

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Muhammed ÇINAR

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Mikail ET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ-2007

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca engin bilgi ve birikiminden yararlandığım yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a ve Dr. Hıfısı ALTINOK'a teşekkür sunmayı bir borç bilirim.

Muhammed ÇINAR

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ŞEKİLLER LİSTESİ	III
SİMGELER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
1. GENEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Temel Tanımlar	1
1.2. İstatistiksel Yakınsaklık.....	5
1.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık.....	7
2. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ.....	9
2.1. Bulanık Kümeler.....	9
2.2. Bulanık Sayılar	11
2.3. Bulanık Sayı Dizileri ve İstatistiksel Yakınsaklığı	16
2.4. Bulanık Sayı Dizilerinin Hemen Hemen Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı	22
KAYNAKLAR	31

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları.....	4
Şekil 2.1. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsanması	17
Şekil 2.2. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaması	19
Şekil 2.3. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir bulanık sayı dizisi.....	20
Şekil 2.4. Yakınsak olmayan, ancak istatistiksel yakınsak bir bulanık sayı dizisi	21

SİMGELER LİSTESİ

- $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi
- $\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
- $\mathbb{R}^n$: n-boyutlu Öklid Uzay
- $\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi
- θ : Lacunary dizi
- $L(\mathbb{R})$: Bulanık sayılar kümesi
- A^α : A bulanık kümesinin α -kesimi
- h.h.k : hemen hemen her k

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK SAYI DİZİLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Muhammed ÇINAR

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 32

İki bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde bulanık küme, bulanık sayı ve bulanık sayı dizisi kavramları verildikten sonra bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Bulanık sayı, Bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary dizisi

ABSTRACT

Master Thesis

SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS AND THEIR STATİSTİCAL CONVERGENCE

Muhammed ÇINAR

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2007, Page: 32

In the first cahpter of this thesis that consists of two chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the next chapter and examine some properties of statistical convergence.

In the second chapter we give the consepts of fuzzy set, fuzzy number and the sequences of fuzzy number and investigate that statistical convergence and almost lacunary statistical convergence of the sequences of fuzzy number.

Key Words: Fuzzy set, Fuzzy number, Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Lacunary sequence,

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i) $x+y=y+z$

ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$

iii) Her $x \in X$ için $x+\theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) Her bir $x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v) $1x = x$

vi) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

vii) $(\lambda+\mu).x=\lambda x+\mu x$

viii) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ [1]

Tanım 1.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x,x) \geq 0$

ii) $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

iii) $d(x,y)=d(y,x)$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$

özelliklerine sahip $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir [1].

Tanım 1.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N3) şartı $p > 0$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ şartı ile değiştirilirse bu taktirde X 'e bir p -normlu uzay denir [2].

Tanım 1.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [2].

Tanım 1.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [2].

Tanım 1.1.6. Kompleks terimli bütün $x = (x_k)$, $(k=1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin kümesini w ile göstereceğiz. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere;

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır. w 'nın her alt uzayına bir dizi uzayı denir [2].

Tanım 1.1.7. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir [2].

Tanım 1.1.8. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir, A kümesi kompakt ise her A açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin

n tane, açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathcal{A} : i=1, \dots, n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ yazılabilir [3].

Tanım 1.1.9. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK-uzayı denir [4].

Tanım 1.1.10. (Minkowski Eşitsizliği)

i) $p \geq 1$ ve $k=1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

ii) $0 < p \leq 1$ olsun. $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ ($i=1, 2, \dots, n$) olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i + \beta_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^p$$

Tanım 1.1.11. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) ($i=1, 2, \dots, n$) olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Tanım 1.1.12. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

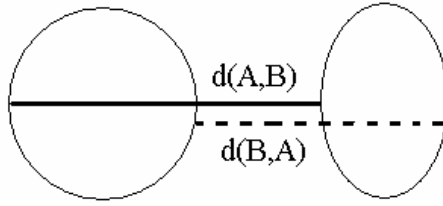
$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\} \quad (1.1.1)$$

eşitsizliği sağlanır [5].

Tanım 1.1.13. (Hausdorff Metriği) (X, d) bir tam metrik uzay olsun. X 'in boş olmayan bütün kompakt alt kümelerinin sınıfını $\eta(X)$ ile gösterelim. $A, B \in \eta(X)$ kümeleri için A kümesinin B kümesine uzaklığı $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ olmak üzere

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

şeklinde tanımlanır. A ve B kümeleri için genellikle $d(A, B) \neq d(B, A)$ dır (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. İki kümenin birbirlerine uzaklıkları

Burada $d(A, A) = 0$ olduğu açıktır. $A, B, C \in \eta(X)$ kümeleri için

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

bağıntısı sağlanır. Gerçekten, her $z \in C$ noktası için

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} [d(x, z) + d(z, y)] \\ &\leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(z, y), \forall z \in C \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntı sağ taraftaki her iki terimde de C kümesinin her z noktasını yerleştirdiğimizde geçerli olduğuna göre birinci terimde $d(x, z)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(z, y)$ uzaklığını maksimum yapan z noktalarını kullanırsak;

$$d(A, B) \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in C} d(x, z) + \sup_{z \in C} \inf_{y \in B} d(z, y) = d(A, C) + d(C, B)$$

buluruz.

Şimdi $\eta(X)$ üzerinde bir $h : \eta(X) \times \eta(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunu her $A, B \in \eta(X)$ için;

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (1.1.2)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $\eta(X)$ üzerinde metrik şartlarını sağlar. Yani bu h küme fonksiyonu gerçekten bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır [3].

1.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [6] ve Schoenberg [7] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir. O zamandan beri istatistiksel yakınsaklık, farklı isimler altında Fourier analiz, ergodic teori ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. Her iki araştırmacı tarafından sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık, Fridy [8], Salat [9], Connor [10], Mursaleen [11], Tripathy [12], Savaş [13], Fridy ve Orhan [14] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda, kuvvetli integral toplanabilmede ve lokal kompakt uzaylar üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların ideallerinin yapısında istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmesi görülmektedir.

Tanım 1.2.1. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [15].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 1.2.2. Herhangi bir $x=(x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k 'lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir. “h.h.k” biçiminde gösterilir [8].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 1.2.3. $x=(x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S\text{-}\lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L=0$ ise $x=(x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre;

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S\text{-}\lim x_k = L$ dir, fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x=(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için;

$$\left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \left| \{k \leq n : x_k \neq 0\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : x_k \neq 0\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S\text{-}\lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi için $S\text{-}\lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x=(1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S\text{-}\lim x_k = L_1$, $S\text{-}\lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 1.2.4. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [8].

Teorem 1.2.5. $S\text{-}\lim x_k = a$, $S\text{-}\lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $S\text{-}\lim cx_k = ca$
- ii) $S\text{-}\lim (x_k + y_k) = a + b$

dir [6].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 1.2.6. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [8].

1.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 1.3.1. $\theta = (k_r)$, pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizi denir. $\theta = (k_r)$ dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Lacunary dizilerinde

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

Tanım 1.3.2. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi N_θ ile gösterilir yani

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

dır.

$$N_\theta \text{ uzayı } \|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| \right) \text{ normu ile bir BK-uzayıdır [16].}$$

Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Fridy ve Orhan [14] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Eğer $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise bu $S_\theta - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ biçiminde gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_θ ile gösterilir, yani;

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

dır.

Teorem 1.3.4. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

- i) $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$
- ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$
- iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$

dir [14].

2. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında bulanık kümenin tanımını ve bu kümenin bir sonraki kısımda tanımı yapılacak olan bulanık sayı tanımında kullanılacak bazı özelliklerini vereceğiz. İkinci kısımda bulanık sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemlerden ve bu sayıların oluşturduğu $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısından bahsedeceğiz. Üçüncü kısımda ise bulanık sayı dizilerini ve bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı kavramı hakkında kısa bir bilgi sunacağız. Bu kısımda ayrıca, reel sayı dizilerinde tanımlanan istatistiksel yakınsaklık ve sınırlılık kavramlarının bulanık sayı dizileri bakımından karşılıklarını ifade etmek için açıklayıcı örnekler ekleyeceğiz. Dördüncü kısımda ise bulanık sayılarının hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramından bahsedeceğiz.

2.1. Bulanık Kümeler

Bulanık kümeyi tanımlamadan önce bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Bir A kümesinin karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme ve A , X 'in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X 'in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde de tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak X 'in herhangi bir elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Tanım 2.1.2. χ , elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A bulanık kümesi χ deki her bir noktayı $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir [17].

χ deki bir A bulanık kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \rightarrow [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in (0,1]$, $x \notin A$ için $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonun tanımından yararlanarak bir A bulanık kümesini

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0,1]\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $X_A(x)$ 'in değeri A bulanık kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ 'in 1'e yakın değeri, A bulanık kümesindeki x 'in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer A kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x)=1$ veya $X_A(x)=0$ olması x 'in A 'ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 2.1.3. Bir A bulanık kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart $X(x_0)=1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \chi$ olmasıdır.

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde bulanık kümelerle genişletilebilir. Bu kavram, bulanık sayı tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir. Konveksliğin tanımını vermeden önce A^α ile gösterilen A 'nın α -kesimini

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlayalım [17].

Bu tanımın benzeri olan ve bulanık kümelerde sık kullanılan “Destek” kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.4. A bir bulanık küme olsun. A nın desteği, üyelik derecesi sıfır olmayan tüm noktaların kümesidir yani

$$\text{supp } p(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

dır [17].

Tanım 2.1.5. $\mathcal{X}$, n boyutlu $\mathbb{R}^n$ boyutlu Öklid uzayı olsun. Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır [17].

Konveksliğin diğer bir tanımı ise şöyle verilebilir.

Tanım 2.1.6. Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu tanımdan $X_A(x)$ 'in x 'e bağlı bir konveks fonksiyon olduğu anlaşılmalıdır [17].

2.2. Bulanık Sayılar

Bulanık sayı kavramını tanımlamadan önce reel aralık kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

A bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz. Yani $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir $[a, a]$ aralığını a reel sayısına karşılık getireceğiz.

A ve B yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar içi tanımlanmış olan “ $\leq$ ” ve “ $<$ ” sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}$$

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}$$

$$A = [\underline{A}, \overline{A}] \text{ ve } B = [\underline{B}, \overline{B}] \text{ olmak üzere;}$$

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

A ve B aralıkları arasındaki çıkarma işlemi de

$$\left[\underline{A}, \overline{A} \right] - \left[\underline{B}, \overline{B} \right] = \left[\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B} \right]$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı $\left[\underline{A}, \overline{A} \right]$ aralıklarının kümesini D ile gösterelim. Herhangi $A, B \in D$ için

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlanmış bir d fonksiyonunun D üzerinde bir metrik tanımladığı ve (D, d) 'nin de bir tam uzay olduğu kolayca gösterilebilir [18]. Ayrıca “ $\leq$ ” bağıntısı D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.2.2. Bir reel bulanık sayısı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur.

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur,
- ii) X bulanık konvektir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

- iii) X üst-yarı-süreklidir,
- iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır [19].

Tüm reel bulanık sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $L(\mathbb{R})$ kümesinde α -kesim kümeleri için bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X + Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X - Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

şeklinde tanımlanır.

X ve Y gibi iki bulanık sayısının α -kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır. $X, Y \in L(\mathbb{R})$ ve bunların α -kesim kümeleri $\alpha \in [0, 1]$ için

$[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ olsun. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} [X + Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \\ [X - Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha], \end{aligned}$$

dir.

Bir X bulanık sayısının bir $k \in \mathbb{R}^+$ reel sayısı ile çarpımı da

$$k.X^\alpha = [k, k].[\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha] = [k.\underline{X}^\alpha, k.\overline{X}^\alpha]$$

şeklindedir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca bulanık sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir bulanık sayı olur. Yani $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her reel sayı için $\bar{r} = [r, r]$ şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesine gömülebilir [20].

Bulanık sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için “ $\leq$ ” kısmi sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.2.3. $A \subset L(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Her $X \in A$ bulanık sayısı için $X \leq U$ olacak şekilde bir U bulanık sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve U bulanık sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her μ üst sınırı için $U \leq \mu$ ise U bulanık sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır [22].

$L(\mathbb{R})$ üzerinde Hausdroff metriği olarak bilinen metrik,

$$d(X^\alpha, Y^\alpha) = \max\left(\left|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha\right|\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ bir tam metrik uzaydır [23]. Bu metrik, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesini gösterebilir. Bu taktirde $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde toplama ve skalere çarpma her $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için;

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her $A \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir.

A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\right\}$$

Hausdroff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile $\mathbb{R}^n$ 'deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir [23].

Bir bulanık sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.4. n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur:

- i) X normaldir, yani $X(x_0)=1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcuttur,
- ii) X bulanık konvektir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

- iii) X üst-yarı-süreklidir
- iv) $X^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için X^α kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımından, $X^\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $L(\mathbb{R}^n)$ 'deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$[X + Y]^\alpha = X^\alpha + Y^\alpha \text{ ve } [kX]^\alpha = kX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, her bir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X, Y) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q \leq s$ için $d_q \leq d_s$ olmak üzere

$$d_{\infty}(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır [24].

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır.

Açıkça $n=1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden, $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

2.3. Bulanık Sayı Dizileri ve İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 2.3.1. Bulanık sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ bulanık sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız [25].

Tanım 2.3.2. $X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 bulanık sayısının ε -komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X bulanık sayılarının kümesidir. Bir X_0 bulanık sayısının ε -komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir [25].

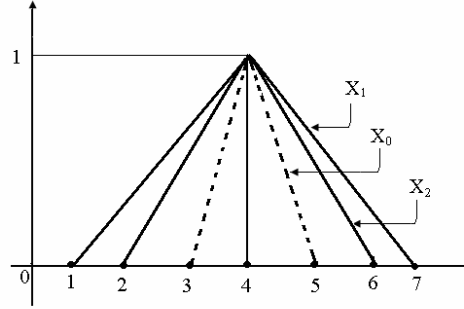
Tanım 2.3.3. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 'dır denir. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_k$ mevcut değilse (X_k) dizisi ıraksaktır denir [25].

$$\textbf{Örnek 2.3.4. } X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-3k}{k+2}, & x \in \left[\frac{3k-2}{k}, 4 \right] \text{ ise} \\ \frac{-k}{k+2}x + \frac{5k+2}{k+2}, & x \in \left[4, \frac{5k+2}{k} \right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x-3, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ -x+5, & x \in [4, 5] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir (Şekil 2.1). Tüm yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.



Şekil 2.1. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması

Teorem 2.3.5. Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin limiti tektir [25].

Teorem 2.3.6. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır [25].

$$i) \lim_k (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$$

$$ii) \lim_k (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$$

$$iii) \lim_k (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$$

$$iv) \lim_k \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0} \text{ (Eğer bütün } k\text{'lar için } 0 \notin \text{sup } pY_k \text{ ve } 0 \notin \text{sup } pY_0 \text{)}$$

Tanım 2.3.7. Her $\varepsilon > 0$ için $k, m > N$ olduğunda $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir [25].

Reel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda bulanık Cauchy dizidir.

Tanım 2.3.8. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U bulanık sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir [25]. Bütün sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesini $\mathcal{L}_\infty(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.3.9. Yakınsak her bulanık sayı dizisi sınırlıdır [25].

Tanım 2.3.10. Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir $\{k_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (X_{k_n}) dizisine (X_k) dizisinin bir alt dizisi denir [25].

Teorem 2.3.11. Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $X = (X_k)$ dizinin limiti ile aynıdır [25].

Reel sayı dizilerinin istatistiksel ve kuvvetli Cesáro yakınsaklığı kavramları birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmış ve ilk ortaya çıktığı zamanlardan günümüze kadar birbirlerinden bağımsız bir şekilde ayrı ayrı olarak geliştirilmelerine devam edilmiştir. Bununla birlikte bu iki tanım genel yapı itibariyle birbirlerine benzemekte olup sınırlı diziler için denktirler.

Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık kavramı pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı Nuray ve Savaş [26] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Kwon [27] bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile bulanık sayı dizilerinin kuvvetli Cesáro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Tanım 2.3.12. $X = (X_k)$ bir bulanık sayısı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise, yani h.h.k için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise $X_k \rightarrow X_0(S(F))$ yazılır [26].

$S(F)$ ile istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz.

Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazacağız.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(F) \subset S(F)$ kapsamı açıktır. Bu kapsamın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.3.13: $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} x-k, & x \in [k, k+1] \\ -x+k+2, & x \in [k+1, k+2] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^3 \text{ ise} \\ n = 1, 2, \dots \\ k \neq n^3 \text{ ise} \end{matrix}$$

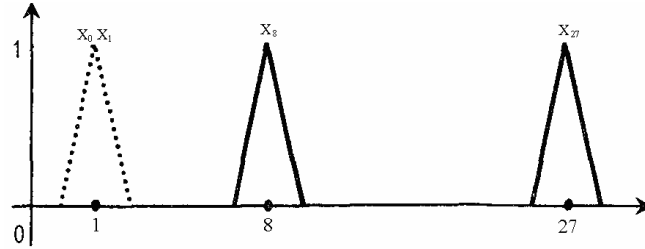
olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1, 2] \text{ ise} \\ -x+3, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon \geq 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{8, 27, 64, \dots\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 'a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olduğu için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaması

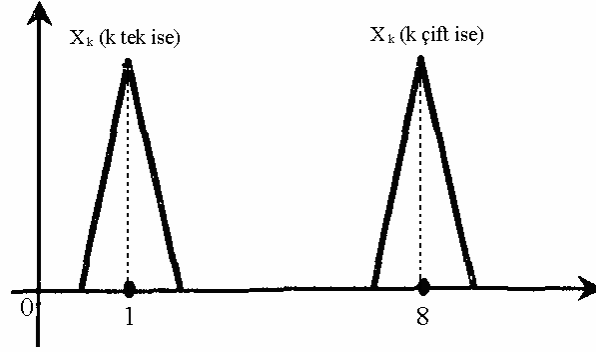
$S(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzayları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneğini verelim.

Örnek 2.3.14:

$$X_k(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \\ -x+3, & x \in [2,3] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} x-1, \\ -x+3, \\ 0, \end{matrix}} \right\} k \text{ tek ise}$$

$$\begin{cases} x-8, & x \in [8,9] \\ -x+10, & x \in [9,10] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} x-8, \\ -x+10, \\ 0, \end{matrix}} \right\} k \text{ çift ise}$$

şeklinde tanımlanan (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir bulanık sayı dizisi

Yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.3.15: $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

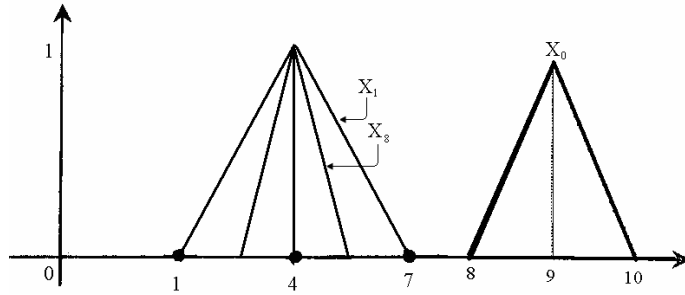
$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-3k}{k+2}, & x \in \left[\frac{3k-2}{k}, 4 \right] \text{ ise} \\ \frac{-k}{k+2}x + \frac{5k+2}{k+2}, & x \in \left[4, \frac{5k+2}{k} \right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^3 \text{ ise} \\ n = 1, 2, \dots \\ \\ k \neq n^3 \end{matrix}$$

$$X_0(x),$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x-8, & x \in [8, 9] \text{ ise} \\ -x+10, & x \in [9, 10] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır, hem de X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 2.4.)



Şekil 2.4. Yakınsak olmayan, ancak istatistiksel yakınsak bir bulanık sayı dizisi

Tanım 2.3.16. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli Cesáro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesáro yakınsak bulanık dizilerinin kümesini $w(F)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w(F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X=(X_k)$ bulanık dizi X_0 bulanık sayısına kuvvetli Cesáro yakınsak ise $X_k \rightarrow X_0(w(F))$ yazacağız [27].

Nuray [28], $\theta=(k_r)$ lacunary dizisini kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki şekilde bulanık sayı dizilerine genişletti.

Tanım 2.3.17. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa, $X=(X_k)$ bulanık dizisi X_0 bulanık sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\theta - \lim X_k = X_0$ yazılır. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(F)$ ile sıfıra Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ise $S_\theta^0(F)$ ile gösterilir.

2.4. Bulanık Sayı Dizilerinin Hemen Hemen Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda bulanık sayı dizilerinin hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı kavramlarını tanımlayacak ve bunlar arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Bulanık sayı dizilerinin benzer özellikleri Altınok [29] ve Altın [30] tarafından verildi.

Tanım 2.4.1. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $X=(X_k)$ bulanık sayılarının bir dizisi olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0(\hat{S}_\theta)$ veya $\hat{S}_\theta - \lim x_k = X_0$ yazılır.

Bulanık sayılarının bütün lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi $\hat{S}_\theta$ ile gösterilir. Özel olarak $\theta=(2^n)$ alınırsa $\hat{S}_\theta$ yerine $\hat{S}$ yazılır.

Tanım 2.4.2. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+1}, X_0)]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına hemen hemen kuvvetli lacunary yakınsaktır denir.

Bu durumda $X_k \rightarrow X_0[M_\theta, p]$ yazılır. $[M_\theta, p]$ bulanık sayılarını hemen hemen kuvvetli lacunary yakınsak dizilerinin kümesini göstermek için kullanılır. Özel olarak $\theta=(2^r)$ ve $p_k=1$ bütün $k \in \mathbb{N}$ için $[M_\theta, p]$ yerine sırasıyla $[AC, p]$ ve $[AC]_\theta$ yazılır.

Teorem 2.4.3. (X_k) ve (Y_k) iki bulanık sayı dizisi olsun. Bu taktirde

i) $\hat{S}_\theta - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $\hat{S}_\theta - \lim cX_k = cX_0$ ’dır.

ii) $\hat{S}_\theta - \lim X_k = X_0$ ve $\hat{S}_\theta - \lim Y_k = Y_0$ ise $\hat{S}_\theta - \lim (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$

dır [31].

İspat:

i) $\alpha \in [0,1]$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. X_{k+i}, Y_{k+i}, X_0 ve Y_0 nın α seviye kümeleri sırasıyla $X_{k+i}^\alpha, Y_{k+i}^\alpha, X_0^\alpha$ ve Y_0^α olsun.

$$\delta_\infty(cX_{k+i}^\alpha, cX_0^\alpha) = |c| \delta_\infty(X_{k+i}^\alpha, X_0^\alpha)$$

olduğundan

$$d(cX_{k+i}, cX_0) = |c| d(X_{k+i}, X_0)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(cX_{k+i}, cX_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

yazabiliriz. Böylece $\hat{S}_\theta - \lim cX_k = cX_0$ dır.

ii) Kabul edelim ki $\hat{S}_\theta - \lim X_k = X_0$ ve $\hat{S}_\theta - \lim Y_k = Y_0$ olsun. δ_∞ metriğinin tanımından

$$\begin{aligned}\delta_{\infty}(X_{k+i}^{\alpha} + Y_{k+i}^{\alpha}, X_0^{\alpha} + Y_0^{\alpha}) &\leq \delta_{\infty}(X_{k+i}^{\alpha} + Y_{k+i}^{\alpha}, X_{k+i}^{\alpha} + Y_0^{\alpha}) + \delta_{\infty}(X_{k+i}^{\alpha} + Y_{k+i}^{\alpha}, X_0^{\alpha} + Y_0^{\alpha}) \\ &= \delta_{\infty}(X_{k+i}^{\alpha}, X_0^{\alpha}) + \delta_{\infty}(Y_{k+i}^{\alpha}, Y_0^{\alpha})\end{aligned}$$

yazılabilir.

Minkowski eşitsizliğinden

$$d(X_{k+i}, Y_{k+i}, X_0 + Y_0) \leq d(X_{k+i}, X_0) + d(Y_{k+i}, Y_0)$$

bulunur.

Bu nedenle

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, Y_{k+i}, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) + d(Y_{k+i}, Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(Y_{k+i}, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|\end{aligned}$$

dır. Böylece $\hat{S}_{\theta} - \lim(X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dur.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.4.3 ün bir sonucudur.

Sonuç 2.4.4. X_k ve Y_k iki bulanık sayı dizisi olsun.

i) Eğer $\hat{S} - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise bu taktirde $\hat{S} - \lim cX_k = cX_0$ dır.

ii) Eğer $\hat{S} - \lim X_k = X_0$ ve $\hat{S} - \lim Y_k = Y_0$ ise $\hat{S} - \lim(X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dır

[31].

Teorem 2.4.5. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu taktirde

i) $\liminf q_r > 1$ için $[AC, p] \subseteq [M_{\theta}, p]$

ii) $\liminf q_r < \infty$ için $[M_{\theta}] \subseteq [AC, p]$

iii) Eğer $1 < \liminf q_r \leq \limsup q_r < \infty$ ise $[M_{\theta}, P] = [AC, P]$ dir.

İspat:

i) $X \in [AC, p]$ ve $\liminf q_r > 1$ olsun.

Bu durumda her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur. Bu taktirde $X \in [AC, p]$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$h_r = k_r - k_{r-1} \text{ olduğundan, } \frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta} \text{ elde edilir.}$$

$$k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \text{ ve } k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \text{ terimlerinin her ikisi de } r \rightarrow \infty$$

için sıfıra düzgün yakınsar (i ye göre düzgün). Böylece $X \in [M_\theta, p]$ dir.

ii) Kabul edelim ki $\limsup q_r < \infty$ olsun. Buna göre her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde $B > 0$ vardır. $X \in [M_\theta, p]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

Bu taktirde;

$$A_j = \frac{1}{h_j} \sum_{k \in I_j} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} < \varepsilon \text{ her } j \geq R \text{ için olacak şekilde } R > 0 \text{ sayısı vardır.}$$

Her $j = 1, 2, \dots$ için $A_j < K$ olacak şekilde $K > 0$ bulunabilir. n sayısı $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < n \leq k_r$ şartını sağlayacak şekilde alınsın. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} &\leq k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} = k_{r-1}^{-1} \sum_{k \in I_1} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\ &+ \sum_{k \in I_2} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} + \dots + \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} k_1^{-1} \sum_{k \in I_1} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} (k_2 - k_1)^{-1} \sum_{k \in I_2} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
& + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} (k_R - k_{R-1})^{-1} \sum_{k \in I_R} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
& + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} (k_r - k_{r-1})^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
& = \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R \\
& + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}} A_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \\
& \leq \left(\sup_{j \geq 1} A_j \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{j \geq R} A_j \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} < K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ iken $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan i ye düzgün olarak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \rightarrow 0 \text{ bulunur.}$$

Teorem 2.4.6. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu takdirde $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup p_k = H$ olmak üzere

- i) $X_k \rightarrow X_0 [M_\theta, p] \Rightarrow x_k \rightarrow x_0 (\widehat{S}_\theta)$
- ii) $X \in \ell_\infty(F)$ ve $X_k \rightarrow X_0 (\widehat{S}_\theta) \Rightarrow X \in [M_\theta, P]$
- iii) $X \in \ell_\infty(F)$ ise $\widehat{S}_\theta = [M_\theta, p]$ [31] dir.

İspat:

- i) $\varepsilon > 0$ ve $X_k \rightarrow X_0 [M_\theta, p]$ olsun. Buna göre i ye göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} + \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) < \varepsilon}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \varepsilon^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \min(\varepsilon^h, \varepsilon^H) \\
&\geq \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \min[\varepsilon^h, \varepsilon^H]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X_k \rightarrow X_0(\hat{S}_\theta)$ dır.

ii) Kabul edelim ki $X \in \ell_\infty(F)$ ve $X_k \rightarrow X_0(\hat{S}_\theta)$ dır. $X \in \ell_\infty(F)$ olduğundan $d(X_{k+i}, X_0) \leq T$ olacak şekilde sabit bir $T > 0$ vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) < \varepsilon}} [d(X_{k+i}, X_0)]^{p_k} \\
&\leq h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \max(T^h, T^H) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(X_{k+i}, X_0) < \varepsilon}} \varepsilon_{l_k} \\
&\leq \max(T^h, T^H) \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \\
&\quad + \max(\varepsilon^h, \varepsilon^H)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $X_0 \in [M_\theta, p]$ dir.

iii) i ve ii den elde edilir.

Teorem 2.4.7. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. bu takdirde

i) $\limsup_r q_r < \infty$ ise $\hat{S}_\theta \subseteq \hat{S}$,

ii) $\liminf_r q_r > 1$ ise $\hat{S} \subseteq \hat{S}_0$

iii) $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ ise $\hat{S} = \hat{S}_0$ [31] dır.

İspat:

i) Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise her r için $q_r < T$ olacak şekilde bir $T > 0$ vardır. Kabul edelim ki $X_k \rightarrow X_0(\hat{S}_0)$ ve her bir $i \geq 1$ için

$N_{ri} = \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right|$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{N_{r0}}{h_r} < \varepsilon \quad (1)$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$M = \max \{N_{ri} \leq r \leq r_0\}$ olsun ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde n seçelim. Bu takdirde her bir $i \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \leq k_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ N_{1i} + N_{2i} + \dots + N_{r_0i} + N_{(r_0+1)i} + \dots + N_{ri} \right\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} + \frac{N_{(r_0+1)i}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_{ri}}{h_r} \right\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_{ri}}{h_r} \right) \{ h_{r_0+1} + \dots + h_r \} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon_{qr} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon K \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeterince büyük r 'ler için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $k_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta}$ elde edilir.

$X_k \rightarrow X_0(\hat{S})$ olsun. Bu taktirde her i ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \leq k_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \geq \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

dır. Böylece $\hat{S} \subset \hat{S}_0$ bulunur.

iii) (i) ve (ii) den elde edilir.

Teorem 2.4.8. $0 < p_k \leq q_k$ ve (q_k / p_k) sınırlı olsun. Bu taktirde $[M_\theta, q] \subset [M_\theta, p]$ [31] dır.

İspat: $X = (X_k) \in [M_\theta, q]$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $w_{k+i} = [d(X_{k+i}, X_0)]^{q_k}$ ve $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}$ diyelim. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda_k \leq 1$ olur. λ sayısı her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$ olacak şekilde seçilsin $(u_{k,i})$ ve $(v_{k,i})$ dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_{k,i} \geq 1 \text{ için } u_{k,i} = w_{k,i} \text{ ve } v_{k,i} = 0$$

$$w_{k,i} < 1 \text{ için } u_{k,i} = 0 \text{ ve } v_{k,i} = w_{k,i}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$w_{k,i} = u_{k,i} + w_{k,i}$$

$$w_{k,i}^{\lambda_k} = u_{k,i}^{\lambda_k} + v_{k,i}^{\lambda_k}$$

olur. Buradan da $u_{k,i}^{\lambda_k} \leq u_{k,i} \leq w_{k,i}$ ve $v_{k,i}^{\lambda_k} \leq v_{k,i}$ bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_{k,i}^\lambda &= \sum_{k \in I_r} (h_r^{-1} U_{k,i})^\lambda (h_r^{-1})^{1-\lambda} \\
&\leq \left(\sum_{k \in I_r} \left((h_r^{-1}, v_{k,i})^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \left(\sum_{k \in I_r} \left((h_r^{-1})^{1-\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{1-\lambda} \\
&= \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_{k,i} \right)^\lambda
\end{aligned}$$

böylece $h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_{k,i}^{\lambda,k} \leq h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_{k,i} + (h_r^{-1}) \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_{k,i} \right)^\lambda$

Buna göre $X \in [M_\theta, p]$ elde edilir.

Teorem 2.4.9. $[AC, p]_\infty = \left\{ X = (X_k) : \sup_{n,i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n [d(X_{k+i}, 0)]^{pk} < \infty \right\},$

$$(m, p) = \left\{ X = (X_k) : \sup_k [d(X_k, 0)]^{pk} < \infty \right\}$$

olmak üzere $[AC, p]_\infty = (m, p)$ [31].

İspat: $t_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_{k+i}, 0)]^{pk} = \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^{i+n} [d(X_k, 0)]^{pk}$

alalım. Bu durumda

$$\sup_{n,i} t_{n,i} = \sup_n \frac{\sup_k [d(X_k, 0)]^{pk}}{n} \sum_{k=i+1}^{i+n} 1 = \sup_k [d(X_k, 0)]^{pk} \quad (2)$$

ve

$$\sup_{n,i} t_{n,i} \geq \sup_i t_{1,i} = \sup_k [d(X_{i+1}, 0)]^{pk+i} \quad (3)$$

elde edilir.

(2) ve (3) den $[AC, p]_\infty = (m, p)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Maddox, I. J., 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
2. Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
3. Şuhubi, E., 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, No:38, İstanbul
4. Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, Math. Z., 118, 93-102.
5. Maddox, I. J., 1967, Spaces of strongly summable sequences, Quart J. Math. Oxford, (2), 18, 345-355.
6. Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
7. Shoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
8. Fridy, J. A., 1985, On statistically convergece sequences, Analysis, 5, 301-313.
9. Šalát, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139- 150.
10. Connor, J. S., 1988, The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.
11. Mursaleen, M., 2000, λ -Statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1), 111- 115.
12. Tripathy, B. C., 1997, Matrix transformation between some classes of sequences, J. Math. Anal. Appl. 206, 448-450.
13. Savaş, E., 2000, Strongly almost convergence and almost λ -statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.
14. Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43- 51.
15. Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1960, An Introduction to the Theory of Fuzzy Numbers, John Wiley & Sons, New York.

16. A. R. Freadman, J. J. Sember and M. Raphael, Some Cesare type summability, Proc. London Math. Soc. 37(3) (1978), 508-520.
17. Zadeh, L. A, 1965, Fuzzy sets, Inform and Control, 8, 338-353.
18. Moore, R. E., 1979, Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Philadelphia.
19. Chang, S.S.L and Zadeh, L.A, 1972, On Fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
20. Kaufmann, A. and Gupta, M. M., 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
21. Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications, World Scientific, Singapore.
22. Nanda, S., 1989, On sequence of Fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 33, 123- 126.
23. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1983, Differentials of Fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552- 558.
24. Puri, M.L. and Ralescu, D. A., 1986, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114, 409- 422.
25. Matloka, M., 1986, Sequences of Fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37.
26. Nuray, F. and Savaş, E., 1995, Statistical convergence of Fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269 – 273.
27. Kwon, J.S, 2000, On statistical and p- Cesàro convergence of Fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math., 7(1), 195-203.
28. Nuray, F., 1998, Lacunary statistical convergence of sequences of Fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 99 353-355.
29. Altınok, H., 2007, Fuzzy sayı dizileri, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
30. Altın, Y. 2005, Fuzzy sayı dizilerinin m. Farkları ve İstatistiksel yakınsaklık, Doktora Tezi, F.Ü., Elazığ
31. Altınok, H., Altın, Y. and Et, M., 2004, Lacunary Almost Statisticial Convergence of Fuzzy Numbers. Thai Journal of Matematics. 2: 265-264.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 1998 yılında kazandığım Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2002 yılında mezun oldum. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Halen özel bir kurumda öğretmen olarak çalışmaktayım.

Muhammed ÇINAR