

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POTANSİYEL TEORİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma BULUT

(08121112)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12.07.2010

TEMMUZ - 2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POTANSİYEL TEORİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma BULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14.06.2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 08.07.2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ

: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

TEMMUZ - 2010

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI' ya teşekkürlerimi sunarım.

Fatma BULUT
ELAZIĞ - 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR.....	2
3. POTANSİYEL TEORİYE GİRİŞ.....	5
3.1 Basit Tabakanın Newton Potansiyelleri.....	5
3.2 Çift Tabakanın Newton Potansiyelleri.....	11
3.3 Basit ve Çift Tabakanın Logaritmik Potansiyelleri.....	16
4. POTANSİYEL TEORİNİN ESAS DENKLEMLERİ.....	20
4.1 Laplace Diferansiyel Denklemi.....	20
4.2 Poisson Denklemi.....	22
5. GREEN FORMÜLLERİ HARMONİK FONKSİYONLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ.....	25
5.1 Potansiyellerin Sonsuzluktaki Durumu Süreksizlik Özellikleri.....	30
6. LOGARİTMİK POTANSİYEL İÇİN TERS PROBLEM.....	38
6.1 $ \rho(r) \leq L$ İçin Ters Potansiyel Probleminin Çözümünün Varlığı Şartları.....	41
7. SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde okuyucuya yardımcı olacak temel tanımlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde potansiyel teoriye giriş başlığı altında basit tabakanın Newton potansiyelleri, çift tabakanın Newton potansiyelleri, basit ve çift tabakanın logaritmik potansiyelleri konularına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde potansiyel teorisinin esas denklemleri başlığı altında Laplace diferansiyel denklemi ve Poisson denklemine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Green formülleri ile harmonik fonksiyonların genel özellikleri ve potansiyellerin sonsuzluktaki durumu ve süreksizlik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde logaritmik potansiyel için ters problem ve ters problemin çözümünün aprior değerlendirilmesi yer almıştır. Ayrıca ters logaritmik potansiyel problemin bir çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kütle, Yoğunluk, Newton kuvveti, Kütle yoğunluğu, Çizgisel yoğunluk, moment, Gravitasyon, Harmonik, Potansiyel.

SUMMARY

Potential Theory And Applications

This study consist of five chapters.

In the first chapter; are given some fundemental definitions.

In the second chapter; under headline entry of potential theory entry are given newton potential of simply layer , newton potential of double layer ,logarithmic potential of simply and double layers.

In the third chapter; under headline foundation eqoations of potential theory are given laplace differantial equation and poisson equation.

In the fourth chapter; are given laplace green equations with general properties of harmonic function and infinity state of potential which transitory properties, finally in the fifth chapter; invers problem to logarithmic potential and aprory evaluation of solution of invers problem. In addition a description of necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the inverse logarithmic potential problem subject to constraints on the source density modulus has been obtained.

Key Words : Mass, Density, Newton force, Mass of density, Line of density, Moment, Gravitation, Harmonic, Potential.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1	P noktasının xyz - eksenlerinin pozitif yönleriyle oluşturduğu açılar	2
Şekil 2.2	P noktasının küresel koordinatları	3
Şekil 3.1	F ve F_1 tabakası üzerindeki P noktasının çekici ve itici kuvvetleri	11
Şekil 3.2	x eksenine ile r yarıçapı arasındaki α açısının görüntüsü	13
Şekil 3.3	P noktası dairesel levhada dik doğru üzerinde	14
Şekil 3.4	Bir daire eğrisinin logaritmik potansiyeli	17
Şekil 4.1	P noktasının ρ yarıçaplı daire ile kapsamı	23
Şekil 5.1	Bir çember içinde harmonik fonksiyonun ekstrem değerleri	28
Şekil 5.2	P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan dışında	34
Şekil 5.3	P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan üzerinde	34
Şekil 5.4	P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan içinde	35

SEMBOLLER LİSTESİ

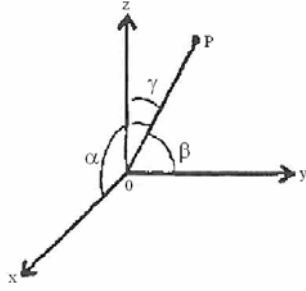
$\mathbf{m}$	: Kütlev
$\mathbf{V}$	: Hacim
$\mathbf{d}$	: Yoğunluk
$\mathbf{F}$	: Newton kuvveti
$\mu(\xi, \eta, \zeta)$	: Kütlev yoğunluğu
$\mathbf{G}$	: Evrensel çekim sabiti (<i>Gravitasyon</i>)
μ_s	: Çizgisel yoğunluk
$\mathbf{K}$	: İki kütle arasındaki çekim kuvveti
$\mathbf{u}_C$	: Bir C uzay eğrisi için Newton potansiyeli
$\mathbf{u}_i$	: İçten küre yüzeyine yaklaşıldığında bulunacak limit değeri
$\mathbf{u}_a$	: Dıştan küre yüzeyine yaklaşıldığında bulunacak limit değeri
$\mathbf{v}$	: Çift tabakanın momenti
α	: x eksenini ile r arasındaki açı
$(\frac{\partial v}{\partial n})_i$	: Newton yüzey potansiyelinin iç normal doğrultusundaki türev değeri
$(\frac{\partial v}{\partial n})_a$	: Newton yüzey potansiyelinin dış normal doğrultusundaki türev değeri
ρ	: O ile P arasındaki uzaklık
ρ_0	: Tek irtibatlı bölgenin sabit yoğunluğu
$\mathbf{l}_k^n$	: Her k ve n için bulunan sabitler
$\mathbf{c}_k$	: harmonik momentumlar
$\mathbf{S}_0^{r_0}$	: Merkezi orjin noktasında yarıçapı r_0 olan daire

1. GİRİŞ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde okuyucuya yardımcı olacak temel tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde potansiyel teoriye giriş başlığı altında basit tabakanın Newton potansiyelleri, çift tabakanın Newton potansiyelleri ve basit ve çift tabakanın logaritmik potansiyelleri konuları yer alır. Üçüncü bölümde potansiyel teorisinin esas denklemleri başlığı altında Laplace diferansiyel denklemi ve Poisson denklemine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Laplace Green formülleri ile harmonik fonksiyonların genel özellikleri ve potansiyellerin sonsuzluktaki durumu ve süreksizlik özellikleri, son olarak da beşinci bölümde logaritmik potansiyel için ters problem başlığı altında ters problemin çözümünün aprior değerlendirilmesi yer almıştır.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1. Başlangıçtan geçen bir doğrunun (veya bir P noktasının yer vektörünün) x, y, z - eksenlerinin pozitif yönleriyle oluşturduğu açılara doğrultman açıları denir.[1]



Şekil 2.1 (P noktasının xyz-eksenlerinin pozitif yönleriyle oluşturduğu açılar)

Tanım 2.2. Doğrultman açıların kosinüs değerlerine doğrultman kosinüsleri denir.[1]

Tanım 2.3. Aralarındaki uzaklık r olmak üzere m_1 ve m_2 kütlelerine sahip iki cisim birbirlerini, kütlelerin çarpımı ile doğru aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olacak şekilde çekerler.

Bu kuvvet G gravitasyon sabiti olmak üzere

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

olarak ifade edilir.[1]

Tanım 2.4. Elektrik yükleri birbirlerine itme veya çekme kuvveti uygularlar. Bu kuvvet, yüklerin miktarları ile doğru, aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır.

Buradan Coulomb Kanunu

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

CGS birim sisteminde F - dyn, q - stat coulomb

$$r - cm \text{ iken} \quad k = 1 \text{ Nm}^2/c^2$$

MKS birim sisteminde F - Newton, q - coulomb

$$r - metre \text{ iken} \quad k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/c^2 \text{ dir.}[3]$$

Tanım 2.5. xyz uzayında bir $P(x, y, z)$ noktası verilmiş olsun. P noktasının orjine olan uzaklığı ρ , OP doğru parçasının OZ - eksenini ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü

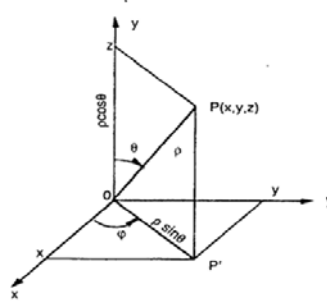
θ olsun. OP doğru parçasının xOy düzlemindeki dik izdüşümü $[OP']$, ve $[OP']$ doğru parçasının Ox - eksenini ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ olsun. O halde $|OP| = \rho \sin \theta$ olduğundan

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

olur. Böylece xyz - koordinat sisteminden $\rho\theta\varphi$ koordinat sisteminde bir bölge dönüşümü elde edilir. O halde P noktasının $\rho\theta\varphi$ - sistemindeki koordinatları (ρ, θ, φ) olur ki bunlara P noktasının küresel koordinatları denilir.[2]



Şekil 2.2 (P noktasının küresel koordinatları)

Tanım 2.6. Bilinmeyen n değişkenli $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için x_i lere göre u 'nun ikinci mertebeden sürekli türevleri mevcut olacak şekilde

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

kısmi diferensiyel denklemin Laplace denklemi denir. Laplace denkleminin çözümlerine harmonik fonksiyon denir.[2]

Tanım 2.7. Maddelerin 1 cm^3 ünün gram cinsinden kütesine yoğunluk denir. Kütle (m) ve hacim (v) arasında $d = m/v$ bağıntısı vardır.

Yoğunluğun birimi g/cm^3 dür. Saf maddelerin (element ve bileşik) yoğunlukları sabittir. Karışımların yoğunlukları ise sabit değildir.[3]

Tanım 2.8. Bir iletken üzerinde birim uzunluk başına düşen yük miktarına çizgisel yük yoğunluğu denilir.

Tanım 2.9. Bir cismin yüzeyine dağılmış elektrik yüklerinin o yüzeyin alanına oranının bir noktadaki limitine yüzeysel yük yoğunluğu denilir.

Tanım 2.10. Uzayın herhangi bir bölgesindeki elektrik yüklerinin, o bölgenin birim hacmindeki miktarına hacimsel yük yoğunluğu denilir.

Tanım 2.11. Kuvvetin döndürme etkisine moment denir. Moment vektörel bir nicelik, dönmenin yönüne göre + veya - işaretli olabilir. F kuvvetinin O noktasına göre momenti $\mu = F.d. \sin \theta$ eşitliğinden bulunur. Kuvvet O noktasına göre + yönde döndürecekğinden, momentin işareti + olacaktır. Eğer bir cisme birden fazla kuvvet uygulanırsa bu kuvvetlerin bileşke momenti hesaplanabilir. Bunun için kuvvetlerin moment alınacak noktaya göre momentleri işaretleri ile bulunarak toplamı alınır.[5]

Tanım 2.12. Bir cisim üzerine etkileyen kütle çekimlerinden kaynaklanan kuvvete kütle çekim kuvveti denir.

Tanım 2.13. Newton 'un genel çekim kuralında orantı sabiti olarak verilen gravitasyon sabiti; iki kütlelerin aralarındaki uzaklığın karesinin kütle çekim kuvvetiyle çarpımının, kütlelerin çarpımının oranına eşit, evrensel çekim sabiti de denilen ve değeri $G = 6.67259 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ olan sabittir.[3]

Tanım 2.14. $B \subset R^2$ sınırlı bir bölge olsun. $\rho(x)$, B bölgesinde tanımlanmış verilen bir fonksiyon olsun. O halde

$$\Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho(x)$$

$x \in B$ denkleminde Poisson denklemi denilir.[1]

3. POTANSİYEL TEORİYE GİRİŞ

3.1. Basit Tabakanın Newton Potansiyelleri

Birbirlerini Newton Kanunu' na göre çeken ve $P(x, y, z)$, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ gibi iki noktada toplanmış olan m ve m_1 kütlelerini gözönüne alırsak çekim kuvveti

$$K = c \frac{mm_1}{r^2} \quad (3.1)$$

olur. Burada c , gravitasyon sabiti ve

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (3.2)$$

dir. P noktası çekilen nokta yani hareketli nokta (*üst nokta*), Q ise çeken nokta yani sabit (*kaynak nokta*) olsun. $cm = 1$ kabul edersek

$$K = \frac{m_1}{r^2}$$

olur. Eksen doğrultusundaki kuvvet bileşenleri olan doğrultman açıları sırasıyla α, β, γ olmak üzere

$$x = K \cos \alpha, \quad y = K \cos \beta, \quad z = K \cos \gamma$$

olup burada $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ değerleri r ' in doğrultman kosinüsleridir. Bunlar yerine,

$$\cos \alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{\eta - y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{\zeta - z}{r} \quad (3.3)$$

değerleri de konulabileceğinden

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_1}{r^2} \frac{\xi - x}{r}, \quad Y = \frac{m_1}{r^2} \frac{\eta - y}{r}, \quad Z = \frac{m_1}{r^2} \frac{\zeta - z}{r} \\ X &= m_1 \frac{\xi - x}{r^3}, \quad Y = m_1 \frac{\eta - y}{r^3}, \quad Z = m_1 \frac{\zeta - z}{r^3} \end{aligned}$$

bulunup bu ifadeler ise

$$\phi = \frac{m_1}{r} \quad (3.4)$$

fonksiyonun kısmi türevleri olurlar. Buna göre

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-m_1}{r^2} \frac{2(x - \xi)}{2r} = m_1 \frac{\xi - x}{r^3}, \\
Y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-m_1}{r^2} \frac{2(y - \eta)}{2r} = m_1 \frac{\eta - y}{r^3}, \\
Z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-m_1}{r^2} \frac{2(z - \zeta)}{2r} = m_1 \frac{\zeta - z}{r^3}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılabilir . Bu ϕ fonksiyonuna, m_1 kütesinin potansiyeli adı verilir.

Buna göre Q_v (ξ_v, η_v, ζ_v) gibi n maddesel noktadaki m_v kütlelerini gözönüne alacak olursak bu halde bunların potansiyeli

$$\phi = \sum_{v=1}^n \frac{m_v}{r_v} \tag{3.6}$$

olup, r_v değeri v - maddesel noktasının, hareketli noktaya olan mesafesidir. Burada her zaman için hareketli olan P noktasının Q_v noktalarından herhangi biriyle üst üste düşmediği kabul ediliyor. Aksi halde (3.6) ifadesindeki toplam sonsuz olur.

Aralıklı n - maddesel noktadan teşekkül eden bu sistemden, bir G hacmini dolduran kütleye geçecek olursak bunun, dışında bulunduğunu kabul ettiğimiz P hareketli noktaya bir kuvvet uygulandığı kabul edilebilir. $d\tau = d_x d_y d_z$ gibi bir uzay elemanın kütlesi dm ile gösterilirse potansiyel için

$$u_G(x, y, z) = \iiint_G \frac{dm}{r}$$

ifadesi elde edilir. Eğer genel olarak değişken kabul ettiğimiz kütle yoğunluğu

$$\mu(\xi, \eta, \zeta) \text{ ise } \mu = \frac{dm}{d\tau} = \frac{\text{kütle elemanı}}{\text{hacim elemanı}}$$

ve bir G uzay parçası için Newton potansiyeli

$$u_G(x, y, z) = \iiint_G \frac{\mu}{r} d\tau \tag{3.7}$$

şeklinde gösterilir.

Kütlesi m olan bir F yüzeyi gözönüne alınırsa bu yüzey dışında bulunan bir P noktasının Newton kanununa göre tesir eder. Bu halde bir F yüzeyinin Newton potansiyeli olarak

$$u_F(x, y, z) = \iint_F \frac{\mu}{r} dw \tag{3.8}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\mu(\xi, \eta)$ yüzey yoğunluğudur.

Çizgisel yoğunluğu $\mu(s)$ olan, bir C uzay eğrisi için Newton potansiyeli

$$u_C(x, y, z) = \int_C \frac{\mu}{r} ds \quad (3.9)$$

olur. Bu u potansiyel fonksiyonlarının özelliği şudur: Bunların koordinat eksenleri doğrultusundaki türevleri, kuvvetin aynı doğrultulardaki bileşenlerini verir. Ancak P , çeken bölgenin herhangi bir noktası ile çakışmamalıdır.

Kuvvetin keyfi bir S doğrultusundaki K_S bileşeni bilindiği gibi

$$K_S = X \cos(s, x) + Y \cos(s, y) + Z \cos(s, z)$$

olur. Fakat bir $u(x, y, z)$ fonksiyonunun herhangi bir S doğrultusundaki türevinin

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(s, z) \quad (3.10)$$

olduğu düşünülürse

$$K_S = \frac{du}{ds} \quad (3.11)$$

olur.

Newton' un çekim kanunu şeklen, Coulomb kanunu ile açıklanır. Bu son formüle göre m ve m_1 gibi iki elektrik miktarı bir r mesafesinde birbirlerini (3.1) ifadesiyle belirtilen K gibi bir kuvvetle çekerler.

Elektrostatikteki ölçü sistemine göre $c = 1$ dir. Örnek olarak μ kütle yoğunluğu sabit olan ve 1 yarıçaplı bir küresel yüzeyin potansiyelini hesaplayalım:

Bu maksatla koordinat sisteminin başlangıç noktası olarak küre merkezini ve x - eksenini olarak da $P(x, 0, 0)$ hareketli noktasından geçen doğruyu alalım.

Buna göre yüzey potansiyelini hesapladığımız için (3.8) ifadesini kullanırsak,

$$u_F(x, y, z) = \iint_F \frac{\mu dw}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

yazılabilir. Burada r , P noktası ile küre yüzeyi üzerindeki herhangi bir $Q(\xi, \eta, \zeta)$ noktası arasındaki mesafedir. μ kütle yoğunluğu sabit olduğu için, integral dışına alırsak

$$u_F(x, y, z) = \mu \iint_F \frac{dw}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \quad (3.12)$$

elde edilir. Küre yüzeyi üzerindeki noktalar için küresel koordinatları kullanırsak :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \cos \vartheta, \quad \eta = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \zeta = \sin \vartheta \sin \varphi \\ r^2 &= (x - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ dw &= \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

olur. Burada r ifadesinde ξ, η, ζ değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 \\ &= x^2 - 2x \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \\ &= x^2 - 2x \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \left[\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_{=1} \right] \\ &= x^2 - 2x \cos \vartheta + \underbrace{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}_{=1} \\ &= x^2 + 1 - 2x \cos \vartheta \end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar ile (3.12) potansiyeli için,

$$u = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos \vartheta}} = 2\pi\mu \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{x^2 + 1 - 2x \cos \vartheta}} \quad (3.14)$$

bulunur. r^2 ifadesinden her iki tarafın diferensiyeli alınır

$$2rdr = 2x \sin \vartheta d\vartheta$$

$$\Rightarrow rdr = x \sin \vartheta d\vartheta$$

$$\Rightarrow \frac{rdr}{x} = \sin \vartheta d\vartheta$$

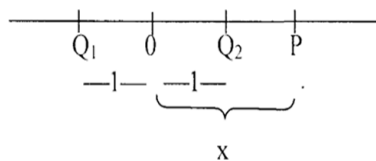
elde edilir. Bu ifade ve r^2 değeri son integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{\sin \vartheta}{r} d\vartheta = \frac{1}{x} \int dr$$

olur. Şimdi integrasyon sınırlarını tesbit edelim:

ϑ , açı değeri küre merkezi olan O noktasından Q noktasına doğru $\overrightarrow{OQ}$, nun x -ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıdır. ϑ açısı $0 - \pi$ aralığında değişirken r hangi aralıkta değişir, hesaplayalım: Bunun için P noktasının kürenin içinde ve dışında bulunması hallerini ayrı ayrı inceleyelim.

a) P hareketli noktası kürenin dışındadır.



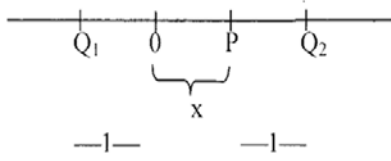
$\vartheta = \pi$ değeri için Q noktası Q_1 ile çakışır ve $r = x + 1$ olur.

$\vartheta = 0$ değeri için Q noktası Q_2 ile çakışır ve $r = x - 1$ olur.

Böylece;

$$u_1 = \frac{2\pi\mu}{x} \int_{x-1}^{1+x} dr = \frac{2\pi\mu}{x} [(x+1) - (x-1)] = \frac{4\pi\mu}{x}$$

b) P hareketli noktası kürenin içindedir.



$\vartheta = \pi$ değeri için Q noktası Q_1 ile çakışır ve $r = x + 1$ olur.

$\vartheta = 0$ değeri için Q noktası Q_2 ile çakışır ve $r = 1 - x$ olur.

Böylece;

$$u_2 = \frac{2\pi\mu}{x} \int_{1-x}^{1+x} dr = \frac{2\pi\mu}{x} [(1+x) - (1-x)] = 4\pi\mu$$

elde edilir.

P noktası kürenin dışından küre yüzeyine yaklaştırılırsa $|x| \rightarrow 1$ ve $u_1 \rightarrow 4\pi\mu$ olur. Bu değer ise küre içerisinden, küre yüzeyine yaklaşıldığında u_2 için bulunacak limit değerine eşittir.

Buna göre içten ve dıştan küre yüzeyine yaklaşıldığında bulunacak limit değerleri sırasıyla u_i ve u_a ile gösterirsek

$$u_i = u_a$$

olur. Eğer x değeri ∞ olursa (ki bu P nin sonsuz uzaklığa götürülmesidir.)

$u_1 = 0$ olur. Küre içerisinde

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

olur. Potansiyel fonksiyonun özelliği gereğince bu P ye etki eden kuvvetin x -ekseni doğrultusundaki bileşenidir. O halde

$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$ olması, P' ye x - eksenine doğrultusundaki bir kuvvetin etki etmemesi anlamına gelmektedir. Örneğimizde x -eksenini P den geçen doğru olarak almıştık.

O halde P küre içerisinde ise, bu noktaya hiçbir kuvvet tesir etmez. Küre dışında ise

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{4\pi\mu}{x^2}$$

dir. Zira $4\pi\mu$, bütün küre yüzeyi boyunca yayılı olan toplam kütleyi gösterir. O halde dışındaki bir noktaya küre, sanki bütün kütlesi merkezinde toplanan bir maddesel nokta gibi tesir eder.

Şimdi bu potansiyelin normal yönündeki türevini arayalım. Küre yüzeyinin iç normal, küre yarıçapı yönünde olup 0' dan geçer.

Bizim örneğimizde P noktası x -ekseni üzerinde hareket ettirildiğinden

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

olur. Burada (-) işareti normalin (+) yönünün, x -ekseninin yönünün tersi olduğunu ifade eder. P noktası küre içinde ise

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$$

olacağı açıktır. Nokta içten küreye yaklaştıkça

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{x \rightarrow 1} = 0$$

olur. Dıştan yaklaşımda ise

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{4\pi\mu}{x^2}$$

elde edilir. Küre yüzeyine dıştan yaklaşımda :

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{x \rightarrow 1} = 4\pi\mu$$

elde edilir. Buna göre

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{x \rightarrow 1} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{x \rightarrow 1} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -4\pi\mu$$

olur. i ve a indisleri normal türevin iç veya dış limit değerlerini karakterize eder. Buradan anlaşılmaktadır ki hareketli noktaların, yüzeyin bir tarafından diğer tarafına geçmesi halinde Newton' un yüzey potansiyelinin normal türevi, $-4\pi\mu$ kadar bir atlama gösterir. Daha ileride görüleceği gibi bu özellik genellikle bütün bu tip yüzey potansiyelleri için geçerlidir.

3.2 Çift Tabakanın Newton Potansiyelleri

Elektrostatikten bilindiği gibi Dipol kavramı, birbirinden h mesafesinde bulunan ve $+m$ ile $-m$ gibi eşit fakat ters işaretli elektrik yükleri ile yüklenmiş, iki noktadan ibaret bir sistemdir. Acaba böyle bir Dipol'ün ϕ potansiyeli ne kadardır? m' in koordinatları $m(\xi, \eta, \zeta)$ ve $-m'$ in ise $m(\xi + h, \eta, \zeta)$ olsun. Hareketli P noktasının m' den mesafesi r , $-m'$ den mesafesi r_1 ve bu noktanın $+1$ yüküne sahip olduğu kabul edilirse

$$\phi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} = m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

dır. Burada $\frac{1}{r_1}$ değeri $\frac{1}{r}$ ifadesinden, ξ doğrultusunda h kadar ilerlemek suretiyle elde edilebileceği için Taylor' a göre lineer terimlere kadar alınır

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + h \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}$$

ve buradan

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = h \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}$$

ifadesi potansiyelde gözüntüne alınır

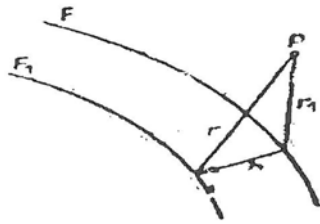
$$\phi = mh \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}$$

olur. Burada h küçülecek ve aynı şekilde m de büyücek olursa, öyle ki

$\lim_{h \rightarrow 0} (mh) = v$ mevcut olsun, sonuçta

$$\phi = v \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}$$

ifadesi Dipol potansiyeli ve v de moment olarak belirtilmiş olur. Bunu, bir yüzeyin çift tabakalı potansiyelini elde ederken kullanabiliriz.



Şekil 3.1 (F ve F_1 tabakası üzerindeki P noktasının çekici ve itici kuvvetleri)

F gibi bir yüzey ile bunun her noktasındaki normalini düşünelim.

Bu normallerin üzerinde aynı bir h mesafesi kadar alacak olursak yeni ve F' e paralel bir F_1 yüzeyi elde ederiz.

Yine kabul edelim ki F pozitif ve F_1 de negatif elektrik ile yüklü olsun.

Bu elektrik yükleri, üzerinde +1 birim yükü bulunan bir P noktasına çekici ve itici kuvvetler uygularlar. (Bkz, Şekil 3.1)

P noktasına itici ve çekici bir tesir uygulayan F tabakasında potansiyel

$$u_1 = - \iint_F \frac{\mu}{r} dw$$

dir. Burada μ , F tabakası üzerindeki yükün yoğunluğudur. Benzer olarak F_1 ' in potansiyeli, aynı μ yoğunluğu kabul edilirse,

$$u_2 = + \iint_{F_1} \frac{\mu}{r_1} dw$$

olur. Buna göre toplam potansiyel

$$u = u_1 + u_2 = \iint \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) dw = \iint \mu h \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{h} dw$$

h doğrultusu yüzeyin, normal doğrultusuna intibak ettiğinden

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + h \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n}$$

olur. Kabul edelim ki $h \rightarrow 0$ iken μ yük yoğunluğu öyle büyüsün ki

$\lim_{h \rightarrow 0} (\mu h) = v$ sabit kalsın. Buna göre

$$u = \iint_F v \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} dw$$

yazılır. Burada v ' ye çift tabakanın momenti ve u ' ya da çift tabakalanmış F yüzeyinin potansiyeli adı verilir ve

$$u_F = \iint_F v \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} dw \quad (3.16)$$

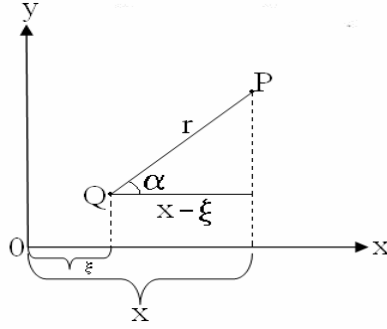
ile gösterilir. (3.16) daki potansiyeli başka bir şekilde de ifade etmek mümkündür.

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$, yi ξ, η ve ζ ' nin bir fonksiyonu olarak düşünecek olursak bu takdirde

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} (r^2)^{-\frac{1}{2}} 2(x - \xi) \\ &= r^{-1} (x - \xi) = \frac{x - \xi}{r} \end{aligned}$$

olur. Yani $\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{x-\xi}{r}$ olup, halbuki şekle göre



Şekil 3.2 (x eksenini ile r yarıçapı arasındaki α açısının görüntüsü)

α , x eksenini ile r arasındaki açı olduğundan α , $\cos(r, x)$ olarak da ifade edilebilir. Yani

$$\frac{x-\xi}{r} = \cos(r, x) \Rightarrow \frac{\xi-x}{r} = -\cos(r, x)$$

dir. Tüm bu açıklamalardan sonra,

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\cos(r, x), \quad \frac{\partial r}{\partial \eta} = -\cos(r, y), \quad \frac{\partial r}{\partial \zeta} = -\cos(r, z)$$

olur.

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = \cos(n, \xi) = \cos(n, x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \cos(n, z)$$

ve buna göre

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n} &= -[\cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, y) \cos(n, y) + \cos(r, z) \cos(n, z)] \\ &= -\cos(r, n) \end{aligned}$$

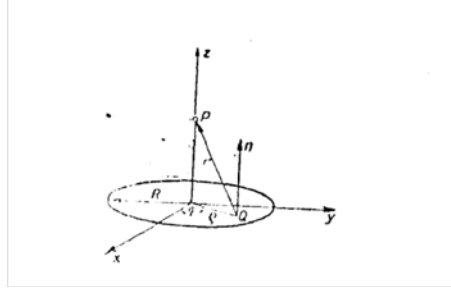
O halde,

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r^2} \quad ((3.16a))$$

ve

$$u_F = \iint_F v \frac{\cos(r, n)}{r^2} dw \quad (3.17)$$

olarak bulunur. Şimdi bu husus ile ilgili bir örnek verelim. (Bkz. Şekil 3.3)



Şekil 3.3 (P noktası dairesel levhada dik doğru üzerinde)

Çift tabakalanmış daire şeklinde bir levhanın potansiyelini hesaplayalım:

Bu maksatla çift tabakanın momenti sabit olsun ve hareketli nokta, dairesel levhanın merkezinden çıkılan dik doğru üzerinde bulunsun. (3.17) ifadesini uygulamak için (Şekil 3.3)' den aşağıdaki bağıntılar çıkarabilir.

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad dw = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

Levha yüzünün normali, z' nin + doğrultusunda olduğuna ve r, Q' dan P' ye doğru alındığına göre

$$\cos(r, n) = +\frac{z}{r}$$

ve aranılan potansiyel için

$$\begin{aligned} u &= + \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{vz \rho \, d\rho \, d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = vz2\pi \int_0^R \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi v \left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada z pozitif ise $\sqrt{z^2} = +z$ ve eğer negatif ise $\sqrt{z^2} = -z$ kabul edilir. Buna karşılık gelen u değerleri $u^{(1)}$, ($z > 0$ için) ve $u^{(2)}$ ($z < 0$ için)

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= +2\pi v \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\ u^{(2)} &= +2\pi v \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer z eksenini boyunca (levhanın normali boyunca) sabit yüzeye yukarıdan yaklaşılabilecek olursa $u^{(1)}$ sınır değeri $+2\pi v$ olur ve eğer aşağıdan yaklaşılabilecek olursa bu değer $-2\pi v$ olarak ifade edilir. Böylece levhanın bir tarafından diğer tarafına levha içinden geçildiği takdirde u potansiyeli $u_i - u_a = +4\pi v$ değerinde bir atlama gösterir. (Normalin pozitif doğrultusunda z ekseninin pozitif doğrultusu ile yüzeyin iç kısmı belirtilmektedir.)

$z \rightarrow \infty$ için $u^{(1)}$ ve $u^{(2)}$ değerleri *L'Hospital* in uygulanmasıyla da görülebileceği gibi, sıfıra giderler. Normal türev ise başka türlü değişir. Bu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial z}, \\
\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} &= \frac{-2\pi v R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{\partial u^2}{\partial n} = \frac{-2\pi v R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\
&\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a
\end{aligned}$$

şeklinde olup normal türevin, sabit levha içerisinden sürekli olarak geçtiğini ifade eder.

3.3 Basit Ve Çift Tabakanın Logaritmik Potansiyelleri

u ve U potansiyelleri, Newton'un gravitasyon kanununun geçerli olduğu bir uzay için tarif edilmişti. Düzlemde başka bir kuvvet sistemi kabul edilirse, bu suretle başka bir potansiyel elde edilmiş olur.

Mesela x, y düzleminde bulunan P ve Q gibi iki noktada m ve m_1 kütleleri mevcut olsun ve bunlar birbirlerini

$$K = c \frac{mm_1}{r^2} \quad (3.18)$$

ifadesi ile belirtilen bir kuvvetle çeksinler. Ayrıca

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (3.19)$$

kabul ediliyor. Burada kuvvetin, Newton' un çekim kanununda olduğu gibi noktalar arasındaki mesafenin karesi ile ters orantılı olmayıp aksine, mesafenin kendisi ile ters orantılı olduğu kabul edilmektedir. Kuvvetin bileşinleri kolayca hesaplanabileceği gibi ($cm = 1$ için),

$$X = m_1 \frac{\xi - x}{r^2}, Y = m_1 \frac{\eta - y}{r^2}$$

olarak bulunur. x' e ve y' ye göre kısmi türevleri sırasıyla X ve Y' ye eşit olan bir fonksiyon arandığında böyle bir fonksiyonun

$$\psi = m_1 \log \frac{1}{r} \quad (3.20)$$

olduğu görülebilir. Eğer B , bir düzlemsel bölge ise bu halde bu bölgenin logaritmik potansiyeli

$$v_B(x, y) = \iint_B \mu \log \frac{1}{r} dw \quad (3.21)$$

olur. μ yine kütle yoğunluğudur.

Burada yine hareketli noktanın, sabit kütlenin herhangi bir noktası ile üst üste düşmediği kabul edilmektedir. Keyfi bir C eğrisinin logaritmik potansiyeli

$$v_C(x, y) = \int_C \mu \log \frac{1}{r} ds \quad (3.22)$$

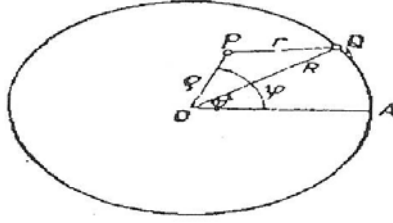
olur. Aynen Newton potansiyelinde olduğu gibi burada da çift tabakalanmış bir C eğrisinin logaritmik potansiyeli tanımlanabilir. Bu amaçla (3.16a) ifadesi yerine burada geçerli olan

$$\frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r} \quad (3.23)$$

ve

$$v_C(x, y) = \int_C v \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds = \int_C v \frac{\cos(r, n)}{r} ds \quad (3.24)$$

ifadeleri elde edilir. Örnek olarak basit tabakalanmış bir daire eğrisinin logaritmik potansiyelini hesaplayalım. (Bkz Şekil 3.4)



Şekil 3.4 (Bir daire eğrisinin logaritmik potansiyeli)

(3.22) denkleminde küresel koordinatlar yardımı ile,

$$v = \int_0^{2\pi} \mu \log \frac{1}{r} R d\psi = \mu R \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} d\psi \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için, integral içinin seriye açılması gerekir. Bu ise kosinüs formülünden

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2R \rho \cos(\varphi - \psi) \\ &= \rho^2 + R^2 - R\rho 2 \cos(\varphi - \psi) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ olduğundan

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - R\rho [e^{i(\varphi-\psi)} + e^{-i(\varphi-\psi)}]$$

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - R\rho e^{i(\varphi-\psi)} - R\rho e^{-i(\varphi-\psi)}$$

$$r^2 = [\rho - R e^{i(\varphi-\psi)}] [\rho - R e^{-i(\varphi-\psi)}]$$

$$r^2 = \rho \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right] \rho \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]$$

$$r^2 = \rho^2 \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right] \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right] \quad (3.27)$$

olur. Her tarafın $-1/2$. dereceden kuvveti alınır

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2}$$

ve logaritma alınır

$$\log \frac{1}{r} = \log \left\{ \frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} \right\}$$

ve logaritma fonksiyonunun özelliklerinden

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\rho} + \log \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} + \log \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2}$$

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right] - \frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]$$

elde edilir. Şimdi $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$ serisini kullanırsak, bu seri $|x| < 1$

için yakınsaktır. Dolayısıyla yukarıdaki iki serinin yakınsak olabilmesi için

$$\left| \frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} \right| < 1 \text{ olması gerekir. Bilindiği üzere } |e^{i\alpha}| = 1 \text{ olduğundan, } |e^{i(\varphi-\psi)}| = 1 \text{ dir.}$$

O halde,

$$\left| \frac{R}{\rho} \right| < 1 \text{ yani } \frac{R}{\rho} < 1 \text{ veya } \rho > R \text{ olmalıdır, bu ise } P \text{ noktasının dairenin dışında kalması}$$

demektir. O halde,

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{r} &= \log \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{R}{\rho} e^{i(\varphi-\psi)} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 e^{2i(\varphi-\psi)} + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{R}{\rho} e^{-i(\varphi-\psi)} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 e^{-2i(\varphi-\psi)} + \dots \right] \end{aligned}$$

elde edilir. alt alta duran terimlerin toplanması halinde (3.26) ifadesini de gözönüne alırsak

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\rho} + \frac{R}{\rho} \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \cos 2(\varphi - \psi) + \dots \quad (3.28)$$

ifadesi bulunur.

P noktası dairenin içinde iken $R > \rho$ dur. Buradan, $\frac{\rho}{R} < 1$ yani $\left| \frac{\rho}{R} \right| < 1$ sonucuna varılır. O halde seriye açabilmek için (3.27) ifadesi yerine R parantezinde,

$$\begin{aligned} r^2 &= [R - \rho e^{i(\varphi-\psi)}] [R - \rho e^{-i(\varphi-\psi)}] \\ &= R \left[1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\psi)} \right] \left[1 - \frac{\rho}{R} e^{-i(\varphi-\psi)} \right] \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} \left[1 - \frac{\rho}{R} e^{-i(\varphi-\psi)} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

ifadesi seçilirse

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{R} + \frac{\rho}{R} \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \cos 2(\varphi - \psi) + \dots \quad (3.29)$$

elde edilir. Bu (3.29) ifadesi yardımıyla (3.25) ifadesine gidilirse ve integral seri içine dağıtılsa

$$\int_0^{2\pi} \cos n(\varphi - \psi) d\psi = 0, (n = 1, 2, \dots)$$

denkleminden istifade etmek suretiyle, serinin ilk terimi hariç tüm integraller sıfır olur.

Buradan iç bölgenin potansiyeli için

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= \mu R \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{R} d\psi \\ v^{(1)} &= \mu R 2\pi \log \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur. (3.28) ve (3.25) denklemleri yardımıyla da dış bölgedeki potansiyel için

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= \mu R \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\rho} d\psi \\ v^{(2)} &= \mu R 2\pi \log \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir. Eğer P noktası içten daire çerçevesine yaklaşırsa $\rho \rightarrow R$ için (3.30)' dan

$$v_i = 2\pi\mu R \log \frac{1}{R}$$

ve P dıştan daire çevresine yaklaşırsa $\rho \rightarrow R$ için (3.31)' den

$$v_a = 2\pi\mu R \log \frac{1}{R}$$

ve sonuçta

$v_i = v_a$ elde edilir. Böylece eğer $\rho \rightarrow \infty$ olursa $v^{(2)}$, $-\infty$ ' a yaklaşır. Türevin iç normal

doğrultusundaki durumunu inceleyelim. Burada ρ , 0 ' dan P' ye yöneltilmiş olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}$$

ve (3.30) ile (3.31)' e göre de

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \rho} = 0$$

$$\left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial n} \right)_{\rho=R} = \left[2\pi\mu R \frac{1}{\rho} \right]_{\rho=R} = 2\pi\mu \text{ ve } \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_a = -2\pi\mu \text{ elde edilir.}$$

4. POTANSİYEL TEORİNİN ESAS DENKLEMLERİ

4.1 Laplace Diferansiyel Denklemi

Şimdiye kadar incelenmiş olan, çeşitli potansiyel kavramları aşağıdaki şu önemli özelliği karakterize ederler. Bunlar Laplace diferansiyel denkleminin çözümleridir.

Önce tek tabakalı Newton potansiyellerini gözönüne alalım.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

fonksiyonunun kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} &= \frac{-2(x-\xi)}{2r^2r} = \frac{(\xi-x)}{r^3}; \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} &= \frac{-r^3 - 3r^2(\xi-x)\left(\frac{2(x-\xi)}{2r}\right)}{(r^3)^2} = \frac{3(\xi-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} &= \frac{-r^3 - 3r^2(\eta-y)\left(\frac{2(y-\eta)}{2r}\right)}{(r^3)^2} = \frac{3(\eta-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} &= \frac{-r^3 - 3r^2(\zeta-z)\left(\frac{2(z-\zeta)}{2r}\right)}{(r^3)^2} = \frac{3(\zeta-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\end{aligned}$$

dur. Böylece

$$\begin{aligned}\Delta \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} \\ &= \frac{3(\xi-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3(\eta-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. (3.24) ifadesinden buna göre

$$\Delta u_G = \iiint_G \mu \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d\tau = 0$$

ve $\Delta \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ bulunur. u_F için de aynı neticede edileceği açıktır.

Çift tabakanın Newton potansiyellerini incelenirken Δ operasyonunun x, y, z e göre normal doğrultudaki türetmede ξ, η ve ζ ' ların değişken olduklarına dikkat edelim.

$$\Delta \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial n} \left[\Delta \left(\frac{1}{r}\right) \right] = 0$$

Sonuç olarak; hareketli nokta çeken bölgenin dışında kaldığı müddetçe Newton potansiyelleri Laplace diferansiyel denklemini gerçekerler.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$$

fonksiyonu aşağıdaki

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial x} &= \frac{\xi - x}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 (\log \frac{1}{r})}{\partial x^2} &= \frac{-r^2 - 2r(\frac{2(x-\xi)}{2r})(\xi - x)}{(r^2)^2} = \frac{2(\xi - x)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 (\log \frac{1}{r})}{\partial y^2} &= \frac{-r^2 - 2r(\frac{2(y-\eta)}{2r})(\eta - y)}{(r^2)^2} = \frac{2(\eta - y)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

türevleri dolayısıyla

$$\begin{aligned} \Delta \left(\log \frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial^2 (\log \frac{1}{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\log \frac{1}{r})}{\partial y^2} \\ &= \frac{2(\xi - x)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} + \frac{2(\eta - y)^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{2r^2}{r^4} - \frac{2}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece görülebilir ki logaritmik potansiyel de

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Laplace denklemini sağlar.

4.2 Poisson Denklemi

Hareketli nokta sabit kütlenin dışında kaldığı müddetçe, Newton ve logaritmik potansiyeller Laplace denklemini sağlamaktadır. Bundan sonra ise hareketli nokta ile sabit kütlenin herhangi bir noktasının üstüste gelmesi halinde bu potansiyellerin hangi denklemi gerçeklediği araştırılacaktır. Örnek olarak logaritmik yüzey potansiyelini

$$v(x, y) = \iint_B \mu(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi d\eta$$

gözönüne alalım. μ' nün birinci mertebeden sürekli bir türevinin mevcut olduğunu farzedelim. Hareketli P noktası B bölgesinin içinde değişsin. Daha önceden v fonksiyonu, birinci mertebeden türeviyle beraber, P nin B bölgesinde olması hali için dahi sürekli bir fonksiyondur. Burada $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2(x - \xi)}{2r} = \frac{(x - \xi)}{r} = -\frac{\partial r}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{2(y - \eta)}{2r} = \frac{(y - \eta)}{r} = -\frac{\partial r}{\partial \eta} \end{aligned}$$

olur ve v' nin birinci türevleri için

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \iint_B \mu(\xi, \eta) \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial x} d\xi d\eta = -\iint_B \mu(\xi, \eta) \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} d\xi d\eta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \iint_B \mu(\xi, \eta) \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial y} d\xi d\eta = -\iint_B \mu(\xi, \eta) \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.2)$$

ifadeleri bulunur. Burada $-\frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial \xi}$ yerine eğer $\log \frac{1}{r}$ konulacak olursa mesela, bir yüzey potansiyelinin x' e göre türevi elde edilmiş olur.

(Aynı şey $v_C = \int_C \mu(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} ds$ formundaki bir eğri potansiyeli içinde geçerlidir)

(5.1) denkleminde $A(\xi, \eta) = \mu(\xi, \eta) \log \frac{1}{r}$ ve $B = 0$ konulur ve integrasyon değişkenleri olarak ξ, η alınırsa yukarıdaki integrali değişik şekilde ifade etmeye yarayan

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \log \frac{1}{r} d\xi d\eta + \iint_B \mu \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} d\xi d\eta &= \int_C \mu \log \frac{1}{r} d\eta \\ &= -\int_C \mu \log \frac{1}{r} \cos(n, \xi) ds \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç yardımıyla (4.2)' in ilk denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \iint_B \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \log \frac{1}{r} d\xi d\eta + \int_C \mu \cos(n, \xi) \log \frac{1}{r} ds$$

şeklini alır. O halde $\frac{\partial v}{\partial x}$ türevi, $\frac{\partial \mu}{\partial \xi}$ yoğunluğunda bir yüzey potansiyeli ile yine $\mu \cos(n, \xi)$ yoğunluğunda bir eğri potansiyelinin toplamı şeklinde ifade edilmiş olur.

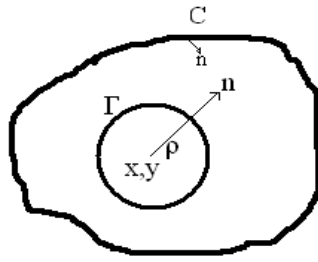
x' e göre alınacak ikinci türev ise yukarıda yapıldığı gibi, her iki integralde $\log \frac{1}{r}$ yerine $-\frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi}$ koymak suretiyle elde edilebilir:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \int_C \mu \cos(n, \xi) \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} ds - \iint_B \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} d\xi d\eta$$

ve benzer olarak ve bunları toplarsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= - \int_C \mu \left[\frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} \cos(n, \xi) + \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} \cos(n, \eta) \right] ds \\ &\quad - \iint_B \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ &= - \int_B \mu - \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} ds - \iint_B \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (4.3) \end{aligned}$$

(4.2) ifadesi yardımıyla sonuncu çift katlı integrali, μ yerine u ve $\log \frac{1}{r}$ yerine v koyarak değiştirelim. Burada $\log \frac{1}{r}$ ifadesi (x, y) noktasında sonsuz olacağından bu noktayı ρ yarıçaplı bir daire ile çevirelim; geriye kalan bölge B' olsun. (Bkz şekil 4.1) Bu durumda;



Şekil 4.1 (P noktasının ρ yarıçaplı daire ile kapsamı)

$$\begin{aligned} &\iint_B \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ &= - \int_C \mu - \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} ds - \int_{\Gamma} \mu \cdot \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds - \iint_{B'} \mu \cdot \Delta \log \frac{1}{r} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\log \frac{1}{r}$ harmonik bir fonksiyon olduğundan sonuncu çift katlı integral sıfır olur. Γ boyunca olan integrasyonda ise n normalinin doğrultusundan dolayı

$$\frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial r} = \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} \quad \text{ve } (\rho, \vartheta) \text{ polar koordinatları ile de}$$

$$\int_{\Gamma} \mu \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds = - \int_0^{2\pi} \mu \frac{1}{\rho} \rho d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \mu d\vartheta$$

elde edilir. $\rho \rightarrow 0$ için sınır değeri olarak $-2\pi\mu$ bulunur. Böylece (4.4) ifadesi $\rho \rightarrow 0$ için bu sonucu vermiş olmaktadır ve B' tekrar B bölgesine dönüşür.

$$\iint_B \left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = - \int_C \mu - \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds + 2\pi\mu(x, y)$$

ve (4.3) ifadesinden

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2\pi\mu(x, y) \quad (4.5)$$

denklemini elde edilir. Buna ” **Poisson Diferensiyel Denklemi** ” adı verilir.

Tesir eden kütleyle ait noktalarda yüzey tabakalı logaritmik potansiyel

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2\pi\mu(x, y)$$

Poisson denklemini sağlar. “ Her (x, y) noktasında Δv , -2π ile bu noktadaki μ kütle yoğunluğunun çarpımına eşittir. Eğer (x, y) noktası kütlenin dışında ise bu halde $\mu = 0$ olur ve Poisson denklemi Laplace denklemine dönüşür.”

Aynı diferensiyel denklem diğer logaritmik potansiyeller tarafından da sağlanır. Buna karşılık Newton potansiyelleri eğer, hareketli nokta sabit bölgenin herhangi bir noktasıyla çakışmışsa

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\mu(x, y, z)$$

olur.

5. GREEN FORMÜLLERİ HARMONİK FONKSİYONLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

Gauss İntegral teoreminden

$$\iint_B \left[\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \right] dxdy = \int_C [A(x, y) dy - B(x, y) dx] \quad (5.1)$$

hareket edelim.

Burada B , kısım kısım düzgün olan bir kenar eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı bir bölge olsun. Eğri üzerinde pozitif dönüş yönü olarak B bölgesi daima solda kalacak şekilde bir yön seçelim. Pozitif normalin yönü B bölgesinin içine doğru yöneltilmiş olsun. C eğrisinin teğetlerinin pozitif yönü olarak da pozitif normalin $+\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesiyle elde olunan yönü kabul edelim. Ayrıca $A(x, y)$ ve $B(x, y)$ fonksiyonları ile birinci türevleri de sürekli olsunlar.

Burada (5.1) ifadesi başka türlüde yazılabilir.

$$dx = ds \cos(n, y); dy = -ds \cos(n, x)$$

ve bunlar yardımıyla (5.1)

$$\iint_B \left[\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \right] dxdy = - \int_C [A(x, y) \cos(n, x) - B(x, y) \cos(n, y)] ds \quad (5.2)$$

yazılır. Bu son ifade de $A = u \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $B = 0$ koyalım. u ve v ikinci mertebeye kadar sürekli olan kısmi türevlere sahip olsunlar. Buna göre;

$$\iint_B \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dxdy = - \int_C u \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) ds \quad (5.3)$$

elde edilir. Eğer $A = 0$ ve $B = u \frac{\partial v}{\partial y}$ ise,

$$\iint_B \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dxdy = - \int_C u \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) ds \quad (5.4)$$

bulunur. (5.3) ve (5.4) ifadelerini toplamak suretiyle

$$\begin{aligned} \iint_B \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy &= - \iint_B u \Delta v dxdy \\ &\quad - \int_C u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) \right) ds \\ &= - \iint_B u \Delta v dxdy - \int_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (5.5)$$

u yerine koymak suretiyle elde edilecek ikinci denklemi yukarıdakinden çıkaracak olursak bu suretle Green formülünü elde edilmiş olur.

$$\iint_B [u\Delta v - v\Delta u] dxdy = - \int_C \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (5.6)$$

Bu formülün bir kaç özel halini inceleyelim.

$u = v$ için (5.5)' den

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = - \int_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_B u \Delta u dxdy \quad (5.7)$$

ve $v = 1$ için (5.6)' den

$$\iint_B \Delta u dxdy = - \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (5.8)$$

bulunur. Eğer u , B bölgesinde regüler harmonik bir fonksiyon ise $\Delta u = 0$ olur ve bu takdirde (5.7)' den

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

elde edilir. Bu denklem, harmonik bir fonksiyonun normal türevinin sınır değeri hakkında gayet önemli bir özelliğe dikkat çeker.

Eğer u yine harmonik bir fonksiyon ise (5.7) ifadesinden

$$\iint_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy = - \int_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (5.9)$$

bulunur. Eğer u ve v harmonik fonksiyonlar ise (5.6)' den

$$\int_C \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (5.10)$$

bulunur. Bu denklemde v yerine $v = \log \frac{1}{r}$ şeklinde özel bir harmonik fonksiyon alalım.

Bu fonksiyon C ile sınırlanmış bölge olan B bölgesinde regüler olsun. $r = 0$ için $\log \frac{1}{r}$ sonsuz olacağından (ξ, η) noktasını ρ yarıçaplı ufak bir daire ile ayıralım.

Bu halde kenar eğrisi, C ile Γ daire çevresinden ibaret olur. Buna göre;

$$\int_C \left(\log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial n} \right) ds + \int_{\Gamma} \left(\log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial (\log \frac{1}{r})}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (5.11)$$

Γ boyunca $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ ve $r = \rho$ olacağından ((5.8)' e bakınız)

$$\int_{\Gamma} \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \log \frac{1}{r} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

olur. Burada

$$\frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} = \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r} \text{ olduğundan}$$

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds = -\frac{1}{\rho} \int u ds \quad (5.12)$$

dir. Bu sonuncu integralde (p, φ) kutupsal koordinatlarına geçilerek $\rho \rightarrow \infty$ yapılacak şekilde olursa bu suretle tekrar başlangıçtaki bölge elde edilir:

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) \rho d\varphi = \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) d\varphi$$

u nun sürekliliğinden dolayı yeteri derecede küçük bir ρ yarıçapı için dairenin orta noktasındaki u değeri, çevre üzerindeki u değerinden az fark edilecektir.

Burada ε, ρ ile beraber sıfıra gitmek şartıyla

$u(\rho, \varphi) = u_{\rho=0} + \varepsilon$ yazılabilir. Böylece

$$\int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) d\varphi = 2\pi u_{\rho=0} + \int_0^{2\pi} \varepsilon d\varphi \text{ ve } \rho \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi) d\varphi = 2\pi u_{\rho=0} = 2\pi u(\xi, \eta)$$

elde edilir ve (5.10) ifadesi de

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma} u \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds = -2\pi u(\xi, \eta)$$

olur. Sonuçta (5.11) den önemli olan

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[u \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} - \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (5.13)$$

denklemini elde edilir.

”Eğer harmonik bir fonksiyonun ve onun normal türevinin, bir bölgenin sınırı üzerindeki değerleri biliniyorsa (5.12) ifadesi yardımıyla u fonksiyonunun bölge içinde bir (ξ, η) noktasındaki değeri hesaplanabilir.”

$$u(\xi, \eta) = \int_C \left(\frac{1}{2\pi} u \right) \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial n} ds + \int_C \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \log \frac{1}{r} ds$$

şeklinde yazılacak ve bu, basit ve çift tabakalı logaritmik potansiyel ifadeleri olan (3.22) ve (3.24) denklemleriyle karşılaştırılacak olursa görülür ki birinci integral, moment $v = \frac{1}{2\pi} u$ olan bir çift tabakanın logaritmik potansiyeli ve ikinci integralde yoğunluğu $\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}$ olan bir basit tabakanın logaritmik potansiyelini teşkil eder. (Burada u ile $\frac{\partial u}{\partial n}$

nin, C üzerinde verilmiş olduğu kabul ediliyor.) Bu suretle aşağıdaki ifade ispat edilmiş olmaktadır:

”B bölgesinde harmonik olan iki değişkenli her fonksiyon bu bölgenin sınırı olan C eğrisi üzerinde, bir basit tabakanın logaritmik potansiyeli ile bir çift tabakanın logaritmik potansiyelinin toplamı olarak düşünebilir.”

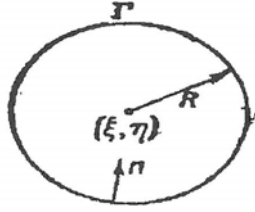
C eğrisi özel olarak R yarıçaplı bir Γ çemberi ise $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$ olur. Bu takdirde (5.12) ifadesinden

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{R} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} u ds = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} u ds \quad (5.14)$$

Bu takdirde Aritmetik ortalamanın Gauss teoremi elde edilir:

”Harmonik bir fonksiyonun bir çemberin orta noktasındaki değeri, bunun çevre üzerindeki değerlerinin ortalamasına eşittir.”

Ve buradan da



Şekil 5.1 (Bir çemberi içinde harmonik fonksiyonun ekstrem değerleri)

”Bir çember içerisinde bir sabite eşit olmayan harmonik bir fonksiyonun ekstrem değerleri, bölge içinde olmayıp sadece sınırı üzerinde bulunabilir.” Bu sonuncusu ise aşağıdaki şekilde genelleştirilir.

”Bir B bölgesi içinde harmonik olan bir fonksiyonun ekstrem değerleri sadece bu bölgenin sınırı üzerinde bulunabilir. ” u nun, bölgenin P gibi bir iç noktasında, bir ekstrem değere sahip olduğunu kabul edelim. P yi tamamen bölge içinde kalan bir çember ile çevirecek olursak buna yukarıdaki ifadeyi uygulamak mümkün olur. Bu çember içinde u bir sabite eşit olmalıdır. Bütün B bölgesini bu şekilde çemberlerle kaplayacak olursak gösterilebilir ki u, bütün bölgede sabit olmak zorundadır.

Bu bölümde sadece düzlemde geçerli olan bir takım incemeler ileri sürülmüştü. Şimdi de uzay için birkaç formül verilecektir. Gauss integral teoreminden,

$$\iiint_G \left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right] d\tau = - \iint_F [A \cos(n, x) + B \cos(n, y) + C \cos(n, z)] dw$$

olup burada G , F yüzeyi ile sınırlanmış bir uzay parçasıdır. $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ ve $C(x, y, z)$ fonksiyonları $\vec{A}$ gibi bir vektörün bileşenleri ise bu takdirde bilindiği gibi

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = \text{div } \vec{A}$$

olur. $A \cos(n, x) + B \cos(n, y) + C \cos(n, z) = \vec{A}_n = \vec{A}$ 'nın normal bileşenidir. Buna göre Gauss teoremi bilindiği gibi

$$\iiint_G \text{div } \vec{A} d\tau = - \iint_F \vec{A}_n dw$$

şeklinde ifade edilir. Aynı şey Green formülü için de uygulanabilir. (5.14) yerine

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_F \left[u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dw$$

elde edilir. Harmonik bir fonksiyonun, R yarıçaplı bir kürenin ξ, η, ζ orta noktasındaki değeri için (5.14) ifadesinden, benzer olarak

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_K u dw$$

denklemini elde edilir.

5.1 Potansiyellerin Sonsuzluktaki Durumları Süreksizlik Özellikleri

Şimdiye kadar daima hareketli noktanın, sabit kütleden sonlu mesafelerde bulunduğunu ve bu noktanın sabit kütleyle ait herhangi bir noktayla çakışmadığı kabul edilmişti. Şimdi hareketli noktanın sonsuza gitmesi veya sabit kütlenin herhangi bir noktasıyla çakışması halinde potansiyellerin durumu araştırılacaktır.

$u_G(x, y, z) = \iiint_G \frac{dm}{r}$ ifadesi Newton' un cisim potansiyeli olsun.

Hareketli P noktası G ' nin dışında bulunsun. P ' nin cisim noktalarına olan en yakın mesafesini d ve en uzak mesafesini de D ile gösterelim. Bu takdirde,

$$d \leq r \leq D$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{d} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{D}$$

$$\frac{1}{D} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{d}$$

$$\iiint_G \frac{dm}{D} < \iiint_G \frac{dm}{r} < \iiint_G \frac{dm}{d}$$

yazılır. Bu cismin kütesini M ile gösterirsek

$$M = \iiint_G dm \quad (5.15)$$

ve bunun yardımıyla

$$\frac{M}{D} < u_G < \frac{M}{d} \quad (5.16)$$

ilişkisi elde edilir.

P noktası sonsuza itilecek olursa d ve D de aynı şekilde sonsuza giderler ve (5.16) ifadesinden,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} u_G = 0 \quad (5.17)$$

Bulunur. Diğer bir ifade de Ru çarpımını oluşturmak suretiyle elde edilebilir. Eğer $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ile, P noktasının sıfır noktasına olan mesafesi gösterilirse (5.16)' dan

$$\frac{RM}{D} < Ru_G < \frac{RM}{d} \quad (5.18)$$

hesaplanır. $R \rightarrow \infty$ olursa (yani P sonsuza götürülürse) d ve D de sonsuza gider. Böylece

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{D} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{d} = 1$$

ve bunun yardımıyla (5.18)' den,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} Ru_G = M \quad (5.19)$$

elde edilir. Çift tabakanın Newton potansiyelleri için önce (5.17) ifadesine karşılık olarak

$$\lim_{P \rightarrow \infty} u = 0 \quad (5.20)$$

sonucu bulunur. (5.19) ifadesi yerine de

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Ru = 0 \quad (5.21)$$

elde edilir. (5.19) ve (5.21) sonuçları, eğer çift tabakanın kütlesi sıfır olarak alınırsa, birbirleriyle temas ederler. Logaritmik potansiyellerin durumu farklıdır. Logaritmik bir yüzey potansiyelini gözönüne alalım:

$$v_B = \iint_B \mu \log \frac{1}{r} dw - \iint_B \mu \log r dw$$

Burada kabul edelim ki r ' nin değeri 1' den daima büyüktür. Bu takdirde yukarıdaki gibi

$$d \leq r \leq D$$

$$\log d < \log r < \log D,$$

$$\iint_B \mu \log d dw < \iint_B \mu \log r dw < \iint_B \mu \log D dw$$

Burada μ yüzeyin kütle yoğunluğudur.

$$\mu = \frac{dm}{dw} \Rightarrow dm = \mu dw$$

$$M = \iint_B dm = \iint_B \mu dw$$

dir. Buradan $M \log d < |v| < M \log D$ ilişkisini elde ederiz. Eğer P noktası ∞ a giderse bu halde $\lim \log D = \lim \log d, +\infty$ yani $\lim |v| = +\infty$ ve $|v| = -\infty$ olduğundan,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} v = -\infty \quad (5.22)$$

olur. Çift tabakanın logaritmik potansiyeli içinde

$$\lim_{P \rightarrow \infty} v = 0 \quad (5.23)$$

neticesi tahmin edilebilir ve bu netice doğrudur. Şimdi potansiyellerin bu özelliklerini, daha önceki numaralarda bulunmuş sonuçlara bağlı olarak, bir örneğe uygulayabiliriz.

Kütle yoğunluğu sabit olan küresel bir kabuğun potansiyelini hesaplayalım:

Bu kabuk aynı merkezli iki küre ile sınırlandırılmış olsun ve çekilen nokta büyük kürenin dışında bulunsun. Burada tekrar $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ise bu suretle aranan $u(x, y, z)$ potansiyel fonksiyonunun sadece R ' ye bağlı olduğunu kabul edebiliriz. Bu takdirde u ' nun sağlamak zorunda olduğu (4.1) Laplace denklemi ne şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial R} \frac{x}{R} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2}, \frac{x^2}{R^2} + \frac{\partial u}{\partial R} \left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right) \end{aligned}$$

Aynı şekilde $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ifadeleri oluşturulursa bunları toplamak suretiyle

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right] + \frac{\partial u}{\partial R} \left[\frac{3}{R} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^3} \right] \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} \end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. Burada u , sadece R in bir fonksiyonu olduğu için doğrudan doğruya " d " yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{du}{dR} \\ \frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{du}{dR} &= \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \frac{du}{dR} \right] \end{aligned}$$

olduğu göz önünde tutularak $u(R)$ için

$$\frac{d}{dR} \left[R^2 \frac{du}{dR} \right] = 0$$

diferensiyel denklemi veya

$$\int du = -a \int \frac{1}{R^2} dR \Rightarrow u = -a \left(-\frac{1}{R} + c \right)$$

$-ac = b$ için $u = +\frac{a}{R} + b$ elde edilir. b ve a sabitlerini belirleyebilmek için (5.3) ve (5.5) ü kullanalım. Burada $\lim_{R \rightarrow \infty} u = 0$ olduğundan $b = 0$ olmalı. Böylece $u = +\frac{a}{R} \Rightarrow Ru = +a$ olur.

(5.3)' den $+a = M$ bulunur. Bu suretle aranan potansiyel

$$u = \frac{M}{R}$$

olarak elde edilir. Potansiyellerin tanımında şimdiye kadar daima hareketli noktanın, sabit bölgenin herhangi bir noktası ile çakışmadığını kabul ettik. Aksi halde $r = 0$ olur. Bu duruma rağmen aşağıdaki teorem geçerlidir.

TEOREM 5.1:

$u_G = \iiint_G \frac{\mu}{r} d\tau$, $u_F = \iint_F \frac{\mu}{r} dw$ ifadesi ile verilen Newton potansiyelleri, sabit bölgenin herhangi bir noktası ile hareketli noktanın üst üste düşmesi halinde de sürekli kahr. 3. bölüm' deki 3.1' deki örnekte görülmektedir ki yüzey potansiyelinin normal türevi, hareketli noktanın yüzey içerisinden geçmesi halinde $-4\pi\mu$ değerine eşit bir süreksizlik oluşur. Genellikle μ değeri F boyunca değişir. Bu halde hareketli noktanın yüzeyi geçtiği yerdeki yüzey yoğunluğunun değeri μ_σ ile gösterilirse aşağıdaki teorem geçerli olur.

TEOREM 5.2: Hareketli noktanın, yüzeyi σ noktasında geçmesi halinde basit tabakaya ait Newton yüzey potansiyelinin normal türevi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -4\pi\mu_\sigma \quad (5.25)$$

değerinde bir süreksizlik ihtiva eder.

3. bölüm' deki 3.2' deki örnekte görüldüğü gibi çift tabakalı bir yüzeyin Newton potansiyelinde hareketli noktanın yüzey içinden geçmesi halinde, süreksiz olarak değişmektedir. Burada çift tabakalı yüzeyin σ geçiş noktasındaki momentini v_σ ile gösterirsek genellikle

$$u_i - u_a = +4\pi v_\sigma \quad (5.26)$$

geçerli olur.

Logaritmik potansiyeller halinde takip eden araştırmalardaki önemi dolayısıyla çift tabakalanmış bir eğrinin logaritmik potansiyelini daha ayrıntılı olarak inceleyelim ve bu maksatla önce,

$$v^* = \int_C \frac{\cos(r, n)}{r} ds \quad (5.27)$$

şeklinde çift tabakanın momentinin 1' e eşit olduğu özel bir potansiyeli gözönüne alalım. C eğrisinin kapalı bir eğri olduğu ve aşağıda yapılacak olan incelemeler için bazı kabulleri sağladığı farz ediliyor. Burada v^* değerinin geometrik olarak manalandırabiliriz. ds yay elemanının P noktasından itibaren, P etrafına çizilen 1 ve r yarıçaplı daireler üzerine

izdüşürülmesinden elde edilen izdüşümlere sırasıyla $d\sigma$ ve $d\vartheta$ diyelim. Bu takdirde $d\vartheta$, P noktasından ds' nin görüldüğü açı olur.

$$d\sigma = ds \cos(n, r)$$

$$d\sigma = r d\vartheta$$

ve bu halde,

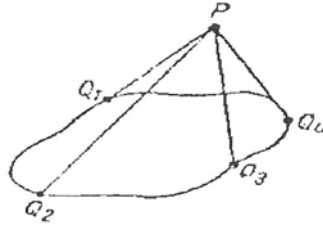
$$d\vartheta = \frac{\cos(r, n)}{r} ds \quad (5.28)$$

olur. Bunlardan yararlanarak (5.27) için

$$v^* = \int_C d\vartheta \quad (5.29)$$

yazılabilir. O halde (5.27) potansiyeli çekilen P noktasından C eğrisinin görüldüğü açıya eşit olur. Bu durumda çekilen noktanın konumuna göre üç farklı hal meydana gelir.

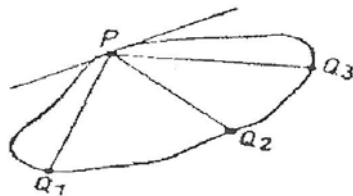
1) Çekilen P noktası C eğrisinin sınırladığı alanın dışındadır. (Bzk. Şekil 5.2)



Şekil 5.2 (P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan dışında)

Q noktasını C eğrisi üzerinde dolaştıralım. Eğer Q , eğri üzerinde dolaşarak başlangıçtaki konuma gelirse bu halde ϑ açısı sıfır değerini alır. Buna göre P noktası B bölgenin dışında ise v^* sıfır olur.

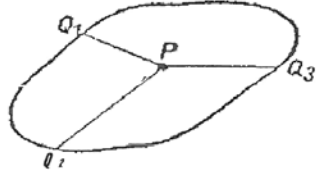
2) Hareketli nokta C eğrisi üzerindedir. (Bzk. Şekil 5.3)



Şekil 5.3 (P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan üzerinde)

Şekilden görülebileceği gibi bu halde v^* , π değerine sahiptir. Yani P, C eğrisi üzerinde $v^* = \pi$ olur.

3) P noktası, C eğrisinin sınırladığı alan içerisindedir. (Bzk. Şekil 5.4)



Şekil 5.4 (P noktasının C eğrisinin sınırladığı alan içinde)

Bu halde ϑ açısı $0'$ dan $2\pi'$ ye kadar değişir. Buna göre P,C eğrisinin sınırladığı alan içerisinde $v^* = 2\pi$ olur.

Görülüyor ki v^* değeri bütün dış bölgede sıfıra eşittir. Eğer çekilen P noktası dış bölgeden C eğrisi üzerine kayarsa v^* değeride sıfırdan π' ye atlar. Eğer nokta iç bölgeye geçerse bu halde atlama $2\pi'$ ye eşit olur. v' nin süreksizliğini v değişkenine göre araştırırken bu sonuçlardan yararlanabiliriz.

Burada hareketli noktanın, C eğrisini geçmesi halini gözönüne alacak olursak bu halde C eğrisi üzerinde değişen bir noktayı s ve aynı eğri üzerindeki geçme noktasını σ indisi ile gösterdiğimiz takdirde

$$\begin{aligned} v &= \int_C v \frac{\cos(r, n)}{r} ds = \int_C (v - v_\sigma + v_\sigma) \frac{\cos(r, n)}{r} ds \\ &= \int_C v_\sigma \frac{\cos(r, n)}{r} ds + \int_C (v - v_\sigma) \frac{\cos(r, n)}{r} ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

olur. Önce

$$g = \int_C (v - v_\sigma) \frac{\cos(r, n)}{r} ds$$

fonksiyonun, σ noktasında yani $s = \sigma$ ve dolayısıyla $r = 0$ halinde sürekli olduğunu gösterelim.

σ noktasını ρ yarıçaplı bir k çemberi ile çevirelim. Bu çember C eğrisi üzerinde C_1 gibi bir parça ayırır. Böylece;

$$g = \int_C = \int_{C-C_1} + \int_{C_1} = g_1 + g_2$$

olarak inceleyelim. Eğer çekilen nokta k çemberi içerisinde ise g_1 integrali sürekli. k çemberinin ρ yarıçapını uygun bir tarzda küçük seçecek olursak ve bu halde σ , C_1 parçası üzerinde olursa $|v - v_\sigma| < \varepsilon$ yapabiliriz. Bu suretle

$$|g_2| < \varepsilon \int_{C_1} \frac{|\cos(r,n)|}{r} ds$$

bulunur. Yukarıdaki integral sonlu bir değerin altındadır zira bu, çekilen P noktasından C_1 yay elemanlarının görüldüğü açının mutlak değerinin toplamını ifade eder.

v_a ile, çekilen nokta dıştan C eğrisine doğru yaklaşırken, v' nin sahip olacağı limit değeri gösterelim. Buna benzer olarak hareketli noktanın içten yaklaşması halindeki limit değeri v_i ve v' nin σ daki değeride v_σ ile gösterilsin. Bu üç değer arasında ne gibi bir ilişki mevcuttur. g fonksiyonu, C eğrisinin geçilmesi halinde sürekli kaldığı vakit $g_i = g_\sigma = g_a$ olur. Yukarıdaki düşüncelerden sabit v için bilindiği gibi $v_\sigma \int_C \frac{\cos(r,n)}{r} ds$ değeri dış bölgede sıfıra eşit, σ noktasında πv_σ ve iç bölgede ise $2\pi v_\sigma$ dır. (5.30) için

$$v = v_\sigma \int_C \frac{\cos(r,n)}{r} ds + g \text{ yazılabilir.}$$

O halde

$$g_a = v_a - 0; \quad g_\sigma = v_\sigma - \pi v_\sigma; \quad g_i = v_i - 2\pi v_\sigma$$

ve eğer

$$g_a = g_\sigma = g_i \text{ ise}$$

$$v_a = v_\sigma - \pi v_\sigma = v_i - 2\pi v_\sigma \quad (5.31)$$

$$v_i = v_\sigma - \pi v_\sigma;$$

$$v_a = v_\sigma - \pi v_\sigma$$

ve buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_i - v_a) &= \pi v_\sigma; \\ \frac{1}{2}(v_i + v_a) &= v_\sigma \end{aligned} \quad (5.32)$$

olur. Burada

$$v_\sigma = \int_C v \frac{\cos(r,n)}{r} ds \quad ((5.32a))$$

olup, σ eğrinin belli bir noktası, s yine C eğrisi üzerinde değişen bir nokta, n iç normal doğrultusu ve r ise s ile σ noktaları arasındaki mesafedir. (5.32) ve (5.32a) denklem-

lerinden

$$\begin{aligned} v_i &= \pi v_\sigma + \int_C v \frac{\cos(r, n)}{r} ds \\ v_a &= -\pi v_\sigma + \int_C v \frac{\cos(r, n)}{r} ds \end{aligned} \tag{5.33}$$

bulunur. İleriki bölümde süreksizlik şartları bu şekilde kullanılacaktır.

Şimdi basit tabakanın logaritmik potansiyelinin süreksizlik durumları sadece kısa olarak verilecektir. Basit olarak tabakalanmış bir eğrinin logaritmik potansiyeli olan

$$v_C = \int_C \mu \log \frac{1}{r} ds$$

hareketli noktanın C eğrisini geçmesi halinde sürekli olarak değişir. Normal türev ise ters olarak süreksizdir.

Bundan sonraki kısımlarda bu harmonik fonksiyonlar ve bunlarla potansiyeller arasındaki bağıntılar incelenecektir.

6. LOGARİTMİK POTANSİYEL İÇİN TERS PROBLEM

Bu bölümün sonuçlarını kısaca özetleyelim.

[9] çalışmasında, polinom şeklinde dış potansiyeller oluşturan ve bilinen sabit yoğunluğa sahip kütlelerle donatılmış tek irtibathlı bölgelerde düzlemsel ters potansiyel problemin çözülebilirliği için gerekli şartlar verilmiştir. Bu şartlardan çözümlerin değerlendirilmesi elde edilmiştir.

Teorem1: [9] da r , φ - kutupsal bileşenler, $\{a_m^1, a_m^2\}$ sabitler olacak biçimde potansiyelinin görüntüsü

$$\phi(r, \varphi) = -c_0 \ln r + \sum_{m=1}^n \frac{a_m^1 \cos m\varphi + a_m^2 \sin m\varphi}{r^m} \quad (6.1)$$

şeklinde, yani sonsuz uzak noktanın komşuluğunda n . dereceden harmonik polinom olan, $\rho_0 > 0$ sabit yoğunluklu kütlelerle donatılmış tek irtibathlı D bölgesinin varlığı için gerek koşullar:

$$c_0 > 0; \quad \left| \frac{c_k}{c_0} \right| \leq \left(\frac{c_0}{\rho_0} \right)^{\frac{k}{2}} l_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

Burada $c_k = k(a_k^1 + ia_k^2)$ sayıları $\phi\left(\vec{r}\right)$ fonksiyonunun harmonik momentumları, l_k^n ise her k ve n için hesaplanabilir sabitlerdir.

Buna ilaveten eğer görüntüsü (6.1) şeklinde olan $\phi\left(\vec{r}\right)$ fonksiyonu için bir D bölgesi mevcutsa bunun sınırı

$$\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} \frac{1}{4\sigma(n)} \leq r \leq \sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

halkasında kapsanıyor. $\sigma(n)$ her n için hesaplanabilirdir.

Bu bölümdeki sonuçlar [9] ve [10] da elde edilen sonuçların devamı olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 1: Eğer D bölgesinde negatif olmayan her harmonik

$$T_n(r, \varphi) = b_0 + \sum_{m=1}^n r^m (b_m^1 \cos m\varphi + b_m^2 \sin m\varphi) \geq 0, \quad (6.4)$$

polinomu için b_0, b_m^1, b_m^2 sabit reel sayılar olmak üzere

$$\check{U}(T_n) = a_0 b_0 + \sum_{m=1}^n m (a_m^1 b_m^1 + a_m^2 b_m^2) \geq 0$$

koşulu sağlanıyorsa, $(c_m) : c_m = m (a_m^1 + i a_m^2)$, $m = 0, 1, \dots$; $a_0^2 = 0$ sayılar dizisine D bölgesinde negatif olmayan harmoniktir denir.

$S_0^{r_0}$ dairesinin dış kısmında harmonik olan her $\phi(r)$ için $(r \rightarrow \infty \text{ iken}) |\phi(r)| \leq M \ln r$ olmak üzere

$$\phi(r, \varphi) = -a_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^1 \cos m\varphi + a_m^2 \sin m\varphi) / r^m \quad (6.5)$$

seri açılımı söz konusudur.

Teorem2: $\phi(r)$ fonksiyonu, tek irtibatlı D bölgesinin dış kısmında harmonik, bu bölgenin ∂D sınırında türevleri ile birlikte sürekli ve sonsuzlukta $M \ln r$ fonksiyonundan daha düşük hızla artan olacak biçimde $\phi(r)$, D de donatılan negatif olmayan $\rho(r) \geq 0$ yoğunluğuna sahip $M(r)$ kütlelerinin dış potansiyeli olması için yalnız ve yalnız (6.5) harmonik serisinin katsayılarından oluşan $(c_m) = \{c_0 = a_0, c_m = m (a_m^1 + i a_m^2)\}$ sayı dizisi D de negatif olmayan bir harmonik dizi olmasını gerektirir.[10]

Bu teoremin ispatı D bir daire olduğunda daha basittir.

Benzer şekilde 3 boyutlu durumda da aynı teorem söz konusudur.

Bu sebeple aşağıdaki teorem söz konusudur.[10]

Teorem3: Merkezi orjin noktasında yarıçapı λ olan S_0^λ dairesinde harmonik, türevleri ile birlikte sürekli olan, sonsuzlukta $m \ln r$ den daha az hızla artan $\phi(r)$ fonksiyonu, S_0^λ da bulunan kütlelerin $(\rho(r) \geq 0)$ dış potansiyeli olması için yalnız ve yalnız aşağıdaki koşulların sağlanması gerekiyor:

$$\Delta_K = \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{\lambda} c_1 \dots & \frac{1}{\lambda^k} c_k \\ \frac{1}{\lambda} \check{c}_1 & a_0 \dots & \frac{1}{\lambda^{k-1}} c_{k-1} \\ \frac{1}{\lambda^k} \check{c}_k & \frac{1}{\lambda^{k-1}} \check{c}_{k-1} \dots & a_0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.6)$$

$$c_k = k (a_k^1 + i a_k^2), \quad \check{c}_k = k (a_k^1 - i a_k^2) \quad (6.7)$$

Örnek1: $\phi(r, \varphi) = -\ln r + \frac{2 \cos 2\varphi}{r^2}$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0$; $c_2 = 4$; $c_k = 0, k \geq 3$

şeklinde dış potansiyele sahip kütlelerin bulunabileceği en küçük yarıçaplı dairenin bulunmasını inceleyelim:

(6.6) ye göre

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= 1; \quad \Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1 - \frac{16}{\lambda^4} \geq 0; \\ \Delta_3 &= 1 - \frac{32}{\lambda^4} \geq 0; \quad \Delta_4 = 1 - \frac{48}{\lambda^4} + \frac{256}{\lambda^8} \geq 0; \\ \Delta_n &= \Delta_{n-1} + \frac{256}{\lambda^8} \Delta_{n-4} - \frac{16}{\lambda^4} \Delta_{n-3} = 0, \quad n = 5, 6, \dots\end{aligned}$$

Böylece $1 - \frac{32}{\lambda^4} \geq 0$ eşitsizliğinden $\lambda \geq 2\sqrt[4]{4}$ elde ederiz. Yani, sadece $\vec{r} = 0$ noktasında tekile sahip bu potansiyelli kütle dağılımı yarıçapı $2^{\frac{5}{4}}$ den küçük olan dairede bulunamaz.

(6.2) ve (6.3) de bulunan sabitler için [9] da aşağıdaki değerler gösterilmiştir:

$$l_2^3 = 0,1875; \sigma(3) = 3,1112$$

(6.2) den faydalanarak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} \geq \left(\frac{4}{0,1875} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 4,62\dots$$

Aranan bölgenin sınırları

$$\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} \frac{1}{4,3,1112} \leq r \leq \sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

halkasında kapsandığı için, $\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}} = 4,62$ ele alarak, $\phi(r, \varphi)$ potansiyeline sahip, sabit yoğunluklu tek irtibatlı bölgenin kapsadığı minimum halkayı elde ederiz:

$$0,371 \leq r \leq 6,237$$

$$\text{Ayrıca } \sqrt{\frac{1}{\rho_{\max}}} = \left(\frac{4}{0,1875} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \rho_{\max} = \frac{0,1875}{4} \approx 0,047$$

dir.

6.1 $|\rho(r)| \leq L$ İçin Ters Potansiyel Probleminin Çözümünün Varlığı Şartları

Bu paragrafın esas sonucunu ifade etmeden önce aşağıdaki iki önemli hatırlatmaları ifade edelim.

1. $\rho(r)$ yoğunluklu S_0^1 dairesinde bulunan kütlenin dış potansiyelinin $\phi(r)$ fonksiyonu olması için (6.5) açılımındaki (6.7) formülü ile tanımlanan c_k harmonik momentumları yalnız ve yalnız

$$c_n = \int_{S_0^1} \rho(r, \varphi) e^{in\varphi} r^{n+1} dr d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

integral görüntülerine sahip olduğunda mümkündür. Bu integralin görüntüsü, Laplace temel çözümünün harmonik polinomlara, açılımının bir sonucudur.[11]

2. Kütlenin merkezi olarak koordinat sisteminin orjin noktasını ele alırsak, harmonik momentumlar bu durumda aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$\begin{aligned} \check{c}_0 &= c_0, \quad \check{c}_1 = 0 \\ \check{c}_k &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{j}{k} c_{k-j} z_0^j, \quad z_0 = \frac{c_1}{c_0} \\ \text{burada } \binom{j}{k} &\text{-binomial kat sayıdır.} \end{aligned}$$

Teorem4: $\phi(r)$ fonksiyonu S_0^1 birim dairesinin dışında harmonik, bu dairenin sınırında türevleri ile birlikte sürekli ve sonsuzlukta $M \ln r$ den daha az hızla artan olsun. $\rho(r)$ ölçülebilir ve $|\rho(r)| \leq L$ olmak üzere $\rho(r)$ yoğunluklu S_0^1 de bulunan kütlenin dış potansiyeli $\phi(r)$ olacak biçimde aşağıdaki şartlar sağlanıyor:

1. $-\pi L \leq c_0 \leq \pi L$

2. $B(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasının komşuluğunda Taylor serisine

$$B(z) = \exp \left\{ \frac{i}{L} \left(\frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n \right) \right\} = \gamma + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n + \dots \quad (6.8)$$

açılımındaki $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ dizisi S_0^1 de harmonik negatif olmayan bir dizidir ve

$$\gamma_0 = \gamma + \bar{\gamma} = 2 \cos \frac{c_0}{2L}.$$

İspat: $\phi(r)$ fonksiyonunun (6.5) açılımındaki c_n momentumlar yukarıdaki şekilde olmak üzere, teoremin verilen koşullardan $\rho(r)$ ($|\rho(r)| \leq 0$) fonksiyonun varlığı elde edilir.

$$F(z) = \frac{1}{2L} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{1 + r e^{i\varphi} z}{1 - r e^{i\varphi} z} \rho(r, \varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{L} \left(\frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_4 z^4 + \dots \right) \quad (6.9)$$

$|z| < 1, z = |z| e^{i\theta}$, $F(z)$ fonksiyonu S_0^1 de regülerdir ve reel kısmı

$$ReF(z) = \frac{1}{2L} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{1 - r^2 |z|^2}{1 - 2r |z| \cos(\theta + \varphi) + r^2 |z|^2} dr d\varphi$$

şeklinde olmak üzere, bu dairede

$$|ReF(z)| \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.10)$$

dir. Gerçekten

$$|ReF(z)| \leq \frac{1}{2L} \int_0^1 r \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2 |z|^2}{1 - 2r |z| \cos(\theta + \varphi) + r^2 |z|^2} dr d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$|z| < 1$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2 |z|^2}{1 - 2r |z| \cos(\theta + \varphi) + r^2 |z|^2} d\varphi = 2\pi$$

integrali θ dan bağımsızdır. (6.10) eşitsizliğinden S_0^1 regüler olan

$$\tilde{F}(z) = \exp(iF(z))$$

fonksiyonunun reel kısmının bu dairede pozitif olmak üzere bir Karateodori fonksiyonu olacağı elde edilir ve

$$\operatorname{Re} \tilde{F}(z) = |F(z)| \cos(\operatorname{Re} F(z)) > 0$$

Böylece Karateodori-Tepliteze teoreminden dolayı (γ_n) dizisinin S_0^1 de negatif olmayan bir harmonik dizi olduğu elde edilir. Teoremdeki 1.koşulunun gerekliliği ise aşıkardır. Teorem ispatlanmıştır.[8]

$|c_0| < \pi L$ olsun. Aksi takdirde $\gamma_0 = 0$ olacak biçimde (γ_k) negatif olmayan dizi olduğu için $\gamma_k = 0$ olur. Bu ise $c_k = 0, k = 1, 2, \dots$ demektir.

Böylece aşağıdaki Lemma söz konusudur:

Lemma 1: $c_0 \neq 0$ olmak üzere $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ dizisi S_0^1 de negatif olmayan harmonik dizi olsun. Bu takdirde $\frac{c_0}{2}, \frac{c_1}{3}, \dots, \frac{c_n}{n+3}, \dots$ dizisi de S_0^1 de harmonik negatif olmayan bir dizidir.

İspat: Negatif olmayan harmonik dizisinin tanımından faydalananarak Lemma'yı ispatlayalım:

$c_0, 0, 0, \dots, 0, \dots$ dizisinin negatif olmaması, $c_0 \geq 0$ ve $\frac{c_0}{2} \geq 0$ demektir. Yani $\frac{c_0}{2}, 0, \dots, 0, \dots$ dizisi de negatif değildir. $c_0, c_1, 0, \dots, 0, \dots$ dizisinin negatif olmaması $c_0 \geq 0$ ve

$c_0b_0 + a_1^1b_1^1 + a_1^2b_1^2$ demektir.

Burada $c_1 = a_1^1 + ia_1^2$ ve $b_0 \geq 0$; b_1^1, b_1^2 sayıları çember üzerinde negatif olmayan trigonometrik polinomun ilk katsayılarıdır. Bu takdirde

$$\frac{c_0b_0}{2} + \frac{a_1^1b_1^1 + a_1^2b_1^2}{3} = \left(\frac{c_0b_0 + a_1^1b_1^1 + a_1^2b_1^2}{3} \right) + \frac{c_0b_0}{6} \geq 0$$

olur. Bu ise $\frac{c_0}{2}, \frac{c_1}{3}, 0, \dots, 0, \dots$ dizisinin negatif olmaması anlamına geliyor. $k \geq n$ için $c_k = 0$ olmak üzere (c_k) dizisi ve $j \geq n+1$ için $c_j = 0$ olmak üzere (c_j) dizisi için Lemma'nın sağlandığını varsayalım. (6.9) eşitsizliğinden dolayı $c_0, c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0, \dots$ dizisinin negatif olmaması $m = 1, 2, \dots, n-1$ için $c_0, c_1, \dots, c_m, 0, \dots$ dizisinin negatif olmaması demektir.

Dolayısıyla çember üzerinde negatif olmayan her trigonometrik

$$T_k = b_0 + \sum_{l=1}^k (b_l^1 \cos l\varphi + b_l^2 \sin l\varphi), \quad k > n$$

polinomu için

$$a_0b_0 + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_k^1b_k^1 + \tilde{a}_k^2b_k^2) \geq 0, \quad \tilde{a}_k^1 = ka_k^1, \quad \tilde{a}_k^2 = ka_k^2, \quad k > 1 \quad (6.12)$$

$$\frac{a_0b_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\tilde{a}_k^1b_k^1}{k+2} + \frac{\tilde{a}_k^2b_k^2}{k+2} \right) \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.13)$$

$$a_0b_0 + \sum_{k=1}^m (\tilde{a}_k^1b_k^1 + \tilde{a}_k^2b_k^2) \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.14)$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu durumda

$$\frac{a_0b_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\tilde{a}_k^1b_k^1}{k+2} + \frac{\tilde{a}_k^2b_k^2}{k+2} \right) \geq 0$$

olduğunu göstermek gerekiyor. Eğer $\tilde{a}_n^1b_n^1 + \tilde{a}_n^2b_n^2 \geq 0$ ise ispat açıktır. Eğer $(\tilde{a}_n^1b_n^1 + \tilde{a}_n^2b_n^2) < 0$ ise

$$\frac{a_0b_0}{2} + \sum \left(\frac{\tilde{a}_k^1b_k^1}{k+2} + \frac{\tilde{a}_k^2b_k^2}{k+2} \right) \geq \frac{1}{n+2} \left[a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{a}_k^1b_k^1 + \tilde{a}_k^2b_k^2) \right] \quad (6.15)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

Tümevarım yöntemi (İndüksiyon) ile (6.15)'yi ispatlayalım. (6.13) ve (6.14)'den

$$n = 1 \text{ için } \frac{a_0b_0}{2} \geq \frac{a_0b_0}{3};$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} \frac{a_0 b_0}{2} + \frac{1}{3} (\tilde{a}_1^1 b_1^1 + \tilde{a}_1^2 b_1^2) &= \frac{1}{4} (a_0 b_0 + \tilde{a}_1^1 b_1^1 + \tilde{a}_1^2 b_1^2) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{a_0 b_0}{2} + \frac{\tilde{a}_1^1 b_1^1 + \tilde{a}_1^2 b_1^2}{3} \right) + \frac{1}{8} a_0 b_0 \\ &\geq \frac{1}{4} (a_0 b_0 + \tilde{a}_1^1 b_1^1 + \tilde{a}_1^2 b_1^2) \end{aligned}$$

elde ederiz.

$j = n - 1$ için (6.15) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edip, $j = n$ için gösterelim.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} &\frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\tilde{a}_k^1 b_k^1}{k+2} + \frac{\tilde{a}_k^2 b_k^2}{k+2} \right) - \frac{1}{n+1} \left[a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{a}_k^1 b_k^1 + \tilde{a}_k^2 b_k^2) \right] \\ &= \frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{\tilde{a}_k^1 b_k^1}{k+2} + \frac{\tilde{a}_k^2 b_k^2}{k+2} \right) - \frac{1}{n+1} \left[a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-2} (\tilde{a}_k^1 b_k^1 + \tilde{a}_k^2 b_k^2) \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

buluruz. Fakat

$$\frac{1}{n+1} \left[a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{a}_k^1 b_k^1 + \tilde{a}_k^2 b_k^2) \right] \geq \frac{1}{n+2} \left[a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{a}_k^1 b_k^1 + \tilde{a}_k^2 b_k^2) \right] \geq 0$$

Böylece (6.15) eşitsizliği, yani Lemma ispatlanmıştır.

Lemma 2: $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ dizisinde $c_1 = 0$ olsun. Bu takdirde (6.8) açılımındaki γ_n sayılarından oluşan (γ_n) dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\gamma_0 = 2 \cos \frac{c_0}{2L}; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_n = \frac{i}{L} n! c_n e^{\frac{ic_0}{2L}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

Bu Lemma'nın ispatı (6.8)'i differensiyellersek hemen elde edilir.

7. SONUÇ

Bu tezde, potansiyel teorisinin esas denklemleri başlığı altında laplace diferansiyel denklemi ve poisson denklemi olmak üzere Laplace Green formülleri ile harmonik fonksiyonların genel özellikleri ve potansiyellerin sonsuzluktaki durumu ve süreksizlik özellikleri, logaritmik potansiyel için ters problem ve ters problemin çözümünün aprior değerlendirilmesi ve böylece yoğunluk modülü kaynağında kısıtlanan ters logaritmik potansiyel problemin bir çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşullarda tanımı elde edilmiştir. Bu tanımın bir sonucu olarak yoğunluk ve bu potansiyelin kaynağının yerel bölgede büyüklüğünü tahmin etmek mümkündür. Sonuçlar harmonik polinomlar ile potansiyel alanların incelenmesinin numeriksel yaklaşım kararlılığını geliştirmek için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

References

- [1] **Schwank Kassel F.**, 1963. Sınır Değer Problemleri ve Yüksek Analizin Tatbikat Alanları, Çeviri: Tameroglu S.S., İ.T.Ü Yayınları, İstanbul.
- [2] **Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A.**, 2000. Matematik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara .
- [3] **Tikhonov A., N.**, “**Samorskiy A. A.**, 1972. Matematik Fizik Denklemleri “ Moskova .
- [4] **Coldon D., Krees R.**, 1978. Integral Equation Methods in Scattering Theory. J. Willey-Int. Public. New York.
- [5] **Helms L.L.** , 1969. " Introduction do Potential Theory " , John Willey, New York.
- [6] **Balcı, M.**, 1997. Matematik Analiz-2, Balcı Yayınları, Ankara.
- [7] **Akhiezer N., I.**, 1961. Klasik momentum problemi Moskova.
- [8] **Akhiezer N., Krein M.**,1938. Momentum Probleminin Bazı Soruları, TBN, Harkov.(Ukrayna)
- [9] **Cherednichenko V. G.**, 1982. Necessary conditions for the solubility of the two-dimensional inverse probleme in gravimetry. Phys of the solid earth İsv. Acad. of Sci. USSR, v.17, No 5.
- [10] **Brodsky M. A., Nadirashvili N. S.**, 1983. On the existence and uniqueness in the inverse potential problem with a piori information on source distribution. Phys. of the Solid Earth, İzv. Acad. of Sci. USSR , v.18, No 8, 591-597.
- [11] **Morse P. M., Feshbach H.**, 1953. Metods of theoretical physics. McCrow-Hill, Newyork.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2003 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2007 yılında Matematik Bölümünden bölüm üçüncüsü sınıf birincisi olarak mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi dalında tezsiz yüksek lisansa başladım. 2008 yılında tezsiz programını bitirip, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başladım.