

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



P-LAPLACIAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

MESUT COŞKUN

Doktora Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Danışman: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

AĞUSTOS - 2018

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**P-LAPLACIAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN
ÇÖZÜMÜ**



DOKTORA TEZİ
MESUT COŞKUN
(141121205)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03.07.2018

Tezin Savunulduğu Tarih: 01.08.2018

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Diğer Jüri Üyeleri:

AĞUSTOS - 2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden ilgisini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU hocama sabrından ve hoşgörüsünden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca benden yardım ve desteklerini esirgemeyen aileme ve meslektaşım Devran ÇİFÇİ'ye teşekkür ederim.

Mesut COŞKUN

AĞUSTOS - 2018



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. GENEL ANLAMDA P-LAPLACIAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ ...	13
3.1 Genelleştirilmiş Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri	13
4. BESSEL PROBLEMİ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	24
4.1 Potansiyel Fonksiyonun Bulunması	28
5. P-LAPLACIAN BESSEL PROBLEMİ İÇİN TERS NODAL PROBLEM	30
5.1 p-Laplacian Bessel Probleminin Potansiyel Fonksiyonunun Bulunması	33
6. SONUÇLAR	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	38

ÖZET

Mevcut çalışma toplamda altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilgili konunun tanımı ve referans tarihçesi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın esas kısmında kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, genel olarak 1-boyutlu p -Laplacian problemi ve çözümleri olan genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonlar verilmiştir. Takip eden dördüncü bölümde, sonlu bir aralıkta Bessel operatörü için ters problemin çözümü verilmiştir. Özellikle nodal noktalar (özfonksiyonların sıfırları) kullanılarak potansiyel fonksiyon için matematiksel bir formül verilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar genelleştirilerek p -Laplacian Bessel probleminin ters problemi incelenmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar ve ileride hedeflenen amaçlar için bazı detaylar verilmiştir.

SUMMARY

Solution of Inverse Problem for p -Laplacian Sturm-Liouville Operator

This thesis is prepared in six parts. In the first section, definition and historical process of the study are given. In second part, some main concepts using in the study are presented. In third part, one dimensional p -Laplacian problem and generalized trigonometric functions are given. In following section, solution of Bessel operator is given on finite interval. Especially, a definition of potential is given with zeros of eigenfunctions. In fifth section, results obtained in fourth section are given for p -Laplacian Bessel problem. Eventually, some details about the obtained results and next goals are given.

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Sturm-Liouville Operatörü
$L_2[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, reel değerli ve karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
q	: Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler
λ_n	: n . öz değer
$y_n(x, \lambda_n)$	: n . öz değere karşılık gelen n . öz fonksiyon
x_j^n	: j . nodal nokta
l_j^n	: j . nodal uzunluk

1.GİRİŞ

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli çalışma alanlarından biri ters problemlerdir. Bu problemler spektral veriler ile lineer diferansiyel operatörün formunun bulunması olarak tanımlanır. Spektral analizin ters problemleri ile matematiksel fizikteki lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözülmesinde yeni yöntem ve metotlar geliştirilmekte ve bu problemler matematik, fizik, mühendislik, meteoroloji ve tıp gibi birçok alanda karşılaşılan önemli problemlerin çözümünde kullanılmaktadır (Şuhubi, 2001).

Sturm-Liouville teorisi 1830'lu yıllarda Sturm ve Liouville'in çalışmaları ile başlamıştır. Yazarlar çalışmalarında; λ bir kompleks parametre, $q(x)$ $[0,1]$ aralığında karesel integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere 2.mertebeden lineer $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $0 \leq x \leq 1$ diferansiyel denklemi için sınır değer problemini ele almışlardır. Bu denklem için bazı özel çözümler ele alınarak bu çözümlerin özdeğerleri ile bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonları elde etmişlerdir. Elde edilen bu özdeğerler ile spektrum kavramını tanımlamışlardır (Levitan, 1978).

Spektral teoride önemli rol oynayan Sturm-Liouville operatörü $Ly = y'' + q(x)y$ biçiminde tanımlanır. Bu operatöre Schrödinger operatörü de denilmektedir. Böyle operatörlerin spektral teorisi üzerine 20. Yüzyılda birçok matematikçi tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır. Spektral teoremin ters problemleri ile ilgili temel sonuçlar, 20. yüzyılın ikinci yarısında elde edilmiştir. 1929'da Ambartsumyan'ın yaptığı çalışma Sturm-Liouville operatörü için ters problem teorisinin başlangıcını oluşturmaktadır. Ambartsumyan çalışmasında

$$\begin{aligned} -y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) &= 0, \\ y'(0) = y'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

ile verilen Sturm-Liouville problemini ele alarak bu problemin öz değerlerinin kümesinin $\lambda_n = (n\pi)^2$ olması haline $q=0$ olacağını göstermiştir (Ambartsumyan, 1929). Ancak Ambartsumyan'ın bu düşüncesi genel olarak doğru olmamakla birlikte spektral teori alanında çalışacak olan matematikçilere yol göstermesi bakımından önemlidir (Chadan,

Colton, Paivarinta ve Rundell, 1997). Borg aynı problemi farklı sınır değerleri ile ele alarak $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun tek olarak belirlenebileceğini göstermiştir (Borg, 1946). Sonraki yıllarda konu üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır.

Lineer operatörlerin spektral teorisinde önemli çalışma alanlarından biri de p -Laplacian özdeğer problemidir. Sturm-Liouville problemi bu problemin özel bir halidir. p -Laplacian özdeğer problemi $p > 1$ ve $\Omega \subseteq R^N$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla y|^{p-2} \nabla y) + q(x)|y|^{p-2} y = \lambda \omega(x)|y|^{p-2} y, \Omega \text{ üzerinde} \\ y = 0, \partial\Omega \text{ sınırında} \end{cases} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Önceki zamanlarda p -Laplacian operatörü üzerine çalışmalar yapılmış ve bir çok özelliği ortaya konulmuştur (Binding ve Rynne, 2008; Law, Lian ve Wang, 2009; Cheng ve Lian, 2011). $\Omega = (0,1)$ olması halinde p -Laplacian özdeğer problemi.

$$\begin{cases} -(|y'|^{p-2} y')' = (p-1)(\lambda \omega(x) - q(x))|y|^{p-2} y, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

biçimindedir. $\omega(x) \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olması durumunda bu problemin özdeğerleri açık olarak

verilebilir. Özdeğerler $\hat{\pi}_p = \frac{2\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$ olmak üzere

$$\lambda_n = (n\hat{\pi}_p)^p, n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon $S_p(x)$ ile gösterilir (Wang, 2010). Özdeğerler ve nodal parametrelerin detaylı asimptotik ifadelerini verebilmek için $S_p(x)$ fonksiyonunun bazı özellikleri gereklidir.

$S_p(x)$ fonksiyonuyla, Prüfer tipindeki dönüşümler tanımlanarak bu dönüşümler altında p -Laplacian için Sturm-Liouville teorisinde özdeğerler, nodal parametreler ve q potansiyeli için yapılandırma formülü elde edilebilir.

Bu tez çalışmasında genel anlamda p -Laplacian problemi kullanılarak Prüfer dönüşümü yardımıyla

$$-(y'^{(p-1)})' = (p-1)(\lambda - \omega(x))y'^{(p-1)}, 1 \leq x \leq a \quad (1.4)$$

$$y(1) = y(a) = 0 \quad (1.5)$$

probleminin öncelikle $p = 2$ için özdeğerleri, nodal noktaları (özfonksiyonların sıfırları), nodal uzunlukları ve son olarak potansiyel fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra aynı ifadeler genel anlamda p -Laplacian Bessel problemi için elde edilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Hilbert Uzayı) $x, y, z, \dots$ elemanlarının bir kümesi H olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa H uzayına bir soyut Hilbert uzayı denir.

- i. H bir lineer uzaydır.
- ii. H uzayındaki her $x, y \in H$ eleman çiftine, bu elemanların iç çarpımı denilen, aşağıdaki aksiyomları sağlayan ve (x, y) ile gösterilen bir gerçel sayı karşılık gelir.
 - a. $(x, y) = (y, x)$
 - b. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
 - c. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, (her $\lambda \in \mathbb{R}$ için)
 - d. $x \neq 0$ ise $(x, x) \geq 0$
- iii. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ile verilen metriğe göre H uzayı tamdır.
- iv. H uzayı sonsuz boyutludur.

Bu aksiyomlardan sadece i), ii), iii) sağlanıyorsa, H ye Hilbert uzayı denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.2. ($L_2[a, b]$ Uzayı) $[a, b]$ aralığında tanımlı karesi integrallenebilen, ölçülebilir, kompleks değerli $f(x)$, $g(x)$, ... fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L_2[a, b]$ uzayı denir. $L_2[a, b]$ uzayı, her $f, g \in L_2[a, b]$ için $d : L_2[a, b] \times L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|\cdot\| : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Burada iç çarpım,

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. $L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.3. (l_2 Uzayı) $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ve $y = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 < \infty$$

özelliğini sağlayan kompleks sayıların sonsuz sayı dizilerinin oluşturduğu uzaya l_2 uzayı denir. Bu uzay her $x, y \in l_2$ için $d : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \mu_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|\cdot\| : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile bir normlu uzaydır (Şuhubi, 2001). l_2 uzayında iç çarpım

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\mu_k}$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde verilen iç çarpıma göre l_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır (Şuhubi, 1978).

Tanım 2.4. ($C[a, b]$ Uzayı) $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli, reel ya da kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a, b]$ uzayı denir. Bu uzay $f, g \in C[a, b]$ ve $d : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzay $\|\cdot\| : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu şekilde tanımlanan metriğe Chebishev metriği denilmektedir. Bu uzayda iç çarpım

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre tam olmayan bu uzay Hilbert uzayı değildir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.5. (Öz fonksiyon-Öz değer) L lineer olmak üzere $y \neq 0$ için $Ly = \lambda y$ oluyorsa y 'ye L 'nin öz fonksiyonu (veya öz vektörü), λ 'ya ise L operatörünün bir öz değeri denir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 2.6. (Sturm-Liouville Operatörü) p, q ve $\rho, [a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \quad (2.6.1)$$

sınır şartlarına sahip

$$[p(x)y'(x)]' + [\lambda \rho(x) - q(x)]y(x) = 0 \quad (2.6.2)$$

diferansiyel denklemi verilsin. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Freeling ve Yurko, 2001).

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklindeki operatöre Sturm-Liouville (S-L) operatörü adı verilir. L operatörü için en önemli sınır şartları $a, \beta \in [0, \pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

dir. Bu sınır şartlarına ayırık sınır şartları denir. (2.6.2) denkleminin $p(x) = \rho(x) = 1$ özel hali olan

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (2.6.4)$$

denklemi göz önüne alınsın. (2.6.3) - (2.6.4) kaynaklarda (S-L) sınır değer problemi olarak tanımlanır. (2.6.3) sınır şartı $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ için

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0, \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ alınırsa

$$y'(a) - hy(a) = 0,$$

$$y'(b) + Hy(b) = 0$$

olur. Bu sınır şartlarına impedance sabitli sınır şartları, h ve H sabitlerine ise impedance sabitleri denir (Gelfand ve Levitan, 1951).

p , q ve ρ fonksiyonları R üzerinde tanımlı ve hepsi periyodik fonksiyonlar ise (2.6.2) denkleminde;

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

periyodik sınır şartı ve

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$$

anti periyodik sınır koşulu ile (S-L) periyodik (veya anti periyodik) sınır değer problemi denir. Bu şartlarla birlikte (2.6.4) denkleminde Hill denklemi denir.

Tanım 2.7. (Regüler Sturm-Liouville Problemi) Aşağıdaki özellikleri sağlayan (2.6.1)-(2.6.2) sınır değer problemine regüler (S-L) Problemi denir.

- i. a_1, a_2, b_1 ve b_2 reeldir.
- ii. $p(x)$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ katsayı fonksiyonları, uç noktaları içeren her yerde reel ve süreklidir.
- iii. Uç noktaları içeren her yerde $p(x), \rho(x) > 0$ dır.

Regüler olmayan (S-L) problemine, singüler (S-L) Problemi denir (Lusternik ve Sobolev, 1968).

Tanım 2.8. (Başlangıç ve Sınır Koşulları) Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

- i. Sınır Şartları: kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α , β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir.

Dirichlet şartı: $u|_{\Gamma} = g$,

Neumann şartı: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g$ (veya 0),

Karışık (mixed) veya Robin şartı: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$.

- ii. Başlangıç şartları: Sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir (Lusternik ve Sobolev, 1968).

Tanım 2.9. (Nodal Nokta Kümesi) (2.6.1) - (2.6.2) öz değer probleminin nodal nokta bilgisi $y_n(x)$ öz fonksiyonlarının kökleri olan $\{x_j^{(n)}\}$, $j = \overline{1, n-1}$, $n \geq 2$ kümesidir. $\{x_j^{(n)}\}$ kümesi (2.6.1) - (2.6.2) problemdeki p, ρ ve q parametrelerine ve a_1, a_2, b_1, b_2, a ve b değerlerine bağlıdır (Browne, 1996, Hald, 1978).

Tanım 2.10. (Düz Problem) (2.6.1) - (2.6.2) Sturm-Liouville problemi sağlanacak şekilde λ_n öz değerleri ve bu değerlere karşılık gelen y_n öz fonksiyonlarını belirleme problemidir (Freeling ve Yurko, 2001).

Tanım 2.11. (Ters Problem) Klasik bir ters spektral problemde potansiyel fonksiyon, öz değerlerin iki kümesi veya öz değerlerin bir kümesi ile normlaştırıcı sabitlerin bir kümesi gibi spektral bilgiler kullanılarak elde edilir. Bu problemler, ters öz değer problemi olarak adlandırılır. Başka bir alternatif ise öz fonksiyonların sıfırları olan nodal noktaların bilgisini kullanarak potansiyel fonksiyonu elde etmektir. Bu tür problemlere, ters nodal problem denir (Hald ve Mclaughlin, 1989).

Teorem 2.1. (I. Sturm Karşılaştırma Problemi)

$$u'' + g(x)u = 0,$$

$$v'' + h(x)v = 0,$$

denklemleri verilsin. $[a, b]$ aralığı üzerinde $g(x) < h(x)$ ise, birinci denklemin aşıkâr olmayan herhangi bir çözümünün her iki kökü arasında, ikincinin en az bir kökü vardır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Teorem 2.2. (II. Sturm Karşılaştırma Problemi) $u(x)$, $u'' + g(x)u = 0$ denkleminin $u(a) = \sin \alpha$, $u'(a) = -\cos \alpha$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü; $v(x)$, $v'' + h(x)v = 0$ denkleminin aynı koşulları sağlayan çözümü olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığı üzerinde $g(x) < h(x)$ olsun eğer $u(x)$ çözüm fonksiyonu $a < x \leq b$ aralığında m tane sifıra sahipse, $v(x)$ çözüm fonksiyonunun sayısı aynı aralıkta m den az değildir (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Teorem 2.3. (Sturm Osilasyon Teoremi)

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

ile verilen Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerlerinin sınırsız, artan bir dizisi $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ olsun. λ_m öz değerine karşılık gelen m . öz fonksiyonun $[a, b]$ aralığında tam olarak m tane sıfırı vardır (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 2.12. (Bir operatörün Rezolventi) T , H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ ile gösterilen λ parametrelili bir operatördür (Levitan ve Sargsjan, 1975).

Tanım 2.13. (Rezolvent Cümlesi ve Spektrum) X boş olmayan kompleks normlu bir uzay ve $T : D(T) \rightarrow X$ verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa λ 'ya T operatörünün bir regüler değeri denir.

- i. $R_\lambda(T)$ mevcut
- ii. $R_\lambda(T)$ sınırlı
- iii. $R_\lambda(T)$, X de yoğun bir cümlede tanımlı.

T operatörünün tüm regüler değerlerin cümlesine rezolvent cümlesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Bu cümlemin tümleyeni $\sigma(T) = C - \rho(T)$ şeklinde olup, T operatörünün spektrumu adını alır. $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ ya T operatörünün spektrali veya öz değeri denir (Levitan ve Sargsjan, 1975; 1988).

Tanım 2.14. (Adjoint Operatör) X bir Hilbert uzayı, $B(X)$ ise X üzerinde tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin uzayı olsun. $T \in B(X)$ olmak üzere T^* ile gösterilen T operatörünün adjointi; her $x, y \in X$ için $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ eşitliğini sağlayan $B(X)$ uzayının bir tek elemanıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.15. (Self-Adjoint Problem) $T \in B(x)$ olsun $T = T^*$ ise, T operatörüne self-adjoint veya hermityen operatör denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.16. (Büyük O Notasyonu) Her $n \geq 0$ tam sayısı için $f(n)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabiti varsa $f(n) = O(g(n))$ dir denir. Büyük O notasyonunun bazı matematiksel özellikleri aşağıdaki şekildedir (URL1,2012).

a) $f_1(n) = O(g_1(n))$ ve $f_2(n) = O(g_2(n))$ olsun

i. $f_1(n) + f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$

ii. $O(f_1(n)).O(f_2(n)) = O(f_1(n).f_2(n))$

iii. $k \neq 0, O(kf_1(n)) = O(f_1(n))$

iv. $O(k + f_1(n)) = O(f_1(n))$

b) $f_1(n)$ ve $f_2(n)$ fonksiyonları her $n \geq 0$ tam sayısı için pozitif fonksiyonlar olmak üzere

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \text{ ve } L \geq 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = L \text{ olsun. Bu durumda;}$$

$$f(n) = O(f_1(n))$$

şeklindedir.

c) $f(n) = O(g(n))$ ve $g(n) = O(h(n))$ ise $f(n) = O(h(n))$ şeklidir.

d) $f(n)$ ve $g(n)$ sonlu bir aralık üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ve $n \geq n_0$ için

$$f(n) = O(g(n)) \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$\int_{n_0}^n f(y)dy = O\left(\int_{n_0}^n |g(y)|dy\right), \quad n \geq n_0$$

şeklindedir.

e) $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $f_i(n) = O(g_i(n))$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^k f_i(n) = O\left(\sum_{i=1}^k |g_i(n)|\right)$$

şeklindedir.

f) verilen bir h fonksiyonu için

- i. $\frac{1}{1+O(h(n))} = 1+O(h(n))$
- ii. $\log[1+O(h(n))] = O(h(n))$
- iii. $\exp[O(h(n))] = 1+O(h(n))$

şeklindedir (Freeling ve Yurko,2001).

Tanım 2.17. (Küçük o Notasyonu) $f(n) = o(g(n))$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

olmasıdır. Bu asimptotik olarak ihmal edilebilir anlamına gelir. “ $f(n), g(n)$ in küçük o sudur” diye okunur. Sezgisel olarak bunu anlamı şudur; $n \rightarrow n_0$ iken $g(n), f(n)$ işleminden çok daha hızlı büyür. Küçük o notasyonu için aşağıdaki özellikler vardır (Freeling ve Yurko,2001).

- a) $o(f) + o(f) = o(f)$
- b) $o(f).o(g) = o(fg)$
- c) $o(o(f)) = o(f)$
- d) $o(f) = O(f)$.

Örnek 2.1. (Büyük O notasyonuna ilişkin bir örnek) $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonu verilsin. Her $n \geq 0$ için $f(n) \geq 0$ olduğu görülmektedir.. $f(n) = O(n^2)$ olduğunu gösterelim.

$f(n) = O(n^2)$ olması için gerekli olan koşul her $n \geq n_0$ için $f(n) \leq Cg(n)$ olacak şekilde bir n_0 tamsayısı ve $C > 0$ sabitinin var olmasıdır. C reel değeri mevcut olduğu sürece C değerinin ne olduğu önemli değildir. Örneğin $C = 1$ alınsın

$$\begin{aligned} f(n) \leq Cn^2 &\Rightarrow f(n) \leq n^2 \\ &\Rightarrow 8n + 128 \leq n^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n^2 - 8n - 128 \geq 0$$

$$\Rightarrow (n-16)(n+8) \geq 0$$

olur. Her $n \geq 0$ için $(n+8) > 0$ olduğundan $(n-16) \geq 0$ olduğu açıktır. Yani $n_0 = 16$ dır. Bu sebeple $C=1$ için $n_0 = 16$ ve her $n \geq 0$ için $f(n) \leq Cn^2$ olur. Bundan dolayı, $f(n) = O(n^2)$ dir. $n=16$ noktasının sağ tarafında $f(n) = n^2$ fonksiyonu $f(n) = 8n + 128$ fonksiyonundan daha büyüktür. Elbette n_0 ve C nin başka birçok değeri vardır. Örneğin; $C = 2$ alınırsa $n_0 = 10.2$, $C = 4$ alınırsa $n_0 = 6.7$.

Örnek 2.2. (Küçük o notasyonuna ilişkin bir örnek) $x \rightarrow 0$ iken $x - \sin x = o(x)$ olur. Gerçekten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = 0$$

şeklindedir. Küçük o notasyonunun tanımı gereği $x - \sin x = o(x)$ elde edilir (URL4, 2012).

Tanım 2.18. (Yoğun Küme) X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde eğer $\overline{M} = X$ oluyorsa, M cümlesi X uzayında yoğundur denir. Burada $\overline{M}$, M cümlesinin kapanışı olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.4. (Rouche Teoremi) Basit, kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları analitik ve C de $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. Bu taktirde $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının C yayının içindeki sıfırlarının sayısı eşittir (Uluçay, 1978).

3. GENEL ANLAMDA P-LAPLACIAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu bölümde genel anlamda p -Laplacian Sturm-Liouville problemi için temel bazı tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Genelleştirilmiş Trigonometrik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Elementer fonksiyonların önemli örneklerinden biri trigonometrik fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar ile geometrik, cebirsel ve analitik problemler ile Fourier serilerini içeren problemler çözülebilir. Tüm trigonometrik fonksiyonların tanımı, Sinüs ve Cosinüs fonksiyonları ile tanımlanabilir. Ayrıca tüm bu fonksiyonların özellikleri

$$(\sin x)' = \cos x, \sin(0) = 0$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \cos(0) = 1$$

diferansiyel denklemi ya da

$$x = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt ,$$

integral özelliği kullanılarak elde edilebilir.

Gerçekten Öklid uzayındaki sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\begin{cases} y' = x, & y(0) = 0 \\ x' = -y, & x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümü olarak tanımlanabilir. Bu eşitlikler t 'ye göre türetilirse denklem

$$\begin{cases} y'' = x' = -y \Rightarrow y'' + y = 0, \\ x'' = -y' = -x \Rightarrow x'' + x = 0, \end{cases}$$

ve başlangıç koşulları

$$y'(0) = x(0) = 1 \Rightarrow y'(0) = 1,$$

$$x'(0) = -y(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu sistem (3.1.1) sistemine denktir. (3.1.1) sisteminde birinci denklem y ile, ikinci denklem x ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$yy' + xx' = yx + (-yx) = 0$$

ve böylece

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) = 0,$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın t ye göre integrali alınır

$$x^2 + y^2 = c, (c=1)$$

olur. Diğer yandan $\sin t = y(t)$, $\cos t = x(t)$ olmak üzere $|\sin t|^2 + |\cos t|^2 = 1$, elde edilir.

Sinüs fonksiyonu aynı zamanda

$$\sin^{-1} t = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds, 0 \leq t \leq 1, \\ -\int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds, -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabilir. (Wang, 2010).

Aşağıda sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının bazı temel özellikleri verilmiştir.

1) Pisagor trigonometrik eşitliği

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

2) Türev formülleri

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$(\sin x)'' + \sin x = 0,$$

$$(\cos x)'' + \cos x = 0.$$

3) Simetrik ve periyodik özelliği

a) $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos(x).$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

c) $\sin(2\pi - x) = -\sin x, \cos(2\pi + x) = \cos x.$

4) İntegrasyon formülleri

$$x = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad |x| = \int_{\cos x}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Tanım 3.1.1. (Öklid Sayısı)

$$\pi = 2 \sin^{-1}(1) = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds,$$

sayısına Öklid Sayısı denir. Bu $x^2 + y^2 = 1$ dairesinin alanıdır (Wang, 2010).

$p > 1$ olmak üzere genelleştirilmiş sinüs fonksiyonu $S_p(x)$ ile genelleştirilmiş cosinüs fonksiyonu $C_p(x)$ ile gösterilir. Bu fonksiyonlar için yukarıdaki (4) integrasyon formülleri

$$x = \int_0^{S_p(x)} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad |x| = \int_{C_p(x)}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

biçimindedir (Chen,2008). $p=2$ olduğu zaman bu formüller klasik sinüs ve cosinüs formüllerine dönüşür.

Benzer yaklaşımla birçok trigonometrik ifade elde edilebilir.

$\phi(\varepsilon) = |\varepsilon|^{p-2} \varepsilon, p \in \mathbb{R}^+,$ kuvvet fonksiyonu ve $\sin_p(t) = y(t), \cos_p(t) = x(t),$ alınsın.

Burada $x(t)$ ve $y(t)$

$$\begin{cases} y' = \phi(x), & y(0) = 0 \\ x' = -\phi(y), & x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümüdür. (3.1.2) ifadesinde ilk denklem $\phi(y)$ ile, ikinci denklem $\phi(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(y)y' &= \phi(y)\phi(x), \\ \phi(x)x' &= -\phi(x)\phi(y), \end{aligned}$$

ve

$$\phi(y)y' + \phi(x)x' = 0,$$

bulunur ki burada

$$\phi(x) = |x|^{p-2} x, \quad \phi(y) = |y|^{p-2} y,$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} |y|^{p-2} yy' + |x|^{p-2} xx' &= 0 \\ |y|^{p-1} y' + |x|^{p-1} x' &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{p} y^p + \frac{1}{p} x^p \right\} &= 0 \\ |x(t)|^p + |y(t)|^p &= 1, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

denklemin genelleştirilmiş pisagor eşitliği denir ve $\sin_p(t) = y(t)$ ve $\cos_p(t) = x(t)$ olduğundan

$$|\sin_p(t)|^p + |\cos_p(t)|^p = 1,$$

şeklinde yazılır. (3.1.2) sistemi aşağıdaki ikinci mertebeden başlangıç koşullu diferansiyel denkleminde denktir. Diğer yandan

$$\begin{cases} \phi^{-1}(y') = x \Rightarrow [\phi^{-1}(y')] = x' = -\phi(y), \\ \phi^{-1}(x') = -y \Rightarrow [\phi^{-1}(y')] = -y' = -\phi(x), \end{cases}$$

$$[\phi^{-1}(y')] + \phi(y) = 0,$$

$$[\phi^{-1}(x')] + \phi(x) = 0,$$

olur. Başlangıç koşulları ise

$$y'(0) = \phi(x(0)), \quad x(0) = 1,$$

$$y'(0) = \phi(1) = 1,$$

ve

$$x'(0) = -\phi(y(0)), \quad y(0) = 1,$$

$$x'(0) = -\phi(0) = 0,$$

olmak üzere

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $p = 2$ olması durumunda benzer şekilde ters sinüs fonksiyonu ise

$$\sin_p^{-1} t = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[p]{1-s^p}} ds, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt[p]{1-s^p}} ds, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

şeklinde olur (Wang,2010).

Tanım 3.1.2 (Genelleştirilmiş Pi) Genelleştirilmiş Pi sayısı

$$\hat{\pi}_p = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p]{1-s^p}} ds, \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ise $|x|^p + |y|^p = 1$ şeklinde gösterilen bölgenin alanıdır. (3.1.4)

de $p = 2$ alınırsa bilinen Pi sayısı elde edilir (Wang,2010).

Tanım 3.1.3. (Genelleştirilmiş Sinüs Fonksiyonu)

$$\begin{aligned} -(S_p^{(p-1)})' &= (p-1)S_p^{(p-1)} \\ S_p(0) &= 0, S_p'(0) = 1, \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin $S_p(x)$ çözüm fonksiyonuna, genelleştirilmiş sinüs fonksiyonu denir (Wang 2014).

Lemma 3.1.1. Herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $x \neq (k + \frac{1}{2}\hat{\pi}_p)$ olsun. O halde

i. $S_p' \neq 0$ olmak üzere

$$(S_p')' = -\left|\frac{S_p}{S_p'}\right|^{p-2} S_p,$$

ii. $(S_p S_p^{(p-1)})' = |S_p'|^p - (p-1)|S_p|^p = 1 - p|S_p|^p = (1-p) + p|S_p'|^p,$

iii. $(|S_p'|^p - |S_p|^p)' = -2pS_p^{(p-1)}S_p,$

dir (Chen,2009).

Tanım 3.1.4. (Prüfer Tipi Dönüşümler) Bir boyutlu p -Laplacian denklemi

$$-(y^{(p-1)})' = (p-1)(\lambda\omega(x) - q(x))y^{(p-1)}, \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p = 2$ ve $\omega(x) = 1$ alınırsa

$$-y'' + qy = \lambda y,$$

klasik Sturm-Liouville denklemi elde edilir. (3.1.5) de $\omega(x) = 1$ alınırsa, genelleştirilmiş Prüfer dönüşümü

$$y(x) = \rho(x)S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\theta(x)),$$

$$y'(x) = \lambda^{\frac{1}{p}}\rho(x)S_p'(\lambda^{\frac{1}{p}}\theta(x))$$

$\omega(x) \neq 1$ alınırsa

$$y(x) = R(x)S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)),$$

$$y'(x) = R(x)S_p'(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)),$$

şeklinde tanımlanır (Wang, 2010).

Lemma 3.1.2. Yukarıda verilen Prüfer dönüşümleri dikkate alınırsa

$$\text{i. } \theta'(x) = 1 - \frac{q(x)}{\lambda} \left| S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\theta(x)) \right|^p,$$

$$\text{ii. } \varphi'(x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \left[\left| S_p'(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)) \right|^p + (\lambda\omega(x) - q(x)) \left| S_p(\lambda^{\frac{1}{p}}\varphi(x)) \right|^p \right],$$

olur (Wang, 2010).

İspat :

i. $\omega(x) = 1$ alınırsa

$$\frac{y'}{y} = \lambda^{\frac{1}{p}} \frac{S_p'}{S_p},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y} \right)' &= \lambda^{\frac{1}{p}} \left(\frac{S_p'' \lambda^{\frac{1}{p}} \theta' S_p - S_p' \lambda^{\frac{1}{p}}}{S_p^2} \right) = \lambda^{\frac{1}{p}} \left(\frac{S_p'' S_p \lambda^{\frac{1}{p}} \theta' - (S_p')^2 \lambda^{\frac{1}{p}} \theta'}{S_p^2} \right) \\ &= \lambda^{\frac{2}{p}} \left[\theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} \right) - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^2 = \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y} \right)' &= \frac{y'' y - (y')^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y} \right)^2, \\ \frac{y''}{y} &= \left(\frac{y'}{y} \right)' + \left(\frac{y'}{y} \right)^2, \end{aligned}$$

dir. Yukarıda bulunan ifadeler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{y''}{y} = \lambda^{\frac{2}{p}} \left\{ \left(\theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} \right) - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right\}, \quad (3.1.6)$$

bulunur. Bu ifadeler daha sonra kullanılacaktır. Şimdi bir boyutlu p -Laplacian denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -(y^{(p-1)})' &= (p-1)(\lambda - q(x))y^{(p-1)}, \\ (p-1)y^{(p-2)}y'' &= -(p-1)(\lambda - q(x))y^{(p-1)}, \\ \left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} \frac{y''}{y} &= -(\lambda - q(x)), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} = \lambda^{\frac{1}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2}, \quad (3.1.8)$$

şeklindedir. (3.1.6) ve (3.1.8), (3.1.7)' de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1}{p}(p-2)} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} \left[\lambda^{\frac{2}{p}} \theta' \left(\frac{S_p''}{S_p} \right) - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 + \lambda^{\frac{2}{p}} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right] &= -(\lambda - q(x)) \\ \lambda \theta' \left[\frac{(S_p'') (S_p')^{p-2}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)), \end{aligned}$$

olur. $(S_p'') (S_p')^{p-2} = -S_p^{p-1}$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \lambda \theta' \left[-\frac{S_p^{p-1}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ -\lambda \theta' \left[1 + \frac{(S_p')^p}{(S_p)^p} \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ -\lambda \theta' \left[\frac{1}{(S_p)^p} \right] + \lambda \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p &= -(\lambda - q(x)) \\ \lambda \theta' &= (\lambda - q(x))(S_p)^p + \lambda (S_p')^p \\ \lambda \theta' &= \lambda \left[(S_p)^p + (S_p')^p \right] - q(x)(S_p)^p \\ \theta' &= 1 - \frac{q}{\lambda} S_p^p, \end{aligned}$$

ii. $\omega(x) \neq 1$ alınır

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'_p}{S_p}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y} \right)' &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \phi' S_p'' S_p - \lambda^{\frac{1}{2}} \phi' S_p' S_p'}{S_p^2} \\ &= \lambda^{\frac{1}{p}} \left[\phi' \frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^2 = \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2$$

ve buradan

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y} \right)' + \left(\frac{y'}{y} \right)^2,$$

olur. Yukarıda bulunan ifadeler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{y''}{y} = \lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \phi' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right\}, \quad (3.1.9)$$

olur. Bu ifadeler daha sonra kullanılacaktır. Diğer taraftan $\omega(x) \neq 1$ olmak üzere bir boyutlu p – Laplacian denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -(y^{(p-1)})' &= (p-1)(\lambda\omega - q(x))y^{(p-1)} \\ (p-1)y^{(p-2)}y'' &= -(p-1)(\lambda\omega - q(x))y^{(p-1)} \\ y^{(p-2)}y'' &= -(\lambda\omega - q(x))y^{(p-1)} \\ \left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} \frac{y''}{y} &= -(\lambda\omega - q(x)), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^{p-2} = \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2}$$

şeklindedir. (3.1.9) ve (3.1.11) ifadeleri (3.1.10) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} \left[\lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \varphi' \left(\frac{S_p''}{S_p} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right) + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^2 \right\} \right] = -(\lambda\omega - q(x)) \\ & \lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' \left[\frac{S_p''}{S_p} \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^{p-2} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p = -(\lambda\omega - q(x)) \\ & \lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' \left[\frac{(S_p'')(S_p')^{p-2}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p = -(\lambda\omega - q(x)), \end{aligned}$$

olur. $(S_p'')(S_p')^{p-2} = -S_p^{p-1}$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} & \lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' \left[\frac{-S_p^{p-1}}{(S_p)^{p-1}} - \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p = -(\lambda\omega - q(x)) \\ & -\lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' \left[1 + \frac{1}{(S_p)^p} \right] + \left(\frac{S_p'}{S_p} \right)^p = -(\lambda\omega - q(x)) \\ & \lambda^{\frac{1}{p}} \varphi' = (\lambda\omega - q(x))(S_p)^p + (S_p')^p, \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\varphi' = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \left[(\lambda\omega(x) - q(x)) \left| S_p (\lambda^{\frac{1}{p}} \varphi(x)) \right|^p + \left| S_p' (\lambda^{\frac{1}{p}} \varphi(x)) \right|^p \right],$$

elde edilir.

Tanım 3.1.5. (Beta ve Gamma Fonksiyonları) Beta ve Gamma fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \\ \Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iki fonksiyon arasında

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

bağıntısı vardır (Balcı 2009).

Teorem 3.1.1. Herhangi $p > 1$ için

$$\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{-1}{p}} dt = \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)},$$

dir (Chen, 2009).

İspat:

$$x = t^p \text{ alınsın } dx = pt^{p-1} dt \Rightarrow \frac{1}{p} t^{1-p} dx = dt,$$

olur. Bu ifadeler, beta ve gamma fonksiyonlarının tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t^p)^{\frac{-1}{p}} dt &= \frac{1}{p} \int_0^1 x^{\frac{1-p}{p}} (1-x)^{\frac{-1}{p}} dx = \frac{1}{p} \int_0^1 x^{\frac{1}{p}-1} (1-x)^{\frac{p-1}{p}-1} dx, \\ &= \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{p-1}{p}\right) = \frac{1}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}\right)} = \frac{1}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)}{\Gamma(1)}, \end{aligned}$$

$$\Gamma(1)=1 \text{ ve } \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{ olduğundan } \alpha = \frac{1}{p} \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{-1}{p}} dt = \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)},$$

bulunur.

Tanım 3.1.6. Herhangi bir $p > 1$ için $S_p(x)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

a) Herhangi $x \in \left[-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right]$ için $x = \int_0^{S_p(x)} (1-|t|^p)^{\frac{-1}{p}} dt,$

b) Bütün $x \in \mathbb{R}$, bazı $t \in \left[-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right]$ ve herhangi $k \in \mathbb{Z}$ için $x = t + k\pi_p$ olup

$S_p(t + k\pi_p) = (-1)^k S_p(t)$, dir (Chen, 2008).

Teorem 3.1.2. Her $x \in \mathbb{R}$ ve herhangi $m \in \mathbb{Z}$ için

$$S_p(x + m\pi_p) = (-1)^m S_p(x),$$

dir (Chen, 2009).

Lemma 3.1.3

i. $\left(f^{(p)}\right)' = p|f|^{p-1} f'$,

ii. $\left(|f|^p\right)' = pf^{(p-1)} f'$,

şeklindedir (Chen, 2009).

Lemma 3.1.4.

$n \rightarrow \infty$ için $\rho(x)$ fonksiyonu $[1, a]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\int_1^a \rho(x) \left\{ S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda_n)) - \frac{1}{p} \right\} dx = o(1)$$

dir (Wang, 2011).

Teorem 3.1.3. Her $x \in \mathbb{R}$ için

a) $S_p(-x) = -S_p(x)$,

b) $S_p(k\pi_p - x) = (-1)^{k+1} S_p(x)$,

şeklindedir (Wang, 2010).

4. BESSEL PROBLEMİ İÇİN TERS NODAL PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

$$-y'' = (\lambda - \omega(x))y, 1 \leq x \leq a \quad (4.1)$$

$$y(1) = y(a) = 0 \quad (4.2)$$

problemi göz önüne alınsın. Burada $\omega(x) = \omega_0(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $p > 1$, $a \neq 0$, $a > 1$ ve $\omega(x) \in L^2[1, a]$ dir. Bu tür problemler literatürde p -Laplacian Bessel problemi olarak bilinir. (4.1) - (4.2) problemi için ters nodal problemle ilgili pek çok sonuç mevcuttur.

Bu bölümde amaç sonlu ve regüler bir aralık üzerinde tanımlı Bessel problemi için λ_n özdeğerleri, x_j^n özdeğerlerin sıfırlarını, l_j^n nodal uzunlukları (ardışık iki sıfır arasındaki mesafe) ve bu uzunluklar yardımıyla $\omega(x)$ potansiyel fonksiyonun varlığını bulmaktır. Burada ters nodal problemle kastedilen; nodal noktalar yardımıyla potansiyel fonksiyonu bulma işlemidir.

Lemma 4.1.

Prüfer dönüşümü

$$y(x) = R(x) \sin(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) \quad (4.3)$$

$$y'(x) = (l+1) \lambda^{1/2} R(x) \cos(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$\theta'(x, \lambda) = (l+1) \cos^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{(\omega(x) - \lambda) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)}$$

dir.

İspat :

(4.3) – (4.4) denklemleri birbirine oranlanırsa

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (l+1) \lambda^{1/2} \frac{\cos(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}{\sin(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)^2 = (l+1)^2 \lambda \frac{\cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} \quad (4.5)$$

olur. Şimdi Prüfer dönüşümü yardımıyla $\theta(x, \lambda)$ fonksiyonu bulunacaktır.

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'}{y}\right)' &= \frac{(l+1)\lambda^{1/2}\lambda^{1/2}\theta'(x, \lambda)(-\sin(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))\sin(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda)))}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} - \\ &\quad \frac{\lambda^{1/2}\theta'(x, \lambda)\cos(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))(l+1)\lambda^{1/2}\cos(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} \\ &= \frac{-(l+1)\lambda\theta'(x, \lambda)[\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda)) + \cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))]}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} \\ &= \frac{-(l+1)\lambda\theta'(x, \lambda)}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad (4.7)$$

olduğundan (4.3) - (4.4) ifadeleri (4.5)'te yerine yazılırsa

$$\frac{y''}{y} = \frac{-(l+1)\lambda\theta'(x, \lambda)}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} + (l+1)^2 \lambda \frac{\cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))} \quad (4.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.1) den

$$\frac{y''}{y} = \omega(x) - \lambda$$

elde edilir. Böylece

$$\omega(x) - \lambda = \frac{(l+1)^2 \lambda \cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda)) - (l+1)\lambda\theta'(x, \lambda)}{\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta'(x, \lambda) &= \frac{(l+1)^2 \lambda \cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda)) - (\omega(x) - \lambda)\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)} \\ &= (l+1)\cos^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda)) - \frac{(\omega(x) - \lambda)\sin^2(\lambda^{1/2}\theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1. (4.1) - (4.2) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{n\pi_2}{\tilde{l}(a-1)} + \frac{(l+1)^{-1}}{2n\pi_2} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

şeklinde olup burada $(l+1)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(l+1)^2}\right) = \tilde{l}$ dir.

İspat:

Bu aşamada (4.1) - (4.2) probleminin λ_n özdeğerlerini bulmak için (4.9) denkleminin 1'den a ya kadar integrali alınır

$$\begin{aligned} \theta(a, \lambda) - \theta(1, \lambda) &= \int_1^a (l+1) \cos^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx - \int_1^a \frac{(\omega(x) - \lambda) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)} dx \\ &= (l+1) \int_1^a \left(\cos^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx + \frac{1}{(l+1)} \int_1^a \left(\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx + \\ &\quad - \frac{1}{(l+1)} \int_1^a \left(\omega(x) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\theta(a, \lambda) = \frac{n\pi_2}{\lambda_n^{1/2}}$ ve $\theta(1, \lambda) = 0$ alınır

$$\frac{n\pi_2}{\lambda_n^{1/2}} = \frac{(l+1)(a-1)}{2} + \frac{(l+1)(a-1)}{2(l+1)^2} - \frac{1}{2\lambda(l+1)} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

ve $(l+1)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(l+1)^2}\right) = \tilde{l}$ olarak alınır

$$\frac{n\pi_2}{\lambda_n^{1/2}} = \tilde{l}(a-1) - \frac{1}{2\lambda(l+1)} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{n\pi_2}{\tilde{l}(a-1)} + \frac{(l+1)^{-1}}{2n\pi_2} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.10)$$

elde edilir.

Teorem 4.2. (4.1) - (4.2) probleminin nodal noktaları

$$x_j^n = 1 + \frac{j\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{j\tilde{l}^2(a-1)^2}{2(l+1)^2 n^3 \pi^2} \int_1^a \omega(x) dx + \int_1^{x_j^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx +$$

$$- \frac{1}{(l+1)^2} \int_1^{x_j^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

şeklindedir.

İspat :

(4.1) - (4.2) probleminin nodal noktalarını hesaplamak için (4.9) denkleminin 1 den x_j^n e kadar integrali alınır. Buna göre;

$$\theta'(x) = (l+1) \cos^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{(\omega(x) - \lambda) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)}$$

$$\theta(x_j^n, \lambda) - \theta(1, \lambda) = (l+1) \int_1^{x_j^n} (1 - \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))) dx - \frac{1}{(l+1)} \int_1^{x_j^n} \left(\frac{\omega(x)}{\lambda_n} - 1\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx$$

$$\frac{j\pi_2}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}} = (l+1)(x_j^n - 1) - (l+1) \int_1^{x_j^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + \frac{1}{(l+1)} \int_1^{x_j^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$x_j^n = 1 + \frac{j\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{j\tilde{l}^2(a-1)^2}{2(l+1)^2 n^3 \pi^2} \int_1^a \omega(x) dx + \int_1^{x_j^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx +$$

$$- \frac{1}{(l+1)^2} \int_1^{x_j^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (4.11)$$

elde edilir.

Teorem 4.3. (4.1) - (4.2) probleminin nodal uzunlukları

$$l_j^n = \frac{\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{\tilde{l}^2(a-1)^2}{2(l+1)^2 n^3 \pi_2^2} \int_1^a \omega(x) dx + \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx +$$

$$-\frac{1}{(l+1)^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

şeklindedir.

İspat:

(4.1) - (4.2) probleminin nodal uzunlukları için (4.9) denkleminde x_j^n den x_{j+1}^n e kadar x e göre integral alınırsa

$$\theta'(x) = (l+1) \cos^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{(\omega(x) - \lambda) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))}{\lambda(l+1)}$$

$$\theta(x_{j+1}^n, \lambda) - \theta(x_j^n, \lambda) = (l+1) \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} (1 - \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda))) dx - \frac{1}{(l+1)} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(\frac{\omega(x)}{\lambda_n} - 1\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx$$

$$\frac{\pi_2}{\lambda_n^{1/2}} = (l+1)(x_{j+1}^n - x_j^n) - (l+1) \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx - \frac{1}{(l+1)} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(\frac{\omega(x)}{\lambda_n} - 1\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} l_j^n &= \frac{\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{\tilde{l}^2(a-1)^2}{2(l+1)^2 n^3 \pi_2^2} \int_1^a \omega(x) dx + \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + \\ &\quad - \frac{1}{(l+1)^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir.

4.1. Potansiyel Fonksiyonun Bulunması

(4.1) - (4.2) probleminde $\omega(x)$ potansiyel fonksiyonunu bulmak için l_j^n nodal uzunlukları denkleminde $\omega(x)$ fonksiyonu gerekli işlemler yapılarak yalnız bırakılır.

$$l_j^n = \frac{\pi_2}{(l+1)\lambda_n^{1/2}} + \frac{1}{2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} dx - \frac{1}{2(l+1)^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} dx + \frac{1}{2(l+1)^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{\omega(x)}{\lambda_n} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) dx - \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \frac{1}{2} dx - \frac{1}{(l+1)^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) (\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2}) dx \\
& \frac{l_j^n \lambda_n^{\frac{1}{2}+1} 2(l+1)^2}{\pi_2} = \lambda_n 2(l+1) + \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}+1} (l+1)^2}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} dx - \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}+1}}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} dx + \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}+1}}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \omega(x) dx + \\
& + \frac{2\lambda_n^{\frac{1}{2}+1} (l+1)^2}{\pi_2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} (\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2}) dx - \frac{2\lambda_n^{\frac{1}{2}+1}}{\pi_2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) (\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2}) dx
\end{aligned}$$

olur. Burada $n \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}+1}}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \omega(x) dx \rightarrow \omega(x) \\
& \frac{2\lambda_n^{\frac{1}{2}+1} (l+1)^2}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} (\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2}) dx \rightarrow 0 \\
& \frac{2\lambda_n^{\frac{1}{2}+1}}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\omega(x)}{\lambda_n}\right) (\sin^2(\lambda^{1/2} \theta(x, \lambda)) - \frac{1}{2}) dx \rightarrow 0
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\omega(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\lambda_n (l+1) \left(\frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}} l}{\pi_2} l_j^n - 1 \right) \quad (4.13)$$

bulunur. Böylece (4.1) - (4.2) denkleminin potansiyel fonksiyonu elde edilir.

5. P- LAPLACIAN BESSEL PROBLEMİ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

$$-(y^{(p-1)})' = (p-1)(\lambda - \omega(x))y^{(p-1)}, \quad 1 \leq x \leq a \quad (5.1)$$

$$y(1) = y(a) = 0 \quad (5.2)$$

problemi gözönüne alınsın. Burada $p > 1$, $a \neq 0$ ve $\omega(x) \in L^2[1, a]$ dir. Bu bölümde genel anlamda p -Laplacian Bessel problemi için sonlu ve regüler bir aralık üzerinde λ_n özdeğerleri, x_j^n özdeğerlerin sıfırlarını, l_j^n nodal uzunlukları (ardışık iki sıfır arasındaki mesafe) ve bu uzunluklar yardımıyla $\omega(x)$ potansiyel fonksiyonun varlığını gösterilecektir.

Lemma 5.1. Prüfer dönüşümü

$$y(x) = R(x)S_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))$$

$$y'(x) = (l+1)\lambda^{1/p}R(x)S'_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))$$

olmak üzere

$$\theta'(x, \lambda) = (l+1) + \left[-(l+1) + (l+1)^{(1-p)} - \frac{(l+1)^{(1-p)}}{\lambda} \omega(x) \right] S_p^p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))$$

dir.

İspat :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (l+1)\lambda^{1/p} \frac{S'_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))}$$

Prüfer dönüşümü bulunur. Bu ifadenin karesi alınırsa

$$\left(\frac{y'}{y} \right)^2 = (l+1)^2 \lambda^{2/p} \left(\frac{S'_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))} \right)^2 \quad (5.3)$$

elde edilir.

$$\left(\frac{y'}{y} \right)' = (l+1)\lambda^{2/p}\theta'(x, \lambda) \left[\frac{S''_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))} - \left(\frac{S'_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p}\theta(x, \lambda))} \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

bulunur.

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \text{ ise } \frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \left(\frac{y'}{y}\right)' \quad (5.5)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} -\left(y'^{(p-1)}\right)' &= (p-1)(\lambda - \omega(x))y^{(p-1)} \\ -\left(\frac{y'}{y}\right)^{(p-2)} \frac{y''}{y} &= (\lambda - \omega(x)) \\ -\left(\frac{y'}{y}\right)^{(p-2)} \left[\left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \right] &= (\lambda - \omega(x)) \end{aligned} \quad (5.6)$$

bulunur. (5.3) ve (5.4) ifadeleri (5.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \omega(x) - \lambda &= (l+1)^{(p-2)} \lambda^{(p-2)/p} \left(\frac{S'_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))} \right)^{(p-2)} \\ &\left[(l+1) \lambda^{2/p} \theta'(x, \lambda) \left[\frac{S''_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))} - \left(\frac{S'_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))} \right)^2 \right] + (l+1)^2 \lambda^{2/p} \left(\frac{S'_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))}{S_p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda))} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\theta'(x, \lambda) = (l+1) + \left[-(l+1) + (l+1)^{(1-p)} - \frac{(l+1)^{(1-p)}}{\lambda} \omega(x) \right] S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) \quad (5.7)$$

bulunur.

Teorem 5.1. (5.1) - (5.2) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n^{1/p} = \frac{n\pi_p}{\tilde{l}(a-1)} + \frac{(l+1)^{(1-p)} \tilde{l}^{p-2} (a-1)^{p-2}}{p(n\pi_p)^{p-1}} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

şeklinde olup burada $(l+1) \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p(l+1)^p} \right) = \tilde{l}$ dir.

İspat :

Burada verilen ispat Teorem 4.1 in ispatına benzer olup

$$\frac{1}{\lambda_n^{1/p}} = \frac{\tilde{l}(a-1)}{n\pi_p} - \frac{(l+1)^{(1-p)}}{p\lambda_n n\pi_p} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \quad (5.8)$$

$$\lambda_n^{1/p} = \frac{n\pi_p}{\tilde{l}(a-1)} + \frac{(l+1)^{(1-p)} \tilde{l}^{p-2} (a-1)^{p-2}}{p(n\pi_p)^{p-1}} \int_1^a \omega(x) dx + O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right) \quad (5.9)$$

olduğu kolayca gözükebilir.

Teorem 5.2. (5.1) - (5.2) probleminin nodal noktaları $n \rightarrow \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_j^n &= 1 + \frac{j(a-1)\tilde{l}}{(l+1)n} - \frac{j\tilde{l}^p (a-1)^p}{p(l+1)^p n^{p+1} \pi_p^p} \int_1^a \omega(x) dx \\ &+ \int_1^{x_j^n} S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx - \frac{1}{(l+1)^p} \int_1^{x_j^n} \left(1 - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p \omega(x)}{(n\pi_p)^p}\right) S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{j}{n^{p+1}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde olur.

İspat :

Bu teoremin ispatı Teorem 4.2 deki ispata benzer olup

$$\begin{aligned} x_j^n &= 1 + \frac{j(a-1)\tilde{l}}{(l+1)n} - \frac{j\tilde{l}^p (a-1)^p}{p(l+1)^p n^{p+1} \pi_p^p} \int_1^a \omega(x) dx \\ &+ \int_1^{x_j^n} S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx - \frac{1}{(l+1)^p} \int_1^{x_j^n} \left(1 - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p \omega(x)}{(n\pi_p)^p}\right) S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{j}{n^{p+1}}\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.3. (5.1) - (5.2) probleminin nodal uzunlukları

$$\begin{aligned} l_j^n &= \frac{\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p}{p(l+1)^p n^{p+1} \pi_p^p} \int_1^a \omega(x) dx \\ &+ \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx - \frac{1}{(l+1)^p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p \omega(x)}{(n\pi_p)^p}\right) S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat :

Burada verilecek ispat Teorem 4.3. deki ispata benzer olup nodal uzunluklar

$$l_j^n = \frac{\tilde{l}(a-1)}{n(l+1)} - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p}{p(l+1)^p n^{p+1} \pi_p^p} \int_1^a \omega(x) dx$$

$$+ \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx - \frac{1}{(l+1)^p} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \left(1 - \frac{\tilde{l}^p (a-1)^p \omega(x)}{(n\pi_p)^p}\right) S_p^p(\lambda^{1/p} \theta(x, \lambda)) dx + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \quad (5.11)$$

şeklinde bulunur.

5.1. p-Laplacian Bessel Probleminin Potansiyel Fonksiyonun Bulunması

Teorem 5.4 . (5.1) - (5.2) probleminin potansiyel fonksiyonu

$$\omega(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} p \lambda_n (l+1)^{p-1} \left(\frac{\tilde{l} \lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} l_j^n - 1 \right),$$

şeklinde olup $j = j_n(x) = \max \{j : x_j^n < x\}$ dir.

İspat:

Burada verilecek ispat dördüncü bölümdeki potansiyel fonksiyonun bulunması ile benzer olup potansiyel fonksiyon $j = j_n(x) = \max \{j : x_j^n < x\}$ olmak üzere

$$\omega(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} p \lambda_n (l+1)^{p-1} \left(\frac{\tilde{l} \lambda_n^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} l_j^n - 1 \right)$$

şeklindedir.

6.SONUÇ

Klasik anlamda Sturm-Liouville problemi için ters problemin çözümü ile ilgili pek çok sonuç olmasına rağmen ters nodal problemin çözümü sonuçlara kolay ulaşılması bakımından daha ilgi çekicidir.

Bu çalışmada sonlu bir aralıkta regüler olan Bessel denklemi için ters nodal problem çözülüp, özellikle son kısımda bir boyutlu p -Laplacian problemin ters çözümü incelenmiştir. Özellikle nodal noktalar kullanılarak denklemin katsayılarından olan potansiyel fonksiyonun varlığı incelenmiştir.

Mevcut çalışma sonlu bir aralık üzerinde olup, sınır şartlarında özdeğer parametresinin olması ve problemin singüler olması durumunda benzer sonuçların elde edilmesi önümüzdeki zamanlarda ulaşmak istediğimiz hedeflerdir.

KAYNAKLAR

- [1] **Ambartsumyan, V. A.**, 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift für Physik, **53**, 690-695.
- [2] **Balcı, M.**, 2011. Reel Analiz, Balcı Yayınları.
- [3] **Bayraktar, M.**, 2006. Fonksiyonel Analiz, Fersa Matbaacılık.
- [4] **Borg, G.**, 1946. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Mathematica, **78**, 1-96.
- [5] **Browne, P. J. and Sleeman, B. D.**, 1996. Inverse nodal problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, Inverse Problems, **12**, 377-381.
- [6] **Chadan, K., Colton, D., Paivarinta, L. and Rundell, W.**, 1997. An introduction to inverse Scattering and inverse spectral problems, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] **Chen, Y. T., Cheng, Y. H., Law, C. K. and Tsay, J.**, 2002. L^1 convergence of the reconstruction formula for the potential function, Proceedings of the American Mathematical Society, **130**, 8 2319–2324.
- [8] **Chen, H.Y.**, 2009 On generalized trigonometric functions. Master of Science, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan.
- [9] **Cheng, Y.H., Law, C.K., Lian, W.C., Wang, W.C.**, 2015 An inverse nodal problem and Ambarzumyan problem for the periodic p-Laplacian operator with integrable potentials. Taiwan. J. Math. **19**(4), 1305–1316.
- [10] **Freiling, G. and Yurko, V.A.**, 2001. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Publishers.
- [11] **Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M.**, 1951. On the determination of a differential equation from its spectral function., Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya, **15**, 4 309-360; 1955. translated in American Mathematical Society Translate, **1**, 253.
- [12] **Gulsen, T., Yilmaz, E., Koyunbakan, H.**, 2017. Inverse nodal problem for p-Laplacian Dirac system. Math. Methods Appl. Sci. **40**(7), 2329–2335.

- [13] **Hald, O. H.**, 1978. The inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials, *Acta Mathematica*, **141**, 262-291.
- [14] **Hald, O. H. and McLaughlin, J. R.**, 1989. Solutions of inverse nodal problems, *Inverse problems*, **5**, 307-347.
- [15] **Hald, O. H. and McLaughlin, J. R.**, 1998. Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes, *Inverse problems*, **14**, 2 245-273.
- [16] **Koyunbakan, H. and Yılmaz, E.** 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the Diffusion equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 127-130.
- [17] **Koyunbakan, H.**, 2014. Inverse nodal problem for p-Laplacian energy-dependent Sturm–Liouville equation. *Bound. Value Probl.* 2013(1), 272 (2013) (Erratum: Inverse nodal problem for p-Laplacian energy-dependent Sturm–Liouville equation. *Bound. Value Probl.* **2014**(1), 222).
- [18] **Law, C. K., Shen, C. L. and Yang, C. F.**, 1999. The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems*, **15**, 1 253-263 (Erratum 2001, **17**, 361-364).
- [19] **Levinson, N.**, 1949. The Inverse Sturm-Liouville Problem, *Mat. Tidskr. B.*, **25**, 25-30.
- [20] **Levitan, B. M.**, 1978. On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, **42**, 1 185-199.
- [21] **Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.**, 1975. *Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [22] **Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J.**, 1968. *Elements of Functional Analysis*, Gordon and Breach, Science Publishers.
- [23] **McLeod, J.B.**, 1961. The distribution of the eigenvalues for the hydrogen atom and similar cases. *Proc. Lond. Math. Soc.* **3**(1), 139–158.
- [24] **Şuhubi, E. S.**, 2001. *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [25] **Uluçay, C.**, 1978. *Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri*, Türkiye Cumhuriyeti Karadeniz Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Trabzon.
- [26] **Wang, W.C., Cheng, Y.H.**, 2014. An inverse problem related to a half-linear eigenvalue problem. *Bound. Value Probl.* **2014**(1), 65.

- [27] **Wang, W.C.**, 2010 Direct and inverse problems for one dimensional p -Laplacian operators. PhD Thesis, National Sun Yat-sen University.
- [28] **Yilmaz, E., Koyunbakan, H.**, 2014. On the high order Lipschitz stability of inverse nodal problem for string equation. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. **21**, 79–88.



ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Tunceli’de doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi burada tamamladım. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Erzincan Fen – Edebiyat Fakültesini kazandım aynı bölümden 2008’ de mezun oldum. 2009 yılında Dicle Üniversitesinde Tezsiz Yüksek Lisans, 2013 yılında Erzincan Üniversitesinde Tezli Yüksek Lisans yaptım. 2014 yılında Fırat Üniversitesinde doktora öğrenimine başladım.2017’de Erzincan Üniversitesi Hukuk Fakültesini kazandım halen devam etmekteyim. Evli ve iki çocuk babasıyım.

