

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON DİZİLERİNİN m . FARKLARI İLE
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ
Muhammed ÇINAR
(08221201)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 15 Temmuz 2013

TEMMUZ-2013

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON DİZİLERİNİN m. FARKLARI İLE
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

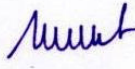
DOKTORA TEZİ

Muhammed ÇINAR

(08221201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 15.07.2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 03.09.2013

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü) 

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü) 

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN (Y.T.Ü) 

Doç. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü) 

Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü) 

Temmuz-2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde, engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, doktora eğitimim boyunca hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET' e üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana zamanını ayıran değerli hocalarım Prof. Dr. Rifat ÇOLAK, Doç. Dr. Yavuz ALTIN, Doç. Dr. Hıfı ALTINOK, değerli arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Murat KARAKAŞ'a, Yrd. Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a özellikle eşime ve aileme teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Muhammed ÇINAR

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1.GİRİŞ.....	1
2. GENEL KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık.....	6
2.3. α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık	9
2.4. λ – İstatistiksel Yakınsaklık.....	10
2.5. Fark Dizi Uzayları.....	11
3. FONKSİYON DİZİLERİNİN Δ^m - NOKTASAL YAKINSAKLIĞI, Δ^m - DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI VE Δ^m - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	15
3.1. Fonksiyon Dizilerinin Δ^m - Noktasal ve Δ^m -Düzgün Yakınsaklığı.....	15
3.2. Fonksiyon Dizilerinin Δ^m - Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı, Δ^m -Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı.....	36
3.3. Fonksiyon Dizilerinin (Δ^m, λ) İstatistiksel Yakınsaklığı.....	44
4. FONKSİYON DİZİLERİNİN α . DERECEDEDEN Δ^m - NOKTASAL İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE Δ^m - DÜZGÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.....	48
4.1. Fonksiyon Dizilerinin α . Dereceden Δ^m - Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı ..	48
4.2. Fonksiyon Dizilerinin α . Dereceden Δ^m - Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı	58
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	64

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun literatürdeki önemini ve hazırlanan çalışmanın kısa bir taslağını içeren giriş bölümüdür.

İkinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde fonksiyon dizilerinin m . farkları oluşturulup yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık kavramları incelenmiştir. Sınırlı fonksiyon dizilerinin uzayı, yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı ve sıfıra yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayları tanımlanmış bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. m . farkları oluşturulan fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve düzgün istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve istatistiksel yakınsaklıkla Cesaro toplanabilirlik arasındaki ilişki incelenmiştir.

Dördüncü bölümde farkları genelleştirilen fonksiyon dizilerinin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı ve α . dereceden düzgün istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve α . dereceden Cesaro toplanabilirlikle arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Dizi uzayı, Cesaro toplanabilme

SUMMARY

m. Difference Of Sequences Of Functions with Its Statistical Convergence

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter the significance of the subject in literature and also a brief overview of the study.

In the two chapter, we give some fundamental definitions and theorems.

In the third chapter the sequence of functions m . differences created in the concepts of pointwise convergence and uniform convergence. We define bounded sequences of functions spaces convergent sequences of function spaces and null sequences of function spaces and this spaces examined the relationship between. We define generalized difference sequences of functions pointwise statistical convergence and uniform statistical convergence and examined the relationship between the statistical convergence and Cesaro summability.

In the four chapter we define generalized difference sequences of functions pointwise statistical convergence of order α and uniform statistical convergence of order α and examined the relationship between the statistical convergence and Cesaro summability of order α .

Key Words: Sequences of functions, Statistical convergence, Sequences spaces, Cesaro summability.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
ω	: Reel terimli dizilerin uzayı
h.h.k	: Hemen hemen her k
h.h.k(α)	: α 'ya göre hemen hemen her k
$(C,1)$	: Cesaro yakınsak dizilerin kümesi
$[C,1]$	: Kuvvetli Cesaro yakınsak dizilerin kümesi
$p.st.$ $\rightarrow$	: Noktasal istatistiksel yakınsaklık
$u.st.$ $\rightarrow$	: Düzgün istatistiksel yakınsaklık

1.GİRİŞ

Toplanabilme teorisinin en geniş uygulama ve araştırma alanlarından biri, 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. Bu yakınsaklık tipi klasik anlamda yakınsaklığın bir genelleşmesi olup pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Özellikle Schoenberg [3], Salát [4], Freedman ve Sember [5], Fridy [6], Fridy ve Orhan [7-8] , Connor [9-10], Kolk [11] gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Buck [12] reel ve kompleks diziler için istatistiksel yakınsaklığı geliştirerek bu kavramın genelleştirme fikrini ortaya atmıştır. Schoenberg [3] toplanabilme teorisi ile istatistiksel yakınsaklığın ilişkisini incelemiştir. Freedman ve Sember [5] yoğunluk ve negatif olmayan matrisler arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Connor [10] istatistiksel yakınsaklık kavramında C_1 Cesàro matrisi yerine negatif olmayan regüler A matrisi alarak A-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştır.

İstatistiksel yakınsaklıkla ilişkili diğer önemli yakınsaklık tipleri ise sırası ile Fridy ve Orhan [8] ve Mursaleen [13] tarafından tanıtılan lacunary istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklıktır.

Fridy ve Orhan [8], klasik limit noktası kavramını baz alarak, bir reel dizinin istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını yine Fridy ve Orhan [8] bir dizinin istatistiksel üst ve alt limiti ve istatistiksel çekirdeği kavramlarını tanıtmışlardır.

Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın Fourier serileri, fonksiyonel analiz, sayılar teorisi [14], ölçü teorisi[15], topoloji [16] ve yaklaşım teorisi [17] gibi matematiğin temel alanlarıyla da ilişkisi vardır. Son zamanlarda, Di Maio vd. [18] ve Djurcic vd. [19] tarafından yapılan çalışmalarda

istatistiksel yakınsaklığın asimptotik analiz, seçme prensipleri ve oyun teorileri gibi farklı alanlara da uygulandığı görülmektedir. Mursaleen ve Edely [20] ve Móricz [21] istatistiksel yakınsaklığı çift indisli dizilere genişletmişlerdir.

Fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili Duman ve Orhan [38], Gökhan ve Güngör [40] çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümünde fonksiyon dizilerinin m. farkları oluşturulup bu dizilerin noktasal yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklığı incelenmiş sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayları tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. m. farkları tanımlanan fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı düzgün istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve çalışılmıştır. Farkları tanımlanan fonksiyon dizilerinin Cesaro toplanabilirliği tanımlanmış ve istatistiksel yakınsaklıkla arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra fonksiyon dizileri için λ - istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde fonksiyon dizileri için α . dereceden noktasal istatistiksel yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış. α . dereceden Cesaro toplanabilirlikle arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve K kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K skaler cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v) $1 \cdot x = x$

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [22].

Tanım 2.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, x) = 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay

denir [22].

Tanım 2.1.3. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şartlar sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N3) şartı $p > 0$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ şart ile değiştirilirse bu taktirde X e bir $p -$ normlu uzay denir [23].

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [23].

Tanım 2.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [23].

Tanım 2.1.6. Kompleks terimli bütün $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin kümesini ω ile göstereceğiz. $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında ω bir lineer uzayıdır. ω nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [24].

Tanım 2.1.7. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir [23].

Tanım 2.1.8. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir. Yani A kümesi kompakt ise her $\mathbf{A}$ açık örtüsünün sonlu sayıda,

örneğin n tane, açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathbf{A} : i = 1, \dots, n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ yazılabilir [25].

Tanım 2.1.9. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK – uzayı denir [27].

Tanım 2.1.10. (Minkowski Eşitsizliği)

i) $p \geq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n b_k^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $0 < p \leq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^p$$

eşitsizliği sağlanır [26].

Tanım 2.1.11. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a_k, b_k \geq 0, (k = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır [26].

Tanım 2.1.12. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [1] ve Schoenberg [3] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir. O zamandan beri istatistiksel yakınsaklık, farklı isimler altında Fourier analiz, ergodic teori ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. Her iki araştırmacı tarafından sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık, Šalát [4], Fridy [6], Fridy ve Orhan [7], Connor [9-10], Mursaleen [13], Tripathy [28], Savaş [29] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda, kuvvetli integral toplanabilmede ve lokal kompakt uzaylar üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların ideallerinin yapısında istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmesi görülmektedir.

Tanım 2.2.1. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [14].

Tanım 2.2.2. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve h.h.k biçiminde gösterilir [6].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.2.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir [6].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzay S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S\text{-}\lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir. Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanlar vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 1, & k \neq m^2, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S\text{-}\lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S\text{-}\lim x_k = L_1$, $S\text{-}\lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 2.2.4. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [6].

Teorem 2.2.5. $S\text{-}\lim x_k = a$, $S\text{-}\lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

[1] $S\text{-}\lim cx_k = ca$ dr,

[2] $S\text{-}\lim (x_k + y_k) = a + b$ dir [1].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 2.2.6. Aşağıdaki önermeler denktir.

- 1) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- 2) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- 3) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [6].

2.3. α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1. $0 < \alpha \leq 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) olmak üzere $\mathbb{N}$ nin bir E alt kümesinin α – yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E nin n den küçük olan elemanlarının sayısını göstermek üzere,

$$\delta_\alpha(E) = \lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

şeklinde tanımlanır. $x = (x_k)$ dizisi $0 < \alpha < 1$ – yoğunluklu bir küme dışında hemen hemen her k için $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa x_k ya " α ya göre *hemen hemen her k* " için $P(k)$ özelliğini sağlıyor denir ve kısaca " $h.h.k.(\alpha)$ " ile gösterilir. $\mathbb{N}$ nin sonlu bir alt kümesinin α – yoğunluğu sıfırdır ve $0 < \alpha < 1$ için $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ genelde doğru değildir, sadece $\alpha = 1$ için doğrudur. $\alpha = 1$ durumunda herhangi bir kümenin α – yoğunluğu o kümenin doğal yoğunluğuna indirgenir [30].

Tanım 2.3.2. (x_k) bir reel sayı dizisi $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ reel sayısı varsa (x_k) dizisine ℓ reel sayısına α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^\alpha - \lim x_k = \ell$ şeklinde gösterilir. α . dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S^α ile göstereceğiz. α . dereceden 0 a istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_0^α ile göstereceğiz. Her bir $0 < \alpha \leq 1$ için $S_0^\alpha \subset S^\alpha$ olacağı açıktır. $\alpha = 1$ olması halinde α . dereceden istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır [30].

2.4. λ – İstatistiksel Yakınsaklık

Λ ile pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ özelliğini sağlayan sonsuza giden ve azalmayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini gösterelim. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına (V, λ) – toplanabilirdir denir [31].

Eğer $\lambda_n = n$ ise bu durumda (V, λ) – toplanabilme, $(C, 1)$ – toplanabilmeye indirgenir.

Kuvvetli $(C, 1)$ – toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) – toplanabilir dizilerin kümeleri sırasıyla

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.1. $\lambda \in \Lambda$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye λ – istatistiksel yakınsaktır veya L ye S_λ – yakınsaktır denir

[13]. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ yazılır.

$\lambda_n = n$ alınırsa S_λ ile S uzaylar birbirine denk olur.

Teorem 2.4.2. $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde

- i) $x_k \rightarrow L[V, \lambda] \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir.
- ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ dir.
- iii) $S_\lambda \cap \ell_\infty = [V, \lambda] \cap \ell_\infty$ dir [13].

Teorem 2.4.3. $S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır [13].

2.5. Fark Dizi Uzayları

Fark dizisi ve fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [32] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz, bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [33], $m \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^0 x = (x_k), \quad \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \quad \Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}), \quad \Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile birer BK – uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [34], X herhangi bir dizi uzay olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir. Fark dizi uzaylar ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 2.5.2. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [34].

Teorem 2.5.3. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [34].

Teorem 2.5.4. X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayında konvektir [35].

Teorem 2.5.5. Eğer $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^n |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [34].

Tanım 2.5.6. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

yani h.h.k. için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m – istatistiksel yakınsaktır denir. Δ^m – istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m – istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [34].

Sonuç 2.5.7. $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır [34].

Tanım 2.5.8. p pozitif bir reel sayı ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m – Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m – Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir ve $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazılır [34].

Teorem 2.5.9. $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [34].

Sonuç 2.5.10. i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$

ii) $S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [34].

Tanım 2.5.11. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m – istatistiksel Cauchy dizisi denir [34].

Teorem 2.5.12. Δ^m – istatistiksel yakınsak her dizi Δ^m – istatistiksel Cauchy dizisidir [34].

Teorem 2.5.13. $y = (y_k)$ dizisi Δ^m – istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ h.h.k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise $y = (y_k)$ Δ^m – istatistiksel yakınsak bir dizidir[34].

3. FONKSİYON DİZİLERİNİN Δ^m - NOKTASAL YAKINSAKLIĞI, Δ^m -DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI VE Δ^m - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

3.1. Fonksiyon Dizilerinin Δ^m -Noktasal ve Δ^m -Düzgün Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$S: \mathbb{N} \rightarrow F(A)$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi adı verilir [36].

Tanım 3.1.2. $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir [36].

Tanım 3.1.3. $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_k\}$ dizisine $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $k \geq k_0$ olduğunda $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa f fonksiyonuna Δ^m -noktasal yakınsaktır denir. A kümesi üzerinde f fonksiyonuna Δ^m -noktasal yakınsak fonksiyon dizilerinin kümesini

$$c_n(\Delta^m, F) = \{F = (f_k) : \lim_k \Delta^m f_k(x) = f(x), \forall x \in A\}$$

sıfıra Δ^m -noktasal yakınsak fonksiyon dizilerinin kümesini de

$$c_{0,n}(\Delta^m, F) = \{F = (f_k) : \lim_k \Delta^m f_k(x) = 0, \forall x \in A\}$$

ile göstereceğiz.

Burada $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 f_k(x) = f_k(x)$, $\Delta f_k(x) = (f_k(x) - f_{k+1}(x))$, ve $\Delta^m f_k(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x)$

dir.

Örnek 3.1.4. $f_k(x) = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2$ biçiminde tanımlanan $\{f_k\}$ dizisi $A = [-1, 1]$ üzerinde $f(x) = 0$

fonksiyonuna Δ^m -noktasal yakınsaktır. Gerçekten $\Delta^m f_k(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(x - \frac{1}{k+v}\right)^2$

olacağından

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m f_k(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(x - \frac{1}{k+v}\right)^2 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\binom{m}{0} \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - \binom{m}{1} \left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \dots + \binom{m}{m} \left(x - \frac{1}{k+m}\right)^2 \right) \\ &= x^2 \left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + \binom{m}{m} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse $(f_k(x))$ dizisi $f(x) = x^2$ fonksiyonuna noktasal yakınsak ancak $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi 0'a noktasal yakınsaktır.

Tanım 3.1.5. $\{f_k\}$ dizisine $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyle ki $\forall k > k_0$ ve $\forall x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa f fonksiyonuna A üzerinde Δ^m -düzgün yakınsaktır denir.

A kümesi üzerinde f fonksiyonuna Δ^m -düzgün yakınsak fonksiyonların kümesini

$$c_d(\Delta^m, F) = \{F = (f_k) : \lim_k \Delta^m f_k(x) = f(x), \text{düzgün}, \forall x \in A\}$$

sıfıra Δ^m -düzgün yakınsak fonksiyonların kümesini de

$$c_{0,d}(\Delta^m, F) = \{F = (f_k) : \lim_k \Delta^m f_k(x) = 0 \text{düzgün}, \forall x \in A\}$$

ile göstereceğiz.

Örnek 3.1.6. $f_k(x) = x^k$ fonksiyonun $A = [0, \frac{1}{2}]$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu fonksiyonun farkının da $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Bu işlemi $m=1$ için yapalım. Genel durumu aşağıdaki

teoremden sonra ifade edeceğiz.

$$\Delta f_k(x) = f_k(x) - f_{k+1}(x) = x^k - x^{k+1} \text{ olup,}$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için } 0 \leq x^k - x^{k+1} \leq \frac{1}{2^k} \text{ eşitsizliğini sağlayan her } k \in \mathbb{N} \text{ için } x^k - x^{k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

yazabiliriz.

$\varepsilon > 0$ verilsin $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ eşitsizliğini hangi k lar için sağlandığını görelim. $\ln \frac{1}{2} < 0$ olduğundan

$$\frac{1}{2^k} < \varepsilon \Leftrightarrow k \ln \frac{1}{2} < \ln \varepsilon \Leftrightarrow k > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$$

olur. Buna göre $k_0 = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$ alınırsa $\forall k > k_0$ için $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ ve dolayısıyla

$$|f_k(x) - f_{k+1}(x)| = |x^k - x^{k+1}| < \varepsilon$$

Bulunur ki bu (Δf_k) dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.7. $\Delta^m f_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$ için) ve f fonksiyonları $A = [a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsunlar. $\{\Delta^m f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_k = \max_{a \leq x \leq b} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|$$

eşitliğiyle tanımlanan (c_k) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır.

İspat: $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna Δ^m -düzgün yakınsak olsun. Herbir k için $|\Delta^m f_k - f|$ fonksiyonları A aralığı üzerinde sürekli olduğundan maksimum değerini A 'nın bir (x_k) noktasında alır. Yani $|\Delta^m f_1 - f|$ fonksiyonu x_1 noktasında $|\Delta^m f_2 - f|$ fonksiyonu x_2 noktasında $|\Delta^m f_k - f|$ fonksiyonu x_k noktasında maksimum değerini alır.

$$c_k = |\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)|$$

diyelim. Düzgün yakınsaklık tanımından biliyoruz ki, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyle ki $\forall k > k_0$ ve $\forall x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ yazabiliriz. Buna göre $\forall k > k_0$ için

$$c_k = |\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

olur ki bu (c_k) dizisinin bir sıfır dizisi olduğunu gösterir.

Tersine (c_k) bir sıfır dizisi olsun. Sıfır dizisinin tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyle ki $\forall k > k_0$ için $c_k < \varepsilon$ kalır. $c_k = \max_{a \leq x \leq b} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|$ olduğundan $\forall k > k_0$ ve $\forall x \in A$ için

$$0 \leq |\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)| \leq c_k < \varepsilon$$

kalır ki bu $\{\Delta^m f_k\}$ dizisinin f ye düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.8. $f_k(x) = x^k$ fonksiyonun $A = [0, \frac{1}{2}]$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Bu fonksiyonun m. farklarının da düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.7.'den faydalanalım.

$\Delta f_k(x) = f_k(x) - f_{k+1}(x) = x^k - x^{k+1}$ olup, bu fonksiyonun $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olup olmadığına bakalım.

$c_k = \max \left\{ |x^k - x^{k+1} - 0| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}$ dizisi düzgün sıfır dizisidir. Gerçekten

$$\begin{aligned} (\Delta f_k(x))' &= (x^k - x^{k+1})' = kx^{k-1} - (k+1)x^k = x^{k-1}(k - (k+1)x) = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0, x_2 = \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

x	0 $\frac{k}{k+1}$		
f(x)	-	+	-
			

$\Delta f_k(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k}{k+1}$ de yerel maksimuma sahip olup

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^k - \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+1} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \left[1 - \frac{k}{k+1} \right] = \frac{1}{e} 0 = 0$$

olup (c_k) sıfır dizisi olduğundan $\Delta f_k(x)$ fonksiyonu sıfıra düzgün yakınsaktır.

$\Delta^2 f_k(x) = f_k(x) - 2f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) = x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2}$ fonksiyonu $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Bu fonksiyonunun $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olup olmadığına bakalım,

$$c_k = \max \left\{ \left| x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2} - 0 \right| : x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

olup,

$$\begin{aligned} (\Delta^2 f_k(x))' &= (x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2})' = kx^{k-1} - 2(k+1)x^k + (k+2)x^{k+1} \\ &= x^{k-1} (k - 2(k+1)x + (k+2)x^2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{k}{k+2}, x_3 = 1 \end{aligned}$$

dir. Buna göre

x		0	$\frac{k}{k+2}$	1
$f(x)$	-	+	-	+
				

olup $\Delta^2 f_k(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k}{k+2}$ de yerel maksimuma sahiptir.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+2} \right)^k - 2 \left(\frac{k}{k+2} \right)^{k+1} + \left(\frac{k}{k+2} \right)^{k+2} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+2} \right)^k \left[1 - 2 \left(\frac{k}{k+2} \right) + \left(\frac{k}{k+2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{e^2} 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan (c_k) sıfır dizisi olduğundan $\Delta^2 f_k(x)$ fonksiyonu sıfıra düzgün yakınsaktır.

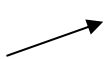
$\Delta^3 f_k(x) = f_k(x) - 3f_{k+1}(x) + 3f_{k+2}(x) - f_{k+3}(x) = x^k - 3x^{k+1} + 3x^{k+2} - x^{k+3}$ fonksiyonu $f(x)=0$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olup, fonksiyonunun 0'a düzgün yakınsak olup olmadığını inceleyelim,

$$c_k = \max \left\{ \left| x^k - 3x^{k+1} + 3x^{k+2} - x^{k+3} - 0 \right| : x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

olup

$$\begin{aligned} (\Delta^3 f_k(x))' &= (x^k - 3x^{k+1} + 3x^{k+2} - x^{k+3})' = kx^{k-1} - 3(k+1)x^k + 3(k+2)x^{k+1} - (k+3)x^{k+2} \\ &= x^{k-1}(k - 3(k+1)x + 3(k+2)x^2 - (k+3)x^3) = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0, x_2 = \frac{k}{k+3}, x_3 = 1, x_4 = 1 \end{aligned}$$

dir.

x		0	$\frac{k}{k+3}$	1
$f(x)$	-	+	-	-
				

olup $\Delta^3 f_k(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k}{k+3}$ de yerel maksimuma sahiptir.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+3} \right)^k - 3 \left(\frac{k}{k+3} \right)^{k+1} + 3 \left(\frac{k}{k+3} \right)^{k+2} - \left(\frac{k}{k+3} \right)^{k+3} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+3} \right)^k \left[1 - 3 \left(\frac{k}{k+3} \right) + 3 \left(\frac{k}{k+3} \right)^2 - \left(\frac{k}{k+3} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{e^3} 0 = 0 \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse fonksiyonun m. farkı için (c_k) dizisinin bir sıfır dizisi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$\Delta^m f_k(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x^{k+v} \text{ olup } (\Delta^m f_k(x)) \text{ dizisi } f(x)=0$$

fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Şimdi yakınsaklığın düzgün olduğunu gösterelim.

Bunun için

$$c_k = \max \left\{ \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x^{k+v} - 0 \right| : x \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \right\}$$

dizisinin sıfır dizisi olup olmadığına bakalım.

Türev hesaplayarak

$$\begin{aligned} \left(\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x^{k+v} \right)' &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (k+v) x^{k+v-1} \\ &= kx^{k-1} - \binom{m}{1} (k+1) x^k + \binom{m}{2} (k+2) x^{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x^{k+m-1} \\ &= x^{k-1} \left[k - \binom{m}{1} (k+1) x + \binom{m}{2} (k+2) x^2 + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} (k+m) x^m \right] = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0, x_2 = \frac{k}{k+m}, x_3 = 1, x_4 = 1, \dots, x_{m+1} = 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $\Delta^m f_k(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k}{k+m}$ de yerel maksimuma sahiptir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(\frac{k}{k+m} \right)^{k+v} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\binom{m}{0} \left(\frac{k}{k+m} \right)^k - \binom{m}{1} \left(\frac{k}{k+m} \right)^{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \left(\frac{k}{k+m} \right)^{k+m} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+m} \right)^k \left(\binom{m}{0} - \binom{m}{1} \left(\frac{k}{k+m} \right)^1 + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \left(\frac{k}{k+m} \right)^m \right) \\ &= \frac{1}{e^m} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{(k+m)^m - \binom{m}{1} k (k+m)^{m-1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} k^m}{(k+m)^m} \right] \\ &= \frac{1}{e^m} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_1 k^m + m A_2 k^{m-1} + \dots + A_{m-1} m^{m-1} k + A_m m^m}{(k+m)^m} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{m}{0} + (-1)^1 \binom{m}{1} \binom{m-1}{0} + (-1)^2 \binom{m}{2} \binom{m-2}{0} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} \binom{1}{0} + (-1)^m \binom{m}{m} \\
A_2 &= (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{m}{1} + (-1)^1 \binom{m}{1} \binom{m-1}{1} + (-1)^2 \binom{m}{2} \binom{m-2}{1} + \dots + (-1)^{m-2} \binom{m}{m-2} \binom{2}{1} + (-1)^m \binom{m}{m-1} \binom{1}{1} \\
&\vdots \\
A_{m-1} &= (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{m}{m-1} + (-1)^1 \binom{m}{1} \binom{m-1}{m-1} \\
A_m &= (-1)^0 \binom{m}{0} \binom{m}{m}
\end{aligned}$$

olduğundan $\{\Delta^m f_k\}$ dizisi $f(x)=0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Uyarı: $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda $\{\Delta^m f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.9. $f_k(x) = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2$ biçiminde tanımlanan $\{f_k\}$ dizisi $A = [-1, 1]$ kümesi üzerinde $f(x) = x^2$ eşitliği ile verilen f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$\Delta^m f_k(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(x - \frac{1}{k+v}\right)^2$ şeklinde tanımlayalım. $\{f_k\}$ dizisinin Δ^m -düzgün

yakınsaklığını inceleyelim. Bunun için $\Delta f_k(x) = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2$ olarak $\{\Delta f_k\}$

dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyerek başlayalım. $\{\Delta f_k\}$ dizisi 0'a noktasal yakınsaktır.

$$\begin{aligned}
c_k &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 - 0 \right| \\
&= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{-2x}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{2x}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right| \leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{k} + \frac{3}{k} \\
&= \frac{6}{k}
\end{aligned}$$

olup

$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ olduğundan $\{\Delta f_k\}$ dizisi 0'a düzgün yakınsaktır.

$\Delta^2 f_k(x) = \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{k+2}\right)^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $f = 0$

fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Gerçekten

$$\begin{aligned} c_k &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{k+2}\right)^2 - 0 \right| \\ &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{-2x}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{4x}{k+1} - \frac{2}{(k+1)^2} - \frac{2x}{k+2} + \frac{1}{(k+2)^2} \right| \\ &\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k} + \frac{4}{k} + \frac{2}{k} + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} \\ &= \frac{12}{k} \end{aligned}$$

olup $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ olduğundan $(\Delta^2 f_k(x))$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Bu

şekilde devam edilirse $\Delta^m f_k(x) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(x - \frac{1}{k+v}\right)^2$ olarak tanımlanan $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi

$f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Bu durumu aşağıda gösteriyoruz.

$$\begin{aligned} \Delta^m f_k(x) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \left(x - \frac{1}{k+v}\right)^2 = \max_{x \in [-1, 1]} \left| (-1)^0 \binom{m}{0} \left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \left(x - \frac{1}{k+m}\right)^2 \right| \\ &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| x^2 \left[(-1)^0 \binom{m}{0} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \right] + 2x \left[(-1)^0 \binom{m}{0} \frac{1}{k} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{1}{k+m} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[(-1)^0 \binom{m}{0} \frac{1}{k^2} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{1}{(k+m)^2} \right] \right| \\ &\leq 2 \left| (-1)^0 \binom{m}{0} \frac{1}{k} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{1}{k+m} \right| + \left| (-1)^0 \binom{m}{0} \frac{1}{k^2} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{1}{(k+m)^2} \right| \\ &< \frac{3(m+1)}{k} \end{aligned}$$

dır. $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ olduğundan $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi sıfıra düzgün yakınsaktır.

Not: $(\Delta^m f_k - f)$ fonksiyonları sürekli olmadıklarında veya A kümesi kapalı ve sınırlı bir küme olmadığı durumlarda maksimum mevcut olmayıp supremum var olabilir. Bu durumda

$$c_k = \sup_{x \in A} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|$$

alınarak düzgün yakınsak olup olmadığı araştırılabilir.

Örnek 3.1.10. $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlanan $f_k(x) = \frac{x}{x+k}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunun m. farkının düzgün yakınsak olup olmadığını araştıralım.

$$\Delta f_k(x) = f_k(x) - f_{k+1}(x) = \frac{x}{x+k} - \frac{x}{x+k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{x+k} - \frac{x}{x+k+1} = 0$$

$\Delta f_k(x)$ fonksiyonu 0'a noktasal yakınsak olduğu görülür. $\Delta f_k(x)$ in düzgün yakınsaklığını araştıralım.

$$c_k = \sup_{x \in [0, \infty)} |\Delta f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{x}{x+k} - \frac{x}{x+k+1} - 0 \right| = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{x}{x^2 + (2k+1)x + k^2 + k} \right|$$

olup, türev alırsak

$$(\Delta f_k(x))' = \frac{x^2 + (2k+1)x + k^2 + k - x(2x + 2k + 1)}{(x^2 + (2k+1)x + k^2 + k)^2} = \frac{k^2 + k - x^2}{(x^2 + (2k+1)x + k^2 + k)^2} = 0$$

$$x = \sqrt{k^2 + k}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} c_k &= \sup_{x \in [0, \infty)} |\Delta f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{x}{x^2 + (2k+1)x + k^2 + k} \right| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{\sqrt{k^2 + k}}{\left(\sqrt{k^2 + k}\right)^2 + (2k+1)\sqrt{k^2 + k} + k^2 + k} \right| \end{aligned}$$

dır. $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ olduğundan $\Delta f_k(x)$ fonksiyonu sıfıra düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.1.11. $\Delta^m f_k$ fonksiyonları $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ için A üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olsunlar. $(f_k(x))$ dizisi A üzerinde f fonksiyonuna Δ^m -düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

İspat: $(\Delta^m f_k)$, f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir k_0 bulunabilir ki her $k > k_0$ ve her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. $\Delta^m f_{k_0}$ fonksiyonu x_0 da sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_{k_0}(x) - \Delta^m f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

yazılabilir.

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - \Delta^m f_{k_0}(x) + \Delta^m f_{k_0}(x) - \Delta^m f_{k_0}(x_0) + \Delta^m f_{k_0}(x_0) - f(x_0)$$

olduğundan A 'nın $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan x elemanları için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - \Delta^m f_{k_0}(x) + \Delta^m f_{k_0}(x) - \Delta^m f_{k_0}(x_0) + \Delta^m f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - \Delta^m f_{k_0}(x)| + |\Delta^m f_{k_0}(x) - \Delta^m f_{k_0}(x_0)| + |\Delta^m f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

bu da f nin x_0 da sürekli olduğunu gösterir. x_0 keyfi seçildiğinden f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

Uyarı: f_k fonksiyonları $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ için A üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar olduklarında, $\Delta^m f_k$ fonksiyonları A üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olurlar. Fakat

$\Delta^m f_k$ fonksiyonlarının sürekli olması f_k fonksiyonlarının sürekli olmasını gerektirmez. Hem aşağıdaki hemde yukarıdaki teoremden daha özel bir durum olan $\Delta^m f_k$ fonksiyonlarının sürekli olması durumunu ele aldık.

Teorem 3.1.13. $A \subset R$ kompakt (yani kapalı ve sınırlı) bir küme $\{\Delta^m f_k\}$ terimleri A üzerinde sürekli ve A üzerinde sürekli bir f fonksiyonuna yakınsayan bir dizi olsun. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m f_k(x) \geq \Delta^m f_{k+1}(x)$ (ya da $\Delta^m f_k(x) \leq \Delta^m f_{k+1}(x)$) ise $\{\Delta^m f_k\}$ dizisi A üzerinde f 'e düzgün yakınsaktır.

İspat: $\forall x \in A$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m f_k(x) \geq \Delta^m f_{k+1}(x)$ ve $g_k(x) = \Delta^m f_k(x) - f(x)$ olsun. Bu durumda $g_k(x)$ A üzerinde sürekli, $g_k(x) \rightarrow 0, x \in A$ ve $\forall x \in A$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ $g_k(x) \geq g_{k+1}(x)$ olacağı açıktır. $\{g_k\}$ dizisinin A üzerinde $g(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$g_k(x) \rightarrow 0, x \in A \Rightarrow \forall x \in A \text{ için } 0 \leq g_{k_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $k_x \in \mathbb{N}$ vardır. $g_{k_x}(t)$ fonksiyonu $x \in A$ noktasında sürekli ve

$$0 \leq g_{k_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olduğuna göre } x \in A \text{ noktasının } \forall t \in U(x) \cup A = J(x) \text{ için } 0 \leq g_{k_x}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $U(x)$ açık komşuluğu vardır. Her bir $t \in J(x)$ için $(g_{k_x}(t))$ dizisi monoton azalan olduğundan $\forall t \in J(x)$ ve $\forall k \geq k_x$ için $0 \leq g_k(t) \leq \varepsilon$ olacağı elde edilir. A kompakt bir küme olduğundan

$$A \subset J(x_1) \cup J(x_2) \dots \cup J(x_m)$$

olacak şekilde sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi mevcuttur. $k_0 = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_m}\}$ dersek her bir $t \in A$ ve her bir $k \geq k_0$ için $0 \leq g_k(t) \leq \varepsilon$ olacağı ve dolayısıyla $g_k \rightarrow 0$ A üzerinde düzgün yakınsak olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.14. $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde reel değerli ve sınırlı

fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_k\}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna Δ^m - düzgün yakınsak ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \Delta^m f_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (3.1.1)$$

dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. $\{f_k\}$ dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde f ye Δ^m -düzgün yakınsak olduğundan öyle bir k_0 doğal sayısı vardır ki $\forall k \geq k_0$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (3.1.2)$$

olur. $\Delta^m f_{k_0}$ integrallenebilir olduğundan $[a, b]$ aralığının öyle bir P parçalanması vardır ki bu parçalanma için

$$\ddot{U}(\Delta^m f_{k_0}, P) - A(\Delta^m f_{k_0}, P) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. (3.1.2) den yararlanarak her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq \Delta^m f_{k_0}(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$M'_k = \sup\{\Delta^m f_{k_0}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \ddot{U}(f, P) &= \sum_{k=1}^n M_k |\Delta x_k| \leq \sum_{k=1}^n \left(M'_k + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^n M'_k |\Delta x_k| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n M'_k |\Delta x_k| + \frac{\varepsilon}{3} = \ddot{U}(\Delta^m f_{k_0}, P) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Benzer şekilde (3.1.2) den yararlanarak her $x \in [a, b]$ için

$$\Delta^m f_{k_0}(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$m'_k = \inf \{\Delta^m f_{k_0}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

olmak üzere

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k |\Delta x_k| \geq \sum_{k=1}^n \left(m'_k - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^n m'_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k|$$

$$= \sum_{k=1}^n m'_k |\Delta x_k| - \frac{\varepsilon}{3} = A(\Delta^m f_{k_0}, P) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$A(f, P) \geq A(\Delta^m f_{k_0}, P) - \frac{\varepsilon}{3}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \ddot{U}(f, P) - \ddot{U}(\Delta^m f_{k_0}, P) + \ddot{U}(\Delta^m f_{k_0}, P) - A(\Delta^m f_{k_0}, P) + A(\Delta^m f_{k_0}, P) - A(f, P)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olur ki bu da f nin Riemman anlamında integrallenebilir olduğunu gösterir. Şimdi (3.1.1) in doğruluğunu gösterelim. $\{f_k\}$ dizisi f ye Δ^m -düzgün yakınsak olduğundan öyle bir k_0 doğal sayısı vardır ki her $k \geq k_0$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left| \int_a^b \Delta^m f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |\Delta^m f_k(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

olur ki

$$\lim_k \int_a^b \Delta^m f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

demektir. $f = \lim_k \Delta^m f_k$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \Delta^m f_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m f_k(x) dx$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 3.1.15 $\{f_k\}$ bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_k\}$ bir Δ^m -düzgün Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyleki $\forall k, l > k_0$ ve $\forall x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_l(x)| < \varepsilon$ dir.

Teorem 3.1.16 $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_k\}$, A üzerinde Δ^m -düzgün Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \{f_k\}$, A üzerinde Δ^m -düzgün yakınsaktır.

İspat: $\{f_k\}$ dizisi A üzerinde bir f fonksiyonuna Δ^m -düzgün yakınsak olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $\forall k > k_0$ ve $\forall x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olur. Eğer } k, l > k_0 \text{ seçilirse her } x \in A \text{ için}$$

$$\begin{aligned} |\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_l(x)| &= |\Delta^m f_k(x) - f(x) + f(x) - \Delta^m f_l(x)| \leq |\Delta^m f_k(x) - f(x)| + |f(x) - \Delta^m f_l(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu da $\{f_k\}$ dizisinin Δ^m -düzgün Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Karşıt olarak $\{f_k\}$ bir Δ^m -düzgün Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde reel terimli $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi bir Cauchy dizisidir. R deki her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla A üzerinde $f(x) = \lim_k \Delta^m f_k(x)$ eşitliği yardımıyla

bir f fonksiyonu tanımlanmış olur. $\varepsilon > 0$ olsun. $\{f_k\}$ Δ^m -düzgün Cauchy dizisi olduğundan öyle bir $k_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $\forall k, l > k_0$ ve her $x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_l(x)| < \varepsilon$ olur.

Böylece her $x \in A$ ve her $l > k_0$ için

$$\left| \Delta^m f_l(x) - f(x) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \Delta^m f_l(x) - \Delta^m f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

olur. Bu $\{f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde Δ^m - düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.17. $\{f_k\}$, A üzerinde Δ^m - düzgün sınırlıdır. $\Leftrightarrow$ Her $k \in N$ ve $\forall x \in A$ için $\left| \Delta^m f_k(x) \right| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

Şimdi fonksiyonların farklarını kullanarak birkaç fonksiyon uzayı tanımlayacağız ve bu uzaylar arasında birkaç bağıntı vereceğiz.

Tanım 3.1.18. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_k(x)$ fonksiyon dizisi A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\Delta^0 f_k(x) = f_k(x)$, $\Delta f_k(x) = (f_k(x) - f_{k+1}(x))$, $\Delta^m f = \Delta(\Delta^{m-1} f_k(x))$, $\Delta^m f = (\Delta^m f_k(x))$, olmak üzere

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\Delta^m, F) &= \{F = (f_k) : (\Delta^m f_k(x)) \in \ell_\infty \text{ ve } x \in A\} \\ c_n(\Delta^m, F) &= \{F = (f_k) : (\Delta^m f_k(x)) \in c \text{ ve } x \in A\} \\ c_{0,n}(\Delta^m, F) &= \{F = (f_k) : (\Delta^m f_k(x)) \in c_{0,n} \text{ ve } x \in A\} \end{aligned}$$

uzaylarını tanımlayalım.

Teorem 3.1.19. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ bir lineer uzaydır.

İspat: (i) $f, g \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olsun. Bu taktirde $\forall x \in A$ için $\sup_{k \in N} |\Delta^m f_k(x)| < \infty$ ve

$\sup_{k \in N} |\Delta^m g_k(x)| < \infty$ dır. Bu taktirde $\forall x \in A$ için

$$\sup_{k \in N} |\Delta^m f_k(x) + \Delta^m g_k(x)| \leq \sup_{k \in N} |\Delta^m f_k(x)| + \sup_{k \in N} |\Delta^m g_k(x)| < \infty$$

elde edilir. Buradan da $(f + g) \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ dır.

(ii) $f \in \ell_\infty(\Delta^m, f)$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Böylece $\forall x \in A$ için

$$\sup_{k \in N} |\Delta^m c f_k(x)| = |c| \sup_{k \in N} |\Delta^m f_k(x)| < \infty$$

elde edilir. Buradan da $cf \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ dır.

Teorem 3.1.20. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ uzayı $\|\Delta^m f\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in A} |\Delta^m f_k(x)|$ olmak üzere

$\|f\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \|\Delta^m f\|_\infty$ normu ile bir normlu uzaydır.

İspat: $f, g \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ ve λ bir skaler olsun.

N1) $\|f\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \|\Delta^m f\|_\infty$ olduğundan $\|f\|_\Delta \geq 0$ dır.

N2) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k(x) = 0$ ise $\sum_{i=1}^m |f_i(x)| = 0$ ve $\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) = 0$ olup

$\|f\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \|\Delta^m f\|_\infty = 0$ elde edilir.

Şimdi $\|f\|_\Delta = 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^m |f_i(x)| = 0 \text{ ve } \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{x \in A} \{ \Delta^m f_k(x) \} \right\} = 0 \text{ dır.}$$

Böylece $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in A$ için $\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) = 0$

dır, yani

$$\left| (-1)^0 \binom{m}{0} f_k(x) + (-1)^1 \binom{m}{1} f_{k+1}(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f_{k+m}(x) \right| = 0 \text{ dır.}$$

$k = 1$ için $f_{m+1}(x) = 0$

$k = 2$ için $f_{m+2}(x) = 0$

Ve bu şekilde devam edilirse $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in A$ için $f_k(x) = 0$ elde edilir.

N3) $\|\lambda f\|_\Delta = |\lambda| \|f\|_\Delta$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |\lambda f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \lambda f_{k+v}(x) \right| \\
&= |\lambda| \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} |\lambda| \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| \\
&= |\lambda| \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + |\lambda| \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| \\
&= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| \right) \\
&= |\lambda| \|f\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

N4) $\|f + g\|_{\Delta} \leq \|f\|_{\Delta} + \|g\|_{\Delta}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |f_i(x) + g_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}(x) + g_{k+v}(x)) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \sum_{i=1}^m |g_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| \\
&\quad + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} g_{k+v}(x) \right| \\
&= \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| + \sum_{i=1}^m |g_i(x)| \\
&\quad + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} g_{k+v}(x) \right| \\
&= \|f\|_{\Delta} + \|g\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.21. $\ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ uzayı

$$\|\Delta^m f\| = \sum_{i=1}^m |f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: $\ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ nin tam olduğunu göstermek için $(f^s) = (f_1^s, f_2^s, \dots) \in \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ olmak üzere (f^s) , $\ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|f^s - f^t\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |f_i^s(x) - f_i^t(x)| + \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in A} |\Delta^m(f_k^s(x) - f_k^t(x))| \rightarrow 0$$

dır. O halde $k \leq m$ ve her $x \in A$ için

$$|f_k^s(x) - f_k^t(x)| \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}^t(x)) \right| \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan her $x \in A$ için

$$\begin{aligned} |f_{k+m}^s(x) - f_{k+m}^t(x)| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}^t(x)) \right| + \left| \binom{m}{0} (f_k^s(x) - f_k^t(x)) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (f_{k+m-1}^s(x) - f_{k+m-1}^t(x)) \right| \end{aligned}$$

olması nedeniyle her $k \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$

$$|f_k^s(x) - f_k^t(x)| \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Buna göre $(f_k^s) = (f_k^1, f_k^2, \dots)$ her sabit $k=1,2,3,\dots$ ve her $x \in A$ için $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan (f_k^s) $\mathbb{R}$ de yakınsaktır. $\lim_s f_k^s(x) = f_k(x)$

$(k=1,2,\dots, \text{her } x \in A)$ diyelim. $(f^s), \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ oldukça $\|f^s - f^t\|_{\Delta} \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O

halde $s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^m |f_i^s(x) - f_i^t(x)| \leq \varepsilon \text{ ve } \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}^t(x)) \right| \leq \varepsilon$$

dur. Bu son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |f_i^s(x) - f_i^t(x)| = \sum_{i=1}^m |f_i^s(x) - f_i(x)| \leq \varepsilon$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_t \left| \Delta^m (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}^t(x)) \right| &= \lim_t \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}^t(x)) \right| \\
&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}(x)) \right| \\
&= \left| \Delta^m (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}(x)) \right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $s \geq N$ için

$$\|f^s - f\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |f_i^s(x) - f_i(x)| + \sup_{k \in N} \sup_{x \in A} \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}^s(x) - f_{k+v}(x)) \right| \leq 2\varepsilon$$

dur. Bu ise $\lim_s f^s = f$ demektir.

Şimdi de $f = (f_k(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
|\Delta^m f_k(x)| &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}(x) \right| \\
&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}(x) - f_{k+v}^N(x) + f_{k+v}^N(x)) \right| \\
&\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (f_{k+v}(x) - f_{k+v}^N(x)) \right| + \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} f_{k+v}^N(x) \right| \\
&\leq \|f^N - f\|_{\Delta} + |\Delta^m f^N(x)|
\end{aligned}$$

olması nedeniyle $f = (f_k) \in \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ elde edilir. O halde bu uzay bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.1.22. $c(\Delta^{m-1}, F) \subset c_0(\Delta^m, F) \subset c(\Delta^m, F)$ dir.

İspat: $\{f_k\} \in c(\Delta^{m-1}, F)$ olsun. Bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyle ki $\forall k > k_0$ için

$$|\Delta^{m-1} f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak şekilde bir } f(x) \text{ fonksiyonu vardır.}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta^m f_k(x)| &= |\Delta^{m-1} f_k(x) - \Delta^{m-1} f_{k+1}(x)| = |\Delta^{m-1} f_k(x) - f(x) + f(x) - \Delta^{m-1} f_{k+1}(x)| \\
&= |\Delta^{m-1} f_k(x) - f(x)| + |\Delta^{m-1} f_{k+1}(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Sonuç 3.1.23. $c(F) \subset c_0(\Delta^m, F)$ dir.

İspat: $(f_k(x)) \in c$ olsun. Bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0$ öyle ki $\forall k > k_0$ için

$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur.

$$\begin{aligned}
|\Delta^m f_k(x)| &= \left| (-1)^0 \binom{m}{0} f_k(x) + (-1)^1 \binom{m}{1} f_{k+1}(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f_{k+m}(x) \right| \\
&= \left| \begin{aligned} &(-1)^0 \binom{m}{0} f_k(x) + (-1)^1 \binom{m}{1} f_{k+1}(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f_{k+m}(x) \\ &+ \left((-1)^0 \binom{m}{0} f(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f(x) \right) - \left((-1)^0 \binom{m}{0} f(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f(x) \right) \end{aligned} \right| \\
&\leq \left| (-1)^0 \binom{m}{0} f_k(x) - (-1)^0 \binom{m}{0} f(x) \right| + \dots + \left| (-1)^m \binom{m}{m} f_{k+m}(x) - (-1)^m \binom{m}{m} f(x) \right| \\
&\quad + \left| (-1)^0 \binom{m}{0} f(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f(x) \right| \\
&\leq (-1)^0 \binom{m}{0} |f_k(x) - f(x)| + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} |f_{k+m}(x) - f(x)| \\
&\quad + \left| (-1)^0 \binom{m}{0} f(x) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} f(x) \right| \\
&< (-1)^0 \binom{m}{0} \varepsilon + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \varepsilon = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $(f_k(x)) \in c_0(\Delta^m, F)$ dir.

Bu kapsama kesindir. $(f_k(x)) = (\sqrt{k}x)$ alınırsa $\{f_k\}$ dizisi ıraksaktır. Fakat

$(\Delta f_k(x)) = (\sqrt{k}x - \sqrt{k+1}x)$ dizisi sıfıra yakınsaktır.

Teorem 3.1.24. $c(\Delta^m, F)$ ile $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ uzayları birbirini kapsamazlar fakat ortak elemanları vardır.

Örnek 3.1.25. $f_k(x) = \frac{(-1)^k kx}{1+kx}$, $x \in [1,2]$ şeklinde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım.

$$\Delta f_k(x) = \frac{(-1)^k kx}{1+kx} - \frac{(-1)^{k+1}(k+1)x}{1+(k+1)x} = (-1)^k \left(\frac{(2k^2+2k)x^2 + (2k+1)x}{(k^2+k)x^2 + (2k+1)x + 1} \right) \text{ olup } |\Delta f_k(x)| \leq 2 \text{ dır,}$$

fakat $\lim_k \Delta f_k(x) = 2, \lim_k \Delta f_k(x) = -2$ olduğundan yakınsak değildir..

$f_1(x)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için $f_k(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{nx^2}{1+nx}$ olarak

tanımlanırsa $\Delta f_k(x) = \frac{kx^2}{1+kx}$ olarak elde edilir. Burada $\Delta f_k(x)$ fonksiyonu $f(x) = x$

fonksiyonuna yakınsaktır fakat sınırlı değildir.

3.2. Fonksiyon Dizilerinin Δ^m -Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı, Δ^m -Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1. $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

ya da hemen hemen her k için

$$\left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu varsa $(f_k(x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsaktır denir. $(f_k(x))$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsak ise $\lim_{st} \Delta^m f_k(x) = f(x)$ veya $\Delta^m f_k(x) \xrightarrow{p.st.} f(x)$ yazılır.

Bunun anlamı her bir $\delta > 0$ için, her $\varepsilon > 0$ ve her $n > N(=N(\varepsilon, \delta, x))$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| < \delta$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır.

Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı

$$S_p(\Delta^m, F) = \left\{ F = (f_k) : \lim_{st} \Delta^m f_k(x) = f(x), \forall x \in A \right\}$$

ile gösterilir.

$S(\Delta^m, F)$ kümesi boş değildir. Aşağıdaki örnek $(f_k(x))$ dizisinin Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.2. $(f_k(x))$ dizisini, $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ için

$$f_k(x) = \begin{cases} (-x)^k & k \in [3^p, 3^p + p) \ p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} -(-x)^{k+1} & 3^p - 1 \leq k < 3^p \\ (-x)^k - (-x)^{k+1} & 3^p \leq k < 3^p + p - 1 \\ (-x)^k & 3^p + p - 1 \leq k < 3^p + p \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Buna göre

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta f_k(x) \neq 0 \text{ her bir } x \in A \text{ için}\}| \leq \frac{p(p+1)}{2 \cdot 3^p}$$

ve böylece, $\mathbb{R} - [-1, 1]$ üzerinde $st - \lim \Delta f_k(x) = 0$ dır. Fakat $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta f_k(x)$ yoktur.

Bu örnek aynı zamanda $c(\Delta^m, F) \subset S(\Delta^m, F)$ kapsamasının da kesin olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.3. $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$, A üzerinde tanımlı iki fonksiyon dizisi olsun. A üzerinde

$$st - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x) \text{ ve } st - \lim \Delta^m g_k(x) = g(x) \text{ olsun}$$

$$(i) \ st - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x) \text{ ve } c \in \mathbb{R} \text{ ise } st - \lim \Delta^m c f_k(x) = c f(x)$$

$$(ii) \ st - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x) \text{ ve } st - \lim \Delta^m g_k(x) = g(x) \text{ ise}$$

$$st - \lim \Delta^m (f_k(x) + g_k(x)) = f(x) + g(x) \text{ dir.}$$

İspat: i) $c = 0$ ise durum açıktır. $c \neq 0$ ise (i) nin ispat aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m c f_k(x) - c f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| \end{aligned}$$

ve

ii) nin ispatı aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m (f_k(x) + g_k(x)) - (f(x) + g(x)) \right| \geq \varepsilon \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ & \quad + \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m g_k(x) - g(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ her bir } x \in A \text{ için} \right\} \right| \end{aligned}$$

Tanım 3.2.4. $\{f_k\}$ A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_k\}$ dizisi $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k, l > N$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_l(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

ya da hemen hemen her k için

$$\left| \Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_l(x) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N(=N(\varepsilon, x))$ varsa $\{f_k\}$ dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2.5. $\{f_k\}$ A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

- (i) $\{f_k\}$, A üzerinde Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsaktır,
- (ii) $\{f_k\}$, A üzerinde Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir,
- (iii) $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Bu taktirde h.h.k. her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ olacak şekilde noktasal yakınsak bir $\{\Delta^m g_k\}$ dizisi vardır.

İspat: ($i \Rightarrow ii$) Farz edelim ki A üzerinde $st - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman h.h.k. ve her $x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|\Delta^m f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir N seçebiliriz, h.h.k. ve her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| \leq |\Delta^m f_k(x) - f(x)| + |\Delta^m f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $\{\Delta^m f_k\}$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

($ii \Rightarrow iii$) (ii) doğruluğunu kabul edelim $I = [\Delta^m f_N(x) - 1, \Delta^m f_N(x) + 1]$ aralığı h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Şimdi $I' = [\Delta^m f_M(x) - \frac{1}{2}, \Delta^m f_M(x) + \frac{1}{2}]$ h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerecek şekilde bir M sayısı seçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \cap I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \\ &= \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \text{ her } x \in A \text{ için}\} \cup \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $I_1 = I \cap I'$ h.h.k. her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \cap I' \text{ her } x \in A \text{ için}\}| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \text{ her } x \in A \text{ için}\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I' \text{ her } x \in A \text{ için}\}| = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece I_1 h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içeren ve uzunluğu 1'den küçük veya 1'e eşit olan kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = [\Delta^m f_{N(2)}(x) - \frac{1}{4}, \Delta^m f_{N(2)}(x) + \frac{1}{4}]$ h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerecek şekilde $N(2)$ sayısı seçelim. Yukarıdaki düşünceyle $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığı h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir ve I_2 'nin uzunluğu $\frac{1}{2}$ ye eşit veya daha küçüktür. Tümevarım metodunu kullanarak her m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ kapalı aralıklar dizisini inşa ederiz. I_m 'in uzunluğu 2^{1-m} 'den daha büyük değildir ve h.h.k. her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir. Böylece A üzerinde tanımlı bir

$\lambda(x)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\lambda(x), \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ 'a eşittir. Her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ fonksiyonu

I_m aralığında olacak şekilde I_m aralıklarının kullanarak

$$n > T_m \text{ ise } , \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| < \frac{1}{m} \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçelim.

Şimdi $k > T_1$ olacak şekilde tüm terimleri $\Delta^m f_k(x)$ 'in terimlerinden oluşan $(\Delta^m f_k(x))$ 'in $(z_k(x))$ alt dizisini tanımlayalım ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) \notin I_m$ 'dir.

Sonra her $x \in A$ için

$$\Delta^m g_k(x) = \begin{cases} \lambda(x) & , \Delta^m f_k(x) (z_k(x)) \text{ in bir terimi ise} \\ \Delta^m f_k(x) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile $(\Delta^m g_k(x))$ fonksiyon dizisini tanımlayalım. O zaman A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = \lambda(x)$

$\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ için $\Delta^m f_k(x)$ hem A üzerinde $\Delta^m g_k(x) = \lambda(x)$ olacak şekilde $(z_k(x))$ dizisinin bir terimidir hem de A üzerinde $\Delta^m g_k(x) = \Delta^m f_k(x) \in I_m$ ve her $x \in A$ için $|\Delta^m g_k(x) - \lambda(x)| \leq I_m$ 'in uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ dir. Şimdi h.h.k. ve her $x \in A$ için $\Delta^m g_k(x) = \Delta^m f_k(x)$ olduğunu iddia ediyoruz. $T_m < n < T_{m+1}$ için

$$\{k \leq n : \Delta^m g_k(x) \neq \Delta^m f_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için}\} \subseteq \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için}\}$$

olduğundan (3.2.1) ile ele alırsak

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \Delta^m g_k(x) \neq \Delta^m f_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için limit 0 dır ve h.h.k ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ dir. (iii) sağlanır.

Son olarak (iii) sağlandığını farz edelim. Bu durumda h.h.k ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ ve A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = f(x)$ dır. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman her bir k için A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = f(x)$ olduğundan

$\left\{k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\}$
 $\subseteq \left\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \neq \Delta^m g_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \cup \left\{k \leq n : \left| \Delta^m g_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\}$
 yazılabilir sonra $l = l(\varepsilon, x)$ e tamsayıların sabit bir dizisini içerdiğini söyleriz. Bu nedenle
 h.h.k her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\
 & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \neq \Delta^m g_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = 0
 \end{aligned}$$

dır.

Bu yüzden h.h.k ve her $x \in A$ için $\left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ olup (i) sağlanır ve bu ispatı tamamlar.

Tanım 3.2.6. $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için ve her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

yani h.h.k ve $\forall x \in A$ için

$$\left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad (3.2.2)$$

oluyorsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna Δ^m - düzgün istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda $st\text{-}\lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ veya $\Delta^m f_k(x) \xrightarrow{u.st.} f(x)$ olarak yazılır. Δ^m - düzgün istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı

$$S_u(\Delta^m, F) = \left\{ F = (f_k) : st\text{-}\lim \Delta^m f_k(x) = f(x), \forall x \in A \right\}$$

ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.7. $\Delta^m f_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) ve f , fonksiyonları $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. I aralığı üzerinde $st\text{-}\lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ olması için gerek ve yeter şart $c_k = \max_{x \in I} \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right|$ ile tanımlanan (c_k) dizisinin istatistiksel sıfır dizisi olmasıdır.

İspat: I aralığı üzerinde her k için $st-\lim^u \Delta^m f_k(x) = f(x)$ olsun. Her bir k için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)|$, I üzerinde sürekli olduğundan bir $x_k \in I$ noktasında mutlak maksimuma sahiptir. Bu durumda $x_1, x_2, \dots \in I$ için

$$\begin{aligned} c_1 &= |\Delta^m f_1(x_1) - f(x_1)| \\ c_2 &= |\Delta^m f_2(x_2) - f(x_2)| \\ &\dots \end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece $k = 1, 2, 3, \dots$ için $c_k = |\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)|$ dizisini oluşturabiliriz. Düzgün istatistiksel yakınsaklığın tanımından $\forall \varepsilon > 0$ ve h.h.k. için

$$|\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $st-\lim c_k = 0$ dır.

Tersi açıktır.

A kümesi üzerinde $\Delta^m f_k(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak iken $st-\lim^u \Delta^m f_k(x) = f(x)$ dir, tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnekte bu durumu açıklıyoruz.

Örnek 3.2.8. $f(x)$ fonksiyonu her $x \in [-1, 1]$ için

$$f_k(x) = \begin{cases} 3 & k = n^2 \text{ } n = 1, 2, 3, \dots \\ (x - \frac{1}{k})^2 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $f(x) = x^2$ fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsaktır. Buradan

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} 3 - (x - \frac{1}{k+1})^2 & k = n^2 \\ (x - \frac{1}{k})^2 - 3 & k = n^2 - 1 \\ (x - \frac{1}{k})^2 - (x - \frac{1}{k+1})^2 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup

$$c_k = \max_{x \in [-1,1]} |\Delta f_k(x) - 0| = \begin{cases} 3 & k = n^2 \\ -3 & k = n^2 - 1 \\ \frac{2k^2 + 4k + 1}{k^2(k+1)^2} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta f_k(x) - 0| \geq \varepsilon, x \in [-1,1] \text{ için} \right\} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{n}$$

$st - \lim c_k = 0$ dır. Dolayısıyla düzgün istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\Delta f_k(x)$ dizisi düzgün yakınsak değildir.

Tanım 3.2.9. $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi $p > 0$ bir reel sayı olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\Delta^m f_k(x) - f(x))^p = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna A kümesi üzerinde

Δ_p^m - Cesaro noktasal yakınsaktır denir. $\{\Delta^m f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna p- Cesaro yakınsak

ise $w_p - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ veya $\Delta^m f_k(x) \xrightarrow{w_p} f(x)$ yazılır.

Δ_p^m - Cesaro yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı

$$w_p(\Delta^m, F) = \left\{ F = (f_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\Delta^m f_k(x) - f(x))^p = 0 \text{ en az bir } f(x) \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.10. $\{f_k\}$ A üzerinde fonksiyonların bir dizisi $p > 0$ bir reel sayı olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p = 0$$

olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonu varsa $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna kuvvetli Δ_p^m - Cesaro noktasal yakınsaktır denir.

$\{\Delta^m f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna p- Cesaro yakınsak ise $w_p - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ veya

$\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) [w_p]$ yazılır.

Kuvvetli Δ_p^m - Cesaro yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı

$$w_p[\Delta^m, F] = \left\{ F = (f_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p = 0 \text{ en az bir } f(x) \text{ için} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.11. $0 < p < \infty$ ve $x \in A$ olsun. $(f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna kuvvetli Δ_p^m - Cesaro noktasal yakınsak ise $(\Delta^m f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna noktasal istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $(f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna kuvvetli Δ_p^m -Cesaro noktasal yakınsak ve $\varepsilon > 0$ olsun.

Bu taktirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p \\ &\geq \varepsilon^p \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de la Vallée-Poussin ortalamasını kullanarak Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsaklığı ve Δ^m -Cesaro noktasal yakınsaklığı genelleştireceğiz ve aralarındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

3.3. Fonksiyon Dizilerinin (Δ^m, λ) İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.3.1. $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ şartını sağlayan bir dizisi olsun.

Bu şartları sağlayan dizilerin kümesini Λ ile göstereceğiz. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(F) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \Delta^m f_k(x)$$

olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(F) = f$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $(f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna

$(V, \lambda)(\Delta^m, F)$ yakınsaktır denir. $(V, \lambda)(\Delta^m, F)$ yakınsak fonksiyonların kümesi

$$(V, \lambda)(\Delta^m, F) = \left\{ F = (f_k) : \exists f \text{ için, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (\Delta^m f_k(x) - f(x)) = 0 \right\}$$

ile gösterilir. Bu durumu $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x)(V, \lambda)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.3.2. $\lambda \in \Lambda$ ve $(f_k(x))$ bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| = 0$$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu varsa $(f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna kuvvetli $(V, \lambda)(\Delta^m, F)$

yakınsaktır denir. Kuvvetli $(V, \lambda)(\Delta^m, F)$ yakınsak fonksiyonların kümesi

$$[V, \lambda][\Delta^m, F] = \left\{ F = (f_k) : \exists f \text{ için, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

f fonksiyonuna kuvvetli (V, λ) toplanabilir $(f_k(x))$ fonksiyon dizilerinin kümesi $(V, \lambda)(\Delta^m, F)$ yakınsaktır denir.

Tanım 3.3.3. $\lambda \in \Lambda$ ve $(f_k(x))$ bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $(f_k(x))$ dizisi f fonksiyonuna (Δ^m, λ) -istatistiksel yakınsaktır denir ve $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x)(S, \lambda)$ ile gösterilir. (Δ^m, λ) istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

$$S_\lambda(\Delta^m, F) = \left\{ F = (f_k) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile göstereceğiz.

Teorem 3.3.4. $\lambda \in \Lambda$ olsun. O zaman

(i) $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) [V, \lambda]$ ise $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) (S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] (\Delta^m f) \subseteq S_\lambda (\Delta^m, f)$ kapsaması kesindir.

(ii) $(\Delta^m f_k(x)) \in \ell_\infty (\Delta^m, f)$ ve $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) (S_\lambda)$ ise o zaman $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) [V, \lambda]$

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) [V, \lambda]$ olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| &\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \\ &\geq \varepsilon \left| \{k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) [V, \lambda] \Rightarrow \Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) (S_\lambda)$ dır.

Aşağıdaki örnekte $[V, \lambda] \subsetneq (S_\lambda)$ göstereceğiz. $(\lambda_n) = (n)$ alalım ve $f = (f_k(x))$ dizisini $x \in [0, 1]$ için

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & k = n^2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & k = n^2 \text{ ise} \\ -(k+1)^2 x & k = n^2 - 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Bu taktirde $(\Delta f_k(x)) \notin \ell_\infty (\Delta, f)$ ancak

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |\Delta f_k(x) - 0| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$$

olup (λ, F) -istatistiksel yakınsaktır, ancak

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta f_k(x) - 0| \rightarrow \infty$$

yani $f \not\rightarrow 0 [V, \lambda]$ dır.

ii) Farz edelim ki $\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x) (S_\lambda)$ ve $(f_k(x)) \in \ell_\infty (\Delta^m, f)$ olsun. O zaman her $k \in \mathbb{N}$

ve her $x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| \leq M$ dir. $\varepsilon > 0$ olsun,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}} |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \\ &< \frac{M}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

$\Delta^m f_k(x) \rightarrow f(x)[V, \lambda]$ elde ederiz.

Teorem 3.3.5. $\liminf \frac{\lambda_n}{n} > 0$ ise $S(\Delta^m, f) \subset S_\lambda(\Delta^m, f)$.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \supset \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\}$$

yazabiliriz. Kapsama aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ &\geq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \end{aligned}$$

4. FONKSİYON DİZİLERİNİN α . DERECEDEDEN Δ^m - NOKTASAL İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE Δ^m - DÜZGÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

4.1. Fonksiyon Dizilerinin α . Dereceden Δ^m - Noktasal İstatistiksel Yakınsaklığı

Burada verilen sonuçlar 3. Bölümde verilen sonuçlardan daha geneldir, $\alpha = 1$ alınırsa 3. bölümdeki sonuçların bir kısmı elde edilir.

Tanım 4.1.1 $0 < \alpha \leq 1$ verilmiş olsun. A kümesi üzerinde tanımlı bir $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

yani her $x \in A$ ve h.h.k (α) için

$$\left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna α . dereceden Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsaktır denir ve A üzerinde $S^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ şeklinde gösterilir. $S^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ifadesi her $\delta > 0$ ($0 < \alpha \leq 1$) ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| < \delta,$$

olacak şekilde bir $n > N (= N(\varepsilon, \delta, x))$ tamsayısının bulunabileceği anlamına gelir. Tüm α . dereceden Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin kümesini $S^\alpha(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz. $\alpha = 1$ için $S^\alpha(\Delta^m, F)$ yerine $S(\Delta^m, F)$ ve $f = 0$ olması durumunda $S^\alpha(\Delta^m, F)$ yerine $S_0^\alpha(\Delta^m, F)$ yazacağız.

α . dereceden noktasal istatistiksel yakınsak $\alpha \in [0, 1]$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. $\{f_k\}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & k = 2n \\ x^k & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Bu durumda $\Delta f_k(x)$ aşağıdaki şekilde olur.

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} 1 - x^{k+1} & k = 2n \\ x^k - 1 & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Buna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta f_k(x) - (x^k - 1) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| f_k(x) - (1 - x^{k+1}) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

dır. Yani $S^\alpha - \lim \Delta f_k(x) = 1$ ve $S^\alpha - \lim \Delta f_k(x) = -1$ dir.

Teorem 4.1.2. $0 < \alpha \leq 1$ ve $\{f_k\}, \{g_k\}$ dizileri A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon dizisi olsun.

(i) $S^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$, ise $S^\alpha - \lim c \Delta^m f_k(x) = cf(x)$,

(ii) $S^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ve $S^\alpha - \lim \Delta^m g_k(x) = g(x)$,

$S^\alpha - \lim (\Delta^m f_k(x) + \Delta^m g_k(x)) = f(x) + g(x)$ dir.

İspat: (i) $c = 0$ ise ispat açıktır. Farz edelim ki $c \neq 0$ olsun. O zaman (i) nin ispatı aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| c \Delta^m f_k(x) - cf(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \end{aligned}$$

(ii)' nin ispatı ise aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) + \Delta^m g_k(x) - (f(x) + g(x)) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\
& \leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\
& \quad + \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m g_k(x) - g(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right|
\end{aligned}$$

$\alpha \in [0,1]$ için her Δ^m -yakınsak fonksiyon dizisi aynı zamanda α . dereceden noktasal istatistiksel yakınsaktır, yani $c(\Delta^m, F) \subset S^\alpha(\Delta^m, F)$ fakat tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.1.3. $x \in [0,1]$ için $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & k = n^2 \\ \frac{kx}{1+k^2x^2} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\{\Delta f_k\}$ dizisini aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2} & k = n^2 \text{ ise} \\ \frac{kx}{1+k^2x^2} - 1 & k = n^2 - 1 \text{ ise} \\ \frac{kx}{1+k^2x^2} - \frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| f_k(x) - 0 \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^\alpha} = 0$$

olduğundan α . dereceden noktasal Δ -istatistiksel yakınsaktır, yani $S^\alpha - \lim \Delta f_k(x) = 0$, fakat Δf_k yakınsak değildir.

Tanım 4.1.4. $0 < \alpha \leq 1$ aralığındaki herhangi bir reel sayısı ve $\{f_k\}$ dizisi A kümesi

üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, h.h.k (α) ve her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| < \varepsilon$$

yani

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N(=N(\varepsilon, x))$ sayısı varsa $\{f_k\}$ dizisi α . dereceden Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.1.5. $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun . Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\{f_k\}$ dizisi A kümesi üzerinde α . dereceden Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsak bir dizidir,
- (ii) $\{f_k\}$ dizisi A üzerinde α . dereceden Δ^m istatistiksel Cauchy dizisidir ,
- (iii) $\{f_k\}$ dizisi A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Bu taktirde h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ olacak şekilde bir Δ^m -noktasal yakınsak bir $\{g_k\}$ dizisi vardır.

İspat: $(i \Rightarrow ii)$ Farz edelim ki A kümesi üzerinde $S^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

O zaman h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|\Delta^m f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak

şekilde bir N sayısı bulabiliriz. Böylece h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| \leq |\Delta^m f_k(x) - f(x)| + |\Delta^m f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz. O halde $\{f_k\}$ dizisi α . dereceden Δ^m istatistiksel Cauchy dizisidir.

$(ii \Rightarrow iii)$ $I = [\Delta^m f_N(x) - 1, \Delta^m f_N(x) + 1]$ aralığı h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ fonksiyonunu içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Şimdi $I' = [\Delta^m f_M(x) - \frac{1}{2}, \Delta^m f_M(x) + \frac{1}{2}]$ aralığı h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ içerecek şekilde bir M sayısı seçelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \cap I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \\ &= \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \text{ her } x \in A \text{ için}\} \cup \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $I_1 = I \cap I'$ aralığı h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \cap I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I' \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece I_1 aralığı h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içeren ve uzunluğu 1' den küçük veya 1'e eşit olan kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = \left[\Delta^m f_{N(2)}(x) - \frac{1}{4}, \Delta^m f_{N(2)}(x) + \frac{1}{4} \right]$ aralığı h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerecek şekilde $N(2)$ sayısı seçelim, yukarıdaki düşünceyle $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığı h.h.k. (α) her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir ve I_2 'nin uzunluğu $\frac{1}{2}$ ye eşit veya daha küçüktür. Tümevarım metodunu kullanarak her m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ kapalı aralıklar dizisini inşa edebiliriz. I_m 'in uzunluğu 2^{1-m} 'den daha büyük değildir ve h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x)$ i içerir. Böylece A üzerinde tanımlı bir $\lambda(x)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\lambda(x), \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ 'a eşittir. h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) \in I_m$ olması gerçeğini kullanarak

$$n > T_m \text{ ise } , \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için}\} \right| < \frac{1}{m} \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturabiliriz.

Şimdi $k > T_1$ olacak şekilde tüm terimleri $\Delta^m f_k(x)$ ' in terimlerinden oluşan $(\Delta^m f_k(x))$ ' in bir $(z_k(x))$ alt dizisini tanımlayalım ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) \notin I_m$ ' dir.

Sonra her $x \in A$ için

$$\Delta^m g_k(x) = \begin{cases} \lambda(x) & , \Delta^m f_k(x) (z_k(x)) \text{ in bir terimi ise} \\ \Delta^m f_k(x) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile $(\Delta^m g_k(x))$ fonksiyon dizisini tanımlayalım. O zaman A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = \lambda(x)$ $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise o zaman $\Delta^m f_k(x)$ hem A üzerinde $\Delta^m g_k(x) = \lambda(x)$ anlamına gelen $(z_k(x))$ dizisinin bir terimidir hem de A üzerinde $\Delta^m g_k(x) = \Delta^m f_k(x) \in I_m$ ve her $x \in A$ için $|\Delta^m g_k(x) - \lambda(x)| \leq I_m$ 'in uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ ' dir. Aynı zamanda h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m g_k(x) = \Delta^m f_k(x)$ olduğunu iddia ediyoruz. $T_m < n < T_{m+1}$ için

$$\{k \leq n : \Delta^m g_k(x) \neq \Delta^m f_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için}\} \subseteq \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için}\}$$

(4.1.1) ile

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m g_k(x) \neq \Delta^m f_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için}\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \notin I_m \text{ her } x \in A \text{ için}\}| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için limit 0 ' dır ve h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ dir. Bu nedenle (ii) doğru iken (iii) sağlanır.

Son olarak farz edelim ki (iii) sağlansın yani h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ ve A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = f(x)$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman her

bir k için A üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m g_k(x) = f(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \{k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\} \\ & \subseteq \{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \neq \Delta^m g_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için}\} \cup \{k \leq n : |\Delta^m g_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\} \end{aligned}$$

yazılabilir sonra $l = l(\varepsilon, x)$ e tamsayıların sabit bir dizisini içerdığını söyleyebiliriz. Bu

nedenle h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $\Delta^m f_k(x) = \Delta^m g_k(x)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için}\}| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m f_k(x) \neq \Delta^m g_k(x) \text{ her } x \in A \text{ için}\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = 0 \end{aligned}$$

Bu yüzden h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ dır.

Teorem 4.1.6. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. $S^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq S^\beta(\Delta^m, F)$ dır. $\alpha < \beta$ olacak şekilde en az bir α ve β için bu kapsama kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \end{aligned}$$

ve bu da $S^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq S^\beta(\Delta^m, F)$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $\{f_k\}$ dizisini

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & , k = n^2 \\ \frac{k^2 x}{1+k^3 x^2} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, x \in [0, 1].$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(k+1)^2 x}{1+(k+1)^3 x^2} & k = n^2 \text{ ise} \\ \frac{k^2 x}{1+k^3 x^2} - 1 & k = n^2 - 1 \text{ ise} \\ \frac{(k+1)^2 x}{1+(k+1)^3 x^2} - \frac{k^2 x}{1+k^3 x^2} & \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta f_k(x) - 0 \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in [0, 1] \text{ için} \right\} \right| \\ & = \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta f_k(x) \right| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in [0, 1] \text{ için} \right\} \right| \\ & \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^\alpha} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

yazabiliriz. O zaman $S^\alpha - \lim f_k(x) = 0$, yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x \in S^\alpha(f)$, fakat $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$

için $x \notin S^\beta(f)$ dır .

Teorem 4.1.6 da $\beta = 1$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.7. $\{f_k\}$ dizisi $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonuna α . dereceden Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsak ise f fonksiyonuna Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 4.1.8. $0 < \alpha \leq 1$ herhangi bir reel sayı ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bir $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right|^p = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna α . dereceden kuvvetli Δ^m_p - Cesaro toplanabilir denir. Bu durumu A üzerinde $w_p^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ şeklinde göstereceğiz. $\alpha = 1$ için α . dereceden kuvvetli Δ^m_p -Cesaro toplanabilirlik kuvvetli Δ^m_p -Cesaro toplanabilirliğe indirgenir. α .dereceden kuvvetli Δ^m_p - Cesaro toplanabilir fonksiyon dizilerinin kümesini $w_p^\alpha(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz. $f(x) = 0$ olması durumunda $w_{o,p}^\alpha(\Delta^m, F)$ ile ifade edeceğiz. .

Teorem 4.1.9. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. O zaman $\alpha < \beta$ için $w_p^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq w_p^\beta(\Delta^m, F)$ kapsamı kesindir.

İspat: $\{f_k\}$ dizisi α . dereceden kuvvetli Δ^m_p - Cesaro toplanabilir, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif reel sayıları verilmiş olsun.

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right|^p \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m f_k(x) - f(x) \right|^p$$

yazılabildiğinden $w_p^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq w_p^\beta(\Delta^m, F)$ elde edilir.

Bu kapsamanın kesin olduğunu görebilmek için $\{f_k\}$ dizisini

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+kx} & k = n^2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad x \in [1, 2]$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} \frac{kx}{1+kx} & k = n^2 \text{ ise} \\ -\frac{(k+1)x}{1+(k+1)x} & k = n^2 - 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k(x) - 0|^p \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^\beta} = \frac{2}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $\frac{2}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ olduğundan, $w_p^\beta - \lim \Delta f_k(x) = 0$, yani $\{\Delta f_k\}$ dizisi $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için

α . dereceden kuvvetli Δ_p^m - Cesaro toplanabilir. Fakat

$$\frac{2\sqrt{n}}{2n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k(x) - 0|^p$$

$n \rightarrow \infty$ iken $\frac{2\sqrt{n}}{2n^\alpha} \rightarrow \infty$ olduğundan, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $\{\Delta f_k\}$ dizisi α . dereceden kuvvetli

Δ_p^m - Cesaro toplanabilir değildir.

Sonuç 4.1.10. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun.

(i) $\alpha = \beta$ ise $w_p^\alpha(\Delta^m, F) = w_p^\beta(\Delta^m, F)$,

(ii) Her $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq w_p^\beta(\Delta^m, F)$.

Teorem 4.1.11. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ reel sayılar olsun. $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna α . dereceden kuvvetli Δ_p^m - Cesaro toplanabilir ise f fonksiyonuna β . dereceden kuvvetli Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{f_k\}$ dizisi A üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon dizisi olsun.

$$\sum_{k=1}^n |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p \geq \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \cdot \varepsilon^p$$

yazabiliriz ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |\Delta^m f_k(x) - f(x)|^p &\geq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \cdot \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| \cdot \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.12. $0 < \alpha \leq 1$ herhangi bir reel sayı ve $0 < p < \infty$ olsun. $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna α . dereceden kuvvetli Δ^m_p -Cesaro toplanabilir ise, f fonksiyonuna α . dereceden Δ^m -noktasal istatistiksel yakınsaktır.

4.2. Fonksiyon Dizilerinin α . Dereceden Δ^m - Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.2.1. $0 < \alpha \leq 1$ herhangi bir reel sayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

yani

$$|\Delta^m f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ h.h.k.}(\alpha)$$

oluyorsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna α . dereceden düzgün Δ^m -istatistiksel yakınsaktır denir A üzerinde $S_u^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ şeklinde gösterilir. α . dereceden Δ^m -düzgün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_u^\alpha(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz. .

Teorem 4.2.2. f fonksiyonu ve her $k \in \mathbb{N}$ için f_k fonksiyonlar $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. A üzerinde $S_u^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ olması için gerek ve yeter şart $c_k = \max_{x \in A} |\Delta^m f_k(x) - f(x)|$ olmak üzere $S^\alpha - \lim c_k = 0$ olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki A üzerinde $S_u^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m f_k(x) - f(x)|, A$ üzerinde sürekli olduğundan bir $x_k \in A$ noktasında mutlak maksimuma sahiptir, yani $c_1 = |\Delta^m f_1(x_1) - f(x_1)|, c_2 = |\Delta^m f_2(x_2) - f(x_2)|, \dots$, olacak şekilde $x_1, x_2, \dots \in A$ vardır. Bu nedenle $k = 1, 2, \dots$ için $c_k = |\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)|$ yazabiliriz. α . dereceden Δ^m düzgün istatistiksel yakınsaklığın tanımından $\varepsilon > 0$ için $h.h.k.(\alpha)$ için

$$|\Delta^m f_k(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $S^\alpha - \lim c_k = 0$ elde edilir.

Yeterlilik açıktır.

$\Delta^m f_k(x), f(x)$ 'e A üzerinde düzgün yakınsak ise, $\Delta^m f_k(x), f(x)$ 'e A üzerinde α . dereceden düzgün istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekte ifade ediyoruz.

Örnek 4.2.3. $f_k(x) = \begin{cases} 1 & k = n^2 \\ x^k & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, x \in [0, 1]$

olarak tanımlarsak $\{\Delta f_k\}$ dizisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Delta f_k(x) = \begin{cases} 1 - x^{k+1} & k = n^2 \\ x^k - 1 & k = n^2 - 1 \\ x^k - x^{k+1} & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, x \in [0, 1]$$

olarak elde edilir. Buradan $x \in [0, 1]$ ve $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$c_k = \max |\Delta f_k(x) - 0| = \begin{cases} 1 & k = n^2 \\ 0 & k = n^2 - 1 \\ \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$S^\alpha - \lim c_k = 0$ olduğundan $\{\Delta f_k\}$ dizisi $[0,1]$ üzerinde $f(x)=0$ fonksiyonuna α . dereceden düzgün istatistiksel yakınsaktır fakat $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ limiti mevcut olmadığından $\{\Delta f_k\}$ dizisi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.

Sonuç 4.2.4. i) $\{f_k\}$ dizisi A üzerinde α . dereceden Δ^m - düzgün yakınsak ise $\Rightarrow A$ üzerinde α . dereceden Δ^m -noktasal yakınsak $\Rightarrow A$ üzerinde α . dereceden Δ^m - noktasal istatistiksel yakınsaktır .

ii) $\{f_k\}$ dizisi A üzerinde f fonksiyonuna α . dereceden düzgün Δ^m -istatistiksel yakınsak $\Rightarrow A$ üzerinde f fonksiyonuna α . dereceden noktasal Δ^m - istatistiksel yakınsaktır.

iii) $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise , $S_u^\alpha(\Delta^m, F) \subseteq S_u^\beta(\Delta^m, F)$ dir.

Tanım 4.2.5. $\alpha \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı ve $\{f_k\}$ dizisi A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin, h.h.k. (α) ve her $x \in A$ için

$$|\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| < \varepsilon$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m f_k(x) - \Delta^m f_N(x)| \geq \varepsilon \text{ her } x \in A \text{ için} \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N(=N(\varepsilon))$ sayısı varsa $\{f_k\}$ dizisi A kümesi üzerinde α . dereceden düzgün Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.2.6. $0 < \alpha \leq 1$ ve $\{f_k\}, \{g_k\}$ A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ve $S_u^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ise $S_u^\alpha - \lim c \Delta^m f_k(x) = cf(x)$,

(ii) $S_u^\alpha - \lim \Delta^m f_k(x) = f(x)$ ve $S_u^\alpha - \lim \Delta^m g_k(x) = g(x)$ ise

$$S_u^\alpha - \lim (\Delta^m f_k(x) + \Delta^m g_k(x)) = f(x) + g(x).$$

dir.

KAYNAKLAR

- [1] **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., **2**, 241-244.
- [2] **Steinhaus, H.** 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Collog. Math. **2**, 73-74.
- [3] **Schoenberg, I.J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, **66**, 361-375.
- [4] **Šalát, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., **30** (2), 139-150.
- [5] **Freedman, A.R. and Sember, J.J.** 1981. Densities and summability, Pacific J. Math. **95**, 293-305.
- [6] **Fridy, J.A.**, 1985. On statistical convergence, Analysis, **5**, 301-313.
- [7] **Fridy, J.A. and Orhan, C.**, 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., **160** (1), 43-51.
- [8] **Fridy J.A. and Orhan, C.** 1997. Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, 3625-3361.
- [9] **Connor, J.S.**, 1988. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis, **8**, 47-63.
- [10] **Connor, J.S.**, 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull., **32**(2), 194-198.
- [11] **Kolk, E.** , **1993**. Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis **13**, 77-83.
- [12] **Buck, R.C.**, 1953. Generalized asymptotic density, Amer. J. Math. **75**, 335-346.
- [13] **Mursaleen, M.**, 2000. λ – Statistical convergence, Math. Slovaca., **50** (1), 111-115.
- [14] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1960. An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York .
- [15] **Miller, H.**, 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc. **347**, 1811-1819.
- [16] **Di Maio, G. and Kocinac, Lj.D.R.**, 2008. Statistical convergence in topology,

- Topology Appl., **156**, 28-45.
- [17] **Gadjiev, AD, Orhan, C.**, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. **32**(1) , 129-138.
 - [18] **Di Maio, G., Djurcic, D., Kocinac, Lj.D.R. and Zizovic, M.R.**, 2009. Statistical convergence, selection principles and asymptotic analysis, Chaos Solitons Fractals, **42**, 2815-2821.
 - [19] **Djurcic, D., Kocinac, Lj.D.R. and Zizovic, M.R.**, 2009. A few remarks on divergent sequences: Rates of divergence, J. Math. Anal. Appl., **360**, 588-598.
 - [20] **Mursaleen, M. and Edely, O. H. H.**, 2003. Statistical convergence of double sequences J. Math. Anal. Appl., **288**, 223-231.
 - [21] **Móricz, F.**, 2003. Statistical convergence of multiple sequences, Arch. Math., **81**, 82-89.
 - [22] **Maddox, I.J.**, 1988. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
 - [23] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
 - [24] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of variation and sequence of Fourier coefficients 1, Math. Z., **118**, 93-102.
 - [25] **Şuhubi, E.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakf Yay., No: 38, İstanbul.
 - [26] **Jain, P. K., Ahuja, O. P. and Ahmad, K.**, 1995. Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.
 - [27] **Boos, J. and Cass, P.**, 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.
 - [28] **Tripathy, B.C.**, 1997. Matrix transformation between some classes of sequences, J. Math. Anal. Appl., **206**, 448-450.
 - [29] **Savaş, E.**, 2000. Strongly almost convergence and almost λ - statistical convergence, Hokkaido Math. J., **29**, 531-536.
 - [30] **Çolak, R.**, 2010. Statistical convergence of order α , Modern Methods in Analysis and its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121-129.

- [31] **Leindler, L.**, 1965. Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, (German) Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **16**, 375—387.
- [32] **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., **24**, 169-176.
- [33] **Et, M. and Çolak, R.**, 1995. On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., **21**, 377- 386.
- [34] **Et, M. and Nuray, F.**, 2001. Δ^m – Statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., **32** (6) 961-969.
- [35] **Et, M.**, 2000. On some topological properties of generealized difference sequence spaces, Internat. J. Math. & Math. Sci., **24** (11), 785-791.
- [36] **Balcı, M.**, 1997. Matematik Analiz Cilt 2, Ertem Matbaası, Ankara.
- [37] **Bayraktar, M.**, 2006. Fonksiyonel Analiz Gazi Kitabevi, Ankara.
- [38] **Duman, O., Orhan, C.**, 2004. μ -statistically convergent function sequences, Czechoslovak Math. J. **54**(129), no. 2, 413-422.
- [39] **Fridy J.A. and Orhan, C.** 1997. Statistical core theorems, J. Math. Anal. Appl., **208**,52-527.
- [40] **Gökhan, A, Güngör, M.**, 2002. On pointwise statistical convergence. Indian J. Pure Appl. Math. **33**(9), 1379-1384.
- [41] **Güngör, M, Et, M, Altın, Y.**, 2004. Strongly (V_σ, λ, q) -summable sequences defined by Orlicz functions, Appl. Math. Comput. **157**(2), 561-571.
- [42] **Güngör, M, Gökhan, A.**, 2005. On uniform statistical convergence. Int. J. Pure Appl. Math. **19**(1), 17-24.
- [43] **Kamthan, P. K. and Gupta, M.**, 1981. Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- [44] **Aydın, S.**, 1994. İstatistiksel yakınsaklık Yüksek Lisans Tezi Y.Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Van.
- [45] **Çolak, R., Bektaş, Ç. A.**, 2011. λ – -statistical convergence of order α . Acta Math. Sci. **31B** (3), 953-959.
- [46] **Çolak, R., Bektaş, Ç. A.**, 2011. Errata to “ λ – -statistical convergence of order α ”. Acta Math. Sci. **31B** (3), 953-959.

- [47] **Nuray, F.**, 1999. Düzgün istatistiksel yakınsaklık. F.Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, **11**(3), 219-222.
- [48] **Bilgin, T., Altun, Y.**, 2007. Strongly (V^λ, A, P) -summable sequence spaces defined by a modulus. Math. Model. Anal. **12** (4), 419-424.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 1998 yılında kazandığım Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2002'de mezun oldum. 2004'de F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisansa başladım ve 2007'de bitirerek 2009 yılında doktora başladım. Aynı yıl Muş Alparslan Üniversitesi'ne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen aynı bölümde doktora yapmaktayım.

Muhammed ÇINAR