslı Langmuir dalgaları ile iyon-akustik dalgaları arasındaki lineer olmayan etkileşimi tanımlar. Bilinen analitik çözümleri olmadığı için ve beşinci dereceden terimin önemli materyaller bulma şansı zayıf olduğu için beşinci dereceden nonlinear ortamda optik ışınların yayılımına gösterilen ilgi azdır. Ancak son gelişmeler bu alandaki ilgiyi yeniden canlandırmıştır. $CDS_x S_{c1-x}$ -katkılı camın optik yatkınlığı tecrübe edilerek beşinci dereceden yatkınlığa $\chi^{(5)}$ e sahip olduğu gösterildi. Aynı zamanda saydam bir bardak içinde 620 nm dalga boyunda yoğun femtosaniye darbelerle önemli derecede $\chi^{(5)}$ nonlinearlik etkisinin varlığı gösterildi [49].

Lineer olmayanlık türüne göre parabolik yasa için genelleştirilmiş NLS denklemi

$$i(u^m)_t + a(u^m)_{xx} + b(|u|^2 + k_1|u|^4)u^m = 0, \quad (3.3.51)$$

formunda yazılır. Burada k_1 sabiti parabolik yasadaki iki nonlinear terimi bağlar. Bu durumda P fonksiyonu

$$P(x, t) = A [D_1 + sn(\xi, \ell)]^p, \quad (3.3.52)$$

olarak alınır. Burada D_1 sabiti ve bilinmeyen p üssü daha sonra tanımlanacaktır. Buna göre gerekli türevler alınır

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= pABcn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{p-1}, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= p^2 A^2 B^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} - p^2 A^2 B^2 (\ell^2 + 1) \left\{ D_1^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. - 2D_1 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p-1} + [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p} \right\} \\ &\quad + p^2 A^2 B^2 \ell^2 \left\{ D_1^4 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} - 4D_1^3 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p-1} \right. \\ &\quad \left. + 6D_1^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p} - 4D_1 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p+1} + [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{2p+2} \right\}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= pAB^2 \left[(p-1) - (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) D_1^2 + (1+\ell) D_1^2 - \ell(1+\ell) D_1^4 \right. \\ &\quad \left. + \ell(1+p\ell) D_1^4 \right] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{p-2} + pAB^2 \left[2D_1 (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) \right. \\ &\quad \left. - D_1 (1+\ell) - 3D_1^3 \ell (1+\ell) - 4D_1^3 \ell (1+p\ell) \right] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{p-1} \\ &\quad + [pAB^2 - (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) - 3D_1^2 \ell (1+\ell) + 6\ell(1+p\ell) D_1^2] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^p \\ &\quad + pAB^2 [D_1 \ell (1+\ell) - 4D_1 (1+p\ell)] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{p+1} \\ &\quad + pAB^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{p+2} \ell (1+p\ell), \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &mwA^m [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp} - ampA^m B^2 \left\{ (p-1) - (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) D_1^2 + (1+\ell) D_1^2 \right. \\ &\quad \left. - \ell(1+\ell) D_1^4 + \ell(1+p\ell) D_1^4 \right\} [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} - ampA^m B^2 \left\{ 2D_1 (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) \right. \\ &\quad \left. - D_1 (1+\ell) - 3D_1^3 \ell (1+\ell) - 4D_1^3 \ell (1+p\ell) \right\} [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-1} \\ &\quad - ampA^m B^2 \left[- (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) - 3D_1^2 \ell (1+\ell) + 6\ell(1+p\ell) D_1^2 \right] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp} \\ &\quad - ampA^m B^2 [D_1 \ell (1+\ell) - 4D_1 (1+p\ell)] [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp+1} \\ &\quad - ampA^m B^2 \ell (1+p\ell) [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp+2} - am(m-1) p^2 A^m B^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} \\ &\quad + am(m-1) p^2 A^m B^2 (\ell^2 + 1) [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp} + am(m-1) p^2 A^m B^2 (\ell^2 + 1) D_1^2 \\ &\quad [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} - 2am(m-1) p^2 A^m B^2 (\ell^2 + 1) D_1 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-1} \quad (3.3.54) \\ &\quad - am(m-1) p^2 A^m B^2 \ell^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp+2} - am(m-1) p^2 A^m B^2 \ell^2 D_1^4 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_1^2[D_1+sn(\xi,\ell)]^{mp} + 4am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_1[D_1+sn(\xi,\ell)]^{mp+1} \\
& + 4am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_1^3[D_1+sn(\xi,\ell)]^{mp-1} + am^2\kappa^2A^m[D_1+sn(\xi,\ell)]^{mp} \\
& - bA^{m+2}[D_1+sn(\xi,\ell)]^{(m+2)p}(\xi,\ell) - bk_1A^{m+4}[D_1+sn(\xi,\ell)]^{(m+4)p}(\xi,\ell) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.54) bağıntısında $(m+2)p$ ve $mp+1$ eşitlenirse

$$(m+2)p = mp + 1, \quad (3.3.55)$$

$$p = \frac{1}{2}, \quad (3.3.56)$$

bulunur. Ayrıca $mp+2$ ve $(m+4)p$ eşitlenerek de p nin aynı değeri elde edilir. Lineer bağımsız fonksiyonlar olduklarından $j = -2, -1, 0, 1, 2$ için $[D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp+j}$ katsayıları sıfıra eşittir. Bu durum ve (3.3.55) ile (3.3.56) bağıntıları gözönüne alınır

$$\begin{aligned}
w = & \frac{aB^2}{4} [\ell^2 - 2\ell - 1 - (m-1)(\ell^2 + 1) + 6\ell(\ell+2)D_1^2 \\
& + 6\ell^2(m-1)D_1^2 - 6\ell(\ell+1)D_1^3] - am\kappa^2,
\end{aligned} \quad (3.3.57)$$

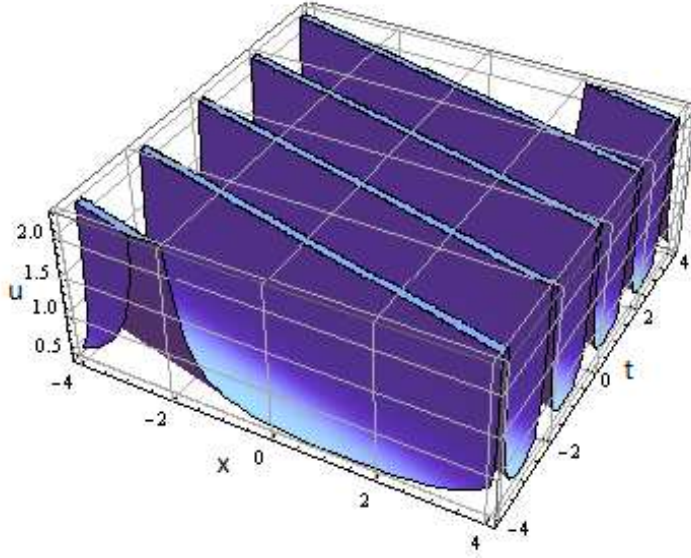
$$B = 2A \left[-\frac{b}{a\ell m D_1(\ell(4m-6)-6)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.58)$$

$$D_1 = \left[\frac{(m-1)(\ell^2 + 1) + \ell^2 + \ell}{\ell(2\ell m - 3\ell + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.59)$$

elde edilir. Böylece parabolik yasa için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_1(x, t) = A [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa x + wt + \theta)}, \quad (3.3.60)$$

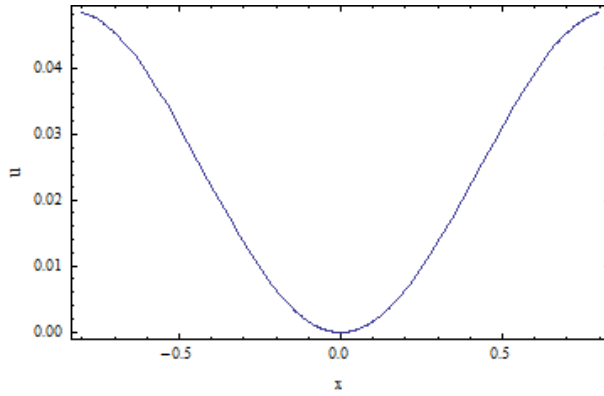
olur. Buradaki A genliği ve B ters genişliği arasındaki ilişki (3.3.58) de, w dalga sayısı (3.3.57) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.9 (3.3.60) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.3.60) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak,

$$u_{1,1}(x, t) = A [D_{1,1} + \tan h [B_1 (x - vt)]]^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)} \quad (3.3.61)$$



Şekil 3.3.10 (3.3.61) çözümünde $a = -1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

dark optikal soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = A \sqrt{\frac{-b}{amD_{1,1}(m-3)}}, \quad (3.3.62)$$

$$w_1 = \frac{aB_1^2}{2} (-m + 3D_{1,1}^2(m+2) - 6D_{1,1}^3) - am\kappa^2, \quad (3.3.63)$$

$$D_{1,1} = \sqrt{\frac{m}{m-1}}, \quad (3.3.64)$$

şeklindedir.

Parabolik yasa nonlinearlığına sahip genelleştirilmiş NLS denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için

$$P(x, t) = A [D_1 + cn(\xi, \ell)]^p \quad (3.3.65)$$

bağıntısını ele alalım. (3.3.65) bağıntısında gerekli türevler alınır;

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -pABsn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{p-1} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= p^2 A^2 B^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} + p^2 A^2 B^2 2(\ell^2 - 1) \left[D_1^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. - 2D_1 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-1} + [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p} \right] - p^2 A^2 B^2 \ell^2 \left[[D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. + D_1^4 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} - 4D_1^3 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p-1} + 6D_1^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p} \right. \\ &\quad \left. - 4D_1 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p+1} + p^2 A^2 B^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{2p+2} \right] \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= -pAB^2 [(p-1)(\ell^2 - 1) - (p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) D_1^2 + (\ell^2 + \ell - 1) D_1^2 \\ &\quad - \ell(\ell + 1) D_1^4 + \ell(1 + p\ell) D_1^4] [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{p-2} \\ &\quad - pAB^2 [-2p + \ell(\ell - 1) D_1 - 2p\ell^2 - (\ell^2 + \ell - 1) D_1 \\ &\quad - 4\ell(1 + p\ell) D_1^3 + 3\ell(\ell + 1) D_1^3] [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{p-1} \\ &\quad - pAB^2 [(p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) + 6\ell(1 + p\ell) D_1^2 - 3\ell(\ell + 1) D_1^2] \\ &\quad [D_1 + cn(\xi, \ell)]^p - pAB^2 [-4\ell(1 + p\ell) D_1 + \ell(\ell + 1) D_1] \\ &\quad [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{p+1} - pAB^2 \ell(1 + p\ell) [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{p+2} \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} mwA^m [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp} + ampA^m B^2 \{ (p-1)(\ell^2 - 1) - (p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) D_1^2 \\ + (\ell^2 + \ell - 1) D_1^2 - \ell(\ell + 1) D_1^4 + \ell(1 + p\ell) D_1^4 \} [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} - ampA^m B^2 \\ \{ -2(p + \ell(\ell - 1) D_1 - 2p\ell^2 - (\ell^2 + \ell - 1) D_1) - 4\ell(1 + p\ell) D_1^3 + 3\ell(\ell + 1) D_1^3 \} \\ [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-1} + ampA^m B^2 \{ (p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) + 6\ell(1 + p\ell) D_1^2 \\ - 3\ell(\ell + 1) D_1^2 \} [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp} + ampA^m B^2 \{ -4\ell(1 + p\ell) D_1 + \ell(\ell + 1) D_1 \} \\ [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp+1} + ampA^m B^2 \ell(1 + p\ell) [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp+2} - am(m-1)p^2 A^m B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} - am(m-1)p^2 A^m B^2 (2\ell^2 - 1) [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp} - am(m-1)p^2 \\
& A^m B^2 (2\ell^2 - 1) D_1^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} + 2am(m-1)p^2 A^m B^2 (2\ell^2 - 1) D_1 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-1} \\
& + am(m-1)p^2 A^m B^2 \ell^2 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} + am(m-1)p^2 A^m B^2 \ell^2 [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{mp+2} \\
& + am(m-1)p^2 A^m B^2 \ell^2 D_1^4 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} + 6am(m-1)p^2 A^m B^2 \ell^2 D_1^2 \\
& [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp} - 4am(m-1)p^2 A^m B^2 \ell^2 D_1 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp+1} - 4am(m-1)p^2 \\
& A^m B^2 \ell^2 D_1^3 [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp-1} + am^2 \kappa^2 A^m [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp} \quad (3.3.67) \\
& - bA^{m+2} [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{(m+2)p}(\xi, \ell) - bk_1 A^{m+4} [D_1 + sn(\xi, \ell)]^{(m+4)p}(\xi, \ell) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.67) bağıntısında $(m+2)p$ ve $mp+1$ katsayıları eşitlenirse p nin değeri (3.3.56) daki şekilde bulunur. Ayrıca $mp+2$ ve $(m+4)p$ eşitlenerek de p nin aynı değeri elde edilir. $j = -2, -1, 0, 1, 2$ için $[D_1 + cn(\xi, \ell)]^{mp+j}$ katsayıları lineer bağımsız olarak sıfıra eşitlenir ve bu durumlar gözönüne alınırsa

$$w = \frac{aB^2}{4} [2\ell - 1 + (m-1)(2\ell^2 + 6\ell^2 D_1 - 1) - 6\ell D_1^2] - am\kappa^2, \quad (3.3.68)$$

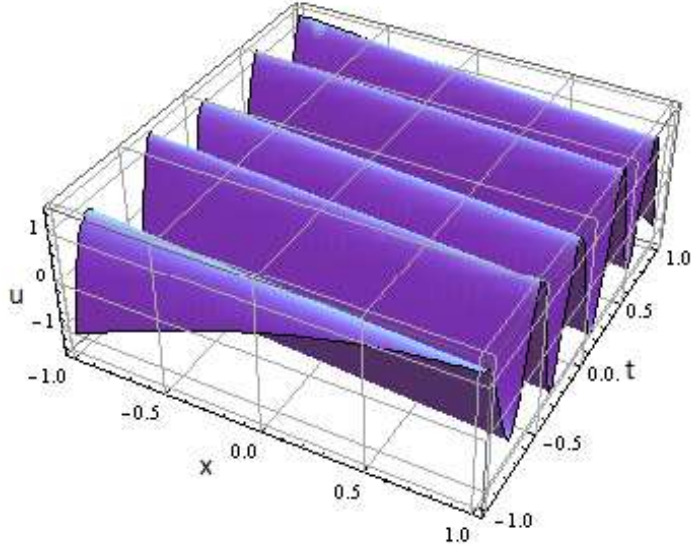
$$B = A \left[\frac{2b}{am(1 - 2\ell^2(m-1)D_1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.69)$$

$$D_1 = \left[\frac{\ell(1 - 2\ell) + (m-1)(2\ell^2 - 1)}{\ell(1 - \ell) + 2\ell^2(m-1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.70)$$

bulunur. Böylece parabolik yasa için genelleştirilmiş NLS denkleminin farklı bir soliton çözümü

$$u_2(x, t) = A [D_1 + cn(\xi, \ell)]^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa x + wt + \theta)}, \quad (3.3.71)$$

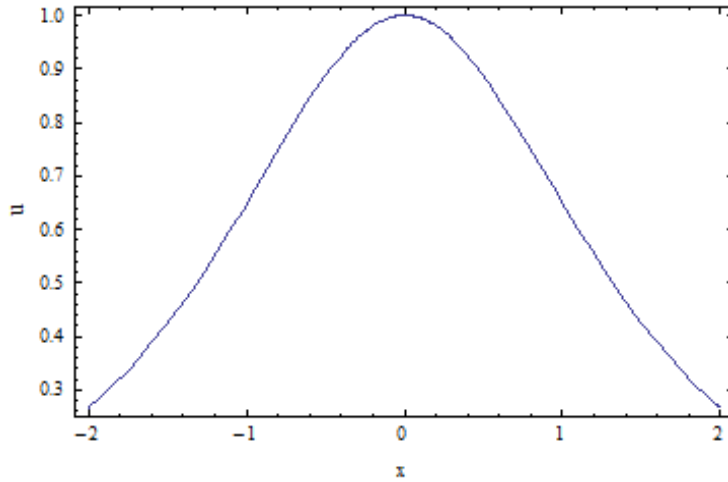
şeklinde bulunur. Burada genlik ve ters genişlik arasındaki ilişki (3.3.69) da, dalga sayısı (3.3.68) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.11 (3.3.71) çözümünde $a = 1, b = -1, m = 7, n = 1.5$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.3.71) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak

$$u_{2,1}(x, t) = A [D_{1,1} + \sec h [B_1 (x - vt)]]^{\frac{1}{2}} e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)} \quad (3.3.72)$$



Şekil 3.3.12 (3.3.72) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 2$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

bright optik soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = A \left[\frac{2b}{am [1 - 2(m-1) D_{1,1}]} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.73)$$

$$w_1 = \frac{aB^2}{4} [(m-1)(1+6D_{1,1}) - 6D_{1,1}^2 + 1] - am\kappa^2, \quad (3.3.74)$$

$$D_{1,1} = \sqrt{\frac{(m-2)}{2(m-1)}}, \quad (3.3.75)$$

şeklinde. (3.3.72) çözümü [48] de elde edilen çözüm ile benzerdir.

3.3.4 Çift-Kuvvet (Dual-Power) Yasası

Bu model lineer olmayan kırılma indisinin doyum noktasını tanımlamak için kullanılmaktadır. Aynı zamanda $LiNbO_3$ gibi fotovoltatik- fotorefraktif materyallerde solitonları tanımlamak için temel bir model olarak verilmektedir.

Çift-kuvvet yasası için genelleştirilmiş NLS denklemini

$$i(u^m)_t + a(u^m)_{xx} + b(|u|^{2n} + k_2|u|^{4n})u^m = 0, \quad (3.3.76)$$

formunda yazılır. Burada k_2 sabiti çift-kuvvet yasasındaki iki lineer olmayan terimi bağlar. Bu durumda P fonksiyonunu

$$P(x, t) = A[D_2 + sn(\xi, \ell)]^p, \quad (3.3.77)$$

olarak seçelim. Burada D_2 sabiti ve p üssü daha sonra tanımlanacaktır. Buna göre gerekli türevler alınır

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= pABcn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{p-1} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= p^2 A^2 B^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} - p^2 A^2 B^2 (\ell^2 + 1) \left\{ D_2^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. - 2D_2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p-1} + [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p} \right\} \\ &\quad + p^2 A^2 B^2 \ell^2 \left\{ D_2^4 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p-2} - 4D_2^3 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p-1} \right. \\ &\quad \left. + 6D_2^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p} - 4D_2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p+1} + [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{2p+2} \right\} \quad (3.3.78) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= pAB^2 [(p-1) - (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) D_2^2 + (1+\ell) D_2^2 - \ell(1+\ell) D_2^4 + \ell(1+p\ell) D_2^4] \\ &\quad [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{p-2} + pAB^2 [2D_2(p+\ell-\ell^2+p\ell^2) - D_2(1+\ell) - 3D_2^3\ell(1+\ell) \\ &\quad - 4D_2^3\ell(1+p\ell)] [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{p-1} + pAB^2 [-(p+\ell-\ell^2+p\ell^2) - 3D_2^3\ell(1+\ell) \\ &\quad + 6\ell(1+p\ell) D_2^2] [D_2 + sn(\xi, \ell)]^p + pAB^2 [D_2\ell(1+\ell) - 4D_2(1+p\ell)] [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{p+1} \\ &\quad + pAB^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{p+2} \ell(1+p\ell) \end{aligned}$$

bağıntıları bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$m\omega A^m [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp} - ampA^m B^2 \{(p-1) - (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) D_2^2 + (1+\ell) D_2^2$$

$$\begin{aligned}
& -\ell(1+\ell)D_2^4 + \ell(1+p\ell)D_2^4\} [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} - ampA^m B^2 \{2D_2(p+\ell-\ell^2+p\ell^2) \\
& -D_2(1+\ell) - 3D_2^3\ell(1+\ell) - 4D_2^3\ell(1+p\ell)\} [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-1} - ampA^m B^2 \\
& [- (p+\ell-\ell^2+p\ell^2) - 3D_2^3\ell(1+\ell) + 6\ell(1+p\ell)D_2^2] [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp} - ampA^m B^2 \\
& [D_2\ell(1+\ell) - 4D_2(1+p\ell)] [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp+1} - ampA^m B^2\ell(1+p\ell) [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp+2} \\
& -am(m-1)p^2A^m B^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} + am(m-1)p^2A^m B^2(\ell^2+1) [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp} \\
& +am(m-1)p^2A^m B^2(\ell^2+1)D_2^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} - 2am(m-1)p^2A^m B^2(\ell^2+1)D_2 \\
& [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-1} - am(m-1)p^2A^m B^2\ell^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp+2} - am(m-1)p^2A^m B^2\ell^2D_2^4 \\
& [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-2} - 6am(m-1)p^2A^m B^2\ell^2D_2^2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp} + 4am(m-1)p^2A^m B^2 \\
& \ell^2D_2 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp+1} + 4am(m-1)p^2A^m B^2\ell^2D_2^3 [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp-1} \\
& + am^2\kappa^2A^m [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp} - bA^{m+2n} [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{(m+2n)p}(\xi, \ell) \quad (3.3.79) \\
& -bk_2A^{m+4n} [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{(m+4n)p}(\xi, \ell) = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.79) bağıntısında $(m+2n)p$ ve $mp+1$ eşitlenirse

$$(m+2n)p = mp+1, \quad (3.3.80)$$

$$p = \frac{1}{2n}, \quad (3.3.81)$$

bulunur. Ayrıca $mp+2$ ve $(m+4n)p$ eşitlenerek de p nin aynı değeri elde edilir. Lineer bağımsız fonksiyonlar olduklarından $j = -2, -1, 0, 1, 2$ için $[D_2 + sn(\xi, \ell)]^{mp+j}$ katsayıları sıfıra eşittir. Bu durum ve (3.3.80) ile (3.3.81) bağıntıları gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
w &= \frac{aB^2}{4n^2} [-2n(1+2n\ell-2n\ell^2+\ell^2) + 12n\ell(2n+\ell)D_2^2 - 12n^2(\ell+1)D_2^2 \\
& - (m-1)(\ell^2+1) + 6(m-1)\ell^2D_2^2] - am\kappa^2, \quad (3.3.82)
\end{aligned}$$

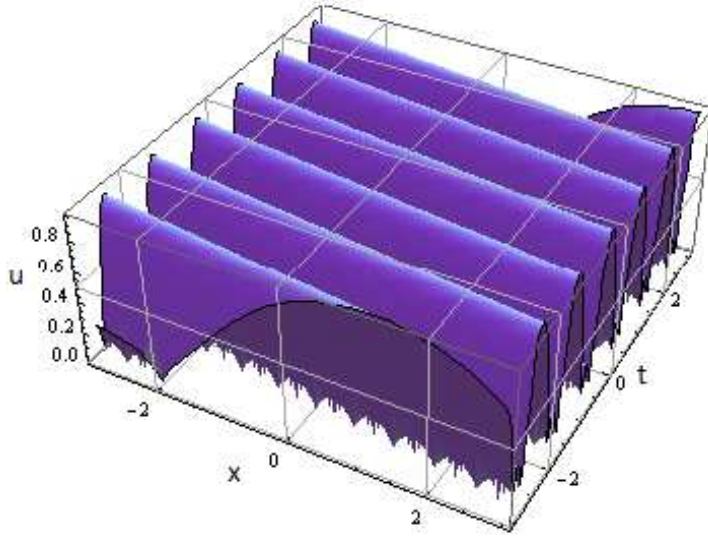
$$B = \left[\frac{2n^2bA^{2n}}{am[\ell(3n+4\ell) - \ell^2(n+2m)D_2]} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.83)$$

$$D_2 = \left[\frac{(m-1)(\ell^2+1) + 2(-\ell^2+\ell+1)}{(m-1)\ell^2 + \ell(7\ell+8)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.84)$$

şeklinde elde edilir. Böylece çift-kuvvet yasası için genelleştirilmiş NLS denkleminin bir soliton çözümü

$$u_2(x, t) = A [D_2 + sn(\xi, \ell)]^{\frac{1}{2n}} e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad (3.3.85)$$

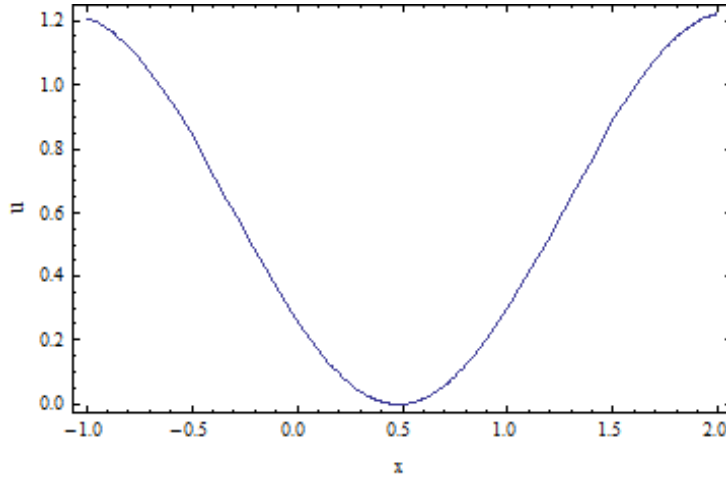
olarak bulunur. Burada genlik ve ters genişlik arasındaki ilişki (3.3.83) de, dalga sayısı (3.3.82) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.13 (3.3.85) çözümünde $a = 2, b = 3, m = 2, n = 1.5$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.3.85) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak

$$u_{2,1}(x, t) = A [D_{2,1} + \tan h [B_1 (x - vt)]]^{\frac{1}{2n}} e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)} \quad (3.3.86)$$



Şekil 3.3.14 (3.3.86) çözümünde $a = 2, b = 2, m = 2, n = 2$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

dark optik soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = \left[\frac{2n^2 b A^{2n}}{am [3n + 4 - (n + 2m) D_{2,1}]} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.87)$$

$$w_1 = \frac{aB^2}{4n^2} [-4n + 12n(2n+1)D_{2,1}^2 - 24n^2D_{2,1}^2 - 2(m-1) + 6(m-1)D_{2,1}^2] - am\kappa^2, \quad (3.3.88)$$

$$D_{2,1} = \sqrt{\frac{2m}{m+14}}, \quad (3.3.89)$$

şeklindedir.

Çift-kuvvet yasasına sahip genelleştirilmiş NLS denkleminin bir diğer Jakobi eliptik çözümünü elde etmek için

$$P(x, t) = A[D_2 + cn(\xi, \ell)]^p, \quad (3.3.90)$$

çözüm fonksiyonunu kullanalım. (3.3.90) bağıntısında gerekli türevler alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -pABsn(\xi, \ell) dn(\xi, \ell) [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{p-1} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 &= p^2A^2B^2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} + p^2A^2B^2(\ell^2 - 1) \left[D_2^2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. - 2D_2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-1} + [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p} \right] - p^2A^2B^2\ell^2 \left[[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} \right. \\ &\quad \left. + D_2^4[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-2} - 4D_2^3[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p-1} + 6D_2^2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p} \right. \\ &\quad \left. - 4D_2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p+1} + p^2A^2B^2[D_2 + cn(\xi, \ell)]^{2p+2} \right] \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= -pAB^2 \left[(p-1)(\ell^2 - 1) - (p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) D_2^2 + (\ell^2 + \ell - 1) D_2^2 \right. \\ &\quad \left. - \ell(\ell + 1) D_2^4 + \ell(1 + p\ell) D_2^4 \right] [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{p-2} - pAB^2 \\ &\quad \left[-2(p + \ell(\ell - 1) D_2 - 2p\ell^2 - (\ell^2 + \ell - 1) D_2) - 4\ell(1 + p\ell) D_2^3 \right. \\ &\quad \left. + 3\ell(\ell + 1) D_2^3 \right] [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{p-1} - pAB^2 \left[(p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) \right. \\ &\quad \left. + 6\ell(1 + p\ell) D_2^2 - 3\ell(\ell + 1) D_2^2 \right] [D_2 + cn(\xi, \ell)]^p - pAB^2 \left[-4\ell(1 + p\ell) D_2 \right. \\ &\quad \left. + \ell(\ell + 1) D_2 \right] [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{p+1} - pAB^2 \ell(1 + p\ell) [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{p+2} \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

bulunur. Bulunan bu türev değerleri (3.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &mwA^m [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp} + ampA^m B^2 \{ (p-1)(\ell^2 - 1) - (p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) D_2^2 \\ &\quad + (\ell^2 + \ell - 1) D_2^2 - \ell(\ell + 1) D_2^4 + \ell(1 + p\ell) D_2^4 \} [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} - ampA^m B^2 \\ &\quad \{ -2(p + \ell(\ell - 1) D_2 - 2p\ell^2 - (\ell^2 + \ell - 1) D_2) - 4\ell(1 + p\ell) D_2^3 + 3\ell(\ell + 1) D_2^3 \} \\ &\quad [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp-1} + ampA^m B^2 \left[(p + \ell(\ell - 1) - 2p\ell^2) + 6\ell(1 + p\ell) D_2^2 - 3\ell(\ell + 1) D_2^2 \right] \\ &\quad [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp} + ampA^m B^2 \{ -4\ell(1 + p\ell) D_2 + \ell(\ell + 1) D_2 \} [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp+1} \\ &\quad + ampA^m B^2 \ell(1 + p\ell) [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp+2} - am(m-1)p^2A^m B^2 [D_2 + cn(\xi, \ell)]^{mp-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -am(m-1)p^2A^mB^2(2\ell^2-1)[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp}-am(m-1)p^2A^mB^2(2\ell^2-1)D_2^2 \\
& [D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp-2}+2am(m-1)p^2A^mB^2(2\ell^2-1)D_2[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp-1} \\
& +am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp-2}+am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2[D_2+sn(\xi,\ell)]^{mp+2} \\
& +am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_2^4[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp-2}+6am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_2^2[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp} \\
& -4am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_2[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp+1}-4am(m-1)p^2A^mB^2\ell^2D_2^3[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp-1} \\
& +am^2\kappa^2A^m[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp}-bA^{m+2n}[D_2+cn(\xi,\ell)]^{(m+2n)p}(\xi,\ell) \quad (3.3.92) \\
& -bk_2A^{m+4n}[D_2+sn(\xi,\ell)]^{(m+4n)p}(\xi,\ell)=0,
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.92) bağıntısında $(m+2n)p$ ve $mp+1$ katsayıları eşitlenirse p nin değeri (3.3.81) deki şekilde bulunur. Ayrıca $mp+2$ ve $(m+4n)p$ eşitlenerek de p nin aynı değeri elde edilir. $j = -2, -1, 0, 1, 2$ için $[D_2+cn(\xi,\ell)]^{mp+j}$ katsayıları lineer bağımsız olarak sıfıra eşitlenir ve bu durumlar gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
w &= \frac{aB^2}{4n^2} [2n\ell(\ell-1) - 1 + 2\ell^2 - 6\ell(n+\ell-n\ell)D_2^2 \\
& + (m-1)(2\ell^2-1) - 6(m-1)\ell^2D_2^2] - am\kappa^2, \quad (3.3.93)
\end{aligned}$$

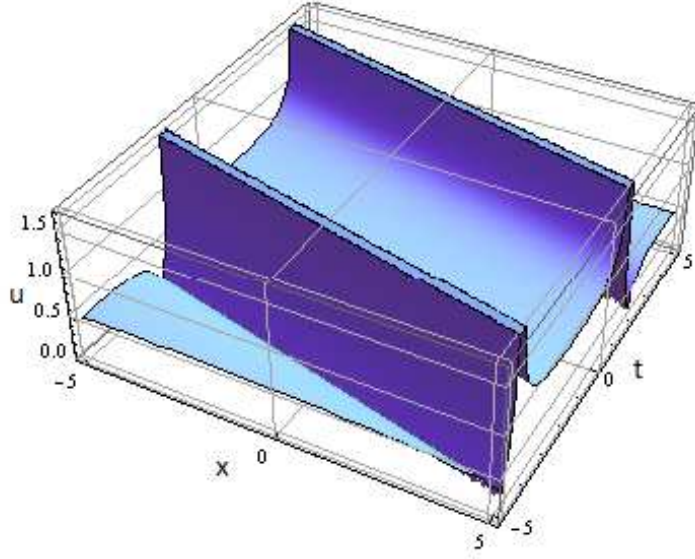
$$B = \left[\frac{4n^2bA^{2n}}{a\ell m D_2 (-4(2n+\ell) + 2n(\ell+1) - 4\ell(m-1))} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.94)$$

$$D_2 = \left[\frac{2n(\ell+1) + 2\ell^2(2-3n)}{\ell(2n+4\ell-6n\ell)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.95)$$

şeklinde elde edilir. Böylece genelleştirilmiş NLS denkleminin diğer bir soliton çözümü

$$u_2(x, t) = A[D_2+cn(\xi,\ell)]^{\frac{1}{2n}} e^{i(-\kappa x + wt + \theta)}, \quad (3.3.96)$$

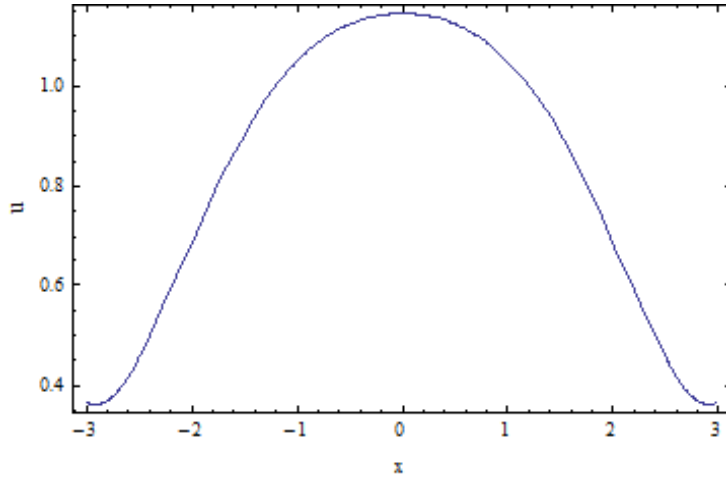
olur. Burada genlik ve ters genişlik arasındaki ilişki (3.3.94) de, dalga sayısı (3.3.93) de ve solitonun hızı ile frekansı arasındaki ilişki (3.3.10) numaralı denklemde verilmiştir.



Şekil 3.3.15 (3.3.96) çözümünde $a = 3, b = 1, m = 2, n = 1.5$ ve $\ell = 0.5$ alınmasıyla elde edilen çözümün üç boyutlu resmi.

(3.3.96) çözümünde Jakobi eliptik fonksiyonun modülünü $\ell \rightarrow 1$ alırsak,

$$u_{2,1}(x, t) = A [D_{2,2} + \sec h [B_1 (x - vt)]]^{\frac{1}{2n}} e^{i(-\kappa x + w_1 t + \theta)} \quad (3.3.97)$$



Şekil 3.3.16 (3.3.97) çözümünde $a = 1, b = 1, m = 2, n = 1.5$ ve $t = 0$ alınmasıyla elde edilen çözümün iki boyutlu resmi.

bright optik soliton çözümü elde edilir. Burada

$$B_1 = \left[\frac{n^2 b A^{2n}}{-am(n+m) D_{2,1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.98)$$

$$w_1 = \frac{amB^2}{4n^2} (1 - 6D_{2,1}^2) - am\kappa^2, \quad (3.3.99)$$

$$D_{2,1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-2n}{1-n}}, \quad (3.3.100)$$

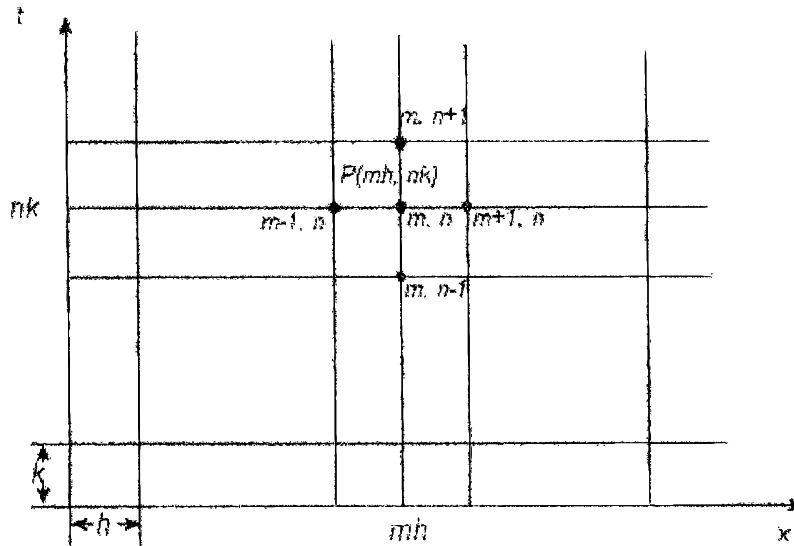
dir. (3.3.97) çözümü [48] de elde edilen çözüm ile benzerdir.

4 SONLU FARK YÖNTEMLERİ

Bu bölümde klasik sonlu fark yöntemleri anlatılacak ve bu yöntemle $K(2,3)$ denkleminin nümerik çözümleri elde edilecektir.

4.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemleri bir kdd' ye uygulanırken öncelikle problemin çözüm bölgesi geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm noktalarında hesaplanır. Daha sonra kdd deki türevler yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Fark denkleminde ortaya çıkabilecek çözüm bölgesi içine düşmeyen hayali düğüm noktalarındaki değerleri yok etmek için problemin verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla çözülür [50].



Şekil 4.1.1 Düğüm noktalarının gösterimi

U , x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $h(\equiv \Delta x)$, x yönünde konum adım uzunluğu ve $k(\equiv \Delta t)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere x konum t zaman koordinatları sırasıyla

$$\begin{aligned} x = x_m = m\Delta x = mh, \quad m = 0(1)M, \quad l = Mh, \\ t = t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0(1)N, \end{aligned}$$

olarak gösterilir. Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri

$$U_p = U(mh, nk) = U(m\Delta x, n\Delta t) = U_m^n = U_{m,n},$$

ile gösterilir.

U fonksiyonun x 'e göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h), \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h), \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2), \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k), \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k), \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h), \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h), \quad (4.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2), \quad (4.1.8)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{U_{m+2}^n - 2U_{m+1}^n + 2U_{m-1}^n - U_{m-2}^n}{2h^3} + O(h^2), \quad (4.1.9)$$

olarak bulunur. Burada “ O ” sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi hatanın $h \rightarrow 0$ iken h ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h)$ terimine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir. (4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) ile verilen, x değişkenine göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri, geri ve üç nokta merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (4.1.4) ve (4.1.5) ile verilen, t değişkenine göre birinci

mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımı denir. (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.8) ile verilen x değişkenine göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülü denir. (4.1.9) ile verilen x değişkenine göre üçüncü mertebeden türev yaklaşımına da merkezi fark formülü denir.

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için kullanılan başlıca yöntemler:

- **Açık (Explicit) Yöntem**
- **Kapalı (Implicit) Yöntem**
- **Crank-Nicolson Yöntemi**

Bu yöntemler klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinir.

Bu yöntemlerin bir uygulamasını vermek için $0 \leq x \leq \ell$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0 \quad (4.1.10)$$

ısı iletim denklemini

$$U(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (4.1.11)$$

$$U(\ell, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (4.1.12)$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (4.1.13)$$

başlangıç şartına bağlı olarak gözönüne alalım. $g_1(t)$, $g_2(t)$ ve $f(x)$ fonksiyonları önceden tanımlanmış fonksiyonlar, ℓ ise tanımlı olduğu aralığın uzunluğudur. Sonlu fark yaklaşımındaki esas düşünce istenilen $U(x, t)$ değerleri düğüm noktaları üzerinde olacak şekilde problemin çözüm bölgesinin M alt aralığa bölünmesidir. Genellikle her bir k ($\equiv \Delta t$) zaman adımında bu alt aralıkların uzunlukları h ($\equiv \Delta x$) = ℓ/M olacak şekilde eşit alınır. (4.1.10) ısı denklemindeki türevler yerine (4.1.1) – (4.1.9) ile verilen uygun fark formüllerinin yazılmasıyla denklem için sonlu fark yaklaşımları elde edilir.

4.1.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

(4.1.10) denklemindeki $\partial U/\partial t$ ve $\partial^2 U/\partial x^2$ türevleri yerine sırasıyla (4.1.4) ve (4.1.8) denklemleriyle verilen

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2),$$

sonlu fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}, \quad (4.1.14)$$

veya gerekli düzenlemeler yapılsa

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad \begin{matrix} n = 0(1)N \\ m = 1(1)M - 1 \end{matrix} \quad (4.1.15)$$

olur. Burada $r = k/h^2$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ dir. Eğer n . zaman adımındaki U_m^n değerleri verilirse $(n + 1)$. zaman adımındaki U_m^{n+1} değerleri (4.1.15) denkleminde kolayca bulunur.

4.1.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

(4.1.10) ile verilen ısı iletim denklemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$ türevi yerine $(n + 1)$ -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2),$$

merkezi fark formülü ve $\partial U / \partial t$ türevi yerine (4.1.4) ile verilen

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k),$$

ileri fark formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}, \quad (4.1.16)$$

veya gerekli düzenlemeler yapılsa

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 - 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad \begin{matrix} n = 0(1)N, \\ m = 1(1)M - 1, \end{matrix} \quad (4.1.17)$$

olur. Burada $r = k/h^2$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ dir. (4.1.11) ve (4.1.12) sınır şartlarından

$$U_0^n = g_1, \quad (4.1.18)$$

$$U_M^n = g_2, \quad (4.1.19)$$

sınır şartları gözönünde bulundurulursa bu yöntemde her bir zaman adımında $(M - 1)$ - bilinmeyenli $(M - 1)$ - tane denklemden oluşan lineer bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

4.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem sırasıyla (4.1.14) ve (4.1.16) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının avarajlarının alınmasıyla elde edilmiştir. (4.1.10) ile verilen ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right\},$$

dir. Bu denklem $n = 0(1)N$ ve $m = 1(1)M - 1$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 - 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad (4.1.20)$$

olarak yazılabilir. Burada $r = k/h^2$ olup hatanın mertebesi $O(k^2) + O(h^2)$ dir. (4.1.12) ve (4.1.13) sınır şartlarından sırasıyla

$$U_0^n = U_0^{n+1} = g_1(t), \quad (4.1.21)$$

ve

$$U_M^n = U_M^{n+1} = g_2(t), \quad (4.1.22)$$

sınır şartları gözönünde bulundurulursa bu yöntemde de kapalı sonlu fark yönteminde olduğu gibi her bir zaman adımında $(M - 1)$ - bilinmeyenli $(M - 1)$ - tane denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

4.1.4 Ağırlıklı Avaraj Yöntemi

(4.1.10) ile verilen ısı iletim denkleminin ağırlıklı avaraj yaklaşımı, $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \theta \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2},$$

veya

$$-r\theta U_{m-1}^{n+1} + (1 - 2r\theta)U_m^{n+1} - r\theta U_{m+1}^{n+1} = r(1 - \theta)U_{m-1}^n + (1 - 2r)(1 - \theta)U_m^n + r(1 - \theta)U_{m+1}^n,$$

(4.1.23)

dir.

Burada $r = k/h^2$ olup, (4.1.23) denklemi $\theta = 0$ için (4.1.10) denklemi ile verilen ısı iletim denkleminin Açık Sonlu Fark Yaklaşımını, $\theta = 1$ için Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımını ve $\theta = 1/2$ için Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımını verir [51].

4.2 Bazı Temel Kavramlar

4.2.1 Lokal Kesme Hatası

(m, n) -inci düğüm noktasında bir kdd'ye yaklaşan fark denklemi, U fark denkleminin tam çözümü olmak üzere, $F_{m,n}(U) = 0$ olarak gösterilsin. (m, n) -inci düğüm noktasında sonlu fark yaklaşımın lokal kesme hatası, $\mathbf{U}$ fonksiyonu kdd'nin tam çözümü olmak üzere,

$$T_{m,n} = F_{m,n}(\mathbf{U}),$$

olarak tanımlanır.

Lokal kesme hatası sonlu fark yaklaşımından elde edilecek çözümün kdd'nin tam çözümüne ne kadar iyi yaklaştığını veren bir ölçüdür. Taylor seri açılımının kullanılmasıyla Lokal kesme hatası h ve k nın kuvvetleri ve (mh, nk) noktasında kdd'nin tam çözümü olan $\mathbf{U}$ 'nun kısmi türevleri cinsinden kolayca bulunabilir [51].

4.2.2 Tutarlılık

$h, k \rightarrow 0$ olduğunda lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa fark denklemi tutarlıdır denir. Yani

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{m,n} = 0,$$

ise fark denklemi tutarlıdır [51].

4.2.3 Kararlılık

Kdd'ye karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün kdd'nin çözümüne yakın kaldığı durumlarda yöntem kararlıdır denir [51].

4.2.4 Yakınsaklık

U fark denkleminin ve $\mathbf{U}$ ise kdd'nin tam çözümleri olmak üzere

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} U_m^n = \mathbf{U}_m^n,$$

ise fark denklemi yakınsaktır denir [51].

4.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi

Sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır [51].

4.2.6 Kararlılık Analizi

Bir diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün diferansiyel denklemin tam çözümüne yakınsaması için gerekli olan şartlara kararlılık şartları ve bunların bulunması işlemine de kararlılık analizi denir.

(m, n) -inci düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denkleminin analitik çözümü $\mathbf{U}$ ve nümerik çözümü U olmak üzere kararlılık analizi

$$\mathbf{U}_m^n - U_m^n,$$

hata değerinin n artarken m değerleri için sınırlı kalması esasına dayanır. Lineer sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık analizinin incelenmesinde Fourier seri yöntemi kullanılan başka yöntemlerden biridir [52].

Fourier Seri (von Neumann) Yöntemi

Fourier seri yöntemi sadece diferansiyel denklemin kararlılığını hata yayılımı için inceler. Burada T sonlu, $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ olduğunda $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x, t)$ için lineer iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı konusu incelenecektir. Fourier seri veya von Neumann yöntemi $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini ifade eder. Böylece kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan değişkenlerine ayırma yöntemine benzer olarak $t = 0$ için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon göz önüne alınır. Her ne kadar Fourier serileri sentüs ve cosinüs fonksiyonlarına göre ifade edilebiliyorsa da cebirsel olarak üstel biçimde yazılması

daha uygundur. Yani $\sum a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell})$ veya $\sum a_n \sin(\frac{n\pi x}{\ell})$ ifadelerine denk olan $\sum A_n e^{in\pi x/\ell}$ üstel ifadesi yazılabilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve ℓ, x ' in tanımlı olduğu aralığın uzunluğudur. Buna göre

$$A_n e^{in\pi x/\ell} = A_n e^{in\pi mh/\ell} = A_n e^{i\beta_n mh},$$

dir. Burada $\beta_n = n\pi/Mh$ ve $Mh = \ell$ olarak alınmıştır. $t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değeri $U(mh, 0) = U_m^0$, ($m = 0(1)M$) şeklinde olan $(M + 1)$ - tane denklem, $A_0, A_1, \dots, A_n$ $(N + 1)$ -tane bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel biçimde yazılabildiğini gösterir. Sadece lineer fark denklemleri göz önüne alındığından $e^{i\beta mh}$ olacak şekilde sadece bir tek başlangıç değerinin incelenmesi gerekir. Çünkü ayrıık çözümler toplanabilir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta mh} e^{\alpha nk} = e^{i\beta mh} \xi^n,$$

ifadesi gözönüne alınır. Burada α genellikle kompleks bir sabit olmak üzere $\xi = e^{\alpha k}$ olup ξ güçlendirme faktörü olarak adlandırılır. Sonlu fark denkleminin kararlılığı için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ için başlangıç ve sınır şartını sağlayan tüm β için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir.

Sonlu fark denkleminin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1,$$

yani $-1 \leq \xi \leq 1$ olmasıdır. Bununla birlikte $|U_m^n|$ zamana bağlı olarak artıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart K pozitif sayısı h, k ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$\xi \leq 1 + Kk \leq 1 + O(k),$$

olmasıdır.

4.3 K(2,3) Denkleminin Sonlu Fark Yöntemi İle Nümerik Çözümleri

Bu bölümde (2.1.2) ile verilen K(m,n) denkleminde $m = 2$, $n = 3$ alınmasıyla elde edilen

$$U_t + U_x^2 + U_{xxx}^3 = 0 \quad (4.3.1)$$

K(2,3) denkleminin sonlu fark yöntemiyle nümerik çözümlerini elde edeceğiz. (4.3.1) ile verilen K(2,3) denkleminin analitik çözümü

$$u_c(x, t) = \frac{(37.5v - \xi^2)}{30}, \quad |\xi| = |x - vt| < \sqrt{37.5v},$$

$$u_c(x, t) = 0, \quad \text{aksi halde,}$$

başlangıç şartı seçilerek yazılır. K(2,3) denkleminin iki adet korunum sabiti vardır. Bunlar

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u dx &\simeq h \sum_{m=0}^M U_m^n, \\ \int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx &\simeq h \sum_{m=0}^M (U_m^n)^3, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

olarak tanımlanır.

Bu tez çalışmasında K(2,3) denkleminin model problemleri için kapalı sonlu fark yöntemleriyle sayısal çözümleri elde edildi. Elde edilen sayısal çözümlerin doğruluğunu göstermek için

$$L_{\infty} = \|U^{tam} - U_N\|_{\infty} = \max_m |U_m^{tam} - U_m|, \quad (4.3.3)$$

olarak tanımlanan maksimum hata normu hesaplandı.

4.3.1 Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu yaklaşımda (4.3.1) ile verilen K(2,3) denkleminde U_t yerine

$$U_t \simeq \frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{k}, \quad (4.3.4)$$

U_x^2 yerine

$$U_x^2 \simeq \frac{U_{m+1,n+1}^2 - U_{m-1,n+1}^2}{4h} + \frac{U_{m+1,n}^2 - U_{m-1,n}^2}{4h}, \quad (4.3.5)$$

ve U_{xxx}^3 yerine

$$U_{xxx}^3 \simeq \frac{U_{m+2,n+1}^3 - 2U_{m+1,n+1}^3 + 2U_{m-1,n+1}^3 - U_{m-2,n+1}^3}{2h^3}, \quad (4.3.6)$$

sonlu fark yaklaşımları yazılırsa $n = 0(1)N$, $m = 2(1)M - 2$ için

$$\begin{aligned} & \frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{k} + \left(\frac{U_{m+1,n+1}^2 - U_{m-1,n+1}^2}{4h} + \frac{U_{m+1,n}^2 - U_{m-1,n}^2}{4h} \right) \\ & + \left(\frac{U_{m+2,n+1}^3 - 2U_{m+1,n+1}^3 + 2U_{m-1,n+1}^3 - U_{m-2,n+1}^3}{2h^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

sonlu fark denklemi elde edilir.

$$\delta_x U_{m,n} = U_{m+1,n} - U_{m-1,n} \quad (4.3.8)$$

ve

$$\eta_x U_{m,n} = U_{m+2,n} - 2U_{m+1,n} + 2U_{m-1,n} - U_{m-2,n} \quad (4.3.9)$$

şeklinde tanımlanan δ ve η merkezi fark operatörlerini kullanarak (4.3.7) denklemi

$$\frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{k} + \frac{\delta_x(U_{m,n+1}^2) + \delta_x(U_{m,n}^2)}{4h} + \frac{\eta_x(U_{m,n+1}^3)}{2h^3} = 0, \quad (4.3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem non-lineer cebirsel denklem sistemi olduğundan iteratif yöntemlerden biri yardımıyla çözülebilir. Burada (4.3.10) nonlinear sistemi lineerleştirildikten sonra direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözülecektir. Bunun için $U_{m,n+1}^2$ teriminin (m, n) noktasında Taylor seri açılımı

$$U_{m,n+1}^2 = U_{m,n}^2 + k \frac{\partial U_{m,n}^2}{\partial t} + \dots = U_{m,n}^2 + k \frac{\partial U_{m,n}^2}{\partial U_{m,n}} \frac{\partial U_{m,n}}{\partial t} + \dots$$

dir. Buradan

$$U_{m,n+1}^2 \cong U_{m,n}^2 + 2U_{m,n}(U_{m,n+1} - U_{m,n}) \quad (4.3.11)$$

yazılabilir. Aynı şekilde $U_{m,n+1}^3$ teriminin (m, n) noktasında Taylor seri açılımı

$$U_{m,n+1}^3 = U_{m,n}^3 + k \frac{\partial U_{m,n}^3}{\partial t} + \dots = U_{m,n}^3 + k \frac{\partial U_{m,n}^3}{\partial U_{m,n}} \frac{\partial U_{m,n}}{\partial t} + \dots$$

olup

$$U_{m,n+1}^3 \cong U_{m,n}^3 + 3U_{m,n}^2(U_{m,n+1} - U_{m,n}), \quad (4.3.12)$$

elde edilir. (4.3.11) ve (4.3.12) yaklaşımları (4.3.10) da yerine yazılır ve sonra

$$W_m = U_{m,n+1} - U_{m,n} \quad (4.3.13)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{W_m}{k} + \frac{[(U_{m+1,n}^2 + 2U_{m+1,n}(W_{m+1})) - (U_{m-1,n}^2 + 2U_{m-1,n}(W_{m-1}))]}{4h} + (U_{m+1,n}^2 - U_{m-1,n}^2) \\ & + \frac{(U_{m+2,n}^3 + 3U_{m+2,n}^2(W_{m+2})) - 2(U_{m+1,n}^3 + 3U_{m+1,n}^2(W_{m+1}))}{2h^3} \\ & + \frac{2(U_{m-1,n}^3 + 3U_{m-1,n}^2(W_{m-1})) - (U_{m-2,n}^3 + 3U_{m-2,n}^2(W_{m-2}))}{2h^3} = 0, \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{3U_{m-2,n}^2}{2h^3} \right) W_{m-2} + \left(-\frac{U_{m-1,n}}{2h} + \frac{3U_{m-1,n}^2}{h^3} \right) W_{m-1} \\ & + \frac{W_m}{k} + \left(\frac{U_{m+1,n}}{2h} - \frac{3U_{m+1,n}^2}{h^3} \right) W_{m+1} + \left(\frac{3U_{m+2,n}^2}{2h^3} \right) W_{m+2} \\ & = \frac{(U_{m-1,n}^2 - U_{m+1,n}^2)}{2h} - \frac{(U_{m+2,n}^3) - 2(U_{m+1,n}^3) + 2(U_{m-1,n}^3) - (U_{m-2,n}^3)}{2h^3}, \quad \begin{aligned} n &= 0(1)N \\ m &= 2(1)M - 2 \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

lineer sonlu fark denklemi elde edilir. Bu fark denkleminde her bir zaman adımında lineer bir cebirsel denklem sistemi bulunur. (4.3.1) K(2,3) denklemine karşılık gelen (4.3.14) sonlu fark yaklaşımından elde edilen lineer cebirsel denklem sistemi her bir zaman adımında direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözülür. Böylece, $(n+1)$ -inci zaman adımındaki çözüm (4.3.13) den $U_{m,n+1} = U_{m,n} + W_m$ olarak kolayca elde edilir.

4.3.2 Kararlılık Analizi

(4.3.1) ile verilen K(2,3) denkleminin (4.3.10) sonlu fark yaklaşımının kararlılık analizi von Neumann yöntemi kullanılarak incelendi. Bunun için (4.3.10) sonlu fark yaklaşımında $U_{m,n}$ yerine $U_{m,n}^*$ pertürbe edilmiş değeri yazılır ve sonra (4.3.10) denkleminde çıkartılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(U_{m,n+1}^* - U_{m,n+1} - (U_{m,n}^* - U_{m,n}))}{k} + \frac{U_{m+1,n+1}^{*2} - U_{m+1,n+1}^2 - (U_{m-1,n+1}^{*2} - U_{m-1,n+1}^2)}{4h} \\ & + \frac{U_{m+1,n}^{*2} - U_{m+1,n}^2 - (U_{m-1,n}^{*2} - U_{m-1,n}^2)}{4h} \\ & - \frac{(U_{m+2,n+1}^{*3} - U_{m+2,n+1}^3) - 2(U_{m+1,n+1}^{*3} - U_{m+1,n+1}^3) + 2(U_{m-1,n+1}^{*3} - U_{m-1,n+1}^3)}{2h^3} \\ & - \frac{(U_{m-2,n+1}^{*3} - U_{m-2,n+1}^3)}{2h^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

yaklaşımı elde edilir. U değerlerinin küçük bir bölge üzerinde hataya göre daha az değiştiği kabul edilirse

$$U_{m-2,n} \simeq U_{m-1,n} \simeq U_{m,n} \simeq U_{m+1,n} \simeq U_{m+2,n} \simeq U_{m-2,n+1} \simeq \\ U_{m-1,n+1} \simeq U_{m,n+1} \simeq U_{m+1,n+1} \simeq U_{m+2,n+1}$$

dir. $E_{m,n} = U_{m,n}^* - U_{m,n}$ ile tanımlanan $E_{m,n}$ hatasının her m, n için $U_{m,n}$ ye kıyasla yeterince küçük olduğu kabul edilirse

$$U_{m,n}^{*2} - U_{m,n}^2 = (E_{m,n} + U_{m,n})^2 - U_{m,n}^2 \cong 2E_{m,n}U_{m,n} \\ U_{m,n}^{*3} - U_{m,n}^3 = (E_{m,n} + U_{m,n})^3 - U_{m,n}^3 \cong 3E_{m,n}U_{m,n}^2$$

yazılabilir. Bu varsayımlar (4.3.15) yaklaşımında kullanılırsa

$$\frac{(E_{m,n+1} - E_{m,n})}{k} + \frac{2(E_{m+1,n+1}U_{m+1,n+1}) - 2(E_{m-1,n+1}U_{m-1,n+1})}{4h} \\ + \frac{2(E_{m+1,n}U_{m+1,n}) - 2(E_{m-1,n}U_{m-1,n})}{4h} \\ - \frac{3(E_{m+2,n+1}U_{m+2,n+1}^2) - 6(E_{m+1,n+1}U_{m+1,n+1}^2) + 6(E_{m-1,n+1}U_{m-1,n+1}^2)}{2h^3} \\ - \frac{3(E_{m-2,n+1}U_{m-2,n+1}^2)}{2h^3} = 0,$$

elde edilir. $E_{m,n} = e^{i\beta m h} \xi^n$ ($i = \sqrt{-1}$) Fourier modu yerine yazılırsa

$$\frac{(e^{i\beta m h} \xi^{n+1} - e^{i\beta m h} \xi^n)}{k} + \frac{2(e^{i\beta(m+1)h} \xi^{n+1} U_{m+1,n+1}) - 2(e^{i\beta(m-1)h} \xi^{n+1} U_{m-1,n+1})}{4h} \\ + \frac{2(e^{i\beta(m+1)h} \xi^n U_{m+1,n}) - 2(e^{i\beta(m-1)h} \xi^n U_{m-1,n})}{4h} \\ - \frac{3(e^{i\beta(m+2)h} \xi^{n+1} U_{m+2,n+1}^2) - 6(e^{i\beta(m+1)h} \xi^{n+1} U_{m+1,n+1}^2) + 6(e^{i\beta(m-1)h} \xi^{n+1} U_{m-1,n+1}^2)}{2h^3} \\ - \frac{3(e^{i\beta(m-2)h} \xi^{n+1} U_{m-2,n+1}^2)}{2h^3} = 0,$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{(\xi - 1)}{k} + \frac{2(e^{i\beta h} \xi U_{m+1,n+1}) - 2(e^{-i\beta h} \xi U_{m-1,n+1})}{4h} \\ + \frac{2(e^{i\beta h} U_{m+1,n}) - 2(e^{-i\beta h} U_{m-1,n})}{4h} \\ - \frac{3(e^{i\beta 2h} \xi U_{m+2,n+1}^2) - 6(e^{i\beta h} \xi U_{m+1,n+1}^2) + 6(e^{-i\beta h} \xi U_{m-1,n+1}^2)}{2h^3} \\ - \frac{3(e^{-i\beta 2h} \xi U_{m-2,n+1}^2)}{2h^3} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \xi \left(\frac{1}{k} + U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h}) - 2(e^{-i\beta h})}{4h} + U_{m,n}^2 \frac{-3(e^{i\beta 2h}) - 6(e^{i\beta h}) + 6(e^{-i\beta h}) - 3(e^{-i\beta 2h})}{2h^3} \right) \\
&= -U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h}) - 2(e^{-i\beta h})}{4h}, \\
& \xi = \frac{-U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h}) - 2(e^{-i\beta h})}{4h}}{\frac{1}{k} + U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h}) - 2(e^{-i\beta h})}{4h} + U_{m,n}^2 \frac{-3(e^{i\beta 2h}) - 6(e^{i\beta h}) + 6(e^{-i\beta h}) - 3(e^{-i\beta 2h})}{2h^3}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $e^{i\beta h} = \cos \beta h + i \sin \beta h$ Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \xi = \frac{-U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})}{4h}}{\frac{1}{k} + U_{m,n} \frac{2(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})}{4h} + U_{m,n}^2 \frac{-3(e^{i\beta 2h} - 2e^{i\beta h} + 2e^{-i\beta h} - e^{-i\beta 2h})}{2h^3}}, \\
& \xi = \frac{-U_{m,n} \frac{i \sin \beta h}{h}}{\frac{1}{k} + U_{m,n} \frac{i \sin \beta h}{h} + U_{m,n}^2 \frac{-3i \sin 2\beta h + 6i \sin \beta h}{h^3}}, \\
& \text{veya } a = \frac{1}{k} + U_{m,n}^2 \frac{-3i \sin 2\beta h + 6i \sin \beta h}{h^3}, \quad b = U_{m,n} \frac{\sin \beta h}{h} \text{ olmak üzere}
\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{-ib}{a + ib} \tag{4.3.16}$$

olur. (4.3.15) yaklaşımının kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. (4.3.16) dan $|\xi| \leq 1$ olduğu açıkça görülür. Böylece (4.3.15) yaklaşımı şartsız kararlıdır.

4.3.3 Nümerik Çözümler

Bu kısımda (4.3.1) K(2,3) denklemi için (4.3.14) ile verilen sonlu fark yaklaşımı her bir model probleme uygulandı ve elde edilen çözümler tablolar halinde sunuldu.

Problem 1: Tek Kompaktonun Hareketi

Bu problemde tüm hesaplamalar $-20 \leq x \leq 80$ sonlu aralığında

$$u_c(x, 0) = \frac{(37.5v - \xi^2)}{30}, \quad |\xi| = |x - vt| < \sqrt{37.5v}$$

$$u_c(x, 0) = 0, \quad \text{aksi halde.}$$

başlangıç şartı seçilerek yapıldı. Simülasyon $t = 0$ 'dan $t = 50$ 'ye kadar çalıştırıldı. Her bir zaman adımında (4.3.14) sonlu fark yaklaşımından elde edilen lineer cebirsel denklem sistemi h ve k nın farklı değerleri için Thomas algoritması kullanılarak çözüldü. Elde edilen $U_{m,n}$ yaklaşık çözümleri (4.3.2) ve (4.3.3) denklemlerinde kullanılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri ile hesaplanan hata normları tablolar halinde sunuldu.

Tablo (4.3.1) de $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarında I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki mutlak fark yani ΔI_1 ve ΔI_2 değişimleri $h = 0.1$ olmak üzere $k = 0.1$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 4.273796$; $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 2.31 \times 10^{-14}$ ve $\Delta I_2 = 0.343784$; $k = 0.005$ için $\Delta I_1 = 1.78 \times 10^{-14}$ ve $\Delta I_2 = 0.168574$ olarak elde edildi. $t = 50$ zaman adımında $k = 0.1, 0.01$ ve 0.005 değerleri için L_∞ hata normu sırasıyla 0.71348, 0.07566 ve 0.07081 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan zaman adımı küçüldüğünde korunum sabitlerinde değişimin ve L_∞ hata normunun azaldığı görülmektedir.

Tablo (4.3.1) de $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarında I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki değişim, $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 0.31982$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 2.31 \times 10^{-14}$ ve $\Delta I_2 = 0.343784$ olarak hesaplandı. $t = 50$ zaman adımında $h = 0.5$ ve 0.1 değerleri için L_∞ hata normu sırasıyla 0.03545, 0.07566 olarak hesaplandı. Bu sonuçlardan konum adımı küçüldüğünde I_1 'de önemli ölçüde bir değişim olmazken I_2 deki değişimin az da olsa arttığı ve L_∞ hata normunun arttığı görülmektedir.

Şekil 4.3.1 de dalganın grafiği incelendiğinde başlangıçta $x_0 = 0$ noktasında olan dalga $v = 1$ birim hızıyla ilerlediğinden 25 birim zaman sonra 25 birim kadar sağa doğru hareket ederek tepe noktası $x = 25$ konumuna, 50 birim zaman sonra 50 birim kadar sağa doğru hareket ederek tepe noktası $x = 50$ konumuna gelmiştir. Bu hareket sonucunda dalganın genliğinde çok fazla değişiklik olmadan arkasında zayıf iz dalgaları bırakarak hareketini tamamladığı anlaşılmaktadır.

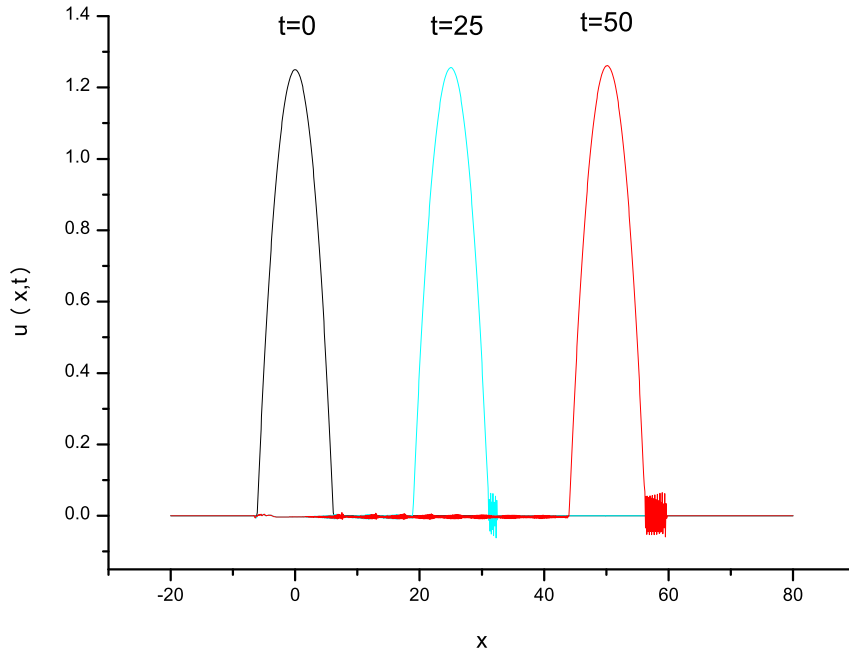
Tablo 4.3.1: Problem 1'nin h ve k nın farklı değerleri için hesaplanan

korunum sabitleri ($v = 1$, $x_0 = 0$ ve $-20 \leq x \leq 80$)							
k	t	$h = 0.5$			$h = 0.1$		
		I_1	I_2	L_∞	I_1	I_2	L_∞
0.1	0	10.20833	10.93521	0.00000	10.20627	10.93522	0.00000
	10	10.20833	11.60135	0.03681	10.20627	11.63479	0.09957
	20	10.20833	12.36499	0.08148	10.20627	12.41698	0.12654
	30	10.20833	13.18486	0.21975	10.20627	13.26814	0.24651
	40	10.20833	13.94071	0.44052	10.20627	14.19594	0.45536
	50	10.20833	14.75889	0.63223	10.20627	15.20902	0.71348
0.01	0	10.20833	10.93521	0.00000	10.20627	10.93522	0.00000
	10	10.20833	10.98214	0.03219	10.20627	11.00054	0.02784
	20	10.20833	11.04962	0.03332	10.20627	11.06907	0.06479
	30	10.20833	11.11759	0.03393	10.20627	11.13846	0.06083
	40	10.20833	11.18606	0.03432	10.20627	11.20846	0.06547
	50	10.20833	11.25503	0.03545	10.20627	11.27901	0.07566
0.005	0	10.20627	10.93522	0.00000	10.20627	10.93522	0.00000
	10	10.20627	10.96673	0.06488	10.20627	10.96673	0.06488
	20	10.20627	11.00084	0.07392	10.20627	11.00084	0.07392
	30	10.20627	11.03493	0.06778	10.20627	11.03493	0.06778
	40	10.20627	11.06929	0.06988	10.20627	11.06929	0.06988
	50	10.20627	11.10380	0.07081	10.20627	11.10380	0.07081

Tablo 4.3.2 de $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ olmak üzere (4.3.14) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile referans [53] de verilen sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre korunum sabitlerinin başlangıç değerlerinden çok fazla uzaklaşmadığı ve referans [53] de verilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.3.2: Problem 1'in $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması ($v = 1$, $x_0 = 0$ ve $-20 \leq x \leq 80$)

t				[53]		
	I_1	I_2	L_∞	I_1	I_2	L_∞
0	10.20627	10.93522	0.00000	10.20627	10.93522	0.0000
10	10.20627	11.00054	0.02784	10.20627	10.93445	0.0066
20	10.20627	11.06907	0.06479	10.20627	10.93444	0.0067
30	10.20627	11.13846	0.06083	10.20627	10.93443	0.0069
40	10.20627	11.20846	0.06547	10.20627	10.93442	0.0071
50	10.20627	11.27901	0.07566	10.20627	10.93441	0.0073



şekil 4.3.1 Tek kompaktın hareketi

Problem 2: İki Kompaktonun Girişimi

Bu problemde tüm nümerik hesaplamalar $-20 \leq x \leq 120$ sonlu aralığında

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{j=1}^2 u_{c,j}(x, 0), \\ u_c(x, 0) &= \frac{(37.5v_j - \xi^2)}{30}, \quad |\xi| = |x - D_j| < \sqrt{37.5v_j}, \\ u_{c,j}(x, 0) &= 0, \quad \text{aksi halde.} \end{aligned}$$

başlangıç şartı seçilerek yapıldı. Simülasyon $t = 0$ 'dan $t = 50$ 'ye kadar çalıştırıldı. Her bir zaman adımında (4.3.14) sonlu fark yaklaşımından elde edilen lineer cebirsel denklem sistemi h ve k nın farklı değerleri için Thomas algoritması kullanılarak çözüldü. Elde edilen $U_{m,n}$ yaklaşık çözümleri (4.3.2) denkleminde kullanılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplandı ve tablolar halinde verildi.

Tablo (4.3.3) de $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarında I_1 , ve I_2 korunum sabitlerindeki mutlak değişim, $h = 0.1$ olmak üzere $k = 0.1$ için $\Delta I_1 = 6.39 \times 10^{-14}$ ve $\Delta I_2 = 27.8491$; $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 1.983232$; $k = 0.001$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 0.147751$ olarak elde edildi. Bu sonuçlardan zaman adımı küçülürken korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo (4.3.3) de $t = 0$ ve $t = 50$ zamanlarında I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki mutlak fark, $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 1.818451$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 0$, $\Delta I_2 = 1.983232$ dir. Bu sonuçlardan konum adımı $h = 0.5$ 'den $h = 0.1$ 'e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

İki kompaktonun etkileşimi grafiği incelendiğinde başlangıçta solda olan büyük dalganın küçük olan dalgayı yakaladığı, birleştiği ve son olarak geçtiği görülmektedir. Şekil 4.3.2 de açıkça görüldüğü gibi büyük genliğe sahip dalganın hızı da büyük olmaktadır. Ayrıca dalgalar birbirinden ayrıştıktan sonra başlangıçtaki genliklerinde çok az değişim olduğu görülmektedir.

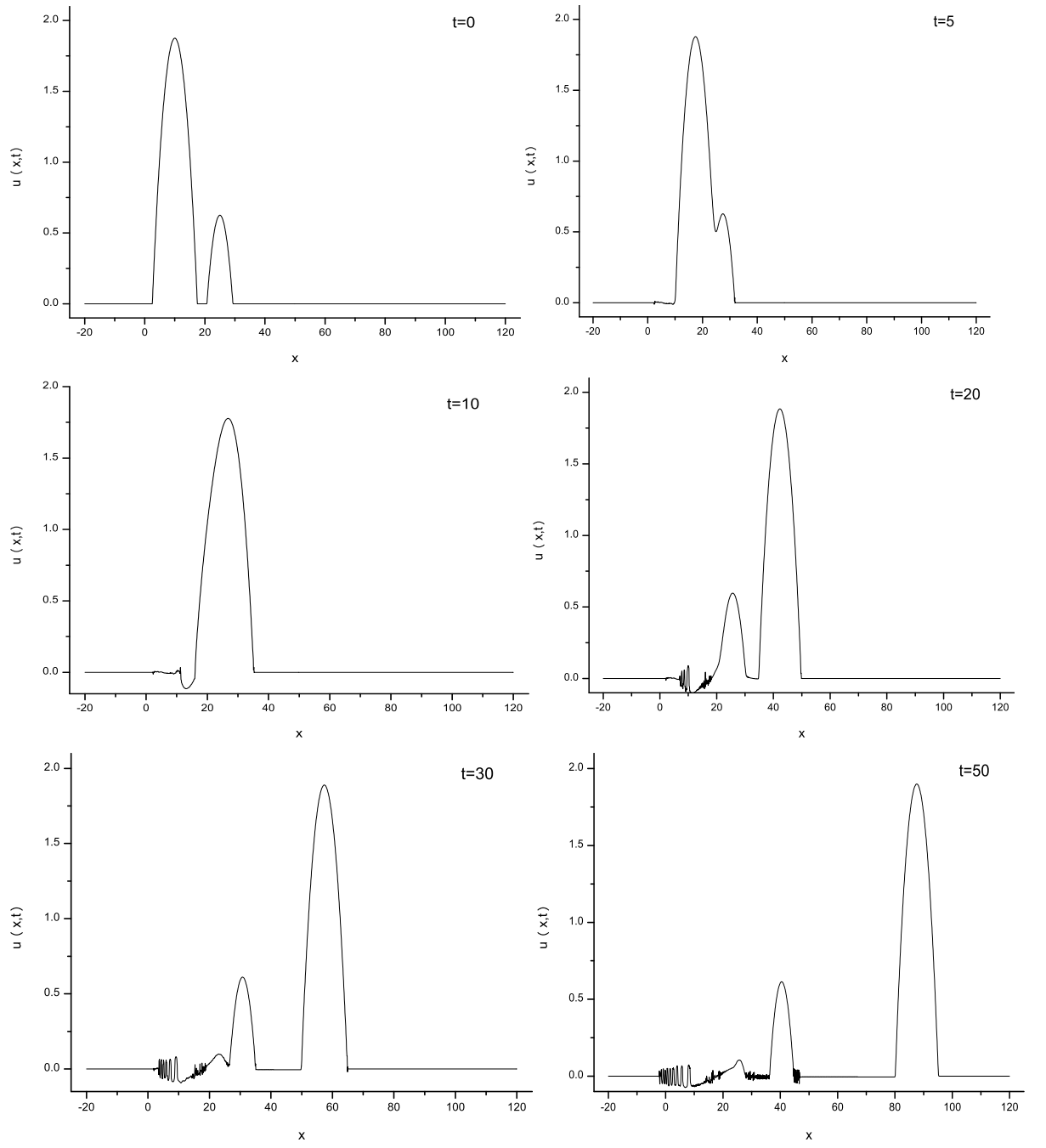
Tablo 4.3.3:Problem 2'nin h ve k nın farklı değerleri için hesaplanankorunum sabitleri ($v_1 = 1.5$, $c_2 = 0.5$, $D_1 = 10$, $D_2 = 25$ ve $-20 \leq x \leq 120$)

h	t	$k = 0.1$		$k = 0.01$		$k = 0.001$	
		I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0.5	0	22.34167	46.16756	22.34167	46.16756	22.34167	46.16756
	10	22.34167	51.97525	22.34167	48.641136	22.34167	48.33895
	20	22.34167	53.93014	22.34167	46.77231	22.34167	46.22003
	30	22.34167	59.51077	22.34167	47.14421	22.34167	46.15575
	40	22.34167	65.90438	22.34167	47.55443	22.34167	46.45348
	50	22.34167	73.20567	22.34167	47.98601	22.34167	46.04013
0.1	0	22.35773	46.16744	22.35773	46.16744	22.35773	46.16744
	10	22.35773	52.08392	22.35773	48.70148	22.35773	48.38871
	20	22.35773	54.16976	22.35773	46.84922	22.35773	46.21404
	30	22.35773	59.88449	22.35773	47.26239	22.35773	46.23255
	40	22.35773	66.45181	22.35773	47.70281	22.35773	46.27326
	50	22.35773	74.01654	22.35773	48.15067	22.35773	46.31519

Tablo 4.3.4 de $h = 0.2$ ve $k = 0.01$ olmak üzere (4.3.14) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile referans [53] de verilen sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre korunum sabitlerinin başlangıç değerlerinden çok fazla uzaklaşmadığı ve referans [53] de verilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.3.4:Problem 2'nin $h = 0.2$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanankorunum sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması ($v_1 = 1.5$, $c_2 = 0.5$, $D_1 = 10$, $D_2 = 25$ ve $-20 \leq x \leq 120$)

t			[53]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0	22.36080	46.16744	23.36080	46.16744
10	22.36080	48.69436	23.36080	43.34891
20	22.36080	46.84092	23.36082	46.73599
30	22.36080	47.25357	23.36082	46.71189
40	22.36080	47.69316	23.36080	46.10918
50	22.36080	48.13874	23.36076	46.10853



Şekil 4.3.2 İki kompaktunun girişimi

Problem 3: Kompakton Dalga Oluşumu

Bu problemde tüm nümerik hesaplamalar $0 \leq x \leq 80$ sonlu aralığında

$$u_c(x, 0) = \frac{(37.5v_j - \xi^2)}{90}, \quad |\xi| = |x - D| < \sqrt{37.5v},$$

$$u_c(x, 0) = 0, \quad \text{aksi halde.}$$

başlangıç şartı seçilerek yapıldı. Simülasyon $t = 0$ 'dan $t = 150$ 'ye kadar çalıştırıldı. Her bir zaman adımında (4.3.14) sonlu fark yaklaşımından elde edilen lineer cebirsel denklem sistemi h ve k nın farklı değerleri için Thomas algoritması kullanılarak çözüldü. Elde edilen $U_{m,n}$ yaklaşık çözümleri (4.3.2) denkleminde kullanılarak korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplandı ve tablolar halinde verildi.

Tablo (4.3.5) de $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarında I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki mutlak fark yani ΔI_1 ve ΔI_2 değişimleri $h = 0.1$ olmak üzere $k = 0.1$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 0.1225$; $k = 0.01$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 0.01743$ olarak elde edildi. Bu sonuçlardan zaman adımı küçülürken korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo (4.3.5) de $t = 0$ ve $t = 150$ zamanlarında I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki mutlak fark, $k = 0.01$ olmak üzere $h = 0.5$ için $\Delta I_1 = 0$ ve $\Delta I_2 = 0.02312$; $h = 0.1$ için $\Delta I_1 = 0$, $\Delta I_2 = 0.01743$ olarak elde edildi. Bu sonuçlardan konum adımı $h = 0.5$ 'den $h = 0.1$ 'e küçüldüğünde korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.3.5: Problem 3'ün h ve k nın farklı değerleri için hesaplanan

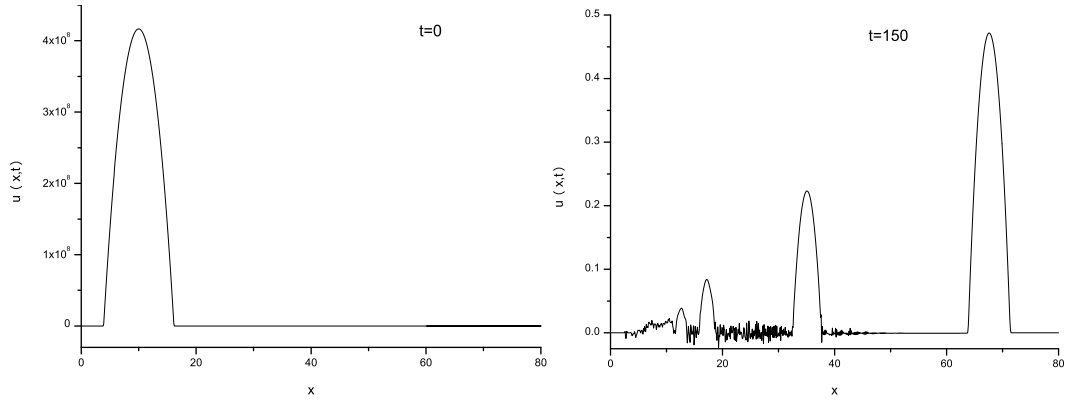
korunum sabitleri ($v = 1, D = 10$ ve $0 \leq x \leq 80$)					
h	t	$k = 0.1$		$k = 0.01$	
		I_1	I_2	I_1	I_2
0.5	0	3.40278	0.40501	3.40278	0.40501
	30	3.40278	0.39547	3.40278	0.37891
	60	3.40278	0.42217	3.40278	0.38122
	90	3.40278	0.45169	3.40278	0.38704
	120	3.40278	0.48410	3.40278	0.38693
	150	3.40278	0.52011	3.40278	0.38188
0.1	0	3.40209	0.40501	3.40209	0.40501
	30	3.40209	0.39544	3.40209	0.37776
	60	3.40209	0.42379	3.40209	0.37999
	90	3.40209	0.45510	3.40209	0.38250
	120	3.40209	0.48956	3.40209	0.38502
	150	3.40209	0.52573	3.40209	0.38758

Tablo 4.3.6 da $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ olmak üzere (4.3.14) yaklaşımı kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri ile referans [53] de verilen sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlara göre korunum sabitlerinin başlangıç değerlerinden çok fazla uzaklaşmadığı ve referans [53] de verilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Şekil 4.3.3 de görüldüğü gibi $t = 0$ da tek kompaktın oluşurken, $t = 150$ de bir dizi kompaktın oluşumu gözlenmektedir.

Tablo 4.3.6: Problem 3'ün $h = 0.1$ ve $k = 0.01$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri ile [53] dekilerin karşılaştırılması($v = 1, D = 10$ ve $0 \leq x \leq 80$)

t			[53]	
	I_1	I_2	I_1	I_2
0	3.40209	0.40501	3.4021	0.4050
30	3.40209	0.37776	3.4021	0.3759
60	3.40209	0.37999	3.4021	0.3755
90	3.40209	0.38250	3.4021	0.3755
120	3.40209	0.38502	3.4021	0.3755
150	3.40209	0.38758	3.4021	0.3755



Şekil 4.3.3 Kompakton dalga oluşumu

5 SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada genelleştirilmiş $K(m,n)$ denklemi, bu denklemin zamana bağlı katsayılara sahip olan formu ve genelleştirilmiş NLS denklemi ele alındı. Literatürde mevcut olan on iki farklı Jakobi eliptik fonksiyondan iki tanesi kullanılarak saçılma terimine sahip bu denklemlerin Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri ve modülün $\ell \rightarrow 0$ ve $\ell \rightarrow 1$ durumları için farklı soliton çözümleri elde edildi. Yukarıdaki genelleştirilmiş formdaki denklemlerin geri kalan on adet Jakobi eliptik fonksiyon içinde benzer şekilde çözümleri elde edilebilir. Nitekim $K(n,n)$ denkleminin bütün Jakobi eliptik fonksiyonlar için farklı türden çözümlerini [54] de elde ettik. Bu çözümler arasında periyodik, kompakt, solitary pattern, topolojik (dark) soliton, bright soliton ve rasyonel çözümlerini sayabiliriz.

NLS denklemiyle birlikte anılan optik solitonlar için de genelleştirilmiş NLS denkleminin lineer olmayanlık türüne göre dört farklı yasasına sahip formu ayrı ayrı ele alınarak denklemin dark soliton ve bright soliton çözümleri elde edildi. Ayrıca bulunan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri verildi. Sonuç olarak bu çalışmada saçılma terimli genelleştirilmiş formdaki hem sabit katsayılı hem zamana bağlı fonksiyon katsayılarına sahip hem de kompleks katsayılı denklemlerin Jakobi eliptik fonksiyonlar yardımıyla çözümlerinin başarıyla elde edilebildiği gösterildi. Benzer şekilde literatürdeki diğer lineer olmayan kdd lerinde çözümleri aynı şekilde rahatlıkla bulunabilir.

$K(m,n)$ denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için lineer olmayan terimler yerine sonlu fark yaklaşımları yazıldı. Daha sonra merkezi fark operatörleri yardımıyla elde edilen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminden Taylor serisi yardımıyla bir lineer sonlu fark denklemi elde edildi. Bu fark denkleminde her bir zaman adımında lineer bir cebirsel denklem sistemi bulundu. Bulunan sistem Thomas algoritması kullanılarak h ve k nın seçilen uygun değerleri için çözüldü. Her bir problem için konum adım uzunluğu sabit tutulup zaman adım uzunluğu küçültülerek ve zaman adım uzunluğu sabit tutulup konum adım uzunluğu küçültülerek korunum sabitlerindeki değişim ve hata değerleri incelendi. Elde edilen sonuçlar tablolar halinde sunuldu ve her bir problem için elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri verildi. Buna göre bu problemler için korunum sabitlerinde çok fazla değişim olmadığı, elde edilen sonuçların analitik değerleriyle ve literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Sonuç olarak U_x^2 ve U_{xxx}^3 lineer olmayan terimleri yerine bu tezde kullanılan sonlu fark yaklaşımları $K(2,3)$ denklemine uygulanabildiği gibi mühendislikte karşılaşılan bu tip lineer olmayan yapıya sahip problemlere de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Yaşar, İ., B.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [2] **Koca, K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [3] **Pala, Y.**, 2006. Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [4] **Korteweg, D.J., de Vries, G.**, 1895. On the change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, Phil. Mag., **39**, 422-443.
- [5] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., **15**, 240-243.
- [6] **Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S.**, 1955. Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., **15** (1974) 143-156.
- [7] **Karpman, VI, Lynov, J.P, Michelsen, P., Pecselli, H.L, Rasmussen, J.J, Turikov, V.A.**, 1980. Modification of plasma solitons by resonant particles, Phys. Fluids ; **23**, 1782.
- [8] **Bisognano, JJ.**, 1996. In: Proceedings of the 1996 European particle accelerator conference, Sitges. Bristol, UK: IOP; 328-30.
- [9] **Wazwaz, A.M.**, 2002 New solitary-wave special solutions with compact support for the nonlinear dispersive K(m,n) equations, Chaos Solitons and Fractals **13**, 321.
- [10] **Wazwaz, A.M.**, 2002 Exact special solutions with solitary patterns for the nonlinear dispersive K(m,n) equations, Chaos Solitons and Fractals **13(1)** 161-170.
- [11] **Wazwaz, A.M.**, 2002 Compactons dispersive structures for variants of the K(n, n) and the KP equations, Chaos Solitons and Fractals **13** 1053-1062.
- [12] **Biswas A.**, 2008. 1-Soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution, Phys. Lett. A **372(25)** 4601–4602.
- [13] **Boussinesq, J.**, 1871. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, Comptes Rendus, **72**, 755-759.

- [14] **Rayleigh, L.**, 1876. On waves, *Phil. Mag.* **1**, 257-279.
- [15] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M.**, 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**, 9-133.
- [16] **Hirota, R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1192-1194.
- [17] **Hirota, R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **14**, 805-809.
- [18] **Zabusky, N.J., Galvin, C.J.**, 1971. Shallow water waves, the KdV equation and solitons, *J. Fluid Mech.* **47**, 811-824.
- [19] **Hammack, J.L., Segur, H.**, 1974. The Korteweg-de Vries equation and water waves, *J. Fluid Mech.* **65**, 289-314.
- [20] **Weidman, P.D., Maxworthy, T.**, 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves, *J. Fluid Mech.* **85**, 417-431.
- [21] **Hirota, R.**, 1980. *Direct Methods in Soliton Theory*, Solitons, Springer, Berlin.
- [22] **Ablowitz, M., Segur, H.**, 1981. *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia.
- [23] **Öziş, T., Yıldırım, A.**, 2008. Reliable analysis for obtaining exact solutions of nonlinear Schrödinger (NLS) equation, *Chaos, Solitons and Fractals* **38**, 209-212.
- [24] **Makhankov, V.G., Fedyanin, V. K.**, 1978. Soliton-like solution of the S3-equation perturbed by resonance interaction, *Phys. Lett. A* **68**, 169-171.
- [25] **Katyshev, Y.V., Makhaldiani, N.V., Makhankov, V.G.**, 1978. On the stability of soliton solutions to the Schrödinger equation with nonlinear term of the form $\Psi\Psi^v$, *Phys. Lett. A* **66**, 456-458.
- [26] **Makhankov, V.G.**, 1978. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), *Physics Reports* **35**, 1-128.
- [27] **Rosenau, P., Hyman J.M.**, 1993. Compactons: Solitons with finite wave-lengths, *Phys. Rev. Lett.* **70(5)**, 564-567.

- [28] **Wazwaz, A.M.**, 1995. On the solution of the fourth order parabolic equation by the decomposition method, Intern. J. Computer Math. **57**, 213-217.
- [29] **Dusuel, S., Michaux P., Remoissenet M.**, 1998, From kinks to compacton like kinks, Physical Review E, **57(2)**, 2320-2326.
- [30] **Dinda, P.T., Remoissenet M.**, 1999, Breather compactons in nonlinear Klein-Gordon systems, Physical Review E, **60 (3)**, 6218-6221.
- [31] **Kivshar, S.**, 1999. Compactons in discrete lattices, Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, **329**, 255-258.
- [32] **Ludu, A., Draayer, J.P.**, 1998. Patterns on liquid surfaces: cnoidal waves, compactons and scaling, Physica D, **123**, 82-91.
- [33] **Ludu, A., Stitcheva, G., Drayer, J.P.**, 2000. Similarity analysis of nonlinear equations and bases of finite wavelength solutions, Int. J. Modern Phys. E, **9(3)**, 263-278.
- [34] **Inc, M.**, 2004. A study for obtaining more compacton solutions of the modified form of fifth-order KdV equations, Z. Naturforsch A, **59a**, 359-367.
- [35] **Inc, M.**, 2006. New exact solitary pattern solutions of the nonlinearly dispersive $R(m,n)$ equations, Chaos, Solitons and Fractals **29**, 499-505.
- [36] **Inc, M.**, 2006. New compacton solutions of nonlinearly dispersive $R(m,n)$ equations, Commun. Theor. Phys. **45**, 389-394.
- [37] **Inc, M.**, 2007. Exact and numerical solitons with compact support for nonlinear dispersive $K(m,p)$ equations by the variational iteration method. Physica A **375**, 447-456.
- [38] **Inc, M.**, 2007. Compacton and periodic wave solutions of the nonlinear dispersive Zakharov-Kuznetsov equation, Central European Journal of Phys. **5**, 351-366.
- [39] **Wazwaz, A.M.**, 2006. Reliable analysis for nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity and a power law nonlinearity. Math. Comput. Modelling **4**, 178–184.

- [40] **Wazwaz, A.M.**, 2006. Exact solutions for the fourth order nonlinear Schrodinger equations with cubic and power law nonlinearities, Math. and Comput. Modelling. **43**, 802-808.
- [41] **Wazwaz, A.M.**, 2008 A study on linear and nonlinear Schrödinger equations by the variational iteration method, Chaos, Solitons and Fractals **37**, 1136-1142.
- [42] **Biswas, A., Konar, S.**, 2007. Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons, Chapman & Hall/CRC.
- [43] **El-Sabbagh, M.F., Ali, A.T.**, 2008. New generalized Jacobi elliptic function expansion method, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Sim., **13**, 1758-1766.
- [44] **Wazwaz, A.M.**, 2004. Nonlinear dispersive special type of the Zakharov-Kuznetsov equation $ZK(n,n)$ with compact and noncompact structures, Appl. Math. Comp.**217(24)**, 10387-10395.
- [45] **Feng, Z.**, 2006. Computations of soliton solutions and periodic solutions for the focusing branch of the nonlinear dispersive $K(n,n)$ equations in higher-dimensional spaces Appl. Math. Comput. **182**, 781-790.
- [46] **Wazwaz, A.M.**, 2005. A reliable treatment of the physical structure for the nonlinear equation $K(m,n)$, Appl. Math. Comput. **163**, 1081-1095.
- [47] **Topkara E.**, 2011. Integrability aspects of solitons in nonlinear fiber optics, PhD Thesis, Delaware State University, Dover, Delaware.
- [48] **Biswas A., Milovic D.**, 2010. Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger's equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Sim. **15**, 1473-1484.
- [49] **Biswas A., Milovic D.**, 2008. Optical solitons in 1+2 dimensions with time dependent dispersion, nonlinearity and attenuation in a Kerr law media, J. Waves and Appl., **22**, 1801-1808.
- [50] **Kutluay S.**, *Sonlu Fark Yöntemleri*, Basılmamış Ders Notları.
- [51] **Smith G.D.**, 1987. Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods, Clarendon Press, Oxford.
- [52] **Mitchell A. R., Griffiths D. F.**, 1950. The finite difference methods in partial differential equations, John Wiley Sons Ltd.

- [53] **Ismail M.S.**, 1998. A Finite Difference Method for Korteweg-de Vries like equation with nonlinear dispersion, Intern. J. Computer Math. **74(2)**, 185-193.
- [54] **Inc, M., Ates E.**, 2015. Travelling Wave Solutions of the K(n, n) Equation, Chin. Journal of Phys. **53(1)**, 020001 1-17.

ÖZGEÇMİŞ

30.07.1986 yılında Adilcevaz’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Bitlis’de tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansımı tamamlayarak doktora eğitimine başladım. 2011-2013 yılları arasında Bitlis Eren Üniversitesinde öğretim görevlisi olarak çalıştım. 2013 yılından bu yana Karadeniz Teknik Üniversitesi Of Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği Bölümünde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktayım.