

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR VE
ADOMİAN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MİRAC KAYHAN
(111121105)**

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Danışmanı : Doç. Dr. Hasan BULUT

Temmuz – 2013

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR VE ADOMİAN
AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Miraç KAYHAN

(111121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 3 Temmuz 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 16 Temmuz 2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Niyazi BULUT (F.Ü)

Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

TEMMUZ-2013

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde, maddi ve manevi her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen, bilgi birikiminden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Hasan BULUT' a ve Arş. Gör. Şeyma TÜLÜCE' ye çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu zorlu süreçte beni yalnız bırakmayan ve desteklerini biran olsun esirgemeyen aileme ve tüm dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Miraç KAYHAN

Elazığ-2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLolar LİSTESİ	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ	IX
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
2.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. BÖLÜM	
3.1 KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRALLER.....	10
3.1.1 Grunvald-Letnikov Kesirli Türevi.	10
3.1.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali.	18
4. BÖLÜM	
4.1 MATERYAL VE METOT.....	20
4.1.1 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri.	20
4.1.2 Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları.	21
4.1.3 Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümleri.	22
4.1.3.1 Açık Yöntem.	23
4.1.3.2 Kapalı Yöntem.	24
4.1.3.3 Crank-Nicholson Yöntemi.	25
4.1.4 Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri.	25
4.1.5 Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri.	29
4.1.5.1 Kesirli Türevin Crank-Nicholson Yaklaşımı.	29

4.1.5.2 Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi için Crank-Nicholson Yöntemi	31
4.1.5.3 Adomian Ayrışım Metodu (ADM).	33
5. BÖLÜM	
5 METODUN UYGULANMASI.	36
5.1 Kesirli Difüzyon Denkleminin Crank-Nicholson Yöntemiyle Çözümü.	36
5.2 Kesirli Difüzyon Denkleminin ADM Yöntemiyle Çözümü.	40
6.1 SONUÇ.	46
ALGORİTMA.	47
KAYNAKLAR.	50
ÖZGEÇMİŞ.	55

ÖZET

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde denklemin tarihçesi ve kullanım alanları hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde kesirli türev ve integral tanımları verildi.

Dördüncü bölümde Sonlu Farklar Yönteminin ve Adomian Ayırışım Metodunun genel yapıları verildi. Ayrıca Adomian Ayırışım Metodu uygulanırken ortaya çıkan Adomian polinomlarının hesaplanması verildi.

Beşinci bölümde Adomian Ayırışım Metodu ve Sonlu Farklar Yöntemi : başlangıç ve sınır koşulları ile verilen kesirli mertebeden difüzyon denklemine uygulanması verildi. Her bir yöntem için elde edilen hataların sayısal veri tabloları ve üç boyutlu grafikleri çizilerek grafiklerin irdelenmesi yapıldı.

Altıncı bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlara bağlı kalarak Sonlu Farklar Yöntemi ve Adomian Ayırışım Metodunun kesirli mertebeden difüzyon denklemine uygulanabilirliği hakkındaki bilgiler sunuldu.

SUMMARY

The Solution of Differential Equations with Fractional Order Solutions by Using Finite Differance Methods and Iteration Methods

This study constructed six chapters.

In chapter one, it has been given informations about using areas and historical structure.

In chapter two, some fundamental definitions have been given.

In chapter three, fractional integration and derivative definitions in terms of different aspects have been given.

In chapter four, the fundamental structures of Finite Differance Method and Adomian Decomposition Method have been given. And also the calculation Adomian polinoms which arise during applying Adomian Decomposition Method has given.

In chapter five, Finite Difference Method and Adomian Decomposition Method have been applied to the fractional diffusion equation along with initial and boundary conditions. Investigations of obtained solutions by using Finite Difference Method and Adomian Decomposition Method, 3D graphics, tables and numerical data errors for every of techniques have been maden.

In chapter six, informations about suitability of Finite Difference Method and Adomian Decomposition Method for fractional diffusion equations have been given.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. U_i^m Düğüm noktası.	23
Şekil 4.2. $k = \Delta y$ ve $h = \Delta x$ aralıkları ve düğüm noktaları.	26
Şekil 4.3. Sabit değerli sınır koşulları.	27
Şekil 4.4. Değişken sınır koşulları.	27
Şekil 5.1. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 16$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	36
Şekil 5.2. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 32$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	37
Şekil 5.3. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 64$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	37
Şekil 5.4. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48$, $N = 16$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	38
Şekil 5.5. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48$, $N = 32$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	39
Şekil 5.6. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48$, $N = 48$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği çözümü.	39
Şekil 5.7. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.2$ değerleri için yaklaşık çözümü.	41
Şekil 5.8. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.5$ değerleri için yaklaşık çözümü.	41
Şekil 5.9. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü.	42
Şekil 5.10. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü.	43
Şekil 5.11. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü.	44
Şekil 5.12. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü.	44

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri.	8
Tablo 5.1. Bazı M , N ve α değerleri için (5.1) difüzyon denkleminin hata değerleri. .	37
Tablo 5.2. Bazı M , N ve α değerleri için (5.2) difüzyon denkleminin hata değerleri. . .	39
Tablo 5.3. Bazı M , N ve α değerleri için (5.1) difüzyon denkleminin hata değerleri. . .	42
Tablo 5.4. Bazı M , N ve α değerleri için (5.2) difüzyon denkleminin hata değerleri. .	45

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$:	Reel Sayılar Cümlesi
C :	Kombinasyon
D :	Diferansiyel Operatör
$!$:	Faktöriyel
λ :	Lambda
α :	Alpha
β :	Beta
φ :	Fi
ξ :	Ksi
τ :	Tau
ρ :	Ro
π :	Pi
Γ :	Gamma
$\sum$:	Toplam Sembolü
$\lim$:	Limit
$\tilde{u}$:	Yaklaşık Çözüm
A_n :	Adomian Polinomları

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kesirli diferansiyel denklem adından da anlaşılacağı gibi türev ve integralin tam olmayan derecelere genişletilmesidir. Kesirli analiz kavramı ilk olarak 1965 yılında L 'hospital' ın Leibniz' e yazmış olduğu mektupta ele alınmıştır. Bu mektupta $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda $\frac{D^n x}{Dx^n}$ türevinin nasıl hesaplanacağı sorularak günümüzde de hala devam etmekte olan kesirli analiz kavramı gün yüzüne çıkmıştır [10]. Leibniz' in yanı sıra Liouville, Riemann, Lagrange, Abel, Laplace, Euler gibi birçok matematikçide kesirli analiz' e ilgi duymuşlardır [29].

Son yıllarda kesirli türev hesaplamaları ve kesirli diferansiyel denklemler, mekanik mühendisliği, kimya, biyoloji, fizik, sinyal işleme ve sistem tanımlama, elektrik kontrol teorisi, finans, kesirli dinamik gibi birçok alandaki problemleri çözmek için kullanılmıştır. Fiziksel uygulamaların bir örneği olarak Brownian hareketi, sabit bir dış güç alanının etkisi altında difüzyon ve ilave hız alanlı advection-dispersion denklemiyle modellenmiştir [1-4].

Ayrıca plazmadaki ısı enerji geçişi, zemin yüzeyindeki sıvı akışının reaksiyonu, popülasyonun değişimi [5], yer altı suyu hidrolojisi gibi dispersion ve difüzyon problemleri, sıvı akışıyla taşınan pasif radyoaktiflerin geçişini göstermek için advection-dispersion denklemi ile modellenmiştir [7].

Kesirli kısmi diferansiyel denklemler klasik kısmi diferansiyel denklemlerin genellemesidir. Kesirli diferansiyel denklemlerde çözümün varlığı ve tekliği analitik sonuçlarıyla birlikte birçok yazar tarafından araştırılmaktadır [8].

Çoğu kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunmadığından bu denklemleri çözmek için nümerik yöntemler kullanılmıştır [9-16]. I. Podlubny Laplace dönüşüm metodunu kullanarak lineer kesirli diferansiyel denklemlerin ve kısmi kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmiştir [9]. S. Momani lineer zaman kesirli difüzyon denklemine Homotopi pertürbasyon metodunu uygulamıştır [11]. Y. Luchko ve R. Gorenflo operatörler yöntemini [12], S. Momani ve Z. Odibat diferansiyel dönüşüm metodunu [13], S. S. Ray Adomian ayrışım metodunu [14], M. Dehghan,

J. Manafian, A. Saadatmandi homotopi analiz metodunu [15] , L. Su, W. Wang, Q. Xu sonlu farklar metodunu [16] kullanarak kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini araştırmışlardır.

Zaman kesirli difüzyon denklemlerin çözümüyle ilgili literatürde birçok çalışma vardır [17-25]. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır: S. Kumar ve A. Yıldırım Laplace dönüşüm metodunu kullanarak kesirli difüzyon denkleminin analitik çözümünü elde etmişlerdir [17]. A. Çetinkaya ve O. Kıymaz aynı denklemi çözmek için diferansiyel dönüşüm metodunu kullanmışlardır [18]. Z.Q. Zhang ve T. Wei truncation (kesme) metodunu kullanmışlardır [19]. Biz bu çalışmamızda Gauss' a kadar uzanan ve 1940 lı yıllardan bu yana yaygın olarak çalışmalar yapılan Sonlu Farklar metodunu kullanarak zaman kesirli difüzyon denkleminin Crank-Nicholson yaklaşımı yardımıyla yaklaşık çözümünü elde etmeye çalışacağız.

Bu çalışmada ele alınan bir diğer metot ise ayrışım metodu [30] olup bu metot, George Adomian (Mart 21, 1922–1996) tarafından 1980'li yıllarda literatüre kazandırılmıştır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan ayrışım yöntemi, uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir boyutlu veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmada kullanılmaktadır. Ayrışım yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere [31,32] göre daha basit olup karmaşık denklemlere uygulanabilen bir yöntemdir. Adomian ayrışım metodu lineer olmayan problemler için etkili yarı analitik metottur. Küçük ya da büyük parametreler içerseler de içermeseler de adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilirler. Yani oldukça geneldir. Daha fazlası, Adomian yaklaşım serileri hızlı yakınsamaktadır [2]. 1980'lerden bu yana Adomian ayrışım metodu [33,37] fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanmıştır.

Adomian ayrışım metodu ile elde edilen çözümler, seri formunda olup sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçları bulunabilir. Bu tekniği kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü indismeye gerek duymadan sembolik programlama dilleri ile kodlama yaparak, hesaplamada kısmen bir kolaylık sağlanabilir [38].

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım.2.1

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir veya daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [40].

Tanım.2.2

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini ihtiva eden bir denkleme adi diferansiyel denklem denir [40].

Tanım.2.3

Bir veya daha çok bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini ihtiva eden denkleme kısmi (parçalı) diferansiyel denklem denir [40].

Tanım.2.4

Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bunun türevlerine göre 1. dereceden ve katsayılar sadece bağımsız değişkenin fonksiyonu veya sabit ise denkleme lineer diferansiyel denklem denir [40].

Tanım.2.5

Bir diferansiyel denklem denklemden buluna en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer diferansiyel denklem adı verilir [40].

Tanım.2.6

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir.

Tanım.2.7

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f' in k . mertebeye kadar olan kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k – sınıfındandır denir .

Tanım.2.8

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemden görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Tanım.2.9

Bir diferansiyel denklemde keyfi sabitlere bağlı bulunan çözüme genel çözüm, sabitlere değer verilmesiyle elde edilen çözüme özel çözüm denir.

Tanım.2.10

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının herbir elemanına Y uzayının bir elemanına karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

Tanım.2.11

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ve $i, j \in \mathbb{R}$ olmak üzere i, j şeklindeki bütün sıralı ikililerin kümesini B ile gösterelim.

$$f: B \rightarrow K$$

$$(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon elemanları bir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

gibi düzenlenirse $n \times m$ tane elemanın oluşturduğu bu tabloya $n \times m$ tipinde bir matris adı verilir. Kısaca $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ şeklinde gösterilir [39].

Tanım.2.12

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrise karesel matris denir [39].

Tanım.2.13

Bir karesel matriste a_{ii} elemanlarının bulunduğu konuma matrisin esas köşegeni adı verilir [39].

Tanım.2.14

Bir matrisin köşegendeki elemanları hariç diğer bütün elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matrisi denir [39].

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tanım.2.15

Bir köşegen matrisin özel olarak bütün elemanları bir ise bu matrise birim matris adı verilir. A matrisi n - basamaktan bir birim matristir [39].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım.2.16

Bir A matrisinin satırlarını sütun, sütunlarını satır kabul eden matrise A matrisinin transpozu denir ve A^t ile gösterilir. Yani $A = [a_{ij}]$ ise $A^t = [a_{ji}]$ dir [39].

Tanım2.17

A ve B birer karesel matris olmak üzere $AB = BA = I$ oluyorsa B matrisine A matrisinin tersi adı verilir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir [39].

Tanım.2.18

$A \in \mathbb{R}_n^n$ olmak üzere;

$$\det : \mathbb{R}_n^n \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona determinant fonksiyonu denir. A matrisinin determinanı

$\det A$ veya $|A|$ ile gösterilir [39].

Tanım.2.19

f , bir x noktasının komşuluğunda tanımlanmış bir fonksiyon olsun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

limiti veya $u = x + \Delta x$ olmakla elde edilen

$$\lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve

$$f'(x) \text{ veya } \frac{df}{dx}$$

ile gösterilir [39].

Tanım.2.20

f , $x = a$ noktasında n -inci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$p(a) = f(a), p'(a) = f'(a), \dots, p^n(a) = f^n(a)$$

şartını sağlayan ve derecesi n den büyük olmayan bir tek p polinomu vardır.

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(a) \cdot (x-a)^k}{k!}$$

formülü ile verilen bu P polinomuna Taylor polinomu denir [39].

Tanım.2.21

f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a) \cdot (x-a)^k}{k!}$$

serisine f fonksiyonunun a noktası civarındaki Taylor açılımı denir [39].

Tanım.2.23

Adım büyüklüğü $(\Delta x, \Delta t, \dots)$ küçülürken kesme hatası da küçülüyorsa sonlu fark yaklaşımı asıl denklem ile tutarlıdır denir [39].

Tanım.2.24

Eğer nümerik işlemler süresince hata zamanla artıp büyük hatalara sebep olmuyorsa çözüm yöntemine kararludur denir [39].

Tanım.2.25

Eğer Δx ve Δt sıfıra giderken nümerik çözüm tam çözüme yaklaşıyorsa nümerik çözüme yakınsaktır denir [39].

Tanım.2.26

Gamma fonksiyonu en basit anlamda faktöriyelin reel sayılara genişletilmesidir.

$\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R}$$

ile verilir [9].

Tanım.2.27

Γ Gamma fonksiyonu olmak üzere,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ dir.} \quad (2.1)$$

İspat:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \text{ ifadesine kısmi integrasyon uygulayalım.}$$

$$u = t^z \Rightarrow du = z t^{z-1} dz \text{ ve } \int dv = \int e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} z t^{z-1} dt \\ &= \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ kullanılarak}$$

$$\Gamma(1) = 1, \text{ (2.1) denkleminde kullanılarak,}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1 = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1 = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gamma fonksiyonu yardımıyla bazı değerler hesaplanmış olup aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

Tanım.2.28

Gamma fonksiyonu $z = -n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ noktalarında basit kutuba sahiptir [9].

Tanım.2.29

$\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

şeklinde limitle gösterilebilir [9].

Tanım.2.30

Üstel fonksiyon olan e^z tamsayı dereceden diferansiyel düzlem teorisinde önemli bir role sahiptir. Bu fonksiyonun bir parametrelili genelleşmiş hali

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Mittag Leffer fonksiyonu olarak adlandırılır. İki parametrelili Mittag Leffer fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

açılımıyla verilir. Burada $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ dır [9].

Tanım.2.31

$E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin Ross fonksiyonu e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanırız. Bu fonksiyonun özelliği hem Gamma fonksiyonu hemde Mittag Leffer cinsinden yazılmasıdır. Mellin Ross fonksiyonu

$$\begin{aligned} E_t(v, a) &= t^v e^{at} \Gamma^*(v, at) \\ &= t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + v + 1)} \\ &= t^v E_{1,v+1}(at) \end{aligned}$$

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v) t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad v > 0$$

şeklindedir. Buna tamamlanmış Gamma fonksiyonu denir [9].

3. BÖLÜM

3.1 KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRALLER

3.1.1 Grunwald-Letnikov Kesirli Türevleri

Teorem.3.1.1

$f(t)$ bir fonksiyon, a ve t noktaları limit değerleri olmak üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh) \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır. Burada $p = m$ ise m . mertebeden türev, $p = -m$ ise m katlı integrali temsil eder.

İspat :

$y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu ele alalım.

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (3.4)$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(n, r) f(t-rh) \quad (3.5)$$

olur. Burada

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3.6)$$

olarak ifade edilir. Böylece (3.2) ve (3.5) nin genel ifadesi

$$f_h^p = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh) \quad (3.7)$$

olarak yazılır. Burada p ve n tamsayılarıdır. $p \leq n$ olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}$$

elde edilir. p nin negatif değerleri için

$$C(p, r) = \frac{(p+r+1)!}{r!}$$

ile ifade edilir. Buradan

$$C(-p, r) = (-1)^r C(p, r)$$

dir. (3.7) eşitliğinde p ile $-p$ yer değiştirirse

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n C(p, r) f(t-rh)$$

bulunur. Burada p pozitif bir tamsayıdır.

Eğer n sabitse, $f_h^{(-p)}(t)$ nin $h \rightarrow 0$ iken limitinin sıfıra gitmesi beklenir. Sıfır olmayan bir

limite ulaşmak için $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ olmalıdır. $h = \frac{t-a}{n}$ alınabilir.

Burada a bir reel sayı,

$f_h^{-p}(t)$ nin limit değeri sonlu veya sonsuz olur. Bunu aşağıdaki şekilde

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t)$$

yazabiliriz.

Burada ${}_a D_t^{-p}$ operatörü $f(t)$ fonksiyonu üzerinde işlemidir. a, t ler birer limit değeridir.

Burada birkaç özel durumu göz önüne alalım.

$$f_h^{-p}(t) = h^p \sum_{r=0}^n f(t-rh)$$

ifadesinde $p=1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t-rh)$$

burada $t-nh=a$ ve $f(t)$ fonksiyonları sürekli olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

p için $2, 3, \dots$ gibi değerler yerine yazılır ve ara işlemler yapılırsa

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n C(p, r) f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

genel durumu elde edilir. Bu eşitlik $(p+1)$ içinde sağlanır öyleki (3.8) eşitliğinde p yerine $(p+1)$ alındığında

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n C(p+1, r) f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n C(p+1, r) f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n C(p+1, r) f_1(t-(r+1)h) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olup

$$(p+1, r) = (p, r) + (p+1, r-1) \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada $C(p+1, -1) = 0$ olmalıdır.

(3.10) deki ifadeyi (3.9) daki toplama uygulamak için r ile $r-1$ yer değiştirirse

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n C(p, r) f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n C(p+1, r-1) f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^n C(p+1, r-1) f_1(t-rh) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p C(p+1, n) f_1(t-(n+1)h) \\ &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} h^{p+1} C(p+1, n) \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(p+1, n) \frac{1}{h^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= {}_a D_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.8) eşitliğinin doğruluğunu gösterir. (3.8) eşitliğinin p katlı integrali

$$\frac{d}{dt} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+1} f(t)) dt \\ {}_a D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu nedenle

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+3} f(t)) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t f(t) dt}_p \end{aligned}$$

olur ve bu ise (3.5) nin n . mertebeden integralinin türevini ve $f(t)$ sürekli fonksiyonunun (3.8) ifadesinin p katlı integralini gösterir. Dolayısıyla

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh)$$

eşitliğinde $p = m$ ise m . mertebeden türevi, $p = -m$ ise de m katlı integrali gösterdiği elde edilir.

Tanım.3.1.1

$[a, b]$ aralığında $f'(t)$ türevi sürekli ise,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

olur. Bu ifadenin genel hali $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ de sürekli türeve sahip ise buradan

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

elde edilir.

Tanım.3.1.2

$f(t)$ sürekli fonksiyonunun p . mertebeden kesirli türevi,

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

olarak kullanılır. Eğer $p > 0$ ise,

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh) \quad (3.13)$$

olmak üzere,

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^p(t) \quad (3.14)$$

limitine bakalım.

$$C(p, r) = C(p-1, r) + C(p-1, r-1)$$

olduğu bilindiğinden bu dönüşümü (3.13) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} f_h^p(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p-1, r) f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^n (-1)^r C(p-1, r-1) f(t-rh) \\ &= (-1)^n C(p-1, n) h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p-1, r) \Delta f(t-rh) \\ &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p-1, r) f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} C(p-1, r) f(t-(r+1)h) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa sonuç olarak,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} C(p-k-1, n-k) h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \quad (3.15)$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r C(p-m-1, r) \Delta^{m+1} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.16) kullanılarak

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau \quad (3.17)$$

eşitliği bulunur. Burada $[a, t]$ sürekli, $f^{(k)}(t)$, $k=1, 2, \dots, m+1$ türevlerinin kabulünden hareketle $m > p-1$ 'i sağlayan m tamsayısının varlığından yukarıdaki ifade elde edilir. m nin en küçük değeri için $m < p < m+1$ dir.

Teorem.3.1.2

$f(t) = (t-a)^v$ olmak üzere $f(t)$ ' nin kesirli türevi,

$${}_a D_t^p (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p}$$

eşitliği ile hesaplanır.

İspat :

$f(t) = (t-a)^v$ ise $-p$ mertebeden kesirli integrali alınır (3.8) formülü kullanılarak

$${}_a D_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (r-a)^v d\tau \quad (3.18)$$

yazılır. Farz edelim ki integralin yakınsaması için $v > -1$ olsun. $\tau = a + \xi(t-a)$ dan,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p (t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{v-p} \int_a^t \xi^v (t-\xi)^{-p-1} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, v+1) (t-a)^{v-p} \\
&= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \quad (p < 0, v > -1)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir, burada $0 < m < p < m+1$ dir.

Örnek.3.1.1

$f(x) = x^4$ fonksiyonunun $\frac{5}{2}$. mertebeden türevini hesaplayalım.

$a = 0$, $p = \frac{5}{2}$ ve $v = 4$ dür.

$${}_a D_x^{5/2} x^4 = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{3/2} = \frac{4!}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} x^{3/2} = \frac{32}{\sqrt{\pi}} x^{3/2}$$

Teorem.3.1.3

Tamsayı mertebeden türevler ile kesirli türevlerin bileşkesi; $\frac{d^n}{dt^n}$ tam sayı

mertebeden türev, ${}_a D_t^p$ kesirli türev ve $f^{(k)}(a) = 0$ olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

(3.17) daki m için sınırlama yapılarak $m > p-1$ olursa ve m yerine s yazarak

(3.17) yazılırsa yani $m < p < m+1$ olmak koşuluyla

$${}_a D_t^p = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{s+1}(\tau) d\tau \tag{3.20}$$

olur. (3.20) daki p mertebeden kesirli türevin n tamsayı mertebesinin türevi alınır, burada $s = m+n-1$ alınır. Sonuçta

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-n+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^{p+n} f(t)\end{aligned}\quad (3.21)$$

olur. $s \geq m+n+1$ olduğundan $s = m+n+1$ alınır, buradan

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) &= {}_a D_t^{p+n} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n+1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (3.22)$$

elde edilir.

$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ tamsayı mertebeden bir türevin p mertebeden kesirli türevi ve ters mertebeden

türev alınır (3.20) i kullanarak;

$${}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

elde edilir. $s = m-1$ alınır

$${}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau$$

elde edilir. (1.31) ve (1.32) den

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.22) ve (3.23) den $\frac{d^n}{dt^n}$ ve ${}_a D_t^p$ işlemleri değişmelidir. Böylece $t = a$

$f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) olmak koşuluyla

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t)$$

elde edilir.

Teorem.3.1.4

$0 \leq m \leq p \leq m+1$ ve $0 \leq n \leq q \leq n+1$ ve $f(t)$, $f^{(k)}(a) = 0$ olsun.

($k = 0, 1, \dots, r-1$) olmak üzere ${}_a D_t^p$ ve ${}_a D_t^q$ diferansiyellerinin birleşimi

$${}_a D_t^q \left({}_a D_t^p f(t) \right) = {}_a D_t^p \left({}_a D_t^q f(t) \right) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (3.25)$$

deki gibidir.

3.1.2 Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

Literatürde Riemann-Liouville kesirli türevleri Grünwald-Letnikov kesirli türevlerinin kesirli mertebeden geri farkının limiti olarak tanımlanır. Buna göre

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad m \leq p \leq m+1 \quad (3.26)$$

ile verilen kesirli türev tanımı Riemann-Liouville tanımıdır.

Teorem.3.2.1

Tamsayı mertebeden kesirli türevlerin ve integrallerin birleşimi $k > n$ ise $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. türevi

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (3.27)$$

olmak üzere (3.27) da D^k operatörü $k \leq 0$ ise k katlı integral, $k > 0$ ise k defa diferansiyel ifade eder.

Teorem.3.2.2

$f(t) = (t-a)^\beta$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevi

$${}_a D_t^p (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)} (t-a)^{\beta-p}$$

eşitliğinden elde edilebilir.

Örnek.3.2.1

$f(x) = x^5$ için $p=3$ olmak üzere kesirli türevi

$$D_x^3 (x^5) = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma(5-3+1)} x^{5-3} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)} x^2 = \frac{5!}{2!} x^2 = 60x^2 \text{ şeklindedir.}$$

Görüldüğü gibi α nın tamsayı değerleri için kesirli türev ile bildiğimiz adi türev aynıdır.

Tanım.3.2.1

n tamsayı değerleri için n katlı integrasyon

$$f^{-n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

dır. Yukarıda verilen Cauchy formülünde $p > 0$ reel sayısı ile n tamsayısı yer değiştirerek;

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

p – katlı kesirli integral tanımı elde edilir. n tamsayısı $n \geq 1$ şartını sağlamalıdır. Bu durumda açıktır ki $p > 0$ olmalıdır. Eğer $t \geq a$ için $f(t)$ sürekli ise integrasyon aşağıdaki önemli özelliğe sahiptir [28].

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t) .$$

Teorem.3.2.3

${}_a D_t^p$, $(m-1 \leq p < m)$ ve ${}_a D_t^q$ $(n-1 \leq q < n)$ olmak üzere kesirli türevlerin birleşimi

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (3.28)$$

eşitliği ile elde edilir.

Tanım.3.2.4

Bir fonksiyonun ardışık kesirli türevi

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

olmak üzere

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} D^{\alpha_3} \dots D^{\alpha_n} f(t) \quad (3.29)$$

ifadesine eşittir.

Lemma.3.2.1

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$${}_a D_t^p (\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \lambda_1 {}_a D_t^p f(t) + \lambda_2 {}_a D_t^p g(t) \quad (3.30)$$

kesirli türevlerin lineerlik özelliği vardır.

4. BÖLÜM

4.1 MATERYAL VE METOT

4.1.1 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Kısmi diferansiyel denklemlerin D bölgesindeki çözümü diferansiyel denklemdeki kısmi türevleri bu bölgede mevcut olan ve çözüm bölgesinde kısmi diferansiyel denklemi sağlayan $u(x, y, \dots)$ fonksiyonudur. Genel olarak kısmi diferansiyel denklemi sağlayan birden fazla çözüm fonksiyonu bulunabilir. Ancak fiziksel problemin cevabı olacak tek bir çözüm bu fiziksel olayı belirleyen bazı şartların kullanılması ile elde edilir. Bu şartlara başlangıç ve sınır şartları denir. Kısmi diferansiyel denklem ile birlikte denklemdeki t bağımsız değişkeninin belli bir değeri için çözüm fonksiyonu verilmiş ise buna başlangıç şartı, probleme de başlangıç değer problemi denir. Kısmi diferansiyel denklem ile birlikte çözüm bölgesinin sınırlarında çözüm fonksiyonu veya türevleri cinsinden değeri verilmişse buna sınır şartı probleme de sınır değer problemi denir. Hem başlangıç hem sınır şartlarını içeren problemlere başlangıç sınır değer problemi denir. En çok kullanılan üç tip sınır şartı;

$$\begin{aligned} U(a, t) &= f_1(t) \\ U(b, t) &= f_2(t) \end{aligned} \quad \text{Dirichlet Sınır şartı} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= g_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) &= g_2(t) \end{aligned} \quad \text{Neumann Sınır şartı} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \alpha(t)u(a, t) &= \beta_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \alpha(t)u(b, t) &= \beta_2(t) \end{aligned} \quad \text{Karışık, Robin Sınır şartı} \quad (4.3)$$

dır.

Eğer kısmi diferansiyel denklemler lineer ve sınır şartları da kolay anlaşılabilir bir matematiksel yapıda ise basit düzgün bölgelerde (2 boyutta kare, daire; 3 boyutta küre, silindir, küp ...) denklemlerin analitik çözümü bulunabilir. Fakat denklemler lineer olmayan ve denklemin çözümünün arandığı bölge düzgün bir yapıda değilse karmaşık sınır şartları karşımıza çıkar. Bazen de başlangıç veya sınır şartları sadece

belli noktalarda sayısal değer olarak verilir ise böyle durumlarda problemin analitik çözümünü bulmak zor veya imkansız olabilir. İşte o zaman problemin yaklaşık çözümünü ararız. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için birçok yöntem geliştirilmiş ve geliştirilmeye devam etmektedir. Bu yöntemlerden en çok kullanılan sonlu farklar yöntemidir. Yöntem temelde çözüm bölgesine grid (ağ=kafes=ızgara) dediğimiz bloglara bölerek bu blogların kesişim noktalarında denklemdeki türevler yerine onların sonlu fark eşitliklerini yazarak kısmi diferansiyel denklemi lineer veya lineer olmayan denklem sistemine dönüştürülür. Daha sonra bu denklem sistemi çözülerek bu grid noktasındaki çözümler yaklaşık olarak hesaplanır.

4.1.2 Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları

x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon U olsun. Genel olarak sonlu fark yöntemlerinde $x \circ t$ düzleminde $\Delta x (= h)$ ve $\Delta t (= k)$ kenar uzunluklu kafeslerin kesişim yerlerine mesh veya düğüm noktaları adı verilir. Örneğin $[0, l] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesi üzerinde, (x_i, t_m) ile ifade edilen bir düğüm noktası

$$x_i = i\Delta x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

$$t_m = m\Delta t = mk, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (4.5)$$

olarak verilir. Temsili bir $P(ih, mk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri için

$$U_p = U(ih, mk) = U_{i,m} = U_i^m \quad (4.6)$$

gösterimlerinden birisi kullanılır. Bu gösterimlerin kullanılması ve hataların ihmal edilmesiyle U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine göre sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımıyla

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{k} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+2}^m - 2U_{i+1}^m + U_i^m}{h^2} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_i^m - 2U_{i-1}^m + U_{i-2}^m}{h^2} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^m - 2U_i^m + U_{i-1}^m}{h^2} \quad (4.14)$$

olarak bulunur. (4.7), (4.8), (4.9) ile verilen, x' e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri geri ve merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (4.10), (4.11) ile verilen t' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlara sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (4.12), (4.13), (4.14) ile verilen x' e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına da sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir.

4.1.3 Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklar Yöntemiyle

Çözümleri

Parabolik kısmi diferansiyel denklemi olarak ısı denklemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (4.15)$$

$$U(0, t) = g_1(t) \quad (4.16)$$

$$U(1, t) = g_2(t)$$

sınır şartları ve

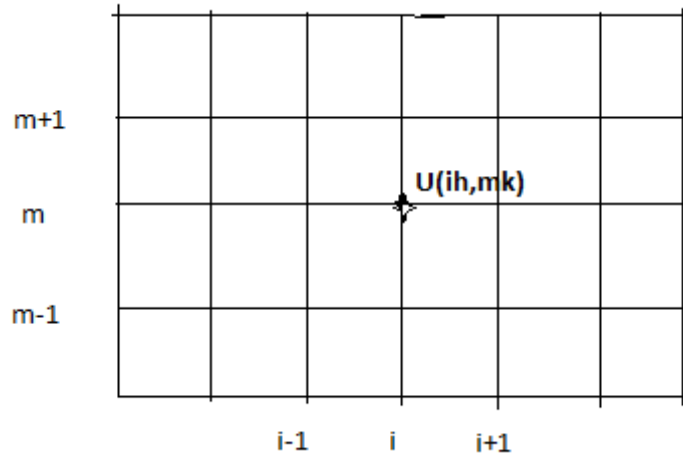
$$U(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.17)$$

başlangıç şartı ile verilsin. Problem her ne kadar 2 tane bağımsız değişken içeriyorsa da t zaman değişkeni olup problem 1 boyutludur. Çözüm bölgesi $[0, l]$ olup problemin

çözümünde bu aralık gridlere bölünür. Grid bloklardaki U nun bilinmeyen değerleri birbirleriyle ve sınır şartları ile ilişkilendirilerek her bir zaman aralığında belirlenen grid noktalarındaki U değerleri yaklaşık olarak bulunur.

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemiyle çözümünde kısmi diferansiyel denklemde verilen türevler yerine onların sonlu farkları alınarak oluşturulan fark denklemleri çözülür. Bunun için en sık kullanılan yöntemler Açık Yöntem, Kapalı Yöntem ya da Crank-Nicholson Yöntemidir.

Sonlu fark yaklaşımlarında problemin çözüm bölgesi N alt aralığa bölünür. Böylece $U(x,t)$ bağımlı değişkeni sadece düğüm noktalarda mevcuttur. Bu aralıkları işlemlerde kolaylık olması açısından eşit alacağız.



Şekil 4.1. U_i^m Düğüm noktası

4.1.3.1 Açık Yöntem

$0 \leq x \leq l, t > 0$ bölgesinde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.18)$$

olarak verilen ısı-iletim denklemini göz önüne alalım. Zamana bağlı türev için ileri fark, x' e göre ikinci türev için merkezi fark formüllerini $O(k)$ ve $O(h^2)$ hatalarını ihmal ederek yazalım.

Yani ;

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$

ifadelerini ısı denkleminde yerine yazalım.

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad (4.19)$$

veya

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, m = 0(1)M, n = 0(1)N \quad (4.20)$$

elde edilir. $r = \alpha \frac{k}{h^2}$ dir. Burada $U(x, t)$ sıcaklığı;

$$U(x, t) = U(ih, mk) = U(i\Delta x, m\Delta t) = U_i^m \quad (4.21)$$

olup yapılan hata $O(k) + O(h^2)$ mertebesindedir.

4.1.3.2 Kapalı Yöntem

Bu yöntemde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

ısı iletim denklemindeki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yerine $n+1$ inci adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2rU_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

merkezi fark formülü ve $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k)$ ile verilen ileri fark

formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad (4.22)$$

$$U_m^n = -rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1}, m = 0(1)M, n = 0(1)N \quad (4.23)$$

dir. Burada $r = \alpha \frac{k}{h^2}$ olup hatanın mertebesi $O(k) + O(h^2)$ olduğu açıkça görülür.

4.1.3.3 Crank Nicholson Yöntemi

Bu yöntem John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından önerilen modifiye edilmiş bir kapalı yöntemdir. Bu yöntemle

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

$$U_m^n = -rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1}$$

denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının averajlarının alınmasıyla elde edilmiştir.

$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ısı iletim denkleminin Crank-Nicholson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right] \quad (4.24)$$

dir.

Bu denklem $m=0(1)M$ ve $n=0(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir.

4.1.4 Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü

Burada en çok karşılaşılan Laplace ve Poisson denklemini ele alalım bu tip denklemlerin sayısal çözümünün nasıl bulunabileceğini araştıralım.

$$\text{Laplace Denklemi: } \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad (4.26)$$

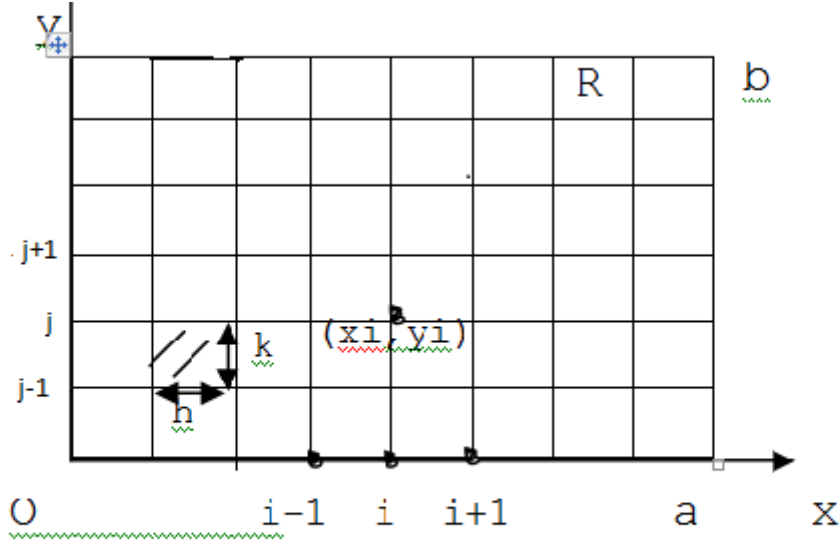
$$\text{Poisson Denklemi: } \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = f(x, y) \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilirler.

Laplace Denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.28)$$

eliptik kısmi diferansiyel denklemini ele alalım.



Şekil 4.2. $k = \Delta y$ ve $h = \Delta x$ aralıkları ve düğüm noktaları

Yukarıdaki sınır koşullarıyla belirlenmiş R çözüm bölgesini şekildeki gibi $k = \Delta y$ ve $h = \Delta x$ aralıklarıyla bölmelendirelim.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (4.30)$$

olmak üzere (x_i, y_j) noktaları için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (4.32)$$

yazarsak denklemde yerine koyup ve gerekli ara işlemleri de yaparsak,

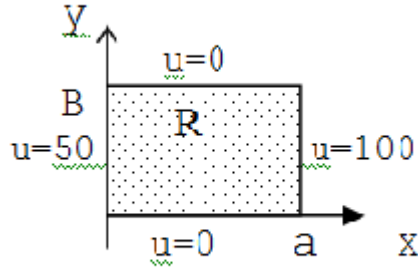
$$2(h^2 + k^2)u_{i,j} = k^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \quad (4.33)$$

cebirsel denklemi elde ederiz.

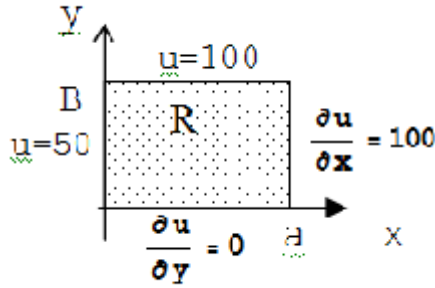
$h = k$ alınırsa,

$$4u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \quad (4.34)$$

R bölgesinin sınırları boyunca u değeri verildiği için bölmeleme sonunda ortaya çıkan her nokta için (4.34) denkleminin benzer denklemler yazılacak olursa bu noktalar sayısınca bilinmeyen ve denklem elde edilir. Bu cebirsel denklem takımının çözümüyle her bir noktanın u değeri belirlenmiş olur.



Şekil 4.3. Sabit değerli sınır koşulları



Şekil 4.4. Değişken sınır koşulları

Sınır koşulları U nun sabit değeri ile verilebileceği gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarakta verilebilir. Bazen de sınır değer olarak U nun bağımsız değişkenlerden birine göre birinci mertebeden türevinin değeri verilir.

Sınır koşulları U nun türevleri şeklinde verilirse bu türevleri sonlu farklar cinsinden yazarak noktaların U değerleri arasındaki ilişkiler sağlanır. Örneğin yukarıda gösterilen Şekil 4.4 için kısmi türevler için,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{u(x - 2\Delta x, y) - 4u(x - \Delta x, y) + 3u(x, y)}{2\Delta x} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{-u(x, y + 2\Delta y) + 4u(x, y + \Delta y) - 3u(x, y)}{2\Delta y} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılır. Burada sonlu farklar kullanılırsa hata mertebesi küçük olur. $\frac{\partial u}{\partial x}$ için geri yön sonlu farklar kullanılmasının sebebi x in sınır değerinde türev alınmasıdır. Yani türeve girerek x değeri bu sınırın gerisindeki değerlerdir.

Benzer düşünceyle $\frac{\partial u}{\partial y}$ için ileri fark yön sonlu farkların kullanılması gerekliliği ortaya çıkar.

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{-u(x, 2k) + 4u(x, k) - 3u(x, 0)}{2k} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = \frac{u(a - 2h, y) - 4u(a - h, y) + 3u(a, y)}{2h} = 100 \quad (0 \leq y \leq b) \quad (4.38)$$

İlk eşitlikte x eksenine ile ona k aralıklarla paralel iki yatay doğru üzerindeki noktalara ilişkin u değerleri arasında ilişki sağlanır. Benzer şekilde ikinci bağıntıyla $x = a$, $x = a - h$ ve $x = a - 2h$ düşey doğruları üzerindeki noktalara ilişkin u değerleri arasındaki ilişki sağlanmış olur. Birinci mertebeden bu türevler için,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{u(x, y) - u(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \quad (4.40)$$

sonlu farkları da alınabilir. Ancak bir öncekine göre hassas sonuçlar elde edilmez.

4.1.5 Kesirli Kısmı Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

4.1.5.1 Kesirli Türevin Crank-Nicholson Yaklaşımı

Bu bölümde Crank-Nicholson yöntemi ile kesirli mertebeden difüzyon denklemi için nümerik yaklaşımı elde edeceğiz. M ve N nin bazı pozitif tamsayı değerleri için sonlu farklar algoritması için konum ve zaman düğüm noktaları $h = 1/M$ ve $\tau = 1/N$ şeklinde alınabilir. Bu düğüm noktaları $[0,1]$ konum aralığında $x_i = ih$ $i = 0,1,\dots,M$ ve $[0,1]$ zaman aralığında $t_n = n\tau$ $n = 0,1,\dots,N$ şeklinde tanımlanır. U ve f fonksiyonlarının düğüm noktalarındaki değerleri ise $U_i^n = U(t_n, x_i)$ ve $f_i^n = f(t_n, x_i)$ şeklinde gösterilir.

Klasik Crank-Nicholson metodunda olduğu gibi, $(t_{n+1/2}, x_i)$ zaman aralığında

$\frac{\partial^\alpha U(t, x)}{\partial t^\alpha}$ kesirli türevi için bir yaklaşım elde edelim. Burada

$$H(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(s, x)}{(t-s)^\alpha} ds$$

şeklinde olsun. O zaman

$$\frac{\partial^\alpha U(t_{n+1/2}, x_i)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} H(t_{n+1/2}, x_i) = \frac{H(t_{n+1}, x_i) - H(t_n, x_i)}{\tau} + O(\tau^2) \quad (4.41)$$

elde edilir. Şimdi

$$a_j = \frac{\tau^{-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha} \right] \text{ ve } b_j = \frac{\tau^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha} \right]$$

olmak üzere,

$$H(t_{n+1}, x_i) \text{ ve } H(t_n, x_i)$$

ifadeleri için yaklaşımlar,

$$\begin{aligned}
H(t_{n+1}, x_i) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{u(s, x)}{(t_{n+1} - s)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{n+1} \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \frac{u(s, x)}{(t_{n+1} - s)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{n+1} \int_{(j-1)\tau}^{j\tau} \left[\frac{(s - t_j)}{-\tau} U_i^{j-1} + \frac{(s - t_{j-1})}{\tau} U_i^j + O(\tau^2) \right] \frac{1}{(t_{n+1} - s)^\alpha} ds \\
&= \tau \sum_{j=0}^n (a_j - j b_j) U_i^{n-j} - \tau \sum_{j=0}^n (a_j - (j+1) b_j) U_i^{n-j+1}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

ve

$$\begin{aligned}
H(t_n, x_i) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_n} \frac{u(s, x)}{(t_n - s)^\alpha} ds \\
&= \tau \sum_{j=1}^n (a_{j-1} - (j-1) b_{j-1}) U_i^{n-j} - \tau \sum_{j=1}^n (a_{j-1} - j b_{j-1}) U_i^{n-j+1}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklindedir. Böylece sonuç olarak aşağıdaki yaklaşım

$$\frac{\partial^\alpha U(t_{n+1/2}, x_i)}{\partial t^\alpha} \cong \sum_{j=0}^{n+1} w_{n,j} U_i^{n+1-j} \tag{4.44}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
w_{n,0} &= b_0 - a_0 \\
w_{n,1} &= \begin{cases} 3a_0 - a_1 + 2b_1 - b_0, & n = 0 \\ 2a_0 - a_1 + 2b_1 - b_0, & n > 0 \end{cases} \\
w_{n,j} &= \begin{cases} -a_{j-2} + 2a_{j-1} - a_j + (j-2)b_{j-2} - (2j-1)b_{j-1} + (j+1)b_j, & j = 2, \dots, n \\ a_n - a_{n-1} + (n-1)b_{n-1} - nb_n, & j = n+1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

dır. Diğer yandan

$$\frac{\partial^2 U(t_{n+1/2}, x_i)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \right] + O(h^2) \tag{4.46}$$

şeklinde yazabiliriz [7].

4.1.5.2 Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi İçin Crank-Nicholson Yöntemi

Aşağıdaki kesirli difüzyon denklemini gözönüne alalım [26].

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \leq 1$$

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (4.47)$$

(4.44) ve (4.46) yaklaşımları (4.47) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n+1} w_{n,j} U_i^{n+1-j} - \left[\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{2h^2} \right] \\ = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, x_i\right) & 0 \leq n \leq N-1, 1 \leq i \leq M-1 \\ U_i^0 = r(x_i), 1 \leq i \leq M-1 \\ U_0^n = U_M^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N \end{cases} \quad (4.48)$$

elde edilir. Bu sistem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2h^2}\right)(U_{i+1}^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) + \sum_{j=0}^{n+1} w_{n,j} U_i^{n+1-j} + \frac{1}{h^2} U_i^{n+1} + \frac{1}{h^2} U_i^n + \left(-\frac{1}{2h^2}\right)(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, x_i\right) \\ U_i^0 &= r(x_i), 1 \leq i \leq M-1 \\ U_0^n &= U_M^n = 0, \quad 0 \leq n \leq N \end{aligned} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılır. (4.49) denkleminin sonlu fark üzerinden matris formu

$$AU_{i+1} + BU_i + CU_{i-1} = \varphi_i \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi_i = (\varphi_i^0, \varphi_i^1, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^N)^T$, $\varphi_i^0 = r(x_i)$, $\varphi_i^n = f(t_{n+1/2}, x_i)$,

$1 \leq n \leq N$, $1 \leq i \leq M$ ve $U_i = [U_i^0, U_i^1, U_i^2, \dots, U_i^N]^T$ ile ifade edilir. (4.50) denklemindeki

A , B ve C matrislerinin boyutları $(N+1) \times (N+1)$ olup bu matrisler,

$$A = \left(-\frac{1}{2h^2}\right) \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \left(-\frac{1}{2h^2}\right) \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ w_{0,1} + \frac{1}{h^2} & w_{,0} + \frac{1}{h^2} & & & & \\ w_{1,2} & w_{,1} + \frac{1}{h^2} & w_{,0} + \frac{1}{h^2} & & & \\ w_{2,3} & w_{,2} & w_{,1} + \frac{1}{h^2} & w_{,0} + \frac{1}{h^2} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ w_{N-1,N} & w_{,N-1} & \cdots & w_{,2} & w_{,1} + \frac{1}{h^2} & w_{,0} + \frac{1}{h^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Böylece Gauss-Elme yöntemini kullanarak (4.50) denklemi

$$U_i = \alpha_{i+1} U_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i = M-1, \dots, 2, 1, 0 \quad (4.51)$$

şekline dönüştürülür. Şimdi (4.51) denklemindeki α_{i+1} ve β_{i+1} matrislerini belirleyelim.

Burada $U_0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1 = 0$ olduğu için $\alpha_1 = O_{(N+1) \times (N+1)}$ ve $\beta_1 = O_{(N+1) \times 1}$ olarak seçilebilir.

$U_i = \alpha_{i+1} U_{i+1} + \beta_{i+1}$ ve $U_{i-1} = \alpha_i U_i + \beta_i$ eşitlikleri (4.50) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(A + B\alpha_{i+1} + C\alpha_i\alpha_{i+1})U_{i+1} + (B\beta_{i+1} + C\alpha_i\beta_{i+1} + C\beta_i) = \varphi_i \quad (4.52)$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{cases} A + B\alpha_{i+1} + C\alpha_i\alpha_{i+1} = 0 \\ B\beta_{i+1} + C\alpha_i\beta_{i+1} + C\beta_i = \varphi_i \end{cases}, 1 \leq i \leq M-1 \quad (4.53)$$

sistemi yazılabilir. Böylece aşağıdaki ifadeyi

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = -(B + C\alpha_i)^{-1} A, \\ \beta_{i+1} = (B + C\alpha_i)^{-1} (\varphi - C\beta_i) \end{cases}, 1 \leq i \leq M-1 \quad (4.54)$$

elde ederiz.

4.1.5.3 Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Ayrışım yönteminin, bir seri metodu olduğu, birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metottan bahsedecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \quad (4.55)$$

olsun. Böylece L - verilen diferansiyel denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörünü, R - lineer operatörün kalan kısmını ve N - ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (4.55) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (4.56)$$

şeklinde yazalım. L bir lineer operatör ve L^{-1} tersi de mevcut olsun. (4.56) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (4.57)$$

şeklinde yazılabilir ve (4.57) eşitliğinin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (4.58)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (4.58) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (4.59)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (4.5.3.5) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terim

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n Adomian polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (4.59) eşitliğindeki u ; ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (4.60)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (4.59) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.61)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (4.61) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 \\ u_2 &= -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (4.62) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (4.63) genel formülünün kullanılması, (4.60) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \quad n \geq 0 \quad (4.64)$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \quad (4.65)$$

ifadesi (4.62) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (4.65) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir

5. BÖLÜM

METODUN UYGULANMASI

Bu bölümde kesirli mertebeden difüzyon denklemlerinin Crank-Nicholson yöntemi ve ADM yöntemi yardımıyla yaklaşık çözümlerini elde edeceğiz.

5.1 Kesirli Mertebeden Difüzyon Denkleminin Crank-Nicholson Yöntemiyle Çözümü

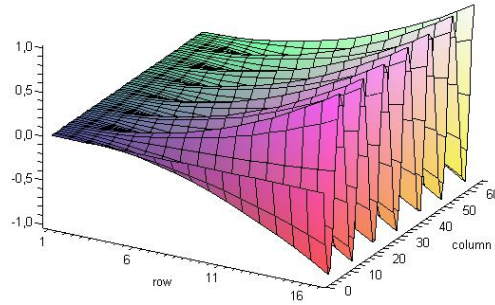
Uygulama 1:

$u(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$ başlangıç şartı ve $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $0 < t \leq 1$ sınır şartı ile verilen zaman kesirli difüzyon denklemini

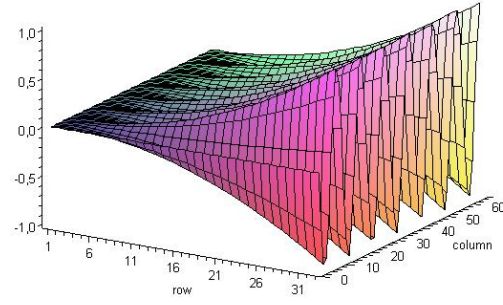
$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.1)$$

ele alalım [26]. Burada $f(x, t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} \sin(2\pi x) + 4\pi^2 t^2 \sin(2\pi x)$

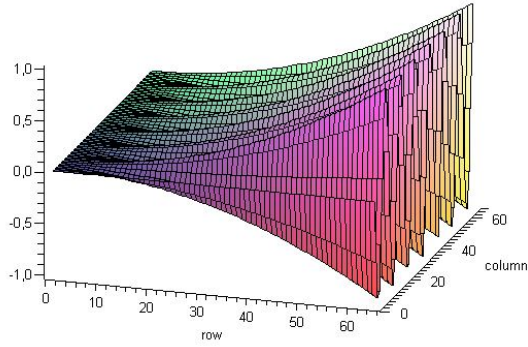
dir. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = t^2 \sin(2\pi x)$ dir [26]. (4.44) ve (4.46) ifadeleri (5.1) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa Şekil 5.1. de $M = 64$, $N = 16$, $\alpha = 0.2$, Şekil 5.2. de $M = 64$, $N = 32$, $\alpha = 0.2$ ve Şekil 5.3. de $M = 64$, $N = 64$, $\alpha = 0.2$ alınarak (5.1) denkleminin Crank-Nicholson yöntemi ile yaklaşık çözüm grafiği Maple programı kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.



Şekil 5.1. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 16$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği



Şekil 5.2. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 32$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği



Şekil 5.3. (5.1) difüzyon denkleminin $M = 64$, $N = 64$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği

(5.1) ile ifade edilen zaman kesirli difüzyon denkleminin M , N ve α nın farklı değerleri için $|U(x,t) - U_i^n(x,t)|$ hataları Tablo 5.1 de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tablo 5.1. Bazı M , N ve α değerleri için (5.1) difüzyon denkleminin hata değerleri

		$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
M	N	<i>Hata</i>	<i>Hata</i>	<i>Hata</i>
64	16	0.001937106481	0.001844677073	0.001326148022
64	32	0.0006626514950	0.0005304709778	0.0005214289069
64	64	0.0007326052182	0.0007128464310	0.0007046670340

Uygulama 2:

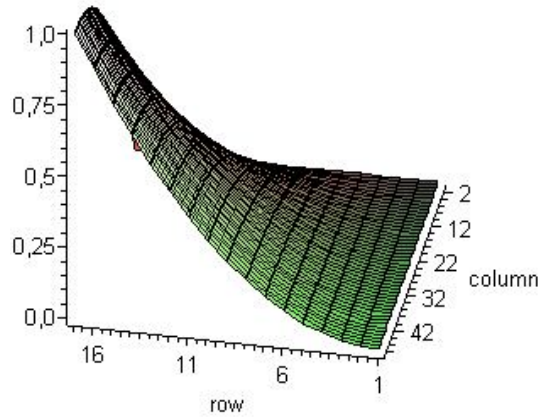
$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1$ başlangıç şartı ve $u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0$ sınır şartı ile verilen zaman kesirli difüzyon denklemini

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) = f(x, t), 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, 0 < \alpha < 1 \quad (5.2)$$

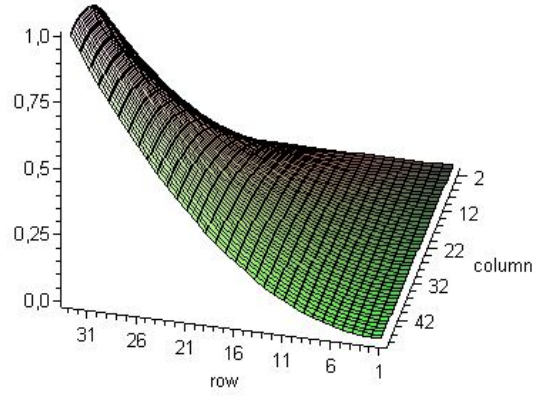
ele alalım [2]. Burada

$$f(x, t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x(2-x)t^{2-\alpha} + t^2 x(2-x) + 2t^2$$

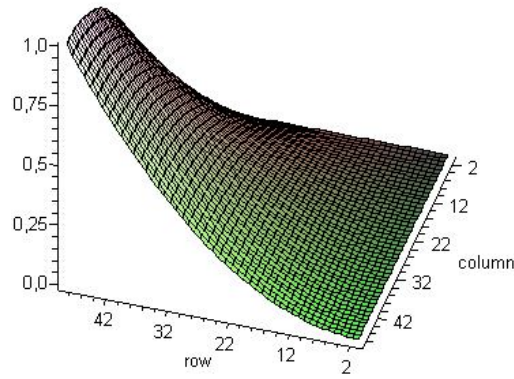
dir. Bu problemin tam çözümü $u(x, t) = t^2 x(2-x)$ dir [2]. (4.44) ve (4.46) ifadeleri (5.2) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa Şekil 5.4. de $M = 48, N = 16, \alpha = 0.2$, Şekil 5.5. de $M = 48, N = 32, \alpha = 0.2$ ve Şekil 5.6. de $M = 48, N = 48, \alpha = 0.2$ alınarak (5.2) denkleminin Crank-Nicholson yöntemi ile yaklaşık çözüm grafiği Maple programı kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.



Şekil 5.4. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48, N = 16, \alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği



Şekil 5.5. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48$, $N = 32$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği



Şekil 5.6. (5.2) difüzyon denkleminin $M = 48$, $N = 48$, $\alpha = 0.2$ değerleri için hata grafiği

(5.2) ile ifade edilen zaman kesirli difüzyon denkleminin M , N ve α nın farklı değerleri için $|U(x,t) - U_i^n(x,t)|$ hataları Tablo 5.2 de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tablo 5.2. Bazı M , N ve α değerleri için (5.2) difüzyon denkleminin hata değerleri

		$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
M	N	$Hata$	$Hata$	$Hata$
48	16	0.006171225937	0.004293378614	0.004318848857
48	32	0.003887392591	0.002222009029	0.002231505317
48	48	0.003715712439	0.001499041766	0.001503670513

5.2 Kesirli Difüzyon Denkleminin Adomian Ayrışım Yöntemiyle Çözümü

Uygulama 1:

(5.1) eşitliği ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. Burada $u_x(0, t) = 2\pi t^2$ dir.

Bu denklemi

$$L_{xx}u - L_t u + f(x, t) = 0 \quad (5.3)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_{xx} = \frac{d^2}{dx^2}$ dir. Burada L_{xx}^{-1} integral operatörü olup

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx \text{ şeklinde gösterilir. (5.3) denkleminin her iki tarafına soldan } L_{xx}^{-1}$$

uygulanırsa

$$L_{xx}^{-1}[L_{xx}u] = L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u] - L_{xx}^{-1}[f(x, t)] \quad (5.4)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(0, t) + xu_x(0, t) + L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u - f(x, t)] \quad (5.5)$$

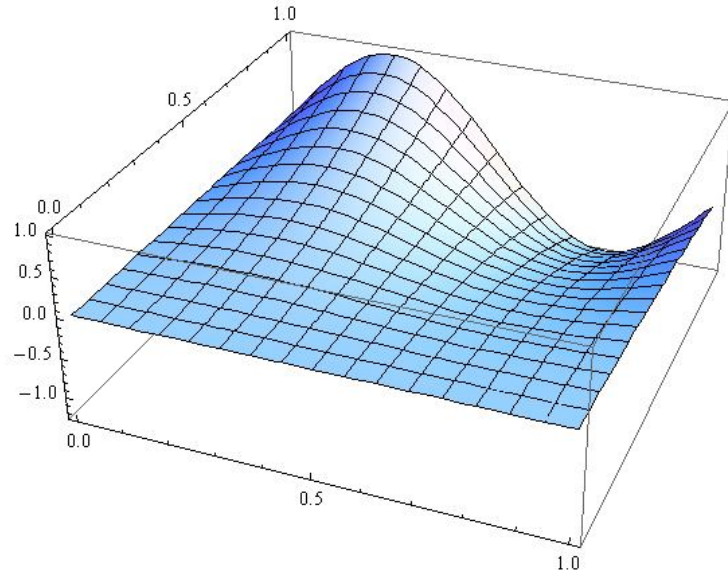
olur. (5.5) denklemi için

$$\begin{cases} u(0, t) = u(0, t) + xu_x(0, t) \\ u_{k+1}(x, t) = L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u_k - f(x, t)] \end{cases} \quad (5.6)$$

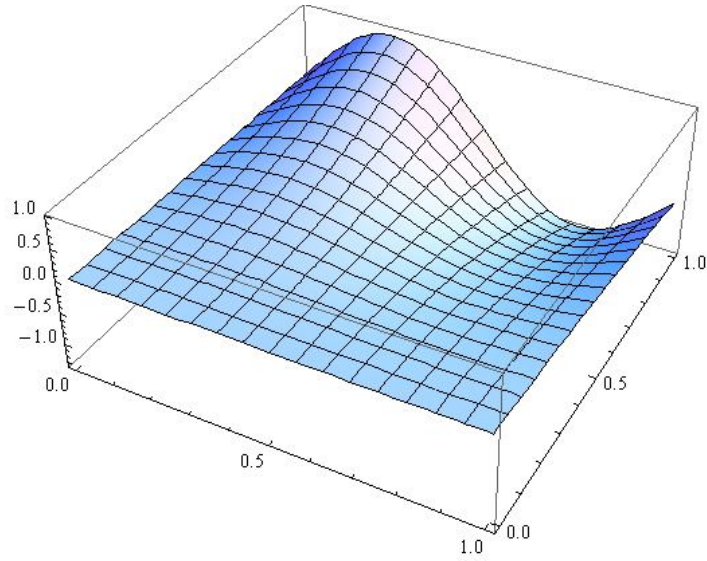
(5.6) rekürans bağıntısı elde edilir. Bu rekürans bağıntısı yardımıyla yaklaşık çözüm

$$\tilde{u} = 2\pi x t^2 + \frac{1}{6} t^2 \left(\frac{2\pi t^{-\alpha} x^3 \Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[-1+\alpha]} + 6(-2\pi x + \sin(2\pi x)) + \frac{3t^{-\alpha}(-2\pi x + \sin(2\pi x))}{\pi^2 \Gamma[3-\alpha]} \right)$$

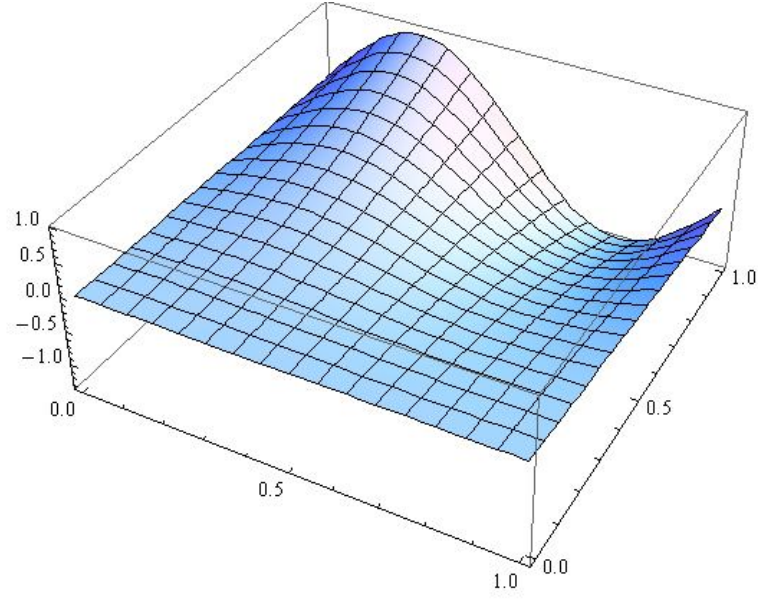
şeklinde elde edilir. α , x ve t nin farklı değerleri için hata tablosundaki değerler ve yaklaşık çözüm grafikleri Mathematica programı yardımıyla hesaplanmıştır.



Şekil 5.7. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.2$ değerleri için yaklaşık çözümü



Şekil 5.8. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.5$ değerleri için yaklaşık çözümü



Şekil 5.9. (5.1) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü

Tablo 5.3. Bazı x , t ve α değerleri için (5.1) difüzyon denkleminin hata değerleri

		$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
t	x	$Hata$	$Hata$	$Hata$
0.5	0.5	3.3277×10^{-2}	5.38991×10^{-2}	7.64462×10^{-2}
0.5	0.05	5.06387×10^{-5}	8.08558×10^{-5}	1.2163×10^{-4}
0.5	0.005	5.08573×10^{-8}	8.11951×10^{-8}	1.22199×10^{-7}

Uygulama 2:

(5.2) eşitliği ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. Burada $u_x(0,t) = 2t^2$ dir.

Bu denklemi

$$L_{xx}u - L_t u - u + f(x,t) = 0 \quad (5.7)$$

operatör formunda yazılabilir. Burada $L_{xx} = \frac{d^2}{dx^2}$ dir. Burada L_{xx}^{-1} integral operatörü olup

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx \quad \text{şeklinde gösterilir. (5.7) denkleminin her iki tarafına soldan } L_{xx}^{-1}$$

uygulanırsa

$$L_{xx}^{-1}[L_{xx}u] = L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u] - L_{xx}^{-1}[f(x,t)] + L_{xx}^{-1}u \quad (5.8)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t) + L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u - f(x,t) + u(x,t)] \quad (5.9)$$

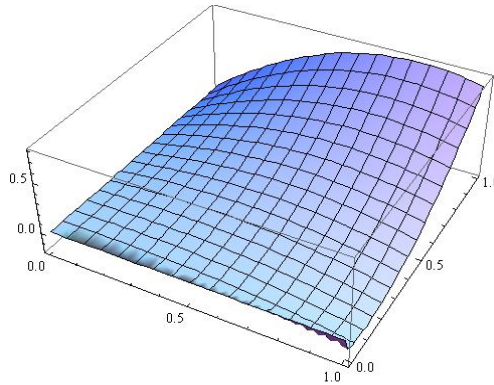
olur. (5.9) denklemini için

$$\begin{cases} u(0,t) = u(0,t) + xu_x(0,t) \\ u_{k+1}(x,t) = L_{xx}^{-1}[D_t^\alpha u_k - f(x,t) + u_k(x,t)] \end{cases} \quad (5.10)$$

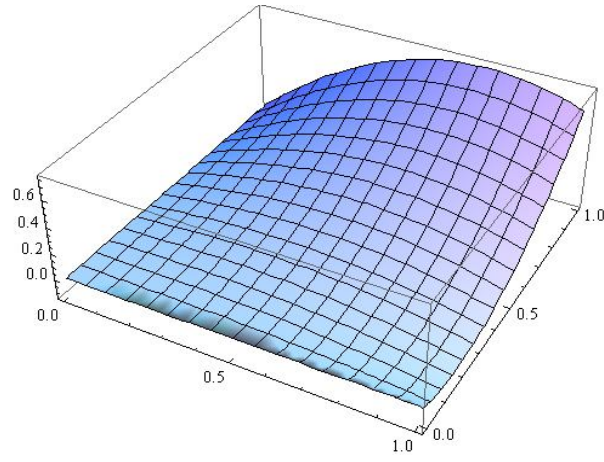
(5.10) rekürans bağıntısı elde edilir. Bu rekürans bağıntısı yardımıyla yaklaşık çözüm

$$\tilde{u}(x,t) = 2t^2x - t^2x^2 + \frac{t^2x^4}{12} - \frac{2t^\alpha x^3}{3\Gamma[3-\alpha]} + \frac{t^\alpha x^4}{6\Gamma[3-\alpha]} + \frac{t^{2-\alpha}x^3\Gamma[1+\alpha]}{3\Gamma[\alpha-1]}$$

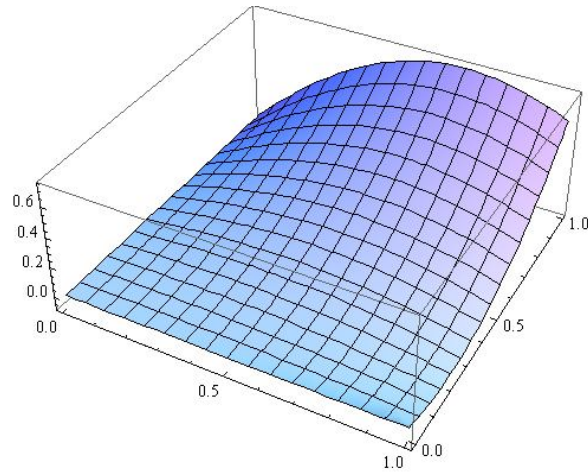
şeklinde elde edilir. α , x ve t nin farklı değerleri için hata tablosundaki değerler ve yaklaşık çözüm grafikleri Mathematica programı yardımıyla hesaplanmıştır.



Şekil 5.10. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.2$ değerleri için yaklaşık çözümü



Şekil 5.11. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.5$ değerleri için yaklaşık çözümü



Şekil 5.12. (5.2) difüzyon denkleminin $t = 0.5$, $x = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerleri için yaklaşık çözümü

Tablo 5.4. . Bazı x, t ve α değerleri için (5.2) difüzyon denkleminin hata değerleri

		$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
t	x	<i>Hata</i>	<i>Hata</i>	<i>Hata</i>
0.5	0.5	3.84758×10^{-2}	4.11668×10^{-2}	3.77867×10^{-2}
0.5	0.05	4.45158×10^{-5}	4.73255×10^{-5}	4.37593×10^{-5}
0.5	0.005	4.51198×10^{-8}	4.79413×10^{-8}	4.43566×10^{-8}

6. BÖLÜM

SONUÇ

Sonlu Farklar Yöntemi ve Adomian Ayrışım Metodu homojen ve homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemlere veya kesirli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilmektedir. Bu çalışmada sonlu farklar yöntemini kesirli mertebeden difüzyon denklemlerine uygulayabilmek için, Crank-Nicholson yöntemi yardımıyla kesirli türev yaklaşımları elde edilmiştir. Bu yaklaşımları verilen denklemde yerine yazıp çözüm yöntemini uygulayabilmek için Crank-Nicholson yönteminin algoritması Maple programı yardımıyla yazılmıştır. Uygulanan nümerik yöntemi ve tam çözümü karşılaştırarak Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 deki sonuçlar elde edilmiştir. Yine aynı kesirli diferansiyel denklemlere Adomian ayrışım metodu uygulanarak, Mathematica programında yaklaşık değerleri hesaplanıp α nın farklı değerleri için grafikleri çizilmiştir. Uygulanan nümerik yöntemi ve tam çözümü karşılaştırarak Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 deki sonuçlar elde edilmiştir. Her iki yöntemde de görüldüğü üzere uygulanan yöntemlerdeki adım aralığı ne kadar küçültülürse bulunan hatanın da o kadar küçüldüğü gözlemlenmiştir. Uygulanan bu yöntemlerle kesirli mertebeden difüzyon denklemi için elde edilen yaklaşık çözümlerde Adomian Ayrışım metodunun tam çözüme daha hızlı yakınsadığı görülmüştür. Bundan dolayı ADM metodunun kesirli difüzyon denklemi üzerinde yaklaşık çözümleri bulmada daha etkili ve verimli bir teknik olduğu görülmektedir.

```

> restart;
with(plots):
with(LinearAlgebra):
riemann:=proc(f,salfa)
    local s,p,pp;
    p:=subs(t=s,f);
    pp:=int( p/((t-s)^salfa), s=0..t);
    ( 1/GAMMA( 1-salfa) *diff(pp,t)):
end proc:

MM:=[64,64,64];
NN:=[16,32,64];
zalfan:=[0.2,0.5,0.9]:
for tt from 1 to nops(MM) do
for mm from 1 to nops(zalfan) do
    M:=MM[tt]: N:=NN[tt]: zalfa:=zalfan[mm]:

u2:=(t,x)-> (t^2)*(sin(360*x)):
u:=(t,x)->(t^2)*(sin(2*Pi*x)):
utx:= u(t,x):
utx2:=u(t,x):
P1:= subs(t=0,utx): rrr := unapply(P1,x):
#P11:= subs(t=1,utx): rrr2 := unapply(P11,x):
#Q:=diff(utx2,t): P2:= subs(t=0,Q): sss:= unapply(P2,x):
P3:= subs(x=1,utx): saguc:=unapply(P3,t):
P4:= subs(x=0,utx): soluc:=unapply(P4,t):
f:=unapply(P5,t,x):

tau:= evalf(1/N): h:=evalf(1/M): v := evalf(-1/(2*h^2)):

A:=Matrix(N+1,N+1):
for i from 2 to N+1 do
    A[[i],[i]]:=v;
    A[[i],[i-1]]:=v;
end do :
A:

C:=Matrix(N+1,N+1):
for i from 2 to N+1 do
    C[[i],[i]]:=v;
    C[[i],[i-1]]:=v;
end do :

for jj from 0 to N+1 do
    a[jj]:=evalf( ((tau^(-zalfa))/(2-zalfa) )*((jj+1)^(2-zalfa)-jj^(2-zalfa)) );
    b[jj]:=evalf( ((tau^(-zalfa))/(1-zalfa))*((jj+1)^(1-zalfa)-jj^(1-zalfa)) );
end do:

```

```

a[-1]:=0;
b[-1]:=0;

for j from 1 to N-1 do
  d[j]:=evalf( (1/GAMMA(1-zalfa))*(-a[j-1]+2*a[j]-a[j+1]+(j-1)*b[j-1]-
(2*j+1)*b[j]+(j+2)*b[j+1]) );
end do;

P:=evalf( (1/GAMMA(1-zalfa))*( 2*a[0]-a[1]+2*b[1]-b[0]));
q:=evalf( (1/GAMMA(1-zalfa))*(b[0]- a[0] ));

PP:=evalf(P+(1/h^2));

B:=Matrix(N+1,N+1):
B[[1],[1]]:=1:

B[[2],[1]]:=R[0]+PP:          #B[[2],[1]]:=R[0]+PP:

for i from 3 to N+1 do
  B[[i],[1]]:=R[i-2]:
end do:

for i from 2 to N+1 do
  B[[i],[i]]:=evalf(1/h^2+q):
end do:
for i from 3 to N+1 do
  B[[i],[i-1]]:=PP:
end do:

for i from 2 to N+1 do
  for j from 2 to N do
    if (i+j)<=N+1 then
      B[[i+j],[j]]:=d[i-1]:
    fi;
  end do:
end do:

Dm:=Matrix(N+1,shape=identity):
alpha[1] := Matrix(N+1) :
betha[1] := Matrix(N+1,1) :
for k from 1 to N+1 do
  betha[1,k]:=soluc( (k-1)*tau ):
end do:

```

```

fii:=Matrix(N+1,M):
for j from 1 to M do
xj:=j*h;
  for k from 1 to N do
tk:=k*tau-tau/2;
    fii[[k+1],[j]] := evalf( f(tk,xj) );
  end do;
  fii[[1],[j]]:= evalf(rrr(xj));
end do;

U:=Matrix(N+1,M+1):
for j from 1 to N+1 do ;
  U[[j],[M+1]] := saguc( (j-1)*tau);
end do;

U[[1..N+1], [M+1]] ;

for z from M-1 to 1 by -1 do ;
  U[[1..N+1],[z+1]] := alpha[z+1] . U[[1..N+1],[z+2]] + betha[z+1];
end do;

U:
print("-----");

musta:=Matrix(N+1,M+1):
musta2:=Matrix(N+1,M+1):
  for j from 1 to M+1 do;
    for k from 1 to N+1 do;
tk:=(k-1)*tau;
xj:=(j-1)*h;
      musta[[k],[j]] := evalf(u(tk,xj));
      musta2[[k],[j]] := evalf(u2(tk,xj));

    end do;
  end do;

matrixplot(musta2,axes=frame);
print(%);
sonuc:=abs(U-musta):
maxhata:= rtable_scanblock( sonuc, [rtable_dims(sonuc)], 'Maximum'):
print('M','N','Açı','Sonuç');
print(M,N,zalfa,maxhata);
end do:
end do:

```

KAYNAKLAR

- [1] **Benson D. A., Wheatcraft S., Meerschaert M. M.**, 2000. Application of a fractional advection–dispersion equation, *Water Resources Research*, **36**, 1403–1412.
- [2] **Chen W., Ye L., Sun H.**, 2010. Fractional diffusion equations by the Kansa method, *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 1614-1620.
- [3] **Catania F., Massabò M., Paladino O.**, 2006. Estimation of transport and kinetic parameters using analytical solutions of the 2D advection-dispersion-reaction model, *Environmetrics*, **17**, 199-216.
- [4] **Khalifa M. E.**, 2003. Some analytical solutions for the advection-dispersion equation, *Applied Mathematics and Computation*, **139**, 299-310.
- [5] **Johnson A. R., Hatfield C. A., and Bruce B. T.**, 1995. Simulated diffusion dynamics in river networks, *Ecological Modelling*, **83**, 311–325.
- [6] **Abu-Saman A. M., Assaf A. M.**, 2007. Stability and Convergence of Crank-Nicolson Method for Fractional Advection Dispersion Equation, *Advances in Applied Mathematical Analysis*, **2 (2)**, 117-125.
- [7] **Karatay I., Bayramoglu S.**, 2012. An Efficient Difference Scheme For Time Fractional Advection Dispersion Equations, *Applied Mathematical Sciences*, **6**, 4869-4878.
- [8] **Kilbas A. A., H. Srivastava M., Trujillo, J. J.**, 2006. Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier Science, New York.
- [9] **Podlubny I.**, 1999. Fractional differential equations, Academic Press, San Diego.

- [10] **Nishimoto K.**, 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus, Descarter Press Company.
- [11] **Momani S., Odibat Z.**, 2007. Comparison between the homotopy perturbation method and the variational iteration method for linear fractional partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **54**, 910–919.
- [12] **Luchko Y., Gorenflo R.**, 1999. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Acta Math Vietnam*, **24**, 207–233.
- [13] **Odibat Z., Momani S.**, 2008. A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order, *Applied Mathematics Letters*, **21**, 194–199.
- [14] **Ray S. S.**, 2009. Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step adomian decomposition method, *Commun Nonlinear Sci* **14**, 1295–1306.
- [15] **Dehghan M., Manafian J., Saadatmandi A.**, 2010. Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Numerical Methods Partial Differtial Equations*, **26**, 448–479.
- [16] **Su L., Wang W., Xu Q.**, 2010. Finite difference methods for fractional dispersion equations, *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 3329–3334.
- [17] **Tadjeran C., Meerschaert M. M., Scheffler H. P.**, 2006. A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, **213**, 205–213.
- [18] **Kumar S., Yildirim A., Khan Y., Wei L.**, 2012. A fractional model of the diffusion equation and its analytical solution using Laplace transform, *Scientia Iranica*, **19**, 1117–1123.

- [19] **Cetinkaya A., Kıymaz O.**, 2013. The solution of the time-fractional diffusion equation by the generalized differential transform method, *Mathematical and Computer Modelling*, **57**, 2349-2354.
- [20] **Zhang Z. Q., Wei T.**, 2013. Identifying an unknown source in time-fractional diffusion equation by a truncation method, *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 5972-5973.
- [21] **Meerschaert M. M., Tadjeran C.**, 2004. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations, *Computational. Applied Mathematics*, **172**, 65–77.
- [22] **Lynch V. E., Carreras B. A., Del-Castillo-Negrete D., Ferreira-Mejias K.M., Hicks H.R.**, 2003. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order, *Journal of Computational Physics*, **192**, 406–421.
- [23] **Deng Z., Singh V.P., Asce F., Bengtsson L.**, 2004. Numerical Solution of Fractional Advection-Dispersion Equation, *Journal of Hydraulic Engineering*, **130**, 422–431.
- [24] **Karatay I., Bayramoglu S. R., Sahin A.**, 2011. Implicit difference approximation for the time fractional heat equation with the nonlocal condition, *Applied Numerical Mathematics*, **61**, 1281-1288.
- [25] **Meerschaert M.M., Tadjeran C.**, 2006. Finite difference approximations for two sided space-fractional partial differential equations, *Applied Numerical Mathematics*, **56**, 80–90.
- [26] **Saadatmandi A., Dehghan M., Azizi M. R.**, 2012. The Sinc–Legendre collocation method for a class of fractional convection–diffusion equations with variable coefficients, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **17**, 4125–4136.

- [27] **Bulut B.**, 2007. Klasik sonlu fark yöntemleri ve uygulamaları, *Yüksek lisans Tezi*, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [28] **Soytas C.**, 2006. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri, *Yüksek lisans Tezi*, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- [29] **Loverro A.**, 2004. Fractional Calculus.. History, Definition and Applications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- [30] **Cherruault Y., Ngarhasta N., Some B., Abbaoui K.**, 2002. New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model, **31 (1)**, 61-75.
- [31] **Liao S.J.**, 2003. Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method, Boca Raton Chapman and Hall/CRC Press.
- [32] **Liao S. J.**, 2009. Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, **14** , 983-997.
- [33] **Adomian G.**, 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **135**, 501–544.
- [34] **Adomian G.**, 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer, Boston.
- [35] **Dehghan M.**, 2004. The use of Adomian decomposition method for solving the one dimensional parabolic equation with non-local boundary specification, International Journal of Computer Mathematics, **81**, 25–34.
- [36] **Mavoungou T., Cherruault Y.**, 1992. Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations, Kybernetes, **21**, 13–25.

[37] **Wazwaz A.M.**, 2005 Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu type equations, *Applied Mathematics and Computation*, **166**, 652,663.

[38] **Baskonus H. M.**, 2010. Bazı Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Adomian ayrışım metodu ve Homotopi Pertürbasyon metodu ile sayısal çözümleri, *Yüksek lisans Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ,

[39] **B. Çağal**. Sayısal Analiz, 1989. Birsen Yayınevi, İstanbul.

[40] **İ. Ethem Anar**, Kısmi diferansiyel denklemler, Palme Yayıncılık, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında MALATYA da doğdum. İlk ve orta eğitimimi İSTANBUL Melek Hatun İ.Ö.O' da tamamladım. Şehremini Lisesinde lise eğitimimi tamamladıktan sonra 2007 yılında İnönü Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 2011 Haziranında mezun olduktan sonra aynı yılın Eylülünde Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde tezli yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrencisiyim.

