

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞME MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZS

Semra ZEREN

(051121105)

Anabilim Dalı Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN

2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞME MANİFOLDLARIN SLANT ALT MANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Semra ZEREN
(051121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 06.05.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.05.2015

Danışman: Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ
Doç. Dr. Ahmet YILDIZ



MAYIS - 2015

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana gerekli imkanları sağlayan çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN'e, değerli mesailerini bana ayırarak birikimlerini aktaran, destek ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet YILDIZ 'a ve çalışmalarım sırasında beni yalnız bırakmayan kıymetli arkadaşım Sayın Dr. Gülden ALTAY 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Semra ZEREN

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanım ve Teoremler	3
3. BÖLÜM	18
3.1. Hemen hemen değme manifoldları	18
3.2. Değme manifoldları	28
3.3. Hemen hemen değme manifoldların torsiyon tensörü	32
3.4. K-değme manifoldları	35
3.5. Sasakian manifoldları	38
4. BÖLÜM	43
4.1. Değme Manifoldların Slant altmanifoldları	43
4.2. 3-Boyutlu Slant altmanifoldlar	56
KAYNAKLAR	63

ÖZET

DEĞME MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu çalışmada, Değme Manifoldların Slant altmanifoldları incelenmiştir.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan bazı temel kavramlar, tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Değme Manifoldların temel tanım ve teoremlerine ve bazı örneklerle yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Değme Manifoldların Slant altmanifoldları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değme Manifold, Slant açısı, Slant altmanifold, İnvaryant altmanifold, Anti-invaryant altmanifold.

ABSTRACT

SLANT SUBMANIFOLDS OF CONTACT MANIFOLDS

In this study structure on a Slant Submanifold of a Contact Manifold has been studied.

The first chapter has been devoted to the introduction.

The second chapter contains some fundamental definitions and results which has been used in other chapters.

In the third chapter fundamental definitions and theorems of Contact Manifolds and some examples about these topics were given.

The fourth chapter contains Slant Submanifold of a Contact Manifold.

Keywords: Contact Manifold, Slant angle, Slant submanifold, Invariant submanifold, Anti-invariant submanifold.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzay
ϕ	: $(1, 1)$ -tensör alanı
η	: 1-form
ξ	: Vektör alanı
R	: Riemann eğrilik tensörü
∇	: Riemann konneksiyonu
(ϕ, ξ, η)	: Hemen hemen değme yapı
$T_p(M)$	: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi
$\nabla^\perp$	: Şekil operatörü
(M, ϕ, ξ, η)	: Hemen hemen değme manifold
(ϕ, ξ, η, g)	: Hemen hemen değme metrik yapı
(M, ϕ, ξ, η, g)	: Hemen hemen değme metrik manifold
Λ	: Değme manifoldlarda vektörel çarpım
$[,]$	: Lie braket operatörü
Φ	: İkinci temel form
$\otimes$	: Tensörel çarpım
L_x	: Lie operatörü
N_ϕ	: ϕ nin Nijenhuis tensör alanı

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kontak (değme) geometri ilk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton' un çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Kontak (değme) dönüşümler teorisi daha sonraları S.Lie tarafından bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için geliştirilmiştir. Yirminci yüzyılın ilk yarısında E.Cartan ve Darboux' un kontak (değme) geometrinin gelişiminde büyük katkıları olmuştur. Değme manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasakian manifoldlarının tanımı 1960' lı yıllarda Japon matematikçi S.Sasaki tarafından verilmiştir, [19]. Yine aynı yıllarda yaşayan M.Gray, K.Ogiue ve W.M.Bootby gibi matematikçilerin çalışmaları dikkat çekmektedir, [10,17,3]. Günü-müzde ise bu konuda pek çok matematikçi çalışmaktadır. Özellikle D.E. Blair' in makale ve kitapları bu konuyu anlamak için çalışılması gereken temel kaynaklardır, [1]. Kontak (değme) geometrinin bir çok alanda uygulamaları vardır. H.Geiges makalesinde kontak (değme) geometrinin fizik, mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisi alanlarında nasıl uygulandığını anlatmıştır, [8]. Kontak (değme) geometride integral altmanifoldlar önemli rol oynar. Kontak (değme) geometri fizik ve matematiğin değişik alanlarında sıkça görülen bir konudur. Son zamanlarda ise diferensiyel geometride, değme yapı kavramı önemli yer tutmaya başlamıştır.

İnvaryant ve anti-invaryant altmanifoldların bir genelleştirilmesi olan Slant altmanifold terimi ilk kez B.Y. Chen tarafından 1990 yılında ortaya konmuş ve Chen, hemen hemen Hermityan manifoldların Slant altmanifoldları üzerinde çalışmıştır. Ayrıca, yine aynı yıllarda Chen ve Tazawa, $\mathbb{C}^2$ ve $\mathbb{C}^4$ kompleks manifoldlarda Slant altmanifoldlarının örneklerini vermişlerdir. 1993 yılında, Maeda, Ohnita ve Udagawa bir Kaehlerian manifoldun Slant altmanifoldlarını tanımlamışlardır. Daha sonra,

Lotta, 1996 yılında bir hemen hemen değme metrik manifoldun Slant altmanifoldlarını tanımlamış ve bununla ilgili ilk çalışmayı yapmıştır. Lotta, ayrıca K- değme manifoldların 3-boyutlu anti-invaryant olmayan Slant altmanifoldlarının geometrisi ile ilgili çalışmalara öncülük etmiştir. Diğer taraftan, Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifold ile bir K- değme manifoldun Slant altmanifoldlarıyla ilgilenmişler ve yaptıkları çalışmalarla birçok enteresan sonuç elde etmişlerdir, [4].

Bu tez çalışmasında J.L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernandez 'in makalesinden yararlanılmıştır, [5].

2. BÖLÜM

2.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.1.

X bir cümle olsun. X ' in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. I indis cümlesi olmak üzere, τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir *topoloji* adını alır, [14].

- (i) $X, \emptyset \in \tau$,
- (ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$,
- (iii) $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Tanım 2.1.2.

Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir, [14].

Tanım 2.1.3.

X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} sürekli ise f ye X den Y ye bir *homeomorfizm (topolojik dönüşüm)* denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da *topolojik olarak denktirler veya kısaca homeomorfiktirler* denir, [14].

Tanım 2.1.4.

X bir topolojik uzay olsun ve farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları sırasıyla U ve V olsun. $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ile V yi seçersek X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzaydır* denir, [11].

Tanım 2.1.5.

M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n -boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n -manifold) denir, [11].

- (i) M bir Hausdorff uzaydır,
- (ii) M nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayının bir açık cümlesine veya $\mathbb{E}^n$ e homeomorfdur,
- (iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.1.6.

M bir topolojik n - manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasının M de ki bir U açık komşuluğu, Ψ homeomorfizmi sayesinde $\mathbb{E}^n$ nin bir V açık altcümlesine homeomorfik ise (U, Ψ) ikilisine M 'nin p noktasındaki bir koordinat komşuluğu (harita) denir, [11].

Tanım 2.1.7.

M , n -boyutlu topolojik bir manifold ve $V_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{V_\alpha\}$ ailesi de M 'nin bir örtüsü olsun. Bu durumda her bir V_α açığının $\mathbb{E}^n$ deki bir U_α açık altcümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. A bir indeks cümlesini göstermek üzere, elde edilen (U_α, Ψ_α) koordinat komşuluklarının

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

ailesine M nin bir atlası denir, [11].

Tanım 2.1.8.

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun bir atlası

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

olsun. Eğer

$$\Psi_\alpha(U_\alpha) \cap \Psi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekildeki $\forall (\alpha, \beta) \in A \times A$ için $\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$ ve $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ fonksiyonları, $r > 0$ olmak üzere, C^r sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^r sınıfından atlas denir, [11].

Tanım 2.1.9.

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun C^r -sınıfından bir atlası var ise M 'ye C^r -sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir. Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için S diferensiyellenebilir ise, o zaman M ye C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir, [11].

Tanım 2.1.10.

$\mathbb{E}^n$, nin iki altcümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için

(i) $\Psi \in C^k(U, V)$,

(ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$, önermeleri sağlanıyorsa Ψ ye C^k sınıfından diffeomorfizm denir, [11].

Tanım 2.1.11.

M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasındaki tanjant uzay $T_p(V)$ olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi

$$\bigcup_{p \in V} T_p(V)$$

ile gösterilsin.

Bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_p(V) \rightarrow V$$

dönüşümü her $t_p \in T_p(V)$ tanjant vektörü için $\pi(t_p) = p$ biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir *vektör alanı* operatörü

$$X : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p(V)$$

biçiminde bir fonksiyondur. Burada

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur, [13].

Tanım 2.1.12.

$T_p(\mathbb{E}^n)$ tanjant uzayının cebirsel duali $T_p^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir ve $\mathbb{E}^n$ 'in $p \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki *kotanjant uzayı* adını alır. $T_p^*(\mathbb{E}^n)$ in herbir elemanına, $p \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki *kotanjant vektör* adı verilir. Şu halde

$$T_p^*(\mathbb{E}^n) = \{\alpha^* \mid \alpha^* : T_p(\mathbb{E}^n) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

dir, [13].

Tanım 2.1.13.

$\mathbb{E}^n$ nin $p \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_p^*(\mathbb{E}^n)$ olsun. Buna göre, bir

$$\eta : \mathbb{E}^n \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p^*(\mathbb{E}^n)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ \eta : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_p^*(\mathbb{E}^n) \rightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcut ise η ya $\mathbb{E}^n$ üstünde bir *1-form* denir, [13].

Tanım 2.1.14.

M bir C^∞ -manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonlarının cebiri de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir, [18].

- (i) $\langle, \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) $\langle, \rangle$ dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\forall Y \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$

Tanım 2.1.15.

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, C^∞ fonksiyonlarının cebiri de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* ya da *metrik tensör* denir, [18].

- (i) $\langle, \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) $\langle, \rangle$ dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\langle X, X \rangle > 0, \langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0, X \in \chi(M)$

Tanım 2.1.16.

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞ –manifolda, *Riemann manifoldu* denir, [18].

Tanım 2.1.17.

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü

- (i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (ii) $\nabla_{fx+gy}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ' ya M manifoldu üzerinde bir *afin konneksiyon* ve ∇_x e de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir, [12].

Tanım 2.1.18.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü

- (i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği)
- (ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyon* veya *Levi-Civita konneksiyon* denir, [12].

Tanım 2.1.19.

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümünde

- (i) 2-lineer,
- (ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$),
- (iii) Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. Bu işlemle birlikte V vektör uzayına *Lie cebiri* denir, [18].

Tanım 2.1.20.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde $[,]$ operatörü $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörüdür, [22].

Tanım 2.1.21.

M bir manifold olmak üzere

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$(t, p) \rightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin diferensiyellenebilir bir *1-parametrelili grubu* adı verilir, [22].

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_t : p \rightarrow \varphi_t(p)$$

bir diffeomorfizm

(ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $p \in M$ için

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

dir.

Tanım 2.1.22.

M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş bir lokal dönüşümlü 1-parametrelili grup φ_t olsun. X tensör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ ile gösterilen *Lie türevi*

$$L_X K = [X, K]$$

olarak tanımlanır, [15].

Tanım 2.1.23.

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X , keyfi (s, r) tipinde tensör alanını yine (s, r) tipinde bir tensör alanına götürür ve X vektör alanına göre Lie türev operatörü olarak adlandırılır, [22, 7].

Teorem 2.1.24.

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

- (i) $L_X(f) = X(f), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),$
- (ii) $L_X Y = [X, Y], \forall Y \in \chi(M),$
- (iii) $L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y)$

dir, [22, 7].

Tanım 2.1.25.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Riemann konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) \\ & + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir, [22].

Tanım 2.1.26.

M bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun.
 $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R & : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) & \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1, 3)$ - tipinde tensör alanıdır. Bu tensör alanına M nin Riemann eğrilik tensörü denir, [20].

Teorem 2.1.27.

M bir Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun.
 $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

- (i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$,
- (ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,
- (iii) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

dir, [18].

Tanım 2.1.28.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve R , (M, g) nin Riemann eğrilik tensörü olsun.
 $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$$

eşitliği *I. Bianchi Özdeşliği* olarak adlandırılır, [22].

Tanım 2.1.29.

(M, g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü R ve ∇ Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

eşitliği *II. Bianchi Özdeşliği* olarak adlandırılır, [22].

Tanım 2.1.30.

M ve $\overline{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu C^∞ Riemann manifoldlar ve $f : M \rightarrow \overline{M}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall P \in M$ için $(f_*)_p$ birebir ise f ye *immersiyon* (*daldırma*) denir. Bu durumda M ye de $\overline{M}$ nin *immersed altmanifoldu* denir, [22].

Tanım 2.1.31.

$f : M \rightarrow \overline{M}$ bir immersiyon olsun. Eğer f , 1-1 ise f ye *imbeding* (*gömme*), M ye de $\overline{M}$ nin *gömülen altmanifoldu* ya da sadece *altmanifoldu* denir, [22].

Tanım 2.1.32.

(M, g) bir Riemann manifold ve $M, \overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için

$$T^\perp M = \{V_p \in T_p \overline{M} : \bar{g}(X_p, V_p) = 0, \forall X_p \in T_p M\}$$

cümlesi tanımlansın. $p \in M$ noktasında $\forall X_p \in T_p M$ için $\bar{g}(X_p, V_p) = 0$ koşulunu sağlayan V_p vektörüne M nin *normal vektörü*, V_p nin birim vektörü olması halinde de M nin *birim normal vektörü* denir. M nin tüm normal vektörlerini içeren $T^\perp M$ uzayına da M nin *normal demeti* adı verilir, [22].

Tanım 2.1.33.

$M, \overline{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve $\overline{M}$ üzerindeki lineer konneksiyon $\overline{\nabla}$ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

şeklinde tanımlanan denkleme *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir.

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

şeklinde tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir, [6].

Tanım 2.1.34.

$(\overline{M}, g)$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M ve M nin birim normal vektör alanı V olsun.

$$A_V : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya *Weingarten formülü* denir. $-A_V X$ ve $\nabla_X^\perp V$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada A_V ye M nin *şekil operatörü*, $\nabla^\perp$ ye M nin $T^\perp M$ normal demetindeki *konneksiyonu* adı verilir. M nin şekil operatörü ile ikinci temel formu arasında

$$g(A_V X, Y) = \bar{g}(h(X, Y), V)$$

bağıntısı vardır. Burada g, M üzerine indirgenmiş Riemann metriğidir, [6].

Tanım 2.1.35.

Reel sayılar cümlesi üzerinde r -tane vektör uzayı

$$V_1, V_2, \dots, V_r$$

olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(v_1 \dots v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1} \dots v_r) = af(v_1 \dots v_{i-1}, v_i \dots v_r) + bf(v_1 \dots v_{i-1}, v_i \dots v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye r - *lineer fonksiyon* denir, [12].

Tanım 2.1.36.

$V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -*lineer fonksiyonların* cümlesini $L(V_1, V_2, \dots, V_r)$ ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$\forall (u_1 \dots u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$$

için

$$(f_1 + f_2)(u_1 \dots u_r) = f_1(u_1 \dots u_r) + f_2(u_1 \dots u_r) \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(u_1 \dots u_r) = \lambda f(u_1 \dots u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r : \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının *tensörel çarpımı* denir ve

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına *r.dereceden bir tensör* denir.

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r$$

ise $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ uzayına *bir kovaryant tensör uzayı* ve bu uzayın her bir elemanına da *r.mertebeden bir kovaryant tensör* denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir, [12].

Tanım 2.1.37.

Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde *s-lineer* fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya *kontravaryant uzay* denir. $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s V$ ile gösterilir ve bu uzayın *s.mertebeden kontravaryant tensörler* denir, [12].

Tanım 2.1.38.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^* , V nin duali olsun.

$$L(V^r, V^* : \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V^r \times V^* \xrightarrow{r+s \text{ lineer}} \mathbb{R} \right\}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Buna *r.mertebeden kovaryant ve s.mertebeden kontravaryant tensör uzayı* denir. Bu uzayın elemanlarına da *(r, s) mertebeli tensör* denir. Bu uzay

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V) \text{ veya } T_s^r(V)$$

ile gösterilir, [12].

Tanım 2.1.39.

(M, J) bir hemen hemen kompleks manifold ve g de M üzerinde bir Riemann metriği olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şartını sağlayan g ye bir *Hermitian metrik* ve (M, J, g) ye de bir *hemen hemen Hermitian manifold* denir, [22].

Tanım 2.1.40.

M bir hemen hemen kompleks manifold ve g de Hermitian metrik olsun. Temel 2-form kapalı yani, $d\Phi = 0$ ise g ye *Kaehlerian metrik* denir. Üzerinde Kaehlerian metriği olan kompleks manifoldda da bir *Kaehlerian manifold* denir, [22].

Teorem 2.1.41.

(M, J, g) bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. Φ , hemen hemen Hermitian yapının temel 2- formu ve ∇ de g tarafından tanımlanan kovaryant diferensiyel operatör olmak üzere; M bir Kaehlerian manifolddur gerek ve yeter şart $\nabla_X J = 0$ (J, M üzerinde paralel) dir, [22].

3. BÖLÜM

3.1. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARI

Tanım 3.1.1.

M bir $(2n + 1)$ -boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde sırası ile $(1, 1)-$ tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir $1 - form$ olsun. Eğer ϕ, ξ, η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$\eta(\xi) = 1 \quad (3.1.1)$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X) \xi \quad (3.1.2)$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir *hemen hemen değme yapısı* ve bu yapı ile birlikte M ye de *hemen hemen değme manifold* denir, [22].

Teorem 3.1.2.

(ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

- (i) $\phi\xi = 0$,
- (ii) $\eta(\phi X) = 0$,
- (iii) $rank \phi = 2n$

dir, [22].

Örnek 3.1.3.

$\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlar (x, y, z) olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}(dz - ydx) \\ \xi &= 2\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(M) \\ \phi &: \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)\end{aligned}$$

dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ de standart bazlara göre karşılık gelen matris

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldddur. Gösteriniz.

Çözüm. Hemen hemen değme manifold olması için

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

olduğu gösterilmelidir.

Öncelikle (3.1.1) eşitliğinin doğruluğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= \left(\frac{1}{2}(dz - ydx)\right) 2\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2}2dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}2ydx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Böylelikle (3.1.1) eşitliği sağlanmıştır.

$X \in \chi(M)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere (3.1.2) şartının doğruluğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \left(\frac{1}{2} (dz - ydx) \right) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\
&= \frac{1}{2} x_1 dz \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} x_2 dz \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} x_3 dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} y x_1 dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} y x_2 dx \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} y x_3 dx \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} y x_1 \\
&= \frac{1}{2} (x_3 - y x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix} \\
\phi^2(X) &= \phi(\phi(X)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -yx_1 \end{bmatrix} \\
&\implies \phi^2(X) = (-x_1, -x_2, -yx_1) \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-X + \eta(X) \xi &= (-x_1, -x_2, -x_3) + \left(\frac{1}{2} (x_3 - yx_1) \right) (0, 0, 2) \\
&= (-x_1, -x_2, -x_3) + (0, 0, x_3 - yx_1) \\
&= (-x_1, -x_2, -yx_1) \tag{3.1.4}
\end{aligned}$$

(3.1.3) ve (3.1.4) den $\phi^2(X) = -X + \eta(X) \xi$ bulunur.

(3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri sağlandığından $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldudur.

Teorem 3.1.4.

Her bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir h Riemann metrik tensör alanı

$$h(X, \xi) = \eta(X), \forall X \in \chi(M)$$

olacak şekilde vardır, [22].

İspat. M de Riemann metrik tensör alanı f olsun. h yi f yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(X, Y) = f(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi) + \eta(X)\eta(Y)$$

dir. Buradan h nin 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı olduğu kolayca görülür. Burada

$$Y = \xi$$

konumu yapılırsa

$$\begin{aligned} h(X, \xi) &= f(X - \eta(X)\xi, \xi - \eta(\xi)\xi) + \eta(X)\eta(\xi) \\ h(X, \xi) &= f(X - \eta(X)\xi, \xi - 1\xi) + \eta(X)1 \\ &= f(X - \eta(X)\xi, 0) + \eta(X) \\ &= f(-\phi^2 X, 0) + \eta(X) \\ &= 0 + \eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.5

Her bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g Riemann metrik tensör alanı

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \quad (3.1.5)$$

olacak şekilde vardır, [22].

İspat. Teorem 3.1.4 gereğince M de

$$h(X, \xi) = \eta(X)$$

olacak şekilde bir h Riemann metriği vardır. $g(0, 2)$ tensör alanını

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} (h(X, Y) + h(\phi X, \phi Y) + \eta(X) \eta(Y))$$

olarak tanımlayalım. Burada g nin M üzerinde bir Riemann metriği olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca $Y = \xi$ konumu yapılarak

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= \frac{1}{2} (h(X, \xi) + h(\phi X, \phi \xi) + \eta(X) \eta(\xi)) \\ &= \frac{1}{2} (h(X, \xi) + h(\phi X, 0) + \eta(X) 1) \\ &= \frac{1}{2} (\eta(X) + 0 + \eta(X) 1) \\ &= \frac{1}{2} (2\eta(X)) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
g(\phi X, \phi Y) &= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(\phi^2 X, \phi^2 Y) + \eta(\phi X) \eta(\phi Y)) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(-X + \eta(X) \xi, -Y + \eta(Y) \xi) + 0) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - h(X, \eta(Y) \xi) \\
&\quad - h(\eta(X) \xi, Y) + h(\eta(X) \xi, \eta(Y) \xi)) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - \eta(Y) h(X, \xi) \\
&\quad - \eta(X) h(\xi, Y) + \eta(X) \eta(Y) h(\xi, \xi)) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - \eta(Y) \eta(X) \\
&\quad - \eta(X) \eta(Y) + \eta(X) \eta(Y) \eta(\xi)) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X) \eta(Y) - 2\eta(X) \eta(Y)) \\
&= \frac{1}{2} (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X) \eta(Y)) - \eta(X) \eta(Y) \\
g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)
\end{aligned}$$

dir.

Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.6.

M hemen hemen değme manifoldu üzerinde

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)$$

olacak şekilde g Riemann metriği için

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \tag{3.1.6}$$

dır, yani ϕ , anti-simetrik olacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği vardır, [22].

İspat. Teorem 3.1.5 gereğince g Riemann metriği istenilen özelliklerde vardır. Buna göre

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

ifadesinden

$$g(X, Y) = g(\phi X, \phi Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

yazılabilir. Bu denklemde X yerine ϕX konumu yapılırsa

$$\begin{aligned} g(\phi X, Y) &= g(\phi^2 X, \phi Y) + \eta(\phi X)\eta(Y) \\ &= g(-X + \eta(X)\xi, \phi Y) + 0\eta(Y) \\ &= -g(X, \phi Y) + \eta(X)g(\xi, \phi Y) + 0 \\ &= -g(X, \phi Y) + \eta(X)\eta(\phi Y), \quad \eta(\phi Y) = 0 \\ &= -g(X, \phi Y) \\ \implies g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, g ye göre ϕ anti-simetriktir.

Tanım 3.1.7.

Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi) \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde *hemen hemen değme metrik*, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da *hemen hemen değme metrik yapısı*, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de *hemen hemen değme metrik manifold* denir, [22].

Örnek 3.1.8.

$$g = ds^2 = \frac{1}{4} (dx \otimes dx + dy \otimes dy + \eta \otimes \eta) = \frac{1}{4} ((1 + y^2) dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2y dx dz)$$

olmak üzere karşılık gelen matris

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta, g)$ nin hemen hemen değme metrik manifold olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifold olduğunu gösterdik. Verilen g metriği ile $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olduğunu göstermek için

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Örnek (3.1.3) de

$$\eta(X) = \frac{1}{2} (x_3 - yx_1) \tag{3.1.7}$$

olduğunu göstermiştik.

$$g(X, \xi) = X^T g \xi$$

eşitliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}
g(X, \xi) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} [-2yx_1 + 2x_3] \\
&= \frac{1}{2} (x_3 - yx_1)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

(3.1 7) ve (3.1.8) den

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

bulunur.

Şimdi

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)$$

olduğunu göstereceğiz.

$$X = (x_1, x_2, x_3) \quad Y = (y_1, y_2, y_3) \in \chi(\mathbb{R}^3)$$

$$\phi X = (x_2, -x_1, yx_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x} - x_1 \frac{\partial}{\partial y} + yx_2 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\phi Y = (y_2, -y_1, yy_2) = y_2 \frac{\partial}{\partial x} - y_1 \frac{\partial}{\partial y} + yy_2 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi X, \phi Y) &= (\phi X)^T g(\phi Y) \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & yx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & yx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+y^2)y_2 - y^2y_2 \\ -y_1 \\ -yy_2 + yy_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} (x_2y_2 + x_1y_1) \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(X, Y) &= X^T gY \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+y^2)y_1 - yy_3 \\ y_2 \\ -yy_1 + y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \{ ((1+y^2)y_1 - yy_3)x_1 + x_2y_2 + (-yy_1 + y_3)x_3 \} \\
&= \frac{1}{4} ((1+y^2)x_1y_1 - x_1yy_3 + x_2y_2 - x_3yy_1 + x_3y_3) \\
\eta(X) &= \frac{1}{2} (x_3 - x_1y) \\
\eta(Y) &= \frac{1}{2} (y_3 - y_1y) \\
\eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{4} (x_3y_3 - x_3y_1y - x_1yy_3 + y^2x_1y_1) \\
\implies g(X)g(Y) - \eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{4} (x_1y_1 + x_2y_2) \tag{3.1.10}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.9) ve (3.1.10) dan

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

bulunur. O halde $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifolddur.

Tanım 3.1.9.

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nin *temel 2 formu* denir, [22].

3.2. DEĞME MANİFOLDLARI**Tanım 3.2.1.**

Eğer bir $(2n + 1)$ –boyutlu M manifoldu üzerinde

$$\eta \Lambda (d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde global bir η 1 – *formu* mevcut ise M bir *değme yapıya sahiptir* denir ve bir *değme manifold* olarak adlandırılır. Burada η ya M nin bir *değme formu* denir.

Ayrıca $(d\eta)^n$ ile n inci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani $(d\eta)^n = (d\eta) \Lambda \dots \Lambda (d\eta)$ dir, [22].

Teorem 3.2.2.

Değme yapısı η olan $(2n + 1)$ –boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır, [22].

Örnek 3.2.3.

$\mathbb{R}^3$ de $d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$ olduğunu gösteriniz.

$$\phi(Y) = (y_2, -y_1, yy_2)$$

$$\begin{aligned} g(X, \phi Y) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+y^2)y_2 - y^2y_2 \\ -y_1 \\ -yy_2 + yy_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} (x_1y_2 - x_2y_1) \\ \eta &= \frac{1}{2} (dz - ydx) \implies d\eta = d\left(\frac{1}{2} (dz - ydx)\right) \\ d\eta &= -\frac{1}{2} dy \wedge dx \\ d\eta &= \frac{1}{2} dx \wedge dy, \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned} d\eta(X, Y) &= \frac{1}{2} dx \wedge dy(X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} (dx(X) dy(Y) - dy(X) dx(Y)) \\ &= \frac{1}{4} \left(dx \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) dy \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y} + y_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - dy \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) dx \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y} + y_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} (x_1y_2 - x_2y_1) \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

(3.1.11) ve (3.1.12) den

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

bulunur.

Teorem 3.2.4.

n - boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir $1 - form$ w olsun. M üzerinde

$$\eta \Lambda(dw)^p \neq 0$$

ve

$$(dw)^{p+1} = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman her bir noktanın bir komşuluğunda

$$w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^p y^i dx^i$$

olacak şekilde bir $(x^1, x^2, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$ koordinat sistemi vardır.

Böylece $(2n + 1)$ - boyutlu M değme manifoldunun her bir noktasının bir komşuluğu üzerinde

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

olacak şekilde (x^i, y^i, z) , $(i = 1, 2, \dots, n)$ koordinatları vardır.

$(2n + 1)$ - boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^{2n+1}$ de

$$(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z)$$

kartezyen koordinatlarını alalım. $\mathbb{R}^{2n+1}$ de bir $1 - form$ η_0 olmak üzere

$$\eta_0 = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

ile tanımlansın. O zaman,

$$\eta_0 \Lambda(d\eta_0)^n \neq 0$$

dır. Burada $\eta_0, \mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir *değme formdur* denir, [22].

Örnek 3.2.5.

$(2n + 1)$ boyutlu bir Öklid uzayı $\mathbb{R}^{2n+1}$ olsun. O zaman (x^i, y^i, z) , $i = 1, 2, \dots, n$ kartezyen koordinatlar olmak üzere

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

1-formu $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir değme formudur. O zaman ξ vektör alanı $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ dir. Gerçekten de

$$\eta(\xi) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \sum_{i=1}^n y^i dx^i\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$$

olur.

$n = 2$ için $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \eta &= dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 \\ d\eta &= -dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 \\ (d\eta)^2 &= \frac{1}{2!} (d\eta \wedge d\eta) \\ &= \frac{1}{2!} (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 + dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^1 \wedge dx^1) \\ &= \frac{1}{2!} 2 dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^2 &= (dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2) \wedge (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2) \\ &= dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

$$dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \neq 0$$

olduğundan

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olur.

3.3. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARININ TORSİYON TENSÖRÜ

Hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olan bir $(2n+1)$ boyutlu hemen hemen değme manifold M olsun. $\mathbb{R}$, bir reel doğruyu göstermek üzere $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu düşünelim. O zaman $M \times \mathbb{R}$ üzerinde her bir vektör alanı

$$\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$$

biçimindedir. Burada X ile M ye teğet bir vektör alanı, t ile $\mathbb{R}$ nin bir noktasının koordinatı ve f ile de $M \times \mathbb{R}$ de bir fonksiyon gösterilmektedir. $M \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayı üzerinde bir j lineer dönüşümünü

$$j \left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$j^2 = -I$$

elde ederiz ve bu yüzden j lineer dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olur. Gerçekten de

$$\begin{aligned} j^2 \left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= j \left(\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\phi(\phi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\phi X - f\xi) \frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\phi^2 X - \phi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\phi X) - \eta(f\xi)) \frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(-X + \eta(X)\xi - f\phi\xi - \eta(X)\xi, (0 - f\eta(\xi)) \frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(-X - f0, -f1 \frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(-X, -f \frac{d}{dt}\right) \\ j^2 \left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= - \left(X, f \frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$j^2 = -I$$

ve dolayısıyla j dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

Tanım 3.3.1.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve ϕ , M üzerinde bir $(1, 1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\phi : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

olmak üzere

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y]$$

şeklinde tanımlanan $(1, 2)$ tipindeki tensör alanına ϕ nin *Nijenhuis tensör alanı* denir, [10].

$\phi = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklinde olup N_J tensör alanına J *hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis torsiyon tensörü* denir, [22].

Tanım 3.3.2.

Bir hemen hemen kompleks metrik manifold M , M üzerindeki hemen hemen kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir, [22].

Tanım 3.3.3.

Bir $(2n+1)$ - boyutlu hemen hemen değme manifold M ve (φ, ξ, η) de M üzerinde hemen hemen değme manifold yapı olsun. Reel doğru $\mathbb{R}$ olmak üzere $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı *normaldir* denir, [22].

Teorem 3.3.4.

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_{\phi X} \eta) Y = \phi(X) \eta(Y) - \eta([\phi X, Y])$$

$$(L_{\xi} \eta) X = \xi \eta(X) - \eta([\xi, X])$$

$$(L_{\xi} \phi) X = [\xi, \phi X] - \phi([\xi, X])$$

dir, [2].

3.4. K-DEĞME MANİFOLDLARI

Tanım 3.4.1.

M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametrelili grubu lokal izometrilere oluşuyor ise X vektör alanına *Killing vektör alanı* adı verilir.

Böylece X bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow L_X g = 0$ dır, [22].

Tanım 3.4.2.

Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ - boyutlu bir değme metrik manifold M olsun. Eğer ξ vektör alanı g ye göre bir Killing Vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapıya bir *K-değme yapı* ve M ye de bu yapı ile birlikte bir *K-değme manifold* denir, [22].

Önerme 3.4.3.

M bir değme manifold olsun. O zaman M nin bir K-değme manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_X \xi = -\phi X$$

olmasıdır.

İspat. M bir K-değme manifold olsun. O zaman ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanıdır, yani

$$L_\xi g = 0$$

dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
L_\xi g(X, Y) &= L_\xi(g(X, Y)) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y) \\
&= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi) \\
&= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\
&= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\
0 &= (L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi)$$

dir. g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu için

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\
&\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)
\end{aligned}$$

dir. Y yerine ξ , Z yerine de Y yazılırsa

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X \xi, Y) &= Xg(\xi, Y) + \xi g(X, Y) - Yg(X, \xi) \\
&\quad + g([X, \xi], Y) + g([Y, X], \xi) - g([\xi, Y], X) \\
&= X\eta(Y) + \xi g(X, Y) - Y\eta(X) + g([X, \xi], Y) \\
&\quad - \eta([X, Y]) - g([\xi, Y], X)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_Y \xi, X) &= Yg(\xi, X) + \xi g(Y, X) - Xg(Y, \xi) \\
&\quad + g([Y, \xi], X) + g([X, Y], \xi) - g([\xi, X], Y) \\
&= Y\eta(X) + \xi g(X, Y) - X\eta(Y) - g([\xi, Y], X) \\
&\quad + \eta([X, Y]) + g([X, \xi], Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X \xi, Y) - 2g(X, \nabla_Y \xi) &= 2[g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi)] \\
&= X\eta(Y) + \xi g(X, Y) - Y\eta(X) + g([X, \xi], Y) - \eta([X, Y]) \\
&\quad - g([\xi, Y], X) - Y\eta(X) - \xi g(X, Y) + X\eta(Y) + g([\xi, Y], X) \\
&\quad - \eta([X, Y]) - g([X, \xi], Y) \\
&= 2(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X, Y]) \\
&= 2(2d\eta(X, Y))
\end{aligned}$$

olacağından

$$g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) = 2d\eta(X, Y)$$

olur. g ye göre Killing vektör alanı ξ iken

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) &= 2d\eta(X, Y) \\
2g(\nabla_X \xi, Y) &= 2d\eta(X, Y) \\
g(\nabla_X \xi, Y) &= d\eta(X, Y)
\end{aligned}$$

dir.

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\phi X, Y) = g(-\phi X, Y)$$

bulunur. $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_X \xi, Y) = g(-\phi X, Y)$$

olduğundan

$$\nabla_X \xi = -\phi X$$

dir.

3.5. SASAKIAN MANİFOLDLAR

Tanım 3.5.1.

M , değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, M bir *Sasakian yapıya* ya da *normal değme metrik yapıya* sahiptir denir. Sasakian yapıya sahip (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine *Sasakian manifold (veya normal değme metrik manifold)* denir, [22].

Teorem.3.5.2.

$(2n + 1)$ boyutlu bir M Riemann manifoldu üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı bir Sasakian yapıdır. $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \phi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X \quad (3.5.1)$$

dir, [22].

Sonuç.3.5.3.

M bir Sasakian manifold ve M nin eğrilik tensörü R olmak üzere

$$R(X, Y) \xi = \eta(Y) X - \eta(X) Y$$

dir, [22].

İspat. M bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall \xi \in \chi(M)$ vektör alanları için R eğrilik tensör

$$\begin{aligned} R(X, Y) \xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]} \xi \\ &= \nabla_X (\nabla_Y \xi) - \nabla_Y (\nabla_X \xi) - \nabla_{[X, Y]} \xi \end{aligned}$$

dir. $\nabla_X \xi = -\phi X$ olduğundan

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= \nabla_X(-\phi Y) - \nabla_Y(-\phi X) - (-\phi([X, Y])) \\
&= -\nabla_X(\phi Y) + \nabla_Y(\phi X) + \phi[X, Y] \\
&= -(\nabla_X \phi)Y - \phi \nabla_X Y + (\nabla_Y \phi)X + \phi \nabla_Y X + \phi[X, Y] \\
&= -(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X - \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&= -(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.5.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\xi &= -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + g(Y, X)\xi - \eta(X)Y \\
&= \eta(Y)X - \eta(X)Y
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.5.4.

$(2n+1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. M nin eğrilik tensörünü R ile gösterelim. Bu takdirde M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (3.5.2)$$

dir, [22].

İspat. M bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall \xi$ Killing vektör alanı için R eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
R(X, \xi)Y &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi \\
&= \nabla_X (\nabla_Y \xi) - \nabla_{\nabla_X Y} \xi
\end{aligned}$$

dir. $\nabla_X \xi = -\phi X$ olduğundan

$$\begin{aligned}
R(X, \xi)Y &= \nabla_X(-\phi Y) - (\phi \nabla_X Y) \\
&= -\nabla_X(\phi Y) + \phi \nabla_X Y \\
&= -(\nabla_X \phi)Y - \phi \nabla_X Y + \phi \nabla_X Y \\
&= -(\nabla_X \phi)Y \\
&= -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X
\end{aligned}$$

olur.

Tersine, M üzerinde bir ξ birim Killing vektör alanı seçilir ise (3.5.2) sağlandığından Teorem (3.5.2) gereğince M bir Sasakian manifolddur.

Sonuç 3.5.5

M bir Sasakian manifold olsun. ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X, \xi)Y = -(\nabla_X \phi)Y$$

dir, [22].

Sonuç 3.5.6.

M bir Sasakian manifold olsun. ξ Killing vektör alanına ortagonal olan X birim vektörleri için

$$R(X, \xi)X = \xi$$

dir, [10].

Sonuç.3.5.7.

$(2n+1)$ -boyutlu bir Sasakian manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z &= \phi R(X, Y)Z + g(\phi X, Z)Y - g(Y, Z)\phi X \\ &\quad + g(X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)X \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

dir, [22].

Sonuç.3.5.8.

$(2n+1)$ -boyutlu bir Sasakian manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ &\quad - g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y \end{aligned}$$

dir, [22].

İspat.

(3.5.3) denkleminin her iki tarafına ϕ dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} \phi R(X, Y)\phi Z &= \phi^2 R(X, Y)Z - g(Y, Z)\phi^2 X + g(X, Z)\phi^2 Y \\ &\quad + g(\phi X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)\phi X \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (3.1.2) den

$$\begin{aligned} \phi R(X, Y)\phi Z &= -R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ &\quad + g(\phi X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)\phi X \\ R(X, Y)Z &= -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ &\quad + g(\phi X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)\phi X \end{aligned}$$

dir.

Tanım.3.5.9.

Sasakian yapısı (M, ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir Sasakian manifold M olsun. ξ Killing vektör alanına ortogonal olan bir X birim vektörü için $\{X, \phi(X)\}$ ortonormal olacak şekilde bulunabiliyor ise $\{X, \phi(X)\}$ düzlemi ile M nin ara kesitine M de bir ϕ -kesit adı verilir. Bu durumda

$$K(X, \phi(X)) = g(R(X, \phi X) \phi X, X)$$

kesit eğriliğine M nin bir ϕ -kesit eğriliği adı verilir, [22].

Tanım.3.5.10.

Sasakian yapısı (M, ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir Sasakian manifold M olsun. M sabit ϕ -kesit eğriliğine sahip ve bu eğrilik c ise *Sasakian uzay formu* olarak adlandırılır ve $M(c)$ ile gösterilir, [21].

Teorem.3.5.11.

$M(c)$ Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü için $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) = & \frac{1}{4}(c + 3)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] - \frac{1}{4}(c - 1)[\eta(X)\eta(Z)Y \\ & - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi \\ & + g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z] \end{aligned}$$

dir, [22].

4. BÖLÜM

4.1. DEĞME MANİFOLDLARIN SLANT ALTMANİFOLDLARI

Tanım 4.1.1.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. M üzerinde indirgenmiş metrik g ve Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere herhangi bir $X \in \chi(M)$ için

$$\phi X = TX + NX \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $TX, \phi X$ in teğet bileşeni ve $NX, \phi X$ in normal bileşenidir. O halde T bir tanjant demeti endomorfizmi ve N normal-demet değerli bir 1-formdur.

(4.1.1) de $N = 0$ ise , yani $\forall X \in \chi(M)$ için $\phi X \in \chi(M)$ ise M altmanifolduna *invariant altmanifold* denir. Diğer taraftan eğer $T = 0$ ise , yani $\forall X \in \chi(M)$ için $\phi X \in \chi^\perp(M)$ ise M altmanifolduna *anti-invariant altmanifold* denir.

Şimdi ξ vektör alanının M ye teğet olduğunu kabul edelim. Böylece $\chi(M)$ de ξ ye ortogonal dağılımı D ile gösterirsek

$$\chi(M) = D \oplus \langle \xi \rangle$$

ortogonal toplamını göz önüne alabiliriz.

Teorem 4.1.2.

Bir değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0 \quad (4.1.2)$$

dır.

İspat. (3.1.6) eşitliğinde (4.1.1) yerine yazılırsa

$$g(TX + NX, Y) + g(X, TY + NY) = 0$$

elde edilir. Buradan, g metriği lineer olduğundan

$$g(TX, Y) + g(NX, Y) + g(X, TY) + g(X, NY) = 0$$

yazılabilir. $X \in \chi(M)$ ve $NY \in \chi^\perp(M)$ olduğundan $g(NX, Y) = 0$ ve aynı şekilde $g(X, NY) = 0$ dır. Buradan

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0$$

bulunur.

(4.1.1) deki eşitlik endomorfizm doğurur. Bu T endomorfizminin karesi olan T^2, Q ile gösterilsin. M üzerinde tanımlanan T ve Q endomorfizmleri $(1, 1)$ -tipinde birer tensör alanıdır.

Böylece; T^2 , yani Q self-adjointtir.

T, Q ve N tensör alanlarının kovaryant türevleri, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y \quad (4.1.3)$$

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y$$

$$(\nabla_X N)Y = \nabla_X^\perp NY - N\nabla_X Y$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.3.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. Her bir $p \in M$ ve $X_p \in T_p M$ için $\{X_p, \xi_p\}$ vektörleri lineer bağımsız olmak üzere ϕX_p ve $T_p M$ arasındaki $\theta(X_p)$ *Writinger açısı*, p ve X_p nin seçilişinden bağımsız ise M ye, $\overline{M}$ de *slant altmanifold* denir. $\theta = \theta(X_p)$ sabit açısına, M nin $\overline{M}$ üzerindeki *slant açısı* denir, $\text{sla}(M)$ ile gösterilir ve $\theta(X_p) \in [0, \pi/2]$ dir.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldunun ;

- anti-invaryant altmanifoldları $\pi/2$ slant açılı slant altmanifoldlardır,
- invaryant altmanifoldları ise sıfır slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold invaryant ya da anti-invaryant değil ise *proper slant altmanifold* olarak adlandırılır, [6].

Teorem 4.1.4.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart

$$T^2 = -\lambda(I - \eta \otimes \xi) \quad (4.1.4)$$

eşitliğini sağlayan $\lambda \in [0, 1]$ sabitinin mevcut olmasıdır. Ayrıca bu durumda M nin slant açısı θ ise

$$\lambda = \cos^2 \theta$$

dır, [4].

İspat. Kabul edelim ki M slant altmanifold olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için TX ile ϕX arasındaki açı θ ise

$$\cos \theta(X) = \frac{\|\phi X\|}{\|TX\|} = \cos \theta$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\cos \theta (X) &= \frac{g(\phi X, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\|TX\|^2}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|TX\| &= \|\phi X\| \cos \theta (X) \\
g(TX, TX) &= g(\phi X, \phi X) \cos^2 \theta (X)
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. (4.1.5) den

$$\begin{aligned}
-g(X, T^2 X) &= g(\phi X, \phi X) \cos^2 \theta (X) \\
g(X, T^2 X) &= g(X, \phi^2 X) \cos^2 \theta (X) \\
T^2 X &= \cos^2 \theta (X) \phi^2 X \\
T^2 X &= -\cos^2 \theta (X) (X - \eta(X) \xi)
\end{aligned}$$

bulunur. $\cos^2 \theta = \lambda \in [0, 1]$ olduğundan

$$T^2 = -\lambda (I - \eta \otimes \xi)$$

bulunur.

Tersine $T^2 = -\lambda (I - \eta \otimes \xi)$ olacak şekilde bir λ sabiti mevcut olsun. O zaman

$X \in \chi(M) - \langle \xi \rangle$ için

$$\begin{aligned}
\cos \theta(X) &= \frac{g(\phi X, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{g(TX + NX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX) + g(NX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= -\frac{g(X, T^2 X)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= -\lambda \frac{g(X, \phi^2 X)}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{-\lambda [-g(\phi X, \phi X)]}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \frac{-\lambda [-\|\phi X\|^2]}{\|\phi X\| \|TX\|} \\
&= \lambda \frac{\|\phi X\|}{\|TX\|}
\end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan

$$\cos \theta(X) = \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}$$

dir. Böylece

$$\cos \theta(X) = \lambda \frac{\|\phi X\|}{\|TX\|} \text{ ve } \cos \theta(X) = \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}$$

olduğundan taraf tarafa bu eşitlikler çarpılırsa,

$$\lambda = \cos^2 \theta(X)$$

elde edilir. O halde $\theta(X)$ sabittir ve dolayısıyla M slanttır.

Sonuç.4.1.5.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin θ açısına sahip bir slant alt-manifoldu M olsun. Bu takdirde herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(TX, TY) = \cos^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)), \quad (4.1.6)$$

$$g(NX, NY) = \sin^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)) \quad (4.1.7)$$

dir, [4].

İspat. (4.1.2) de X yerine TX yazılır ve (4.1.4) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= -g(T^2X, Y) \\ g(TX, TY) &= -g(-\cos^2 \theta (X - \eta(X)\xi), Y) \\ &= -(-\cos^2 \theta g(X, Y) + \cos^2 \theta \eta(X) g(\xi, Y)) \\ &= \cos^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)) \end{aligned}$$

bulunur ve (4.1.6) ispatlanmış olur.

(4.1.7) nin ispatı için (3.1.5) ve (4.1.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \\ g(TX + NX, TY + NY) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \\ g(TX, TY) + g(TX, NY) + g(NX, TY) + g(NX, NY) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \\ g(TX, TY) + g(NX, NY) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \\ g(NX, NY) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \\ &\quad -g(TX, TY) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.6) dan $g(TX, TY)$ çekilerek bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(NX, NY) &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) - (\cos^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y))) \\ &= (1 - \cos^2 \theta) (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)) \\ &= \sin^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.1.7) ispatlanmış olur.

Önerme 4.1.6.

Bir K- değme manifoldu $\overline{M}$ nin bir slant altmanifoldu M olsun. M nin slant açısını θ ile gösterelim. Bu takdirde herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2 \theta (g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX)$$

dir, [4].

İspat. $M, \overline{M}$ nin slant altmanifoldu olsun.

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y$$

olduğundan

$$g((\nabla_X Q)Y, Z) = g(\nabla_X QY, Z) - g(Q\nabla_X Y, Z)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \nabla_X g(QY, Z) &= (\nabla_X g)(QY, Z) + g(\nabla_X QY, Z) + g(QY, \nabla_X Z) \\ g(\nabla_X QY, Z) &= \nabla_X g(QY, Z) - g(QY, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X g(T^2 Y, Z) - g(T^2 Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X g(-\lambda Y + \lambda \eta(Y)\xi, Z) - g(-\lambda Y + \lambda \eta(Y)\xi, \nabla_X Z) \\ &= -\lambda \nabla_X g(Y, Z) + \lambda \eta(Y) \nabla_X g(\xi, Z) + \lambda g(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - \lambda \eta(Y) g(\xi, \nabla_X Z) \\ &= -\lambda ((\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)) \\ &\quad + \lambda \eta(Y) ((\nabla_X g)(\xi, Z) + g(\nabla_X \xi, Z) + g(\xi, \nabla_X Z)) \\ &\quad + \lambda g(Y, \nabla_X Z) - \lambda \eta(Y) \eta(\nabla_X Z) \\ &= -\lambda g(\nabla_X Y, Z) - \lambda g(Y, \nabla_X Z) + \lambda \eta(Y) g(\nabla_X \xi, Z) \\ &\quad + \lambda \eta(Y) \eta(\nabla_X Z) + \lambda g(Y, \nabla_X Z) - \lambda \eta(Y) \eta(\nabla_X Z) \\ g(\nabla_X QY, Z) &= -\lambda g(\nabla_X Y, Z) - \lambda \eta(Y) g(\phi X, Z) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
g(Q\nabla_X Y, Z) &= g(T^2\nabla_X Y, Z) \\
&= g(-\lambda\nabla_X Y + \lambda\eta(\nabla_X Y)\xi, Z) \\
&= -\lambda g(\nabla_X Y, Z) + \lambda\eta(\nabla_X Y)\eta(Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X Q)Y, Z) &= -\lambda g(\nabla_X Y, Z) - \lambda\eta(Y)g(\phi X, Z) + \lambda g(\nabla_X Y, Z) - \lambda\eta(\nabla_X Y)\eta(Z) \\
&= -\lambda(\eta(Y)g(\phi X, Z) + \eta(\nabla_X Y)\eta(Z))
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(\nabla_X Q)Y = -\lambda(\eta(Y)\phi X + \eta(\nabla_X Y)\xi) \quad (4.1.8)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\nabla_X g(Y, \xi) &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) \\
&= g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, -\phi X) \\
&= g(\nabla_X Y, \xi) - g(Y, \phi X)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\eta(\nabla_X Y) = g(\phi X, Y) \quad (4.1.9)$$

bulunur. (4.1.8) eşitliğinde (4.1.9) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Q)Y &= -\lambda(\eta(Y)TX + g(\phi X, Y)\xi) \\
&= \cos^2\theta(g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX)
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.1.7.

Bir $\overline{M}$ hemen hemen değme metrik manifoldunun altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Eğer herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T) Y = \lambda(g(X, Y) \xi - \eta(Y) X) \quad (4.1.10)$$

olacak şekilde bir λ fonksiyonu mevcut ise herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X Q) Y = \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(Y) TX)$$

dir, [4].

İspat. (4.1.10) da Y yerine TY yazılır ve (4.1.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X T) TY &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) \\ \nabla_X T(TY) - T(\nabla_X TY) &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) \\ \nabla_X T(TY) &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) + T(\nabla_X TY) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $Q = T^2$ olduğundan (4.1.3) den

$$\begin{aligned} (\nabla_X Q) Y &= (\nabla_X T^2) Y \\ &= \nabla_X T^2(Y) - T^2 \nabla_X(Y) \\ &= \nabla_X T(TY) - T(T(\nabla_X Y)) \end{aligned}$$

bulunur. Burada yukarıda verilen $\nabla_X T(TY)$ nin eşiti yerine yazılır ve (4.1.3) ile (4.1.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X Q) Y &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) + T(\nabla_X TY) - T(T(\nabla_X Y)) \\ &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) + T(\nabla_X TY) - T(\nabla_X TY - (\nabla_X T) Y) \\ &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) + T(\nabla_X TY) - T(\nabla_X TY) + T(\nabla_X T) Y \\ &= \lambda(g(X, TY) \xi - \eta(TY) X) + T(\nabla_X T) Y \end{aligned}$$

olur. Teorem (3.1.2) den $\phi\xi = 0$ ve $\eta \circ \phi = 0$ dır. $\phi\xi = 0$ ise (4.1.1) den

$$T\xi + N\xi = 0$$

yazılabilir. Buradan teğet ve normal bileşenlerin her ikisinde sıfır olacağından $T\xi = 0$ ve $N\xi = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $\forall X \in \chi(M)$ için $\eta(\phi X) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\eta(TX + NX) &= 0 \\ \eta(TX) + \eta(NX) &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre eşitliğin sol yanındaki teğet ve normal bileşenlerin sıfır olması gerektiğinden $\eta(TX) = 0$ yani $\eta \circ T = 0$ olur.

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)Y &= \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(TY)X) + T(\lambda(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X)) \\ &= \lambda(g(X, TY)\xi - \eta(TY)X) + \lambda g(X, Y)T\xi - \eta(Y)TX\end{aligned}$$

eşitliğinde $T\xi = 0$ ve $\eta \circ T = 0$ yerine yazılırsa

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda g(X, TY)\xi - \eta(Y)TX$$

bulunur.

Lemma 4.1.8.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir anti-invariant olmayan slant altmanifoldu M olsun. Bu takdirde M , indirgenmiş metriğe göre ξ vektör alanı yapısı ve $\overline{\phi} = (\sec \theta) T$ ile verilen hemen hemen değme yapı ile bir hemen hemen değme metrik manifolddur. Burada θ , M nin slant açısıdır, [5].

İspat. $\forall X \in \chi(M)$ için Teorem 4.1.4 ' den

$$T^2 X = \cos^2 \theta (-X + \eta(X) \xi)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{T^2 X}{\cos^2 \theta} = -X + \eta(X) \xi$$

bulunur. Ayrıca,

$$\overline{\phi} = (\sec \theta) T$$

eşitliğinden

$$\overline{\phi}^2 X = -X + \eta(X) \xi \quad (4.1.11)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1.2) den herhangi X ve Y vektör alanları için

$$g(TX, TY) = -g(T^2 X, Y)$$

yazılabilir. Burada (4.1.4) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(TX, TY) &= -g(-\cos^2 \theta (X - \eta(X) \xi), Y) \\ &= \cos^2 \theta g(X, Y) - \cos^2 \theta \eta(X) g(\xi, Y) \\ &= \cos^2 \theta (g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)) \end{aligned}$$

bulunur. $\overline{\phi} = (\sec \theta) T$ olduğundan son eşitlik

$$g(\overline{\phi} X, \overline{\phi} Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \quad (4.1.12)$$

şeklini alır.

(4.1.11) ve (4.1.12) eşitliklerinden $(\bar{\phi}, \xi, \eta, g)$, M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapıdır.

Değme geometride , Kaehlerian slant altmanifoldlara benzer kavram , [4] de gösterildiği gibi herhangi bir X, Y tanjant alanları için

$$(\nabla_X T) Y = \cos^2 \theta (g(X, Y) \xi - \eta(Y) X) \quad (4.1.13)$$

eşitliğini sağlayan uygun θ slant altmanifoldları ile verilir. Fakat bu durumda $\bar{\phi}$ ile verilen hemen hemen değme metrik yapı bir Sasakian yapı değildir.

Çünkü (4.1.13) den herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \bar{\phi}) Y = \cos \theta (g(X, Y) \xi - \eta(Y) X)$$

olduğunu görmek kolaydır. Fakat M üzerinde bir Sasakian yapı elde etmek için (4.1.13) şartını değiştirebiliriz. Eğer herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T) Y = \cos \theta (g(X, Y) \xi - \eta(Y) X) \quad (4.1.14)$$

ise M nin $\bar{\phi}$ ile verilen indirgenmiş bir Sasakian yapıya sahip olduğu ispatlanabilir. Bununla birlikte aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 4.1.9.

(4.1.14) eşitliğini sağlayan bir K- değme manifoldun uygun M slant altmanifoldları mevcut değildir, [16].

İspat. Yukarıdaki iki önerme ve (4.1.14) eşitliği kullanılırsa

$$(\nabla_X T) Y = \cos \theta (g(X, Y) \xi - \eta(Y) X)$$

olduğundan Önerme 4.1.7 ye göre

$$(\nabla_X Q) Y = \cos \theta (g(X, TY) \xi - \eta(Y) TX)$$

olur. Halbuki bir K- değme manifoldun bir slant altmanifoldunun mevcut olması için Önerme 4.1.6' nın sağlanması gerekir.

Gerçekten , eğer M uygun bir slant altmanifold ise $\bar{\phi}$ indirgenmiş yapının değme metrik yapı olmadığını görmek kolaydır, Çünkü herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\Phi}(X, Y) = g(X, \bar{\phi}Y) = \sec \theta g(X, TY) = \sec \theta d\eta(X, Y)$$

dir. Halbuki $\bar{M}$ bir Sasakian manifolddur ve böylece bir değme metrik manifolddur.

Teorem 4.1.10.

Bir K- değme manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. $\theta \in [0, \pi/2]$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir, [16].

- i) M, θ slant açısı ile $\bar{M}$ de slanttır.
- ii) Herhangi bir $x \in \chi(M)$ için ξ_x i kapsayan $T_x M$ nin her 2-düzleminin kesitsel eğriliği $\cos^2 \theta$ dır.

O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.11.

Bir K- değme manifoldu $\bar{M}$ nin bir slant altmanifoldu M olsun. Bu takdirde, M nin K-değme olması için gerek ve yeter şart M nin bir invaryant altmanifold olmasıdır, [5].

İspat. Teorem 4.1.10' dan doğrudan görülebilir. Terside bilinen bir sonuçtur.

Böylece, bir Sasakian manifoldun bir non-invaryant slant altmanifoldu üzerine ne bir Sasakian ne de bir K- değme yapı indirgemek mümkün değildir.

4.2. 3-BOYUTLU SLANT ALTMANİFOLDLAR

Lemma 4.2.1.

Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin, 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. ξ vektör alanı M ye teğet olmak üzere, M ye teğet e_1, e_2 vektör alanları için, $\{e_1, e_2, \xi\}$ ortonormal bazı

$$Te_1 = \lambda e_2 \quad , \quad Te_2 = -\lambda e_1$$

eşitliklerini sağlar.

Burada λ, M üzerinde lokal olarak tanımlı bir fonksiyondur. Eğer M, θ slant açısı ile slant ise $\lambda = \cos \theta$ dır, [6].

$(M, \overline{\phi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ ile $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ iki hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere

$$\varphi : (M, \overline{\phi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g}) \rightarrow (\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$$

dönüşümü bu iki hemen hemen değme metrik manifold arasında bir immersiyon olsun. Farzedelim ki bu immersiyon izometrik olsun yani $x \in M$ için

$$\overline{g} = \varphi^* g \text{ ve } \varphi_{*x} \overline{\xi}_x = \xi_{\varphi(x)}$$

Özel olarak $\xi \in \chi(M)$ dir.

Φ ve $\overline{\Phi}$ sırası ile M ve $\overline{M}$ nin temel 2-formları olsunlar. M üzerinde $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi^* \Phi(X, Y) = \Phi(\varphi_* X, \varphi_* Y) = g(\varphi_* X, \phi \varphi_* Y)$$

şeklinde tanımlı $\varphi^* \Phi$ temel 2-formunu gözönüne alalım.

Şimdi herhangi bir $X \in \chi(M)$ için X ve $\varphi_* X$ i özdeş alacağız.

Eğer M , 3- boyutlu ve φ, θ slant açılı bir immersiyon ise, o halde $\bar{\Phi}$ ile $\varphi^*\Phi$ arasında aşağıdaki bağıntı verilebilir.

Önerme 4.2.2.

Yukarıdaki şartlarda

$$\varphi^*\Phi = \mp (\cos \theta) \bar{\Phi}$$

dir, [5].

İspat. İmmersiyon anti-invariant ise

$$\varphi^*\Phi = 0$$

olduğu için sonuç aşikardır. Böylece φ yi anti-invariant olmayan bir slant immer-siyon olarak kabul ederiz.

e_1 , M ye teğet ve ξ ye dik bir birim lokal vektör alanı olsun. Eğer

$$e_2 = (\sec \theta) T_{e_1}$$

alırsak Sonuç 4.1.5' den $\{e_1, e_2, \xi\}$ nin $\chi(M)$ nin bir lokal ortonormal çatısı olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} \bar{\phi}e_1 &= g(\bar{\phi}e_1, e_2) e_2 \\ g(\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_1) &= g(\bar{\phi}e_1, e_2) g(\bar{\phi}e_1, e_2) \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\bar{\phi}e_1 = \mp e_2, \quad \bar{\phi}e_2 = \mp e_1 \tag{4.2.1}$$

olduğundan

$$g(\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_1) = 1$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} X &= X^1 e_1 + X^2 e_2 + \eta(X) \xi \\ Y &= Y^1 e_1 + Y^2 e_2 + \eta(Y) \xi \end{aligned}$$

iki lokal tanjant vektör alanları olsunlar. O halde (4.2.1) den

$$\bar{\Phi}(X, Y) = g(X, \bar{\phi}Y) = \mp X^1 Y^2 \mp X^2 Y^1 \quad (4.2.2)$$

olur. Diğer taraftan

$$TY = -\cos \theta Y^2 e_1 + \cos \theta Y^1 e_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi^* \Phi(X, Y) &= \Phi(\varphi_* X, \varphi_* Y) = g(X, \phi Y) = g(X, TY) \\ &= -\cos \theta X^1 Y^2 + \cos \theta X^2 Y^1 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

dir. Böylece (4.2.2) ve (4.2.3) den sonuç görülür.

Şimdi Önerme 4.2.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2.3.

$(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ ve $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ iki değme metrik manifold olsun.

$$\varphi_* \bar{\xi} = \xi$$

olacak şekilde

$$\varphi : M \rightarrow \bar{M}$$

invariant olmayan bir slant immersiyon mevcut değildir. ($M = 3$ boyutlu), [5].

İspat. Teoremdeki şartları sağlayan

$$\varphi : M \rightarrow \bar{M}$$

non-invaryant slant immersiyon mevcut olduğunu kabul edelim.

Bu takdirde φ bir izometrik immersiyon ve $\varphi_*\bar{\xi} = \xi$ olduğundan $\varphi^*\eta = \bar{\eta}$ ve böylece M bir değme metrik manifold olduğu için

$$d(\varphi^*\eta) = d\bar{\eta} = \bar{\Phi} \quad (4.2.4)$$

olur.

Önerme 4.2.2 den $\bar{M}$ bir değme metrik manifold olduğu için

$$d(\varphi^*\eta) = \varphi^*d\eta = \varphi^*\Phi = \mp(\cos\theta)\bar{\Phi} \quad (4.2.5)$$

elde ederiz.

Fakat eğer $\theta \neq 0$ ise bu durumda (4.2.4) ve (4.2.5) arasında bir çelişki görülür ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.4.

Bir Sasakian manifoldu $\bar{M}$ nin 3-boyutlu bir slant altmanifoldu M olsun. Bu takdirde $\bar{M}$ Sasakian yapısının M üzerine bir K-değme yapı indirgemesi için gerek ve yeter şart M nin bir invaryant manifold olmasıdır, [5].

İspat. Gerek kısmı Teorem 4.2.3' den doğrudan görülür. Tersiyi bilinen bir sonuçtur.

Lemma 4.2.5.

$\xi \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\varphi : (M, \bar{g}) \rightarrow (\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$$

dönüşümü bir Riemann manifolddan bir hemen hemen değme metrik manifolda izometrik bir immersiyon olsun. $\dim M = m + 1$ ve $\chi(M)$ nin lokal bir ortogonal çatısı $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$ olsun. φ immersiyonun slant olması için gerek ve yeter şart $\forall j, k = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i) g(\phi e_k, e_i) = \lambda \delta_{jk} \quad (4.2.6)$$

olacak şekilde sabit bir $\lambda \in [0, 1]$ mevcut olmasıdır. Ayrıca bu durumda M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dır, [5].

İspat. Farzedelim ki φ, θ açısına sahip bir slant immersiyon olsun O halde D de bulunan $\forall X$ birim tanjant alanı için

$$\sum_{i=1}^m g(\phi X, e_i) g(\phi X, e_i) = \cos^2 \theta \quad (4.2.7)$$

olur. Eğer (4.2.7) de $X = e_j$ alırsak

$$\sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i) g(\phi e_j, e_i) = \cos^2 \theta$$

dir. Bu da $j = k$ ve $\lambda = \cos^2 \theta$ için (4.2.6) yı verir.

Farzedelim ki $j \neq k$ olsun. Bu takdirde

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_j + e_k)$$

ξ ye dik bir birim lokal vektör alanıdır. (4.2.7) kullanılarak

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i) g(\phi e_j, e_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g(\phi e_k, e_i) g(\phi e_k, e_i) + \sum_{i=1}^m g(\phi e_j, e_i) g(\phi e_k, e_i)$$

elde ederiz. Bu da $j \neq k$ için (4.2.6) yı verir.

Tersine (4.2.6) kullanılarak φ nin $\cos^{-1}\sqrt{\lambda}$ açısı ile slant olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 4.2.6.

M üzerinde bir $(M, \bar{\phi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ hemen hemen değme metrik yapısını göz önüne alalım. $\forall x \in M$ için

$$\varphi_{*x}\bar{\xi}_x = \xi_{\varphi(x)}$$

olsun. M ve $\bar{M}$ nin temel 2- formlarını sırası ile $\bar{\Phi}$ ve Φ ile gösterelim.

$\varphi^*\Phi$ 2- formunu da göz önünde bulunduralım. Farzedelim ki bir $k \in [-1, 1]$ sabiti mevcut olsun, öyle ki

$$\varphi_{sp^*}\Phi = k\bar{\Phi}$$

dır. O halde φ slanttır ve $\cos^{-1}|k|$ slant açısına sahiptir, [5].

İspat. M bir hemen hemen değme metrik manifold olduğu için M de $B = \{u_1, \dots, u_m, \bar{\phi}u_1, \dots, \bar{\phi}u_m, \xi\}$ ile verilen bir $\bar{\phi} - basis$ seçebiliriz. M nin boyutu $2m + 1$ dir. Lemma 4.2.5' e uygulamak için $\forall X, Y \in B - \{\xi\}$ için

$$\sum_{i=1}^m g(\phi X, u_i) g(\phi Y, u_i) + \sum_{i=1}^m g(\phi X, \bar{\phi}u_i) g(\phi Y, \bar{\phi}u_i) \quad (4.2.8)$$

değerlendirmek istiyoruz. Bu durumda şimdi

$$\varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$$

olduğu için

$$g(\phi X, u_i) = kg(\bar{\phi}X, u_i) = -kg(X, \bar{\phi}u_i) \quad (4.2.9)$$

elde ederiz. $\bar{\eta}(u_i) = 0$ olduğu için

$$g(\phi X, \bar{\phi}u_i) = kg(\bar{\phi}X, \bar{\phi}u_i) = kg(X, u_i) \quad (4.2.10)$$

dir. Bu yüzden eğer (4.2.9) ve (4.2.10) ı (4.2.8) de yerine yazarsak

$$k^2 \left(\sum_{i=1}^m g(X, \bar{\phi}u_i) g(Y, \bar{\phi}u_i) + \sum_{i=1}^m g(X, u_i) g(Y, u_i) \right) \quad (4.2.11)$$

elde ederiz.

B de X ve Y nin seçimine göre (4.2.11) i kontrol ederek Lemma 4.2.5 de $\lambda = k^2$ olduğunu görmek kolaydır. Bu yüzden, φ bir slant immersiyondur ve $\cos^{-1} |k|$ açısına sahiptir.

Sonuç 4.2.7.

M manifoldu 3- boyutlu olsun. O halde φ nin slant olması için gerek ve yeter şart $\varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$ olmak üzere bir $k \in [-1, 1]$ sabitinin mevcut olmasıdır. Dahası, bu durumda $|k| = \cos \theta$ dır, burada θ slant immersiyon açısını gösterir, [5].

İspat. Önerme 4.2.2 ve Teorem 4.2.6 kullanılırsa

$$\varphi^*\Phi = \mp (\cos \theta) \bar{\Phi} \text{ ve } \varphi^*\Phi = k\bar{\Phi}$$

olduğundan

$$k\bar{\Phi} = \mp (\cos \theta) \bar{\Phi}$$

olur. Bu durumda

$$|k| = \cos \theta$$

bulunur.

Kaynaklar

- [1] **Blair , D.E., 1976** , Contact Manifolds in Riemannian Geometry , Lect Notes Math 509. Berlin Heibelberg New York Springer.
- [2] **Blair , D.E., 2002** , Riemanian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds Birkhauser , Boston.
- [3] **Boothby , W. M., 1986** , An Introduction to Diferentiable Manifolds ve Riemannian Geometry, Acafemic Press.
- [4] **Cabrerizo , J.L. , Carriazo A. , Fernandez L. M. , 2000** , Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds , Glasgow Math. J. 42 , 125-38.
- [5] **Cabrerizo, J.L. , Carriazo A. , Fernandez L. M. , 2000** , Structure on a Slant Submanifold of a Contact Manifold, Indian J. pure appl. Math., 31(7) , 857-864.
- [6] **Chen , B.Y. , 1973** , Geometry of Submanifolds , Marcel Dekker NY.
- [7] **Duggal , K.L. , Bejancu A., 1996** , Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer, Dordrecht 364.
- [8] **Geiges , H., 2001** , A Brief History of Contact Geometry and Topology, Expositiones Mathematicae. 19, 25-53.
- [9] **Gray A., 1998** , Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica, 2nd edition, CRC Press LCC, Boca Raton, Florida, 29. Weathernburn C.E..
- [10] **Gray, J.W., 1958** , Some Global Properties of contact Structure, Annals of Mathematics., 9, 421-450.
- [11] **Hacısalihoğlu , H. H. , 1980** , Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş, İstanbul.
- [12] **Hacısalihoğlu , H. H. , 1982** , Diferensiyel Geometri , İnönü Üniversitesi, Fen-Edb. Fak. No:2.

- [13] **Hacısalıhoğlu , H. H. , 1993** , Diferensiyel Geometri , Ankara Üniversitesi Yayinevi.
- [14] **Hacısalıhoğlu , H. H. , 2002** , Diferensiyel geometri, Cilt 1.
- [15] **Kobayashi S., Nomizu K., 1969** , Foundations of differential geometry, Interscience, Vol.II, New York.
- [16] **Lotta , A. , (1996)** , Slant submanifolds in contact geometry , Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 39, 183–198
- [17] **Ogiue, K., 1964** , On Almost Contact Manifolds Admitting Axiom of Planes or Axiom of Free Mobility, Kodai Math., 16, 223-232.
- [18] **O’Neill , B., 1983** , Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [19] **Sasaki, S., 1960**, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, Tohoku Math. J., 2, 459–476.
- [20] **Spivak , M., 1979** , Calculus on Manifolds.
- [21] **Verstraelen , L., and Vrancken L., 1988** , Pinching Theorems for C-Totally Real Submanifolds of Sasakian Space Forms , Journal of Geometry , 33.
- [22] **Yano , K., Kon M., 1984** , Structures on Manifolds.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Malatya’da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya’da tamamladım. 2001 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.