

**T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYRIŞIM METODUNUN MATEMATİKSEL TEMELLERİ VE BAZI
UYGULAMALARI**

Mustafa İNÇ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

116597

116597

ELAZIĞ

2002



T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIŞIM METODUNUN MATEMATİKSEL TEMELLERİ VE BAZI
UYGULAMALARI

Mustafa İNÇ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez , 20 / 09 / 2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından Oybirliği /
Öyçokluğu ile Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

Danışman

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye

Prof. Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ

Üye

Doç. Dr. Necdet BİLDİK

Üye

Doç. Dr. Doğan KAYA

Üye



ÖZET**Doktora Tezi****AYRISIM METODUNUN MATEMATİKSEL TEMELLERİ VE BAZI
UYGULAMALARI****MUSTAFA İNÇ****Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2002, 110**

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlendi.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; ayrışım metodunun genel bir sunumu yapıldı ve daha önceden yapılan çalışmalar geniş bir şekilde açıklandı.

Üçüncü ve dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup, üçüncü bölümde sunulan metot adi diferensiyel denklemlere ve iki noktalı singüler sınır-değer problemlerine uygulandı. Sıfırdan uzak x değerlerinde hassas sonuçlar elde etmek için metodun çözüm serisine Padé yaklaşımı uygulandı. Ayrıca ayrışım metodunun Taylor seri metodunun bir genellemesi olduğu gösterildi, metodun yakınsaklığıyla ilgili basit hipotezlere dayanan iki yeni teorem ifade ve ispat edildi. İlaveten bu teknik, lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin analitik çözümünü, matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden olan KdV ve MKdV denklemlerinin soliton çözümlerini bulmak için kullanıldı.

Dördüncü bölümde ise bu metot lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem sistemlerine ve birleştirilmiş Schrödinger denklemine uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Ayrışım Metodu, Adomian Polinomları, Padé Yaklaşımı, Klein-Gordon, KdV, MKdV ve Birleştirilmiş Schrödinger Denklemleri, Soliton.



SUMMARY**Ph. D. Thesis****THE FUNDAMENTALS OF THE DECOMPOSITION METHOD AND SOME APPLICATIONS****MUSTAFA İNÇ**

**Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
2002, 110**

This study is arranged in four chapters.

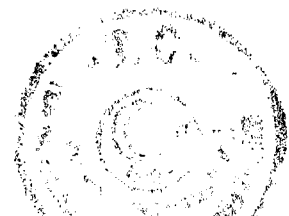
In the first chapter; some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; it is made general exhibition of the decomposition method and is given about some knowledge earlier works.

The original parth of study is given in the thirth and fourth chapters. The third chapter contains the applications to ordinary differential equations and two-point singular boundary value problems. In order to obtain accurate results for values away from zero, it is applied Padé approximation to the solution series. Also, in the same chapter it is demonstrated that the decomposition method is a generalization of Taylor series method, it is expressed and proved two new theorems related to convergence of the method based on basic hypotheses. In addition, this technique is used to find analytical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation, and for soliton solutions of the KdV and MKdV equations which are important of the mathematical physics.

In the final chapter; this scheme is applied to linear and nonlinear partial differential equation systems and coupled Schrödinger equations.

Key Words: Decomposition Method, Adomian Polynomials, Padé Approximation, Klein-Gordon, KdV, MKdV and Coupled Schrödinger equations, Soliton.

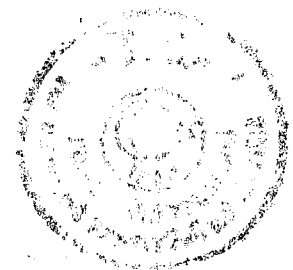


TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım Hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve kaynak temininde bana yardımcı olan Pierre et Marie Curie – Paris Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Yves CHERRUAULT'a ve Prof. Dr. Karim ABBAOUI'ye şükranlarımı sunarım.

Mustafa İNÇ



İÇİNDEKİLER

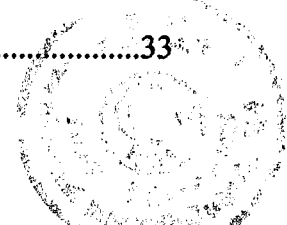
	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SİMGELER LİSTESİ.....	IX
GİRİŞ.....	1

I.BÖLÜM

1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	4
------------------------------------	---

II.BÖLÜM

2.1. Ayrışım Metodu ve Birkaç Analiz Metodunun Sonuçlarının Sunulması.....	13
2.2. Metodun Sunumu.....	15
2.3. A_n 'leri Veren Bazı Formüllere Bir Bakış.....	17
2.3.1. Adomian Polinomlarını Hesaplamak İçin Basit Bir Formül.....	19
2.3.2. İki Değişkenli Adomian Polinomları İçin Basit Bir Form.....	22
2.3.3. Üç Değişkenli Adomian Polinomlarının Basit Bir Formu.....	24
2.3.4. Adomian Polinomlarının Hesaplanması İçin Farklı Bir Metot.....	25
2.3.4.a. Lineer Olmayan Polinomlar.....	25
2.3.4.b. Trigonometrik Lineer Olmayanlık.....	27
2.3.4.c. Üstel Lineer Olmayanlık.....	29
2.3.4.d. Logaritmik Lineer Olmayanlık.....	30
2.3.5. Bileşke Fonksiyonlar İçin Adomian Polinomları.....	32
2.4. Yakınsaklıkla İlgili Bazı Hatırlatmalar.....	33



III.BÖLÜM

3.0. Giriş.....	35
3.1. Ayırışım Metodunun Adi Diferensiyel Denklemlere Uygulanması.....	36
3.2. Ayırışım Metodunun Kısmi Diferensiyel Denklemlere Uygulanması.....	54
3.2.1. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi.....	60
3.2.2. KdV ve MKdV Denklemlerinin Soliton Çözümleri İçin Ayırışım Metodu.....	66
3.3. Genel Durumlarda Ayırışım Metodunun Yakınsaklığı.....	75

IV.BÖLÜM

4.1. Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemlerine Ayırışım Metodunun Uygulanması.....	80
4.2. Ayırışım Metodunun Lineer Olmayan Birleştirilmiş (Coupled) Schrödinger Denklemlerine Uygulanması.....	92
SONUÇ.....	100
KAYNAKLAR.....	102



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1.1. Bernoulli denklemi için ayrışım metodunun çözüm serisinin ve Padé yaklaşımının kullanılmasıyla elde edilen hatayı gösteren grafik.....	46
Şekil 3.1.2. Ricatti denklemi için ayrışım metodunun çözüm serisinin ve Padé yaklaşımının ve kullanılmasıyla elde edilen hatayı gösteren grafik.....	50
Şekil 3.2.1. (3.2.19) denkleminin $-4 \leq x \leq 4$ ve $-\pi \leq t \leq 2\pi$ için analitik çözümünü gösteren yüzey.....	59
Şekil 3.2.2. (3.2.19) denkleminin $-4 \leq x \leq 4$ ve $-\pi \leq t \leq 2\pi$ için yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.....	59
Şekil 3.2.3. Tek dalga (Solitary wave).....	61
Şekil 3.2.4. Tek dalganın gelişmesi.....	63
Şekil 3.2.5. Bir sarmal (Envelope) soliton.....	65
Şekil 3.2.6. Soliton ve antisoliton.....	66
Şekil 3.2.7. Aynı eksene göre simetrik solitonlar (Breather solitonları).....	66
Şekil 3.2.8. $-6 \leq x \leq 6$ ve $-4 \leq t \leq 4$ için u'nun analitik çözümünü gösteren yüzey.....	70
Şekil 3.2.9. $-6 \leq x \leq 6$ ve $-4 \leq t \leq 4$ için u'nun hata çözümünü gösteren yüzey.....	70
Şekil 3.2.10. $-3 \leq x \leq 3$ ve $-8 \leq t \leq 8$ için v'nin analitik çözümünü gösteren yüzey.....	70
Şekil 3.2.11. $-3 \leq x \leq 3$ ve $-8 \leq t \leq 8$ için v'nin hata çözümünü gösteren yüzey.....	71
Şekil 3.2.12. KdV denklemi için elde edilen tek dalga çözümlerinin grafiği.....	72
Şekil 3.2.13. MKdV denklemi için elde edilen tek dalga çözümlerinin grafiği.....	72
Şekil 3.2.14. KdV denklemi için iki soliton çözümünü gösteren yüzey.....	73
Şekil 3.2.15. KdV denklemi için t zamanının değişmesiyle iki soliton hareketi.....	74
Şekil 3.2.16. KdV denkleminin tek soliton çözümünün dış hat çizgileri.....	74
Şekil 3.2.17. KdV denkleminin iki soliton çözümünün dış hat çizgileri.....	75
Şekil 4.1.1. u(x,t) fonksiyonu için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	85
Şekil 4.1.2. v(x,t) fonksiyonu için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	85
Şekil 4.1.3. u(x,t) fonksiyonunun analitik çözümünü gösteren yüzey.....	86



Şekil 4.1.4. $u(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.....	86
Şekil 4.1.5. $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	87
Şekil 4.1.6. $v(x,t)$ fonksiyonunun analitik çözümünü gösteren yüzey.....	87
Şekil 4.1.7. $v(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.....	88
Şekil 4.1.8. $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	88
Şekil 4.2.1. Reel $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	98
Şekil 4.2.2. İmajiner $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	98
Şekil 4.2.3. Reel $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	99
Şekil 4.2.4. İmajiner $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.....	99



TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1.1. (3.1.46) ile verilen Bernoulli denklemi için sayısal sonuçlar.....	44
Tablo 3.1.2. $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ için elde edilen hata miktarları.....	45
Tablo 3.1.3. (3.1.56) ile verilen Ricatti denklemi için sayısal sonuçlar.....	48
Tablo 3.1.4. $ H_1(x) $ ve $ H_2(x) $ için elde edilen hata miktarları.....	49
Tablo 3.1.5. (3.1.61) denklemi için sayısal sonuçlar.....	53
Tablo 3.1.6. (3.1.61) denklemi için çeşitli metotlarla elde edilen hata miktarlarının karşılaştırılması.....	54
Tablo 3.2.1. (3.2.19) denklemi için sayısal sonuçlar.....	58
Tablo 3.2.2. (3.2.35) ve (3.2.36) denklemleri için elde edilen mutlak hatalar.....	69
Tablo 4.1.1. $u(x,t)$ denklemi için sayısal sonuçlar.....	84
Tablo 4.1.2. $v(x,t)$ denklemi için sayısal sonuçlar.....	84
Tablo 4.2.1. $u(x,0) = e^{ix}$ ve (4.2.2) denklemi için sayısal sonuçlar.....	97
Tablo 4.2.2. $v(x,0) = e^{ix}$ ve (4.2.2) denklemi için sayısal sonuçlar.....	97



SİMGELER LİSTESİ

L	Lineer Operatör
L^{-1}	İntegral Operatörü
A_n	Adomian Polinomları
B_n	Bell Polinomları
Nu	Lineer Olmayan Operatör
Σ	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü
$\ \ $	Norm
∞	Sonsuz
θ	Teta
λ	Lamda
φ	Fi
$\ll$	Çok Küçük Sembolü

KISALTMALAR

ADM	Adomian'ın ayrışım metodu
CM	Collocation metot
FDM	Sonlu Farklar Metodu
SG	Sine-Gordon denklemi
KG	Klein-Gordon denklemi
NLS	Lineer olmayan Schrödinger denklemi
KdV	Korteweg-de Vries denklemi
MKdV	Genişletilmiş Korteweg-de Vries denklemi

GİRİŞ

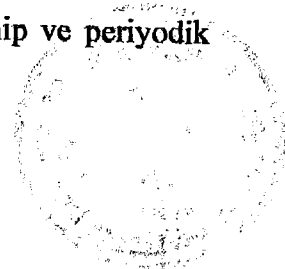
Özel bir metot yardımıyla polinomları hesaplanan ve bilinmeyen fonksiyonun ayrıştırılmasına dayanan Ayırışım metodu yaklaşık yirmi sene kadar önce G. Adomian tarafından bulundu. Bu metotla lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemleri (fizik, mühendislik, biyoloji, tıpta kompermental analiz, astro fizik, nükleer reaktörler, lazerler, kompütür çipleri, radar, milli ekonomideki davranış, cebirsel, kısmi türevli, adi diferensiyel denklemler, integral denklemler ve bunlar gibi pek çok denklemi ve problemi) çözmek mümkündür.

Bu metodun ilkeleri pek çok makalede ve birkaç kitapta uygulandı, fakat kullanılabilir teorik veriler Cherruault ve ekibinin (1989, 1994, 1995, 1999, 2001) çalışmalarıyla hızlandı.

G. Adomian ilk olarak genel durumları kapsayan pek çok örnek üzerinde çalıştı. Fakat uygulamalarda bazı basit denklemleri seçip hesapların kolaylaşmasını sağladı ve bu çalışmalar da genellikle başlangıç ve sınır şartları ayırışım metodunun hesaba katılmasını sağlayacak şekilde basit olanlar seçildi.

Bu metodun etkinliği başlangıçta yalnız örneklerde denenmiş ve yakınsaklığını ortaya koyacak hiçbir açıklama yapılmamıştı. Daha sonra Cherruault çalışmalarında ayırışım metodunun yakınsaklığını kanıtladı ve bu metodu biyolojik modellere uyguladı (Cherruault, 1989; Gabet, 1992; Abbaoui, 1995).

Sunulacak ayırışım metoduyla verilen bir problemin yapısı değiştirilmeyecek ve lineerizasyon yapılmayacaktır. Bu teknik gerçek fizik problemlerine tamamiyle adapte olmuş çözümler verecek, yani lineer olmayan bir problemi çözerken pertürbasyon'a, lineerizasyon'a ve kesikleme metotlarına gerek kalmayacaktır. Bu metotlar verilen fiziksel problemin yapısını bozduğu için analitik değerden uzak bir çözüm elde edilecektir. Lineer olmayan denklem ve sistemler fonksiyonlardaki veya başlangıç şartlarındaki küçük değişikliklere karşı çok hassastırlar. Örneğin $dy/dx = (y-1)^2, y(0)=1$ denklemini gözönüne alırsak bu denklem $y=1$ sabit çözümüne sahiptir. $dy/dx = y^2 - 2y + 1.01 \approx (y-1)^2 + 0.01$ denklemini gözönüne alırsak, bu denklem $(2k+1)5\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 'de düşey asimptotlara sahip ve periyodik



olan. $y = 1 + \frac{1}{10} \tan(x/10)$ çözümüne sahip olur. Böylece başlangıç şartındaki %1'lik bir değişikliğin bizi çok farklı bir çözüme götürdüğü görülür. Halbuki ayrışım metodunda bu tekniklere ihtiyaç olmadığı için verilen problemde herhangi bir değişiklik yapma ihtiyacı doğmaz, bu da problemin yapısını değiştirmez. Genellikle verilen bir problemin çözümünü, çok çabuk yakınsayan seri formunda ve bu çalışmada göstereceğimiz şartlar altında elde edeceğiz. Burada adi diferensiyel ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmede kullanılan kesikleme metotlarının uygulamasında karşılaşılan karmaşık hesaplamalardan kaçınacağız. Etkinliğini ortaya koyduğumuz bu metot fizik problemlerini ortaya çıkartan dinamik sistemlerin geniş bir sınıfında analitik çözümü verecektir. Bu yöntemin lineerizasyon, kesikleme, deterministik yaklaşım, stokastik yaklaşımın kısıtlayıcı formları ve büyük sınırlama şartları gibi metotların yanında avantajları çoktur. Bu metodun diğer bir kaç metotla ortak özellikleri de vardır, fakat geniş çaplı bir araştırma yapıldığında onlardan ayrıldığı görülecektir.

Adomian tarafından verilen formülasyonla bu metot zor çözülebilen problemleri ortaya koyar. Özellikle pek çok soru Adomian polinomlarının varlığıyla, onların hesaplanmasıyla, yakınsaklığıyla ve metodun fonksiyonel diferensiyel denklemlere uygulanmasıyla ilgilidir.

Yapılan çalışma dört bölüme ayrılmıştır. Birinci bölümde temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde metodun uygulanmasında ortaya çıkan zorlukları ve işaret ettiğimiz eksikliklerin aşılmasında metodun matematiksel temelleri sunuldu. Bunun için temel teorik kavramları, metodun farklı işlemlerini, ispatlanması kolay hipotezler yardımıyla yakınsaklığının doğruluğunu ortaya çıkaracak teoremleri ve Adomian polinomlarının farklı elde edilme şekilleri gösterildi.

Üçüncü bölümde metodun adi diferensiyel denklemlere uygulanması incelendi. Bunun için Adomian polinomlarını kolaylıkla hesaplayacak formüller verildi. Adomian metoduyla çeşitli metotların karşılaştırması yapıldı. Sayısal yöntemler x 'in sifıra yakın değerlerinde hassas sonuçlar vermesine rağmen x 'in sıfırdan uzak değerlerinde analitik çözümden uzak

analitik çözümle karşılaştırılarak aralarındaki hata miktarları gösterildi. Ayrıca yaklaşık çözümün, analitik çözümün ve hatanın üç-boyutlu resimleri Matematika ve Matlab gibi paket programlar kullanılarak çizildi.

Çalışmanın son bölümü olan, dördüncü bölümde ayrışım metodunun kısmi diferensiyel denklem sistemlerine nasıl uygulandığı verildi. Yine aynı bölümde birleştirilmiş Schrödinger denkleminde ayrışım metodunun nasıl uygulandığı ve kompleks durumda Adomian polinomlarının nasıl hesaplandığı gösterildi.

İ.BÖLÜM

1.1.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1. (Kreyszig, 1978)

X bir vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \rightarrow R^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0 ,$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta ,$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ (} \alpha \text{ skaler) ,}$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| ,$$

dır. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzaydan alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.2. (Kreyszig, 1978)

Bir iç çarpım uzayı (yada ön-Hilbert uzayı), üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$ 'den X 'in K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X 'in her x ve y vektör çifti (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir.

$$1) (x + y, z) = (x, z) + (y, z) ,$$

$$2) (\alpha x, y) = \alpha (x, y) ,$$

$$3) (x, y) = \overline{(y, x)} ,$$

$$4) (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

Tanım 1.1.3. (Debnath, 1998)

Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferensiyel denklem denir.



Tanım 1.1.4. (Debnath, 1998)

Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem denir.

n. mertebeden en genel adi diferensiyel denklem

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

biçiminde verilir.

Tanım 1.1.5. (Debnath, 1998)

Bağımlı değişkenin bir yada daha çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem denir ve

$$F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$$

formunda verilir.

Tanım 1.1.6. (Cherruault, 1999)

Bell'in kısmi polinomları $B_{n,k} = B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$ şeklinde olsun. Bu polinom seri formunda aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(t, u) &= \exp\left(u \sum_{m \geq 1} X_m \frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n, k \geq 0} B_{n,k} \frac{t^n}{n!} u^k \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum u^k B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) \right\} \end{aligned}$$

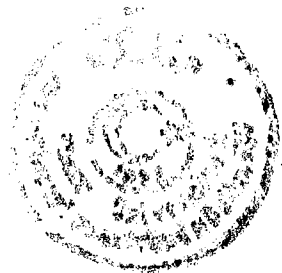
veya aynı ifadeyi daha basit olarak

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} X_m \frac{t^m}{m!} \right)^k = \sum_{n \geq k} B_{n,k} \frac{t^n}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

formunda tanımlayabiliriz. $Y_n = Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olan tüm Bell polinomları

$$\Phi(t, 1) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} X_m \frac{t^m}{m!}\right) = 1 + \sum_{n \geq 1} Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}$$

ile verilir, yani



$$Y_n = \sum_{k=1}^n B_{n,k}, \quad Y_0 = 1,$$

dir.

Teorem 1.1.1. (Comtet, 1974)

Bell polinomu,

$$B_{n,k} (1!, 2!, \dots) = \frac{n!}{k!} C_{n-1}^{k-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} u_{p_1} \dots u_{p_k} = \sum_{p_1 + \dots + p_n = n} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 1.1.7. (Adomian, 1994)

Bir değişkenli skaler bir fonksiyon için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. f fonksiyonu n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} f \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \Big|_{\lambda=0}$$

formülü ile tanımlanır.

Tanım 1.1.8. (Seng ve diğer., 1996)

E ve F iki Banach uzayı ve N 'de

$$\begin{aligned} N : E &\rightarrow F \\ u &\rightarrow Nu \end{aligned}$$

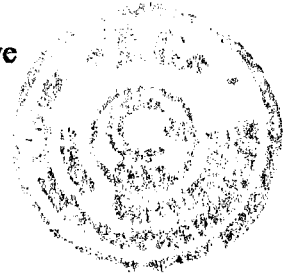
olarak tanımlansın ve Nu , n -defa diferensiyellenebilen lineer olmayan bir operatör olsun. O zaman Adomian polinomları ile n .mertebeden bir N operatörü arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$A_n \{N(u)\} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \Big|_{\lambda=0} (1)_{[n]}, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklindedir. Burada $(1)_{[n]} = (1, 1, \dots, 1)$ n -defa dır.

Teorem 1.1.2. (Abbaoui ve Cherruault, 1994)

Eğer $M \leq 1/e$ ise o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ayrışım serisi mutlak yakınsaktır ve



$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq e^{n+1} M^{n+1}$$

dır.

Tanım 1.1.9. (Abbaoui ve diğer., 1995)

f , n .mertebeden diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun, bu takdirde p değişkenli Adomian polinomları

$$A_n(u_{0,1}, u_{1,1}, \dots, u_{n,1}; u_{0,2}, u_{1,2}, \dots, u_{n,2}; \dots; u_{0,p}, u_{1,p}, \dots, u_{n,p}) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f(u_1, \dots, u_p) \Big|_{\lambda=0}$$

ile verilir. Burada

$$u_1 = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,1}, u_2 = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,2}, \dots, u_p = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,p}$$

dır.

$p=1$ için Adomian polinomları Abbaoui ve Cherruault (1994), Abbaoui ve Cherruault (1995) tarafından

$$\begin{aligned} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{p_1+2p_2+\dots+np_n=n} f^{(p_1+p_2+\dots+p_n)}(u_0) \frac{u_1^{p_1} u_2^{p_2} \dots u_n^{p_n}}{p_1! p_2! \dots p_n!} \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n} f^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,n}$ dir.

Teorem 1.1.3. (Abbaoui ve diğer., 1995).

İki değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomları aşağıdaki formda verilir,

$$A_0(u_0, v_0) = f(u_0, v_0),$$

$$A_n(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n) = \sum_{p_1+\dots+np_n+q_1+\dots+nq_n=n} \frac{u_1^{p_1}}{p_1!} \dots \frac{u_n^{p_n}}{p_n!} \frac{v_1^{q_1}}{q_1!} \dots \frac{v_n^{q_n}}{q_n!} \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n+q_1+\dots+q_n}}{\partial u^{p_1+\dots+p_n} \partial v^{q_1+\dots+q_n}}$$

$$f(u_0, v_0), n \neq 0.$$

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir :



Sonuç 1.1.1. (Abbaoui ve diğer., 1995)

İki değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomları

$$A_0(u_0, v_0) = f(u_0, v_0),$$

$$A_n(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = n} \frac{u_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \frac{v_1^{\beta_1 - \beta_2}}{(\beta_1 - \beta_2)!} \dots \frac{v_n^{\beta_n}}{\beta_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \beta_1}}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\beta_1}} f(u_0, v_0), n \neq 0.$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.10. (Kincaid ve Cheney, 1990)

Eğer x_0 noktası $p(x)$ fonksiyonunun bir tekil noktası değilse, x_0 civarında $p(x)$ fonksiyonu

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0) \frac{x - x_0}{1!} + p''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + p'''(x_0) \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k,$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir.

Tanım 1.1.11. (Çağal, 1989)

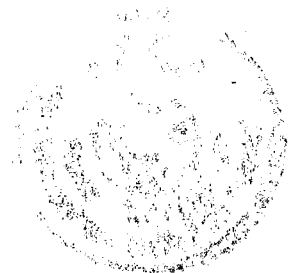
Sayısal işlemlerde kullanılan sonsuz terimli bir serinin, belirli bir yerden kesilip geri kalan terimlerinin atılması sonucu oluşan hatalara kesme hatası denir. Kesme hatasının değeri geri kalan terimlerin toplamına eşittir.

Tanım 1.1.12. (Abbaoui ve diğer., 1995)

f , n -defa diferensiyellenebilen üç değişkenli bir fonksiyon olsun. Adomian polinomları

$$A_n(u_{0,1}, \dots, u_{n,1}; u_{0,2}, \dots, u_{n,2}; u_{0,3}, \dots, u_{n,3}) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f(u_1, u_2, u_3) \Big|_{\lambda=0}$$

f 'e bağlantılı olarak tanımlanır. Burada u_i 'ler aşağıdaki formüllerle verilir.



$$u_1 = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,1},$$

$$u_2 = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,2},$$

$$u_3 = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_{i,3}.$$

$$A_n(u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}) = f(u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}),$$

$$A_n(u_{0,1}, \dots, u_{n,1}; u_{0,2}, \dots, u_{n,2}; u_{0,3}, \dots, u_{n,3}) = \sum_{\substack{k_{1,1} + \dots + nk_{1,n} + k_{2,1} + \dots + nk_{2,n} \\ + k_{3,1} + \dots + nk_{3,n} = n}} \frac{\partial^{k_{1,1} + \dots + k_{1,n} + k_{2,1} + \dots + k_{2,n} + k_{3,1} + \dots + k_{3,n}}}{\partial u_1^{k_{1,1} + \dots + k_{1,n}} \partial u_2^{k_{2,1} + \dots + k_{2,n}} \partial u_3^{k_{3,1} + \dots + k_{3,n}}} f(u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$$

$$\frac{u_{1,1}^{k_{1,1}}}{k_{1,1}!} \dots \frac{u_{1,n}^{k_{1,n}}}{k_{1,n}!} \frac{u_{2,1}^{k_{2,1}}}{k_{2,1}!} \dots \frac{u_{2,n}^{k_{2,n}}}{k_{2,n}!} \frac{u_{3,1}^{k_{3,1}}}{k_{3,1}!} \dots \frac{u_{3,n}^{k_{3,n}}}{k_{3,n}!} \times \frac{\partial^{k_{1,1} + \dots + k_{1,n} + k_{2,1} + \dots + k_{2,n} + k_{3,1} + \dots + k_{3,n}}}{\partial u_1^{k_{1,1} + \dots + k_{1,n}} \partial u_2^{k_{2,1} + \dots + k_{2,n}} \partial u_3^{k_{3,1} + \dots + k_{3,n}}} f(u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$$

Tanım 1.1.13. (Karagöz, 1998)

A, B, C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin olan türden çeşitli fonksiyonel ilişkilere deterministik ilişki denir. Örneğin,

$$y = Ax + B \text{ (Doğrusal ilişki)}$$

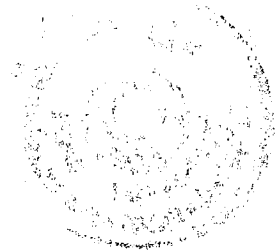
$$\log y = \log(Ax + B) \text{ (Tam logaritmik ilişki)}$$

$$y = A^{Bx+C} \text{ (Üstel ilişki)}$$

ifadeleri birer deterministik ilişkilere aittir. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Çünkü serilerden birinin aldığı değer bilindiğinde, diğer serinin alabileceği değer kesin olarak hesaplanabilir. Örneğin bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişkiler hep birer deterministik ilişkidir.

Tanım 1.1.14. (Karagöz, 1998)

Önceden hangi değeri alacağı kesin olarak bilinmeyen, fakat yaklaşık olarak bir eğilim belirleyen, olaylar arasındaki ilişkilere stokastik ilişkiler denir. Bu tür ilişkilere konu olan olayların, hangi sonucu alacağı deney veya olay gerçekleşmeden bilinemez, ancak yaklaşık olarak belli bir hata payı ile tahmin edilebilir.



Tanım 1.1.15. (Kincaid ve Cheney, 1990)

Bir $f(x)$ fonksiyonu, $h > 0$ bir sabit sayı ve k bir tamsayı olmak üzere $x_k = x_0 + kh$ noktalarında tanımlı olsun. Bu durumda

$$\Delta_h^1 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun ileri sonlu farkı denir. Bu farkların ikinci kuvveti ise

$$\Delta_h^2 f(x_0) = \Delta_h^1 (\Delta_h^1 f(x_0)) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

biçiminde tanımlanır ve genel olarak

$$\Delta_h^n f(x_0) = \Delta_h^1 (\Delta_h^{n-1} f(x_0))$$

şeklinde verilir. Ayrıca f fonksiyonunun (x_0, x_n) açık aralığında n . mertebeden türevi varsa,

bu takdirde öyle bir $\xi \in (x_0, x_n)$ noktası vardır ki ,

$$\Delta_h^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi)$$

dır. $\Delta_h^n f(x_0)$ farklarına ileri sonlu farklar denir. Benzer şekilde f fonksiyonu $x_k = x_0 - kh$

noktalarda tanımlı olmak üzere geri sonlu farklarla tanımlanabilir. Bu farklar $\Delta_{-h}^n f(x_0)$

biçiminde gösterilir ve

$$\Delta_{-h}^1 f(x_0) = f(x_0) - f(x_1),$$

$\vdots$

$$\Delta_{-h}^n f(x_0) = \Delta_{-h}^1 (\Delta_{-h}^{n-1} f(x_0))$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.16. (Vladimirov, 1979)

$$f(x) = \begin{cases} x \geq 0 \text{ ise, } 1 \\ x < 0 \text{ ise, } 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna Heaviside fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.17. (Baker ve Graves-Morris, 1996).

Kabul edelimki $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, i = 0, 1, 2, \dots$ kuvvet serisi verilsin ve bu kuvvet serisini

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$



ile gösterelim. Padé yaklaşımını kullanarak herhangi bir analizi yapmak için bu açılım esastır.

Padé yaklaşımı

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M}$$

şeklinde bir rasyonel kesirdir, bu denkleme dikkat edersek $L+1$ tane payda ve $M+1$ tane de payda da bilinmeyen katsayılar vardır ve $b_0 = 1$ alınacaktır. Bu seçim Padé yaklaşımının esas kısmını teşkil eder niteliktedir. Dolayısıyla $L+M+1$ bilinmeyen katsayı olan, $L+1$ pay ve M tane bağımsız payda katsayısı söz konusudur. Bu sayı

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M} + O(x^{L+M+1})$$

formal kuvvet serisinin gösterimindeki $1, x, x^2, \dots, x^{L+M}$ mertebeleriyle $[L/M]$ serisinin uyuşmasını sağlar. Bu son ifade de içler-dışlar çarpımı yapılırsa

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_Mx^M) \times (c_0 + c_1x + \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_Lx^L + O(x^{L+M+1})$$

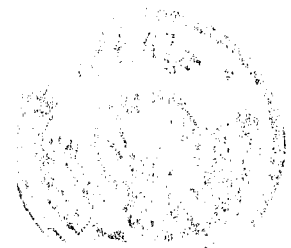
olur. Buradan

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 + b_1c_0, \\ a_2 &= c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \\ &\vdots \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

bulunur. $x^{L+1}, x^{L+2}, \dots, x^{L+M}$ katsayılarını eşitlersek

$$\begin{aligned} b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \dots + b_0 c_{L+1} &= 0, \\ b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \dots + b_0 c_{L+2} &= 0, \\ &\vdots \\ b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \dots + b_0 c_{L+M} &= 0, \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $i < 0$ ise uyum için $c_i = 0$ olarak tanımlayabiliriz. $b_0 = 1$ olduğundan M bilinmeyen payda katsayısı için M lineer denklem takımı olur ki bu denklemlerden b_i 'ler bulunur. Bu denklem sistemi matris formunda



$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

şeklinde yazılır. (1.1.1) ve (1.1.2) ifadelerinden Padé yaklaşımının pay ve paydası hesaplanır.

Böylece x^{L+M} mertebesine kadar $[L/M]$ Padé yaklaşımı oluşturulur.

Hatırlatma 1.1.1. (Abbaoui ve diğer., 1995).

Adomian ve Bell polinomları arasında

$$\frac{1}{n!} B_n(u_0, 1!u_1, \dots, n!u_n) = A_n(u_0, u_1, \dots, u_n),$$

şeklinde bir ilişki vardır.

II.BÖLÜM

2.1. AYRIŞIM METODU VE BİRKAÇ ANALİZ METODUNUN SONUÇLARININ SUNULMASI

Fizikle ilgili problemleri çözmek için diferensiyel denklemler, integro-diferensiyel denklemler ve kısmi diferensiyel denklemler biçiminde modelleşmiş dinamik sistemlerin göz önüne alınması gerekir. Bu denklemler; lineer olmayan, stokastik parametrelili ve farklı tipteki sınır değer ve başlangıç şartlarını içeren tipte olabilir. Fiziksel sistemlerin modelleştirilmesiyle ilgili faktörler matematiksel ifadelerin uygun olmasıyla ortaya çıkar. Bunu yapmak için de çoğunlukla modellerin yazılmasına temel teşkil eden hipotezlerin basitleştirilmesi gerekir. Bu denklemlerin çözümü için, lineerizasyon ve kesikleme çok kullanılan tekniklerdir. Bu metotların kullanılması ise çözülecek problemin, çözümü aranan fizik probleminin analitik çözümünden uzaklaşması demektir. Böylece bu metotlarla yapılan çözümlerde esas teoremlere göre matematiksel sonuçlar gerçek sonuçlardan tamamiyle sapma gösterebilir. Çözümü aranan bazı problemlerin analitik sonuçları, çoğunlukla en iyi sonuçlar olarak değerlendirilir. Oysa ki seri formunda elde edilen sonuçlar analitik çözüme göre ancak yaklaşık değerlerdir ve daha az ilginçtir. Bununla beraber bütün modelleştirmelerin aynı zamanda bir yaklaşık değer olduğunu ve çözüm aşamasındaki bir yaklaşık değerin, olayın sonucunda büyük ölçüde değişiklik yapmayacağını söyleyebiliriz.

Ayrıca lineerleştirilmiş bir versiyon veya stokastik yaklaşım yerine seri formundaki gerçek problemlerin çözümünü seçmek analitik bir çözümünden daha ilginç gelebilir. Bu teknik, gerçek fiziksel problemlere uyarlanmış çözümler verir. Çözümü, bu çalışmada gösterdiğimiz şartlar altında genellikle çok hızlı yakınsayan seri formunda elde ederiz. Özellikle homojen ve lineer olmayan diferensiyel ve integral denklemlerini bu metotla çözerken, birbirini yok eden terimler sayesinde, verilen problemin analitik çözümünü yalnız iki iterasyonla elde etmek mümkündür (Adomian ve Rach, 1993; Wazwaz, 1997). Genellikle diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan kesikleme metotlarında karşımıza çıkan karmaşık hesaplamalardan kaçındık. Etkinliğini gösterdiğimiz bu yöntem, fizik problemlerini gösteren dinamik sistemlerle ilgili geniş bir alanda analitik çözümü verir. Bu metodun getirileri bilinen

metotların getirilerinden çok fazladır, bunlardan bir kaçını sıralıyacak olursak: Bu metodu; lineer ve lineer olmayan diferensiyel, integral, fark denklemlerine, integro-diferensiyel denklemlere ve sistemlere uygulamak mümkündür. Böylece işlemlerin hacmini azaltır, zamandan tasarruf sağlar, bilgisayarda programını yapmak kolay olup, daha hassas sonuçlar verir. Bu metotla her bir değişkene göre çözüm yapmak mümkündür ve bu çözümler birbirine eşittir, bunun getirisi ise x-yönünde çözüm yaparken, işlemler zorsa, bu kez t-yönünde hesaplamaları yapmak uygun olur (Adomian ve Rach, 1992; Wazwaz, 1997a).

Bu metodun diğer bir çok metotla ortak yanları vardır, fakat derinlemesine yapılacak bir incelemede net bir şekilde ayrıldığı yönler görülebilir.

1981'de G.Adomian tarafından ortaya konulan ve daha sonra Yves Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilen ayrışım metodu, sunduğumuz kavramlarla dinamik sistemlerin genel bir teorisi olarak görülebilir. Bu teori analitik ve nitelik yönünden ziyade, sayısal yönüyle kendisini ortaya koyar, yani bu teori ne lineerleşmeyi ne de kesikleme metodunu gerektirir. Özel tip polinomların (Adomian polinomları) kullanılmasıyla, terimleri indirgenerek belirlenen bir seri formunun bilinmeyen fonksiyonunun ayrışmasına dayanan metot, lineer fonksiyonel denklemleri ve olmayanları (cebirsel denklemleri, diferensiyel denklemleri, kısmi diferensiyel denklemleri, integral ve integro-diferensiyel denklemleri, vs.) çözer. Hatta bu metot sayesinde Navier-Stokes denklemleri (Seng ve diğer., 1996; Haldar, 1996) ve Tıp'ta (Abbaoui, 1995; Brigitte, 1999), Biyoloji'de (Adomian ve diğer., 1996; Asok, 1988) ortaya çıkan problemleri bu metot yardımıyla çözmek mümkündür.

Çözüm serisinin terimleri belli bir terimden sonra yok oluyorsa ve kısmi toplamların hesabı kolay ise bu metot bize analitik çözümü verir. Bu metot başlangıçta bazı şüpheler uyandırmıştır. Çünkü bu metodun etkinliği sadece örneklerde ortaya konmuş ve hiçbir yakınsaklık örneği verilmemiştir. Daha sonra teorik olarak yakınsaklık ispatları yapılmış ve biyolojik modellere uygulanmıştır.

Analitik bir metotla lineer olmayan denklemlerin çözülebilmesi önemlidir. Çünkü lineerleşme incelenecek problemi değiştirir ve bir kesikleme bizi zor kararlılık ve yakınsaklık



problemlerine götürür. Bu durum, eğer lineer olmayan denklemlerle uğraşıyorsa ortaya çıkar. Ayrıca bu son metotlarla (lineerizasyon ve kesikleme) sayısal hesapların yapılması zordur ve zaman alır. Özel bir form altında çözümünü arayan Galerkin metodu gibi klasik metotlar, kesikleme teknikleri gibi benzer sıkıntıları ortaya çıkarır.

Ayrışım metodunun temel prensibi çok basit olup orijinalliği öğeleri tekrarlanan bir şekilde hesaplanmış bir seri içinde lineer olmayan operatörün ayrışmasına dayanır.

2.2. METODUN SUNUMU

G.Adomian'ın yaptığı gibi önce metodu yapısal olarak tanıtalım. Bunun içinde

$$F[u(t)] = g(t) \quad (2.2.1)$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferensiyel operatörü gösterebiliriz. Lineer terim $L + R$ şeklinde ayrıştırılır, R lineer operatörün geri kalan kısmıdır. L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferensiyel operatör olsun. O zaman (2.2.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.2.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada N lineer olmayan operatör ve L 'de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, (2.2.2)'nin her iki tarafına L^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.2.3)$$

bulunur. Ayrışım metodu, $u(t)$ 'nin çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (2.2.4)$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan Nu terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.2.5)$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n 'ler $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. u ve Nu 'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i, N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (2.2.6)$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n 'ler (2.2.6)'dan

$$n! A_n = \frac{d^n}{d \lambda^n} \left[N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.2.7)$$

ifadesiyle bulunur. (2.2.4) ve (2.2.5) ifadelerini (2.2.2)'de yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (2.2.8)$$

elde ederiz. Burada $\theta = u(0)$ dır. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{cases} u_0 = \theta + L^{-1}g, \\ u_1 = -L^{-1}R u_0 - L^{-1}A_0, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}R u_n - L^{-1}A_n, n \geq 0. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

şeklinde yazılır. Böylece (2.2.1) ifadesinin doğru çözümü seri formunda belirtilmiş olur. Fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur, bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad (2.2.10)$$

veya

$$\begin{cases} \phi_1 = u_0, \\ \phi_2 = u_0 + u_1, \\ \phi_3 = u_0 + u_1 + u_2, \\ \vdots \\ \phi_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

şeklinde buluruz.

Ancak bu formüllerle çözüm yapılırken, çözümü kolay olmayan problemlerle karşılaşabiliriz. Bu problemler

- A_n 'ler nereden geliyor ve basit olarak onları nasıl elde edebiliriz ?
- (2.2.9) ile verilen $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisi (2.2.1)'in bir çözüm serisimidir ?
- Hangi şartlar altında $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisi yakınsaktır ?
- Bu metot farklı fonksiyonel denklemlere nasıl uygulanır ?



şeklinde olabilir. Yukarıdaki problemleri ve benzerlerini çözümlmek için metodun farklı işlemlerini ortaya çıkaran temel teorik kavramlar ile metodu matematiksel olarak ifade edelim.

2.3. A_n 'LERİ VEREN BAZI FORMÜLLERE BİR BAKIŞ

Rach (1984), Adomian (1986, 1994), Gabet (1992), Guellal ve Cherruault (1994) tarafından A_n 'lerin hesaplanması yapılmıştır. Fakat uygulamada bunların karışık olmaları (bunu görmek için $n > 4$ için A_n 'i hesaplamak yeterlidir) ve ortaya konmasının imkansızlığı nedeni ile pek kullanışlı değildirler. Şimdi bunları, sırası ile, inceleyelim: A_n 'ler, Rach (1984) ve Adomian (1994) tarafından

$$A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k) N^{(k)}(u_0) \quad (2.3.1)$$

formülü ile hesaplandı. Gabet (1992) tarafından

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_k = \sum P_k^n(u_1, u_2, \dots, u_k) N^{(n)}(u_0), \forall k \geq 1, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

formülü ile verildi. Burada P_k^n 'ler homojen polinomlar olduğundan n ve k 'nın dereceleri değişken olup,

$$P_k^n(u_1, u_2, \dots, u_j) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \left(\frac{\prod_{j=1}^n u_j^{i_j}}{\prod_{j=1}^n n_j!} \right) \quad (2.3.3)$$

dır. Burada P 'ler u_i ve n_j sayılarının frekansıdır.

Guellal ve Cherruault (1994) tarafından verilen formül ise

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{N^{(k)}}{k!} \sum_{p=1}^k C_k^p (-u_0)^{k-p} D_\lambda^n(v)^p \Big|_{\lambda=0} \quad (2.3.4)$$

formundadır. Abbaoui ve Cherruault (1994) tarafından bir değişkenli fonksiyonlar için Adomian polinomları

$$A_n(u_0, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \Big|_{\lambda=0}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{p_1+\dots+p_n=n} f^{(p_1+\dots+p_n)}(u_0) \frac{u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n}}{p_1! \dots p_n!} \quad (2.3.5.) \\
&= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=n} f^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}
\end{aligned}$$

formülüyle ifade edilmiştir. Burada $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,n}$ azalan bir dizidir. Yine aynı yazarlar tarafından iki değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır,

$$A_n(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f(u, v) \Big|_{\lambda=0}. \quad (2.3.6)$$

Burada,

$$u = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, v = \sum_{i=0}^n \lambda^i v_i$$

dır.

Adomian polinomları Seng ve diğer. (1996) tarafından

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{p_1+\dots+p_k=n} N^{(k)}(u_0)(u_{p_1}, \dots, u_{p_k}), n=1,2,\dots \end{cases} \quad (2.3.7)$$

ve

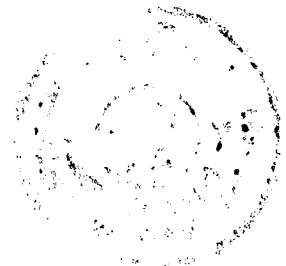
$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_n = \sum_{p_1+\dots+p_n=n} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} N^{(p_1+\dots+p_n)}(u_0)(u_{[p_1]}, \dots, u_{[p_n]}) \end{cases} \quad (2.3.8)$$

formunda verilmiştir, yine aynı çalışmada çok boyutlu durumlarda yukarıdaki formüllerin genellemesi yapılmıştır.

$E_1, \dots, E_p$ 'ler birer Banach uzayı ve $\vec{u} = (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, yani

$$\begin{aligned}
N : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p &\rightarrow F \\
\vec{u} &\rightarrow N\vec{u}
\end{aligned}$$

olsun. Bu takdirde



$$\begin{aligned}
A_0 &= N\left(\vec{u}_0\right), \vec{u}_0 = (u_{0,1}, \dots, u_{0,p}) \\
A_n &= \left(\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\right) = A_n(u_{0,1}, \dots, u_{0,p}; \dots; u_{n,1}, \dots, u_{n,p}) \\
&= \sum_{\Lambda_n} \frac{1}{k_{1,1}! \dots k_{1,p}! \dots k_{n,1}! \dots k_{n,p}!} \times \frac{\partial^{(k_{1,1} + \dots + k_{1,p}) + \dots + (k_{n,1} + \dots + k_{n,p})}}{\partial u_1^{k_{1,1}} \dots \partial u_p^{k_{1,p}} \dots \partial u_1^{k_{n,1}} \dots \partial u_p^{k_{n,p}}} \\
&\quad \times N(u_{0,1}, \dots, u_{0,p}) \times \left(u_{1,1[k_{1,1}]} \dots u_{1,p[k_{1,p}]}; \dots; u_{n,1[k_{n,1}]} \dots u_{n,p[k_{n,p}]}\right)
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

bulunur. Burada $\Lambda_n = \{(k_{1,1} + 2k_{2,1} + \dots + nk_{n,1}) + \dots + (k_{1,p} + 2k_{2,p} + \dots + nk_{n,p}) = n\}$ dir.

2.3.1. Adomian Polinomlarını Hesaplamak İçin Basit Bir Formül

$(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ artan dizisini kullanarak herhangi bir n için Adomian polinomlarının

kolayca hesaplandığını göstereceğiz. Bütün α_i 'ler

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n \tag{2.3.10}$$

denkleminin çözümleri ve

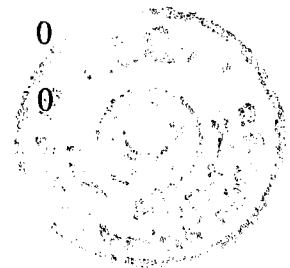
$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0 \tag{2.3.11}$$

formülü ile beraber basit bir programla hiçbir zorlukla karşılaşılmadan çözülebilir (Abbaoui ve diğer., 1995).

Örneğin $n = 10$ için (2.3.10) ve (2.3.11) ifadeleri gözönüne alınırsa;

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	1	1	1	1	1	1	0	0
2	2	2	1	1	1	1	0	0	0
2	2	2	2	1	1	0	0	0	0
2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	0	0
3	2	1	1	1	1	1	0	0	0
3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
3	2	2	2	1	0	0	0	0	0
3	3	1	1	1	1	0	0	0	0

3	3	2	1	1	0	0	0	0	0
3	3	2	2	0	0	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	0	0	0
4	2	1	1	1	1	0	0	0	0
4	2	2	1	1	0	0	0	0	0
4	2	2	2	0	0	0	0	0	0
4	3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0	0	0	0	0
4	4	1	1	0	0	0	0	0	0
4	4	2	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0	0	0
5	2	1	1	1	0	0	0	0	0
5	3	1	1	0	0	0	0	0	0
5	3	2	0	0	0	0	0	0	0
5	4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6	2	1	1	0	0	0	0	0	0
6	2	2	0	0	0	0	0	0	0
6	3	1	0	0	0	0	0	0	0
6	4	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0
7	2	1	0	0	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0



9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0

diagramı yazılabilir. Böylece $n=1,2,\dots,10$ için Adomian polinomları,

$$A_0 = f(u_0),$$

$$A_1 = u_1 f^{(1)}(u_0),$$

$$A_2 = u_2 f^{(1)}(u_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(u_0),$$

$$A_3 = u_3 f^{(1)}(u_0) + (u_1 u_2) f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 f^{(3)}(u_0),$$

$$A_4 = u_4 f^{(1)}(u_0) + \left(u_1 u_3 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 f^{(3)}(u_0),$$

$$A_5 = u_5 f^{(1)}(u_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) f^{(2)}(u_0) + \frac{1}{2} (u_1^2 u_3 + u_1 u_2^2) f^{(3)}(u_0) \\ + \frac{1}{2} u_1^3 u_2 f^{(4)}(u_0) + \frac{1}{120} u_1^5 f^{(5)}(u_0),$$

$$A_6 = u_6 f^{(1)}(u_0) + \left(u_1 u_5 + u_2 u_4 + \frac{1}{2} u_3^2 \right) f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_4 + u_1 u_2 u_3 + \frac{1}{6} u_2^3 \right) f^{(3)}(u_0) \\ + \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_3 + \frac{1}{4} u_1^2 u_2^2 \right) f^{(4)}(u_0) + \frac{1}{24} u_1^4 u_2 f^{(5)}(u_0) + \frac{1}{720} u_1^6 f^{(6)}(u_0),$$

$$A_7 = u_7 f^{(1)}(u_0) + (u_1 u_6 + u_2 u_5 + u_3 u_4) f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_5 + u_1 u_2 u_4 + \frac{1}{2} u_1 u_3^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_3 \right) f^{(3)}(u_0) \\ + \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_4 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_3 + \frac{1}{6} u_1 u_2^3 \right) f^{(4)}(u_0) + \left(\frac{1}{24} u_1^4 u_3 + \frac{1}{24} u_1^3 u_2^2 \right) f^{(5)}(u_0) \\ + \frac{1}{120} u_1^5 u_2 f^{(6)}(u_0) + \frac{1}{5040} u_1^7 f^{(7)}(u_0),$$

$$A_8 = u_8 f^{(1)}(u_0) + \left(u_1 u_7 + u_2 u_6 + u_3 u_5 + \frac{1}{2} u_4^2 \right) f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_6 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_4 \right) f^{(3)}(u_0) + \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_5 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_4 + \frac{1}{4} u_1^2 u_3^2 + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_3 + \frac{1}{24} u_2^4 \right) f^{(4)}(u_0) \\ + \left(\frac{1}{24} u_1^4 u_4 + \frac{1}{6} u_1^3 u_2 u_3 + \frac{1}{12} u_1^2 u_2^3 \right) f^{(5)}(u_0) + \left(\frac{1}{120} u_1^5 u_3 + \frac{1}{48} u_1^4 u_2^2 \right) f^{(6)}(u_0) \\ + \frac{1}{720} u_1^6 u_2 f^{(7)}(u_0) + \frac{1}{40320} u_1^8 f^{(8)}(u_0),$$

$$A_9 = u_9 f^{(1)}(u_0) + (u_1 u_8 + u_2 u_7 + u_3 u_6 + u_4 u_5) f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_7 + u_1 u_2 u_6 + u_1 u_3 u_5 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_1 u_4^2 + \frac{1}{2} u_2^2 u_5 + u_2 u_3 u_4 + \frac{1}{6} u_3^3 \right) f^{(3)}(u_0) + \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_6 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_5 + \frac{1}{2} u_1^2 u_3 u_4 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_4 + \frac{1}{2} u_1 u_2 u_3^2 + \frac{1}{6} u_2^3 u_3 \right) f^{(4)}(u_0) + \left(\frac{1}{24} u_1^4 u_5 + \frac{1}{6} u_1^3 u_2 u_4 + \frac{1}{12} u_1^3 u_3^2 \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} u_1^2 u_2^2 u_3 + \frac{1}{24} u_1 u_2^4 \Big) f^{(5)}(u_0) + \left(\frac{1}{120} u_1^5 u_4 + \frac{1}{24} u_1^4 u_2 u_3 + \frac{1}{36} u_1^3 u_2^3 \right) f^{(6)}(u_0) \\
& + \left(\frac{1}{720} u_1^6 u_3 + \frac{1}{240} u_1^5 u_2^2 \right) f^{(7)}(u_0) + \frac{1}{5040} u_1^7 u_2 f^{(8)}(u_0) + \frac{1}{362880} u_1^9 f^{(9)}(u_0), \\
A_{10} = & u_{10} f^{(1)}(u_0) + \left(u_1 u_9 + u_2 u_8 + u_3 u_7 + u_4 u_6 + \frac{1}{2} u_5^2 \right) f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{2} u_1^2 u_8 + u_1 u_2 u_7 \right. \\
& + u_1 u_3 u_6 + u_1 u_4 u_5 + \frac{1}{2} u_2^2 u_6 + u_2 u_3 u_5 + \frac{1}{2} u_2 u_4^2 + \frac{1}{2} u_3^2 u_4 \Big) f^{(3)}(u_0) + \left(\frac{1}{6} u_1^3 u_7 \right. \\
& + \frac{1}{6} u_1 u_3^2 + \frac{1}{2} u_1^2 u_2 u_6 + \frac{1}{2} u_1^2 u_3 u_5 + \frac{1}{4} u_1^2 u_4^2 + \frac{1}{2} u_1 u_2^2 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_4 + \frac{1}{6} u_2^3 u_4 + \frac{1}{4} u_2^2 u_3^2 \Big) \\
& f^{(4)}(u_0) + \left(\frac{1}{24} u_1^4 u_6 + \frac{1}{6} u_1^3 u_2 u_5 + \frac{1}{6} u_1^3 u_3 u_4 + \frac{1}{4} u_1^2 u_2^2 u_4 + \frac{1}{4} u_1^2 u_2 u_3^2 + \frac{1}{6} u_1 u_2^3 u_3 \right. \\
& + \frac{1}{120} u_2^5 \Big) f^{(5)}(u_0) + \left(\frac{1}{120} u_1^5 u_5 + \frac{1}{24} u_1^4 u_2 u_4 + \frac{1}{48} u_1^4 u_3^2 + \frac{1}{12} u_1^3 u_2^2 u_3 + \frac{1}{48} u_1^2 u_2^4 \right) \\
& f^{(6)}(u_0) + \left(\frac{1}{720} u_1^6 u_4 + \frac{1}{120} u_1^5 u_2 u_3 + \frac{1}{48} u_1^4 u_2^3 \right) f^{(7)}(u_0) + \left(\frac{1}{5040} u_1^7 u_3 + \frac{1}{1440} u_1^6 u_2^2 \right) \\
& f^{(8)}(u_0) + \frac{1}{40320} u_1^8 u_2 f^{(9)}(u_0) + \frac{1}{3628800} u_1^{10} f^{(10)}(u_0),
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3.2. İki Değişkenli Adomian Polinomları İçin Basit Bir Formül

$(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ ve $(\beta_i)_{i=1,\dots,n}$ dizilerinin azalan özelliklerini kullanarak iki değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomları

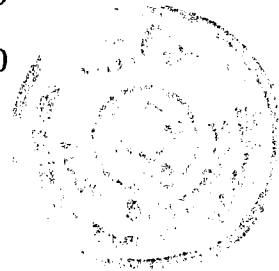
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = n \quad (2.3.12)$$

ve

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0 \\ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

olmak üzere kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin $n=5$ için (2.3.12) ve (2.3.13) ifadeleri gözönüne alınırsa,

5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0



2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0	0	0
0	0	0	0	0	4	1	0	0	0
0	0	0	0	0	3	2	0	0	0
0	0	0	0	0	3	1	1	0	0
0	0	0	0	0	2	2	1	0	0
0	0	0	0	0	2	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	4	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	3	1	0	0	0
3	0	0	0	0	2	0	0	0	0
2	0	0	0	0	3	0	0	0	0
1	1	0	0	0	3	0	0	0	0
2	2	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	2	2	0	0	0
2	1	0	0	0	2	0	0	0	0
2	0	0	0	0	2	1	0	0	0
2	1	1	0	0	2	0	0	0	0
1	0	0	0	0	2	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0

diyagramı bulunur, (Abbaoui ve diğer., 1995).



Böylece $\frac{\partial^{\mu+\tau}}{\partial \mu \partial \tau} f(u(\lambda), v(\lambda))|_{\lambda=0} = f_{\mu, \tau}(u_0, v_0)$ yazılarak $n=1, \dots, 5$ olmak üzere iki değişkenli

fonksiyonlar için Adomian polinomları,

$$\begin{aligned}
 A_0 &= f_{0,0}(u_0, v_0), \\
 A_1 &= u_1 f_{1,0}(u_0, v_0) + v_1 f_{0,1}(u_0, v_0), \\
 A_2 &= u_2 f_{1,0}(u_0, v_0) + v_2 f_{0,1}(u_0, v_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f_{2,0}(u_0, v_0), \\
 A_3 &= u_3 f_{1,0}(u_0, v_0) + v_3 f_{0,1}(u_0, v_0) + u_1 u_2 f_{2,0}(u_0, v_0) + v_1 v_2 f_{0,2}(u_0, v_0) \\
 &\quad + (u_1 v_2 + u_2 v_1) f_{1,1}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f_{3,0}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 f_{0,3}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} u_1^2 v_1 f_{2,1}(u_0, v_0) + \frac{1}{2!} u_1 v_1^2 f_{1,2}(u_0, v_0), \\
 A_4 &= u_4 f_{1,0}(u_0, v_0) + v_4 f_{0,1}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) f_{2,0}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 f_{3,0}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 + v_1 v_3 \right) f_{0,2}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 v_1 f_{3,1}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \left(u_1 v_1 v_2 + \frac{1}{2!} u_2 v_1^2 \right) f_{1,2}(u_0, v_0) + \frac{1}{2!} v_1^2 v_2 f_{0,3}(u_0, v_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 f_{4,0}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} u_1^2 v_1^2 f_{2,2}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} u_1 v_1^3 f_{1,3}(u_0, v_0) + \frac{1}{4!} v_1^4 f_{0,4}(u_0, v_0), \\
 A_5 &= u_5 f_{1,0}(u_0, v_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) f_{2,0}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} u_1^2 u_3 + \frac{1}{2!} u_1 u_2^2 \right) f_{3,0}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \frac{1}{3!} u_1^3 u_2 f_{4,0}(u_0, v_0) + \frac{1}{5!} u_1^5 f_{5,0}(u_0, v_0) + v_5 f_{0,1}(u_0, v_0) + (v_1 v_4 + v_2 v_3) \\
 &\quad f_{0,2}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1^2 v_3 + \frac{1}{2!} v_1 v_2^2 \right) f_{0,3}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} v_1^3 v_2 f_{0,4}(u_0, v_0) \\
 &\quad + \frac{1}{5!} v_1^5 f_{0,5}(u_0, v_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 v_1 f_{4,1}(u_0, v_0) + \frac{1}{4!} v_1^4 u_1 f_{1,4}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} u_1^2 u_2 v_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3!} u_1^3 v_2 \right) f_{3,1}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_1^2 v_2 u_1 + \frac{1}{3!} v_1^3 u_2 \right) f_{1,3}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} v_2^2 u_1 + v_1 v_3 u_1 \right) \\
 &\quad f_{1,2}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} \frac{1}{2!} u_1^3 v_1^2 f_{3,2}(u_0, v_0) + \frac{1}{3!} \frac{1}{2!} v_1^3 u_1^2 f_{2,3}(u_0, v_0) + \left(\frac{1}{2!} u_1 u_2 v_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2!} v_1 v_2 u_1^2 \right) f_{2,2}(u_0, v_0) + \left(u_1 u_3 v_1 + \frac{1}{2!} u_2^2 v_1 \right) f_{2,1}(u_0, v_0) + (u_4 v_1 + v_4 u_1 + u_3 v_2 + v_3 u_2) f_{1,1}(u_0, v_0)
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.3.3. Üç Değişkenli Bir Fonksiyon İçin Adomian Polinomlarının Basit Bir Formu

$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma} f[u(\lambda), v(\lambda), w(\lambda)]|_{\lambda=0} = f_{\alpha, \beta, \gamma}(u_0, v_0, w_0)$ olmak üzere, üç değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomlarını, yukarıdakilere benzer olarak;



$$A_0 = f_{0,0,0}(u_0, v_0, w_0),$$

$$A_1 = u f_{1,0,0}(u_0, v_0, w_0) + v f_{0,1,0}(u_0, v_0, w_0) + w f_{0,0,1}(u_0, v_0, w_0),$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} u^2 f_{2,0,0} + \frac{1}{2!} v^2 f_{0,2,0} + \frac{1}{2!} w^2 f_{0,0,2} + u_2 f_{1,0,0} + v_2 f_{0,1,0} + w_2 f_{0,0,1} + u_1 v_1 f_{1,0,0} \\ + u_1 v_1 f_{1,1,0} + u_1 w_1 f_{1,0,1} + u_1 w_1 f_{0,1,1}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} u^3 f_{3,0,0} + \frac{1}{3!} v^3 f_{0,3,0} + \frac{1}{3!} w^3 f_{0,0,3} + \frac{1}{2!} u^2 v_1 f_{2,1,0} + \frac{1}{2!} v_1 w^2 f_{0,1,2} + u_1 v_1 w_1 f_{1,1,1} \\ + u_1 u_2 f_{2,0,0} + v_1 v_2 f_{0,2,0} + w_1 w_2 f_{0,0,2} + (u_2 v_1 + u_1 v_2) f_{1,1,0} + (u_2 w_1 + u_1 w_2) f_{1,0,1} \\ + (v_2 w_1 + v_1 w_2) f_{0,1,1} + u_3 f_{1,0,0} + v_3 f_{0,1,0} + w_3 f_{0,0,1}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!} u^4 f_{4,0,0} + \frac{1}{4!} v^4 f_{0,4,0} + \frac{1}{4!} w^4 f_{0,0,4} + \frac{1}{3!} u^3 v_1 f_{3,1,0} + \frac{1}{3!} u_1 v^3 f_{1,3,0} + \frac{1}{3!} u^3 w_1 f_{3,0,1} \\ + \frac{1}{3!} u_1 w^3 f_{1,0,3} + \frac{1}{3!} v^3 w_1 f_{0,3,1} + \frac{1}{3!} v_1 w^3 f_{0,1,3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} u^2 v_1^2 f_{2,2,0} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} u^2 w_1^2 f_{2,0,2} \\ + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} v^2 w_1^2 f_{0,2,2} + \frac{1}{2!} u^2 v_1 w_1 f_{2,1,1} + \frac{1}{2!} u_1 v^2 w_1 f_{1,2,1} + \frac{1}{2!} u^2 u_2 f_{3,0,0} + \frac{1}{2!} v^2 v_2 f_{0,3,0} \\ + \frac{1}{2!} w^2 w_2 f_{0,0,3} + \frac{1}{2!} u^2 v_2 f_{2,1,0} + \frac{1}{2!} u_1^2 w_2 f_{2,0,1} + \frac{1}{2!} u_2 v^2 f_{1,2,0} + \frac{1}{2!} v^2 w_2 f_{0,2,1} \\ + \frac{1}{2!} u_2 w^2 f_{1,0,2} + \frac{1}{2!} v_2 w^2 f_{0,1,2} + (u_1 v_1 w_2 + u_1 v_1 w_2 + u_2 v_1 w_1) f_{1,1,1} + \left(\frac{1}{2!} u^2 + u_1 u_3 \right) \\ f_{2,0,0} + \left(\frac{1}{2!} v^2 + v_1 v_3 \right) f_{0,2,0} + \left(\frac{1}{2!} w^2 + w_1 w_3 \right) f_{0,0,2} + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) f_{1,1,0} \\ + (u_1 w_3 + u_2 w_2 + u_3 w_1) f_{1,0,1} + (v_1 w_3 + v_2 w_2 + v_3 w_1) f_{0,1,1} + u_4 f_{1,0,0} + v_4 f_{0,1,0} + w_4 f_{0,0,1}$$

şeklinde bulunur.

2.3.4. Adomian Polinomlarının Hesaplanması İçin Farklı Bir Metot

Wazwaz (2000) tarafından lineer olmayan operatörlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirildi. Bu algoritmanın kullanılmasıyla A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle yapılır.

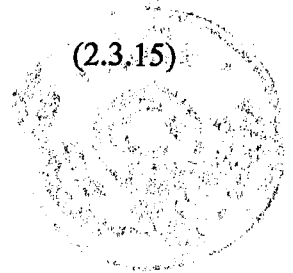
2.3.4.a. Lineer Olmayan Polinomlar

I. Durum: Eğer $F(y) = y^2$ ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (2.3.14)$$

olmak üzere $F(y) = y^2$ lineer olmayan terimi (2.3.14)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 \quad (2.3.15)$$



bulunur. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$F(y) = y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + \dots \quad (2.3.16)$$

elde edilir. (2.3.15)'deki açılımda indis toplamaları aynı olan terimleri bir araya getirilirse

$$F(y) = y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \dots \quad (2.3.17)$$

olur. (2.3.17)'den $F(y) = y^2$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2, \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3, \\ A_4 &= y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

formunda bulunur.

II. Durum: Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aşağıdaki genelleme yapılabilir:

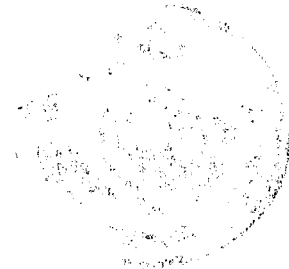
$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^n, \\ A_1 &= n y_0^{(n-1)}, \\ A_2 &= \frac{1}{2} n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1^2 + n y_0^{(n-1)} y_2, \\ A_3 &= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) y_0^{(n-3)} y_1^3 + n(n-1) y_0^{(n-2)} y_1 y_2 + n y_0^{(n-1)} y_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

III. Durum: Eğer $n \in \mathbb{Z}^-$ ise bu taktirde Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= -y_0^{-n}, \\ A_1 &= -n y_0^{-(n+1)}, \\ A_2 &= -\frac{1}{2} n(n+1) y_0^{-(n+2)} y_1^2 - n y_0^{-(n+1)} y_2, \\ A_3 &= -\frac{1}{6} n(n+1)(n+2) y_0^{-(n+3)} y_1^3 - n(n+1) y_0^{-(n+2)} y_1 y_2 - n y_0^{-(n+1)} y_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

formülüyle bulunur.

IV. Durum: Eğer n ondalıklı bir sayı ise bu taktirde Adomian polinomları



$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0^n, \\
A_1 &= n y_0^{n-1} y_1, \\
A_2 &= n y_0^{n-1} y_2 + \frac{1}{2} n(n-1) y_0^{n-2} y_1^2, \\
A_3 &= n y_0^{n-1} y_3 + n(n-1) y_0^{n-2} y_1 y_2 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) y_0^{n-3} y_1^3, \\
A_4 &= n y_0^{n-1} y_4 + n(n-1) y_0^{n-2} \left(\frac{1}{2} y_2^2 + y_1 y_3 \right) + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) \\
&\quad y_0^{n-3} y_1^2 y_2 + \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) y_0^{n-4} y_1^4, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

olarak hesaplanır.

V. Durum: Eğer lineer olmayan terim $F(y) = y y_x$ ise

$$\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \\ y_x = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}, \end{cases} \tag{2.3.22}$$

olmak üzere (2.3.22) ifadesi $F(y) = y y_x$ 'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F(y) &= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \times (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)_x \\
&= y_0 y_{0_x} + y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} + y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 + y_{0_x} y_3 \\
&\quad + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 + y_{0_x} y_4 + y_{0_x} y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

ve indis toplamaları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0 y_{0_x}, \\
A_1 &= y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x}, \\
A_2 &= y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0, \\
A_3 &= y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0, \\
A_4 &= y_{0_x} y_4 + y_{0_x} y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + y_{2_x} y_2 + y_{3_x} y_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

bulunur.

2.3.4.b. Trigonometrik Lineer Olmayanlık

I. Durum: $F(y) = \sin y$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(y_0)$ ifadesini diğer terimlerden

ayırmalıyız, çünkü diğer terimler y_0 'a bağlı olarak hesaplanmaktadır. $F(y) = \sin y$ lineer

olmayan terimi (2.3.14)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = \sin [y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)] \quad (2.3.25)$$

ve bu ifadede $\theta = y_0, \phi = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$ alınırsa,

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (2.3.26)$$

ifadesinden

$$F(y) = \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \cos y_0 \sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \quad (2.3.27)$$

bulunur. Burada $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ve $\sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} F(y) = & \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + \dots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + \dots)^4 - \dots \right) \\ & + \cos y_0 \left[(y_1 + y_2 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + \dots)^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} F(y) = & \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + \dots) + \frac{1}{4!}(y_1^4 + y_2^4 + \dots) - \dots \right) \\ & + \cos y_0 \left[(y_1 + y_2 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1^3 + y_2^3 + \dots) + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

bulunur. (2.3.29) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin y_0, \\ A_1 &= y_1 \cos y_0, \\ A_2 &= y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \sin y_0, \\ A_3 &= y_3 \cos y_0 - y_1y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \cos y_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

elde edilir.

II. Durum: Eğer $F(y) = \cos y$ ise yukarıda yapılan işlemlerin benzerini verilen lineer olmayan terim için uygulanırsa

$$\begin{aligned} A_0 &= \cos y_0, \\ A_1 &= -y_1 \sin y_0, \\ A_2 &= -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \cos y_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= -y_3 \sin y_0 - y_1 y_2 \cos y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sin y_0, \\
A_4 &= -y_4 \sin y_0 - \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \cos y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \sin y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \cos y_0, \quad (2.3.31) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur.

III. Durum: Eğer $F(y) = \sinh y$ ve $F(y) = \cosh y$ şeklinde hiperbolik lineer olmayanlığa sahip ise aynı algoritma kullanılarak Adomian polinomlarını, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sinh y_0, \\
A_1 &= y_1 \cosh y_0, \\
A_2 &= y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \sinh y_0, \\
A_3 &= y_3 \cosh y_0 + y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \cosh y_0, \\
A_4 &= y_4 \cosh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \sinh y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (2.3.32)$$

ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= \cosh y_0, \\
A_1 &= y_1 \sinh y_0, \\
A_2 &= y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \cosh y_0, \\
A_3 &= y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sinh y_0, \\
A_4 &= y_4 \sinh y_0 + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{4!} y_1^4 \cosh y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (2.3.33)$$

formülleriyle elde edilir.

2.3.4.c. Üstel Lineer Olmayanlık

I. Durum: Eğer $F(y) = e^y$ ise bu taktirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir. $F(y) = e^y$ ifadesi (2.3.14)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = e^{(y_0 + y_1 + y_2 + \dots)} \quad (2.3.34)$$

veya

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1 + y_2 + y_3 + \dots} \quad (2.3.35)$$

elde edilir. Bu son ifade de $e^{y_1+y_2+y_3+\dots}$ terimi Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned}
 F(y) &= e^{y_0} \times \left[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \frac{1}{2!} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \dots \right] \\
 &= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0} + \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0} \\
 &\quad + \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
 A_0 &= e^{y_0}, \\
 A_1 &= y_1 e^{y_0}, \\
 A_2 &= \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0}, \\
 A_3 &= \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0}, \\
 A_4 &= \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

elde edilir.

II. Durum: Eğer $F(y) = e^{-y}$ ise bu taktirde Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
 A_0 &= e^{-y_0}, \\
 A_1 &= -y_1 e^{-y_0}, \\
 A_2 &= \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0}, \\
 A_3 &= \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0}, \\
 A_4 &= \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

şeklinde olur.

2.3.4.d. Logaritmik Lineer Olmayanlık

I. Durum: Eğer $F(y) = \ln y, y > 0$ ise bu taktirde bu ifade (2.3.14)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = \ln(y_0 + y_1 + y_2 + \dots) \tag{2.3.39}$$

bulunur. (2.3.39) ifadesi ise



$$F(y) = \ln \left[y_0 \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \right] \quad (2.3.40)$$

formunda yazılabilir. $\ln(\alpha \beta) = \ln \alpha + \ln \beta$ olduğundan (2.3.40)

$$F(y) = \ln y_0 + \ln \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \quad (2.3.41)$$

olur. (2.3.41)'da ikinci terim Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} F(y) = \ln y_0 + & \left\{ \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \frac{y_3}{y_0} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^4 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

elde edilir. (2.3.42)'de indis toplamaları aynı olan terimler gruplandırılırsa, Adomian polinomları aşağıdaki formda bulunur.

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln y_0, \\ A_1 &= \frac{y_1}{y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}, \\ A_4 &= \frac{y_4}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_0^2} - \frac{y_1 y_3}{y_0^2} + \frac{y_1^2 y_2}{y_0^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{y_0^4}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

II. Durum: Eğer $F(y) = \ln(1+y)$, $-1 < y \leq 1$ ise o zaman Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln(1+y_0), \\ A_1 &= \frac{y_1}{1+y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{1+y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3}, \\ A_4 &= \frac{y_4}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^2} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

olur.

2.3.5. Bileşke Fonksiyonlar İçin Adomian Polinomları

I. Durum: Eğer $F(y) = e^{-y^2}$ ise bu taktirde $u = y^2$ diyelim, böylece $F(y) = e^{-u}$ olur. e^{-u} ve y^2 için Adomian polinomları, sırasıyla, (2.3.38) ve (2.3.18) denklemlerinden

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{-u_0}, \\ A_1 &= -u_1 e^{-u_0}, \\ A_2 &= \frac{1}{2} e^{-u_0} (u_1^2 - 2u_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B_0 &= y_0^2, \\ B_1 &= 2y_0 y_1, \\ B_2 &= y_1^2 + 2y_0 y_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= A_0[B_0(y_0)], \\ A_1(u_0, u_1) &= A_1[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1)], \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= A_2[B_0(y_0), B_1(y_0, y_1), B_2(y_0, y_1, y_2)], \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

elde edilir. Buradan da $F(y) = e^{-y^2}$ fonksiyonu için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{-y_0^2}, \\ A_1 &= -2y_0 y_1 e^{-y_0^2}, \\ A_2 &= (2y_0^2 y_1^2 - y_1^2 - 2y_0 y_2) e^{-y_0^2}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.3.46}$$

formülüyle bulunur.

II. Durum: $F(y) = e^{-y} \sin(y/2)$ olsun. Burada

$$\begin{cases} e^{-y} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ \sin(y/2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{cases} \tag{2.3.47}$$

şeklinde gösterelim. Böylece

$$F(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) \quad (2.3.48)$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} F(y_0) &= A_0 B_0, \\ F(y_1) &= A_0 B_1 + A_1 B_0, \\ F(y_2) &= A_1 B_1 + A_0 B_2 + A_2 B_0, \\ &\vdots \\ F(y_n) &= \sum_{i+j=n-1} A_i B_j, \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

elde edilir. Ayrıca $\sin(y/2)$ fonksiyonu için Adomian polinomları (2.3.31)'den

$$\begin{aligned} B_0 &= \sin(y_0/2), \\ B_1 &= (y_1/2) \cos(y_0/2), \\ B_2 &= (y_2/2) \cos(y_0/2) - (y_1^2/8) \sin(y_0/2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

formunda hesaplanır. Böylece (2.3.49) ifadesinde, (2.3.38) ve (2.3.50) ifadeleri birlikte gözönüne alınırsa $F(y) = e^{-y} \sin(y/2)$ fonksiyonu için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} F(y_0) &= e^{-y_0} \sin(y_0/2), \\ F(y_1) &= e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) - y_1 e^{-y_0} \sin(y_0/2), \\ F(y_2) &= -y_1 e^{-y_0} (y_1/2) \cos(y_0/2) + e^{-y_0} \left\{ (y_2/2) \cos(y_0/2) - (y_1^2/8) \sin(y_0/2) \right\} \\ &\quad + e^{-y_0} \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) \sin(y_0/2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

şeklinde elde edilir.

Denklemlerde ortaya çıkan lineer olmayan bileşke fonksiyonlara ait Adomian polinomları yukarıdaki işlemlere benzer şekilde hesaplanabilir.

2.4. YAKINSAKLIKLA İLGİLİ BAZI HATIRLATMALAR

Ayrışım metodunun yakınsaklığıyla ilgili çalışmalar Prof. Yves Cherruault ve çalışma arkadaşları tarafından yapılmıştır.

Teorem 2.4.1. (Cherruault ve diğer., 1992)

$$u - Nu = f \quad (2.4.1)$$

denkleminde u çözümü $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ seri formuyla verilir ve



$$\sum_i |u_i| < \infty \quad (2.4.2)$$

olduğundan mutlak yakınsaktır.

Lineer olmayan $N(u)$ fonksiyonu için

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} N^{(n)}(0) \frac{u^n}{n!}, \quad |u| < \infty \quad (2.4.3)$$

yazılabilir. O zaman (2.2.9) ile verilen u_i 'lerin bulunduğu $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisi (2.4.1)

denkleminin çözümüdür.

Teorem 2.4.2. (Cherruault, 1989)

V bir Hilbert uzayı olsun. V 'nin normu $\|\cdot\|$ ile ve skaler çarpımı $(\cdot)$ ile gösterilsin.

$\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ yakınsak bir seri olmak üzere, $N(y)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i(y_0, y_1, \dots, y_n) \quad (2.4.4)$$

şeklinde tanımlıdır.

$R(y) = N(y) - y$ operatörü yarı sürekli olsun, bu takdirde

1) $\forall f \in V$ 'nin sıralanmış normu $\exists y \in V$ için $y - N(y) = f$ şeklindedir.

2) $y_{n+1} = y_n - \rho(N(y_0 + y_n) - y_n)$ ile tanımlanan y_n , V 'de kuvvetli yakınsak olup $\forall \rho$ için $y = N(y_0 + y)$ çözümüne yakınsar.



III. BÖLÜM

3.0. GİRİŞ

Teknolojik uygulamalarda karşılaşılan en önemli problem; lineer olmayan diferensiyel denklemler tarafından modellenmiştir deterministik, stokastik veya başlangıç ve sınır şartlarına sahip kısmi türevli denklemlerin (yada sistemlerin) analitik yada analitik çözüme yakın çözümünü bulmada karşımıza çıkar.

Matematiksel ve özellikle sayısal analiz yöntemleriyle lineer olmayan adi diferensiyel denklemler çözülürken, çoğunlukla uygulanan yöntemler problemin doğasını değiştirir. Bu değişiklikler çözümlerin yanlış çıkmasına neden olabilir ve bu yüzden problemin fiziksel yapısıyla uyumlayan çözümler bulunabilir. Bu yöntemler arasında, lineerleştirme tekniklerini ve kesikleme metotlarını sayabiliriz. Bu olumsuzluklardan kaçınmak ve fiziksel olarak kabul edilebilir sonuçları elde etmek için karmaşık ve zor problemlerin çözümünü etkili bir şekilde bulmamızı sağlayacak öneriler üzerinde çalıştık.

Matematiksel metotlar ve sayısal analiz, lineer fonksiyonel denklemlerin çözümüne büyük ölçüde adapte edilmiştir, fakat lineer olmayan denklemleri ele aldığımızda ancak çok özel durumlarda geçerli olan teknikler veya çok zaman alan ve işlenmesi zor olan tekniklerle karşılaşırız. Böylece uygun dönüşümler sayesinde lineer olmayan denklemler lineer hale getirilebilir fakat bu tür teknikler her zaman geçerli değildir.

Ayrışım metodunun amacı, kullanılan metodu tamamiyle basitleştirmeden, herhangi bir dönüşüm kullanmadan yada hatalarla doldurmadan, kompleks sistemler için gerçekçi fiziksel çözümleri bulmaktır. Bu teknik adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulandığı gibi integral ve integro-diferensiyel denklemlere de uygulanabilir.

Pek çok diferensiyel denkleme klasik metotlar uygulandığında çoğunlukla yanıltıcı sonuçlar veren lineer olmayan operatörlerle karşılaşırız. Bu çalışmada ilkeleri çok basit olan nisbeten yeni sayılabilecek bir yaklaşım gösterildi. Bu bölümde ayrışım metodu adi diferensiyel denklemlere uygulandı, ayrışım metodunun Taylor serisinin bir genellemesi olduğu gösterildi ve yakınsaklığını ortaya koyacak iki yeni teorem ifade ve ispat edildi.



3.1. AYRIŞIM METODUNUN ADI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

$k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N^n$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^n$, $n \in N$ olmak üzere

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad (3.1.1)$$

$$|nk| = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n, \quad (3.1.2)$$

$$k! = k_1! k_2! \dots k_n! \quad (3.1.3)$$

$$u^k = u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}, \quad (3.1.4)$$

$$F^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [F(x)]_{x=x_0}. \quad (3.1.5)$$

şeklinde gösterilir.

Önce adi diferensiyel denklemler için ayrışım metodunun ilkelerini

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u) + g, \\ u(t)|_{t=0} = c \end{cases} \quad (3.1.6)$$

diferensiyel denkleminde gözönüne alalım. Burada f lineer olmayan ve g bilinen bir fonksiyondur. Adomian metodu

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.1.7)$$

seri formunda çözümü bulmaya ve sonrada

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.8)$$

şeklinde ifade edilen lineer olmayan terimi ayrıştırmaya çalışır. Burada A_n 'ler $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'lere bağlı Adomian polinomlarıdır. (3.1.7) ve (3.1.8)'den

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i, f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i, \quad (3.1.9)$$

ifadesi yazılır. Burada λ uygunluk için alınmış bir parametredir. (3.1.9) kullanılarak A_n 'ler

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.7) ve (3.1.8) ifadeleri (3.1.6)'da yerine yazılırsa



$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = c_0 + L^{-1} g(t) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.11)$$

bulunur. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri

$$\begin{cases} u_0 = c_0 + L^{-1} g, \\ u_1 = L^{-1} A_0, \\ \vdots \\ u_{n+1} = L^{-1} A_n, n \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1.12) ile (3.1.6)'daki diferensiyel denklemin doğru sonucu bulunmuş olur, fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu yüzden çözümün yaklaşık bir değerini kesik bir seri formunda

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad (3.1.13)$$

biçiminde buluruz.

Teorem 3.1.1.

Ayrışım metodu lineer olmayan $N(u)$ operatörünün u_0 fonksiyonu civarında Taylor serisine açılmasıyla elde edilir, yani ayrışım metodu Taylor seri metodunun bir genellemesidir.

İspat:

$$\begin{cases} \frac{du^n}{dt^n} + Ru + Nu = g, \\ u(t_0) = c_0, \\ u^{(i-1)}(t_0) = c_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (3.1.14)$$

şeklindeki n.mertebeden adi diferensiyel denklemi gözönüne alalım. (3.1.7)'de verildiği gibi u 'lu $N(u)$ fonksiyonunun Adomian açılımını elde etmek için ilk olarak u_0 civarında $N(u)$ 'nun Taylor açılımı,

$$N(u) = N(u_0) + N'(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2!} N''(u_0)(u - u_0)^2 + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)(u - u_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} N^{(n)}(u_0)(u - u_0)^n + \dots \quad (3.1.15)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$u - u_0 = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (3.1.16)$$

ifadesi gözönüne alınırsa,

$$N(u) = N(u_0) + N'(u_0)(u_1 + u_2 + \dots) + \frac{1}{2!} N''(u_0)(u_1 + u_2 + \dots)^2 + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)(u_1 + u_2 + \dots)^3 + \dots + \frac{1}{n!} N^{(n)}(u_0)(u_1 + u_2 + \dots)^n + \dots \quad (3.1.17)$$

elde edilir. (3.1.18)'de

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 + \dots \quad (3.1.18)$$

ve

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^3 = u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1^2u_3 + 3u_1u_2^2 + 6u_1u_2u_3 + u_2^3 + 3u_1u_3^2 + \dots \quad (3.1.19)$$

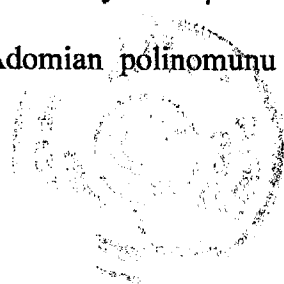
terimlerinin değerleri, sırası ile, yerine yazılırsa

$$N(u) = N(u_0) + N'(u_0)(u_1 + u_2 + u_3 + \dots) + \frac{1}{2!} N''(u_0)(u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + \dots) + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)(u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1^2u_3 + 3u_1u_2^2 + 6u_1u_2u_3 + u_2^3 + \dots) \quad (3.1.20)$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$N(u) = N(u_0) + N'(u_0)u_1 + N'(u_0)u_2 + N'(u_0)u_3 + N'(u_0)u_4 + \frac{1}{2!} N''(u_0)2u_1u_2 + \frac{1}{2!} N''(u_0)u_1^2 + \frac{1}{2!} N''(u_0)(2u_1u_3 + u_2^2) + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)u_1^3 + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)u_2^3 + \frac{1}{4!} N^{(4)}(u_0)u_1^4 + \dots \quad (3.1.21)$$

olur. (3.1.21) ifadesinde ilk olarak A_0 Adomian polinomunu hesaplamak için u_i 'nin indisleri toplamı 0 (sıfır) olanı, A_1 'i elde etmek için u_i 'nin indisleri toplamı 1 olanı ve benzer olarak A_n 'i hesaplamak için de u_i 'nin indisleri toplamı n olan terimler alınır. Ayrıca u_i^j 'nin indisleri toplamı $i \cdot j$ dir. Buna göre (3.1.21)'deki ifadeden birkaç Adomian polinomunu aşağıdaki şekilde verebiliriz:



$$\begin{aligned}
A_0 &= N(u_0), \\
A_1 &= u_1 N'(u_0), \\
A_2 &= u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0), \\
A_3 &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0), \\
A_4 &= u_4 N'(u_0) + \frac{1}{2!} (2u_1 u_3 + u_2^2) N''(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!} u_1^2 u_2 N'''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 N^{(4)}(u_0), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Teorem 3.1.1. (Abbaoui, 1995)

Tek değişkenli fonksiyonlar için Adomian polinomları

$$\begin{cases} A_0(u_0) = f(u_0), \\ \vdots \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{|nk|=n} f^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!}, \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{3.1.23}$$

formunda ifade edilir.

Sonuç 3.1.1. (Abbaoui, 1995)

Tek değişkenli fonksiyonlar için Adomian polinomları

$$\begin{cases} A_0(u_0) = f(u_0), \\ \vdots \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{|\alpha|=n} f^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{u_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \quad n \neq 0, \end{cases} \tag{3.1.24}$$

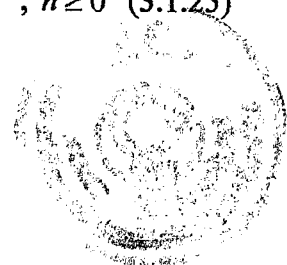
şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.1.2. (Abbaoui, 1995)

Eğer N , u_0 komşuluğunda C^∞ sınıfından ise o zaman A_n 'ler

$$A_n = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (N(u_0))^{n+1-\alpha_1} (N'(u_0))^{\alpha_1-\alpha_2} \dots (N^{(n-1)}(u_0))^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} (N^{(n)}(u_0))^{\alpha_n}, \quad n \geq 0 \tag{3.1.25}$$

formülü ile verilir, burada



$$C_{\alpha_1+\dots+\alpha_n} = \frac{n!}{(\alpha_1-\alpha_2)! \dots (\alpha_{n-1}-\alpha_n)! \alpha_n! (1!)^{\alpha_1-\alpha_2} \dots [(n-1)!]^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}} \quad (3.1.25)$$

dir ve bu sayılara Abbaoui ve Cherruault sayıları denir.

Şimdiye kadar anlattığımız teorilere uygulama olarak, adi diferensiyel denklemler için birkaç lineer olmayan örnek çözüp çeşitli metotlarla karşılaştırmasını yapalım.

Örnek 3.1.1

$$y' = t \ln y, \quad y(0) = e \quad (3.1.27)$$

birinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklemini çözelim.

Bu denklemi önce Taylor seri metoduyla çözelim: Bunun için

$$y' = t \ln y, \quad y(0) = e$$

şeklinde verilen denklemi gözönüne alalım. Burada, Tanım 1.1.10 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} y'(t) &= t \ln y, \quad y'(0) = 0 \\ y''(t) &= \ln y + t \frac{y'}{y}, \quad y''(0) = 1 \\ y'''(t) &= 2 \frac{y'}{y} + t \frac{y''y - y'y'}{y^2}, \quad y'''(0) = 0 \\ y^{(4)}(t) &= 3 \frac{y''y - y'y'}{y^2} + t \left(\frac{y''y - y'y'}{y^2} \right)', \quad y^{(4)}(0) = \frac{3}{e} \\ y^{(5)}(t) &= 4 \frac{y'''y^3 - 3y''y'y^2 + 2y(y')^3}{y^4} + t \left(\frac{y'''y^3 - 3y''y'y^2 + 2y(y')^3}{y^4} \right)', \quad y^{(5)}(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

elde edilir.

Böylece Taylor seri metoduyla denklemin çözümü (3.1.28)'den

$$y(t) = e + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4!}t^4 + \dots \quad (3.1.29)$$

bulunur.

Şimdi aynı örneği ayrışım metodunu kullanarak çözelim: Bunun için önce (3.1.27) denkleminin operatör formu olan,

$$Ly = t \ln y \quad (3.1.30)$$

ifadesini yazalım. Bu denklemin her iki yanına L^{-1} invers oparatörü uygulanırsa,

$$y = y(0) + L^{-1}(t A_n) \quad (3.1.31)$$

bulunur. Burada

$$L = \frac{d}{dx}, \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt, \quad \ln y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.32)$$

dir. (3.1.31)'den

$$\begin{cases} y_0 = e, \\ y_{n+1} = L^{-1}(t A_n), n \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.33)$$

indirgeme formunda yazılır. (3.1.33)'de (2.3.43) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y_0 &= e, \\ y_1 &= L^{-1}(t A_0) = L^{-1}(t \ln y_0) = \frac{1}{2} t^2, \\ y_2 &= L^{-1}(t A_1) = L^{-1}\left(t \frac{y_1}{y_0}\right) = \frac{3}{4!} t^4, \\ y_3 &= L^{-1}(t A_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

elde edilir. (3.1.7)'deki çözüm serisinden

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ &= e + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{4!} t^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

bulunur.

Eğer (3.1.29) ve (3.1.35) çözüm serileri gözönüne alınırsa, her iki metodun da aynı çözümü verdiğini görürüz. Fakat Taylor serisiyle çözüm yapılırken hesaplamalar daha karmaşık ve sıkıcıdır. Yalnız ayrışım metoduyla aynı çözüme ulaşmak daha basit ve daha az zaman alıcıdır. Ayrıca Wazwaz (1998) tarafından yapılan çalışmada Taylor metoduyla ayrışım metodunun bir karşılaştırılması sunulmuş olup, bu çalışmada lineer ve lineer olmayan adi, kısmi ve integral denklemleri için her iki metotla çözüm yapılmış ve her iki metodunda aynı sonucu vermesine rağmen ayrışım metoduyla yapılan hesaplamalar daha basit ve daha az zaman almıştır. Aynı zamanda bilgisayarda programının yapılmasının daha kolay olduğu görülmüştür.

Aşağıda verilen Bernoulli, Riccati ve Abel tipi lineer olmayan adi diferensiyel denklemler Khuri (2001) tarafından ayrışım metodu ile çözülmüştür. Burada ortaya konulan çözüm sisteminde ise x 'in sıfıra yakın ve uzak değerleri için daha hassas değerler elde edildi.

Şimdi bunu aşağıdaki örneklerde gösterelim :

Örnek 3.1.2.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, y(a) = A \quad (3.1.36)$$

formundaki Bernoulli denklemini ayrışım metodunu kullanarak çözelim. (3.1.36) denklemini

$$L[y] = -p(x)y + q(x)y^n \quad (3.1.37)$$

şekilde operatör formunda yazılır. Burada $L[\cdot] = d/dx$ şeklinde lineer bir operatördür.

$$L^{-1}[\cdot] = \int_0^x (\cdot) dx \quad (3.1.38)$$

formunda tanımlanan $L^{-1}[\cdot]$ invers operatörü (3.1.37) denkleminin her iki yanına uygulanırsa,

$$L^{-1} L[y] = L^{-1} [-p(x)y + q(x)y^n] \quad (3.1.39)$$

elde edilir. (3.1.36)'daki başlangıç şartı (3.1.39)'da yerine yazılırsa

$$y(x) = A - L^{-1} [p(x)y] + L^{-1} [q(x)y^n] \quad (3.1.40)$$

bulunur. Lineer olmayan terim

$$f(y) = y^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad (3.1.41)$$

şeklinde verilir. Burada $A_k = A_k(y_0, y_1, \dots, y_k)$ 'lar Adomian polinomlarıdır. (3.1.7) ve (3.1.41) denklemlerini (3.1.40)'da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = A - \sum_{k=0}^{\infty} L^{-1} [p(x)y_k] + \sum_{k=0}^{\infty} L^{-1} [q(x)A_k], \quad (3.1.42)$$

elde edilir. Buradan da çözüm

$$\begin{cases} y_0 = A, \\ y_1 = -L^{-1} [p(x)y_0] + L^{-1} [q(x)A_0], \\ \vdots \\ y_{n+1} = -L^{-1} [p(x)y_k] + L^{-1} [q(x)A_k], \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.43)$$

formunda bulunur.

$$\frac{dy}{dx} - y = y^3, y(0) = 1 \quad (3.1.44)$$

Bernoulli denklemini yukarıda açıkladığımız şekilde çözelim. (3.1.44) denkleminin analitik çözümü

$$y(x) = (2e^{-2x} - 1)^{-1/2} \quad (3.1.45)$$

dir. (3.1.44) denkleminde $a = 0, A = 1, n = 3, p(x) = -1$ ve $q(x) = 1$ dir. (3.1.44) denklemini operatör formunda yazar ve başlangıç şartını kullanırsak

$$y(x) = 1 + L^{-1}(y) + L^{-1}(y^3) \quad (3.1.46)$$

elde ederiz. Burada L^{-1} invers operatörüdür. $f(y) = y^3$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomları (2.3.19) denkleminde $n = 3$ yazılarak elde edilir. Böylece (3.1.44) denklemini için yaklaşık çözüm;

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = L^{-1}(y_0) + L^{-1}(A_0), \\ \vdots \\ y_{n+1} = L^{-1}(y_n) + L^{-1}(A_n), n \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.47)$$

indirgeme ilişkileriyle bulunabilir. (3.1.47) denkleminde

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= L^{-1}(y_0) + L^{-1}(y_0^3) = 2x, \\ y_2 &= L^{-1}(y_1) + L^{-1}(3y_0^2y_1) = 4x^2, \\ y_3 &= L^{-1}(y_2) + L^{-1}(3y_0^2y_2 + 3y_0y_1^2) \\ &= L^{-1}(4x^2) + L^{-1}(12x^2 + 12x^2) = \frac{28}{3}x^3, \\ y_4 &= L^{-1}(y_3) + L^{-1}(3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2 + y_1^3) \\ &= L^{-1}\left(\frac{28}{3}x^3\right) + L^{-1}(28x^3 + 48x^3 + 8x^3) = \frac{70}{3}x^4, \\ y_5 &= L^{-1}(y_4) + L^{-1}(3y_0^2y_4 + 3y_1^2y_2 + 3y_2^2y_0 + 6y_0y_1y_3) = \frac{904}{15}x^5, \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

elde edilir. Böylece (3.1.44) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \dots \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + \frac{28}{3}x^3 + \frac{70}{3}x^4 + \frac{904}{15}x^5 + \frac{14296}{90}x^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

olur. (3.1.49) yaklaşık çözümünün sayısal hesaplamalarını yapmak için (2.2.11) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= u_0 = 1, \\
 \phi_2 &= u_0 + u_1 = 1 + 2x, \\
 \phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 2x + 4x^2, \\
 \phi_4 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 2x + 4x^2 + \frac{28}{3}x^3, \\
 \phi_5 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 2x + 4x^2 + \frac{28}{3}x^3 + \frac{70}{3}x^4, \\
 \phi_6 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 2x + 4x^2 + \frac{28}{3}x^3 + \frac{70}{3}x^4 + \frac{904}{15}x^5,
 \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

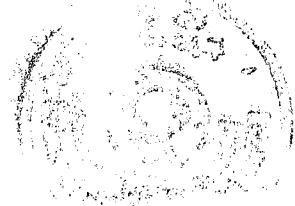
elde edilir.

Bununla ilgili sayısal hesaplamalar Tablo 3.1.1'de aşağıdaki gibidir :

x	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.01	1.0204095729	1.0204095727	1.632E-10
0.02	1.0416786036	1.0416785929	1.074E-08
0.03	1.0638724904	1.0638723645	1.259E-07
0.04	1.0870639666	1.0870632380	7.286E-07
0.05	1.1113341988	1.1113313333	2.865E-06
0.06	1.1367740931	1.1367652634	8.831E-06
0.07	1.1634858578	1.1634628569	2.301E-05
0.08	1.1915848853	1.1915318818	5.302E-05
0.09	1.2212020313	1.2210907686	1.113E-04
0.10	1.2524863969	1.2522693333	2.171E-04

Tablo 3.1.1. (3.1.46)'da verilen Bernoulli denklemi için sayısal sonuçlar.

Tablo 3.1.1.'de görüldüğü gibi yalnız altı iterasyon (ϕ_6) kullanılarak (3.1.46) denkleminin $x = 0.01, \dots, 0.10$ değerleri için analitik, yaklaşık çözümleri ve son kolonda da hata miktarı sunulmuştur. Burada $Hata = (Analitik \ Çözüm - Yaklaşık \ Çözüm)$ 'dür. Altı



iterasyon kullanılmasıyla elde edilen hata miktarı % 10^{-3} 'den daha küçüktür. x sıfıra yaklaştıkça hata miktarı düşmekte ve yakınsaklık hızı artmaktadır, fakat x bire yaklaştıkça hata miktarının büyüdüğü görülmektedir. Eğer daha iyi bir sonuç almak isteniyorsa (3.1.50)'deki çözüm serisine yeni terimler eklenmesi gerekir. x 'in bir ve birden büyük veya küçük değerleri için de hassas sonuçlar almak isteniyorsa (3.1.49)'daki çözüm serisine Tanım 1.1.18 ile verilen Padé yaklaşımının uygulanması gerekir (Jiao ve diğer., 2002). Böylece bu çözüm serisi için $L=M=3$ olmak üzere

$$[3/3] = \frac{1 + 2.8873151x + 6.666069x^2 + 32.2558194x^3}{1 + 0.8873151x + 0.8914388x^2 + 17.5903481x^3}$$

şeklindeki Padé yaklaşımı elde edilir.

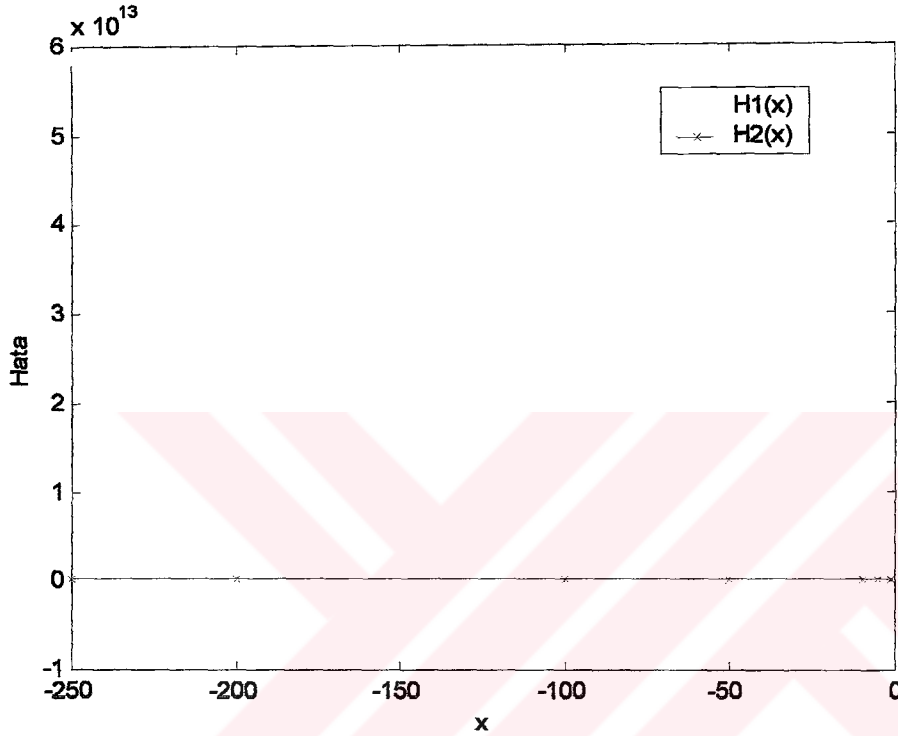
Şimdi $H_1(x) = \text{Analitik çözüm} - \phi_6$ ve $H_2(x) = \text{Analitik çözüm} - [3/3]$ olmak üzere, Adomian metodu ve Padé yaklaşımı kullanılarak elde edilen hataların karşılaştırılmasını aşağıdaki tablo ile verelim :

x	$H_1(x)$	$H_2(x)$
-250	5.876E+13	1.832
-200	1.925E+13	1.832
-100	6.003E+11	-1.830
-50	1.869E+10	-1.826
-10	5.802E+06	-1.797
-5	1.748E+05	-1.757
10	-6.270E+06-i	-1.872-i
50	-1.898E+10	-1.841-i
100	-6.050E+10	-1.838-i
200	-1.932E+13	-1.836-i
250	-5.895E+13	-1.835-i
10^6	-6.027E+36	-1.834-i

Tablo 3.1.2. $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ için elde edilen hata miktarları.

Tablo 3.1.2’de görüldüğü gibi x ’in sıfırdan uzak değerleri için elde edilen hata miktarı Padé yaklaşımının kullanılmasıyla daha azalmıştır. Böylece ayrışım metodu kullanılarak elde edilen çözüm serisine Padé yaklaşımı uygulanarak elde edilen yeni çözümü kullanmak daha uygundur. Bu ise Tablo 3.1.2’de görülmektedir.

Tablo 3.1.2 kullanılarak elde edilen grafik aşağıdadır :



Şekil 3.1.1. Bernoulli denklemi için ayrışım metodunun çözüm serisinin ($H1(x)$) ve Padé yaklaşımının ($H2(x)$) kullanılmasıyla elde edilen hatayı gösteren grafik.

Örnek 3.1.3.

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, y(0) = A, \quad (3.1.51)$$

Ricatti denklemi verilsin. (3.1.51) denklemi operatör formunda yazılıp bunun her iki yanına L^{-1} invers operatörü uygulanır ve elde edilen ifadede (3.1.7) kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(x) = y(0) + L^{-1} p(x) + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1} q(x) y_n + \sum_{n=0}^{\infty} r(x) A_n, \quad (3.1.52)$$

bulunur. Bu denklemde lineer olmayan terim $f(y) = y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dir. $f(y) = y^2$ lineer olmayan terimi için Adomian polinomları (2.3.19) denkleminde $n=2$ yazılarak elde edilebilir. Böylece (3.1.51) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$\begin{cases} y_0 = A + L^{-1}[p(x)], \\ y_1 = L^{-1}[q(x)y_0] + L^{-1}[r(x)A_0], \\ \vdots \\ y_{n+1} = L^{-1}[q(x)y_n] + L^{-1}[r(x)A_n], n \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.53)$$

indirgeme ilişkileriyle verilir.

Şimdi

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, y(0) = 1, \quad (3.1.54)$$

denklemini gözönüne alalım. (3.1.54) denkleminin analitik çözümü

$$y = \frac{1+x-x^2}{1-x} \quad (3.1.55)$$

dir. Bu denklemde $A=1, p(x)=1+x^2, q(x)=-2x$ ve $r(x)=1$ dir. (3.1.53) ifadesi (3.1.54)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + x + \frac{1}{3}x^3, \\ y_1 &= -2L^{-1}(xy_0) + L^{-1}(A_0) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{63}x^7, \\ y_2 &= -2L^{-1}(xy_1) + L^{-1}(A_1) \\ &= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{63}x^7 + \frac{1}{56}x^8 + \frac{2}{2079}x^{11}, \\ y_3 &= -2L^{-1}(xy_2) + L^{-1}(A_2) \\ &= x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{30}x^6 + \frac{2}{63}x^7 - \frac{1}{28}x^8 + \frac{8}{315}x^9 - \frac{2}{693}x^{11} \\ &\quad + \frac{53}{33264}x^{12} + \frac{13}{218295}x^{15}, \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

elde edilir. (3.1.56) denkleminde y_0 ve y_1 'deki zıt işaretli $\frac{1}{3}x^3$ terimleri, y_1 ve y_2 'deki zıt işaretli $\frac{1}{6}x^4$ terimleri, y_2 ve y_3 'deki zıt işaretli $\frac{1}{5}x^5$ terimleri sadeleşir. Böylece (3.1.54)

denklemini için yaklaşık çözüm



$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad (3.1.59)$$

$$= 1 + 2x + x^2 + x^3 + \dots$$

şeklinde bulunur. Bu çözümün sayısal hesaplamalarını yapmak için ϕ_4 yaklaşımı kullanılacaktır.

Bununla ilgili sayısal sonuçlar aşağıda Tablo 3.1.3 ile verilmiştir :

x	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.001	1.0002001001	1.0002001001	1.001E-12
0.002	1.0040040080	1.0040040080	1.603E-11
0.003	1.0060090271	1.0060090270	8.124E-11
0.004	1.0080160643	1.0080160643	2.571E-10
0.005	1.0100251256	1.0100251250	6.281E-10
0.006	1.0120362173	1.0120362160	1.304E-09
0.007	1.0140493454	1.0140493443	2.418E-09
0.008	1.0160645161	1.0160645120	4.129E-09
0.009	1.0180817356	1.0180817291	6.621E-09
0.010	1.0201010101	1.0201010000	1.011E-08

Tablo 3.1.3. (3.1.56)'da verilen Ricatti denklemi için sayısal sonuçlar.

Tablo 3.1.3.'de görüldüğü gibi yalnız dört iterasyon (ϕ_4) kullanılarak (3.1.54) denkleminin $x = 0.001, \dots, 0.010$ değerleri için analitik, yaklaşık çözümleri ve son kolonda da hata miktarı sunulmuştur. Yalnız dört iterasyonun kullanılmasıyla elde edilen hata miktarı % 10^{-7} 'den daha azdır. Burada da bir önceki örnekteki gibi x sıfıra yaklaştıkça hata miktarı düşmekte ve yakınsaklık hızı artmaktadır, fakat x bire yaklaştıkça hata miktarının büyüdüğü görülmektedir. Eğer daha iyi bir sonuç almak isteniyorsa (3.1.57)'deki çözüm serisine yeni



terimler eklenmesi gerekir. x değeri sıfırdan uzaklaştıkça (3.1.57)'deki çözüm serisi hassas olmayan sonuçlar verir, bu sonuçları düzeltmek için bir önceki örnekte olduğu gibi çözüm serisine Padé yaklaşımı uygulanırsa, $L=M=5$ için

$$[5/5] = \frac{1 + 2.0789477x + 1.1427654x^2 + 1.0040804x^3 + 0.0054337x^4 - 0.1868021x^5}{1 + 0.0789477x - 0.01513x^2 - 0.0446073x^3 + 0.0308306x^4 - 0.188726x^5}$$

bulunur.

Şimdi $|H_1(x)| = \text{Analitik çözüm} - \phi_4$ ve $|H_2(x)| = \text{Analitik çözüm} - [5/5]$ olmak üzere

Adomian metodu ve Padé yaklaşımı kullanılarak elde edilen hataların karşılaştırılmasını aşağıdaki tablo ile verelim :

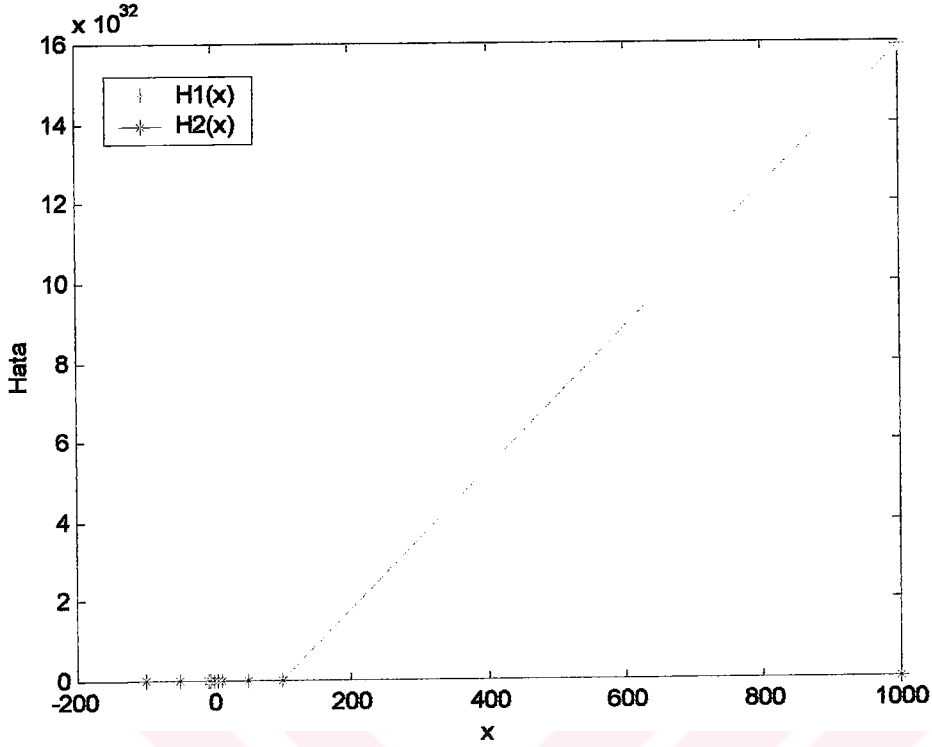
x	$ H_1(x) $	$ H_2(x) $
-100	1.613E+21	100.978
-50	3.983E+17	50.965
-10	1.759E+10	10.836
-5	4.299E+05	5.615
-1	0.306	0.139
5	3.415E+05	4.029
10	1.425E+09	8.949
50	3.796E+17	48.989
100	1.574E+21	98.999
1000	1.591E+33	999.009

Tablo 3.1.4. $|H_1(x)|$ ve $|H_2(x)|$ için elde edilen hata miktarları.

Tablo 3.1.4 ile x 'in sıfırdan uzak değerleri için elde edilen mutlak hata verilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi (3.1.57)'deki Adomian'ın çözüm serisine Padé yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilen hata miktarı, Adomian'ın çözüm serisine göre, çok daha küçüktür.

Tablo 3.1.4 yardımıyla çizilen grafik aşağıdadır :





Şekil 3.1.2. Ricatti denklemi için ayırışım metodunun çözüm serisinin ($H1(x)$) ve Padé yaklaşımının ($H2(x)$) kullanılmasıyla elde edilen hatayı gösteren grafik.

Örnek 3.1.4.

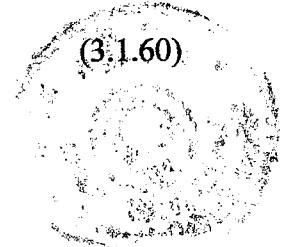
$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 + s(x)y^3, y(0) = A \quad (3.1.58)$$

formundaki Abel denklemi verilsin. Bu denklem operatör formunda yazılır, her iki yanına L^{-1} invers operatörü uygulanır ve elde edilen ifade de (3.1.7) kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = A + L^{-1}[p(x)] + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}[q(x)y_n] + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}[r(x)A_n] + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}[s(x)B_n] \quad (3.1.59)$$

bulunur. Burada $f_1(y) = y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ve $f_2(y) = y^3 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ olmak üzere iki ayrı lineer olmayan terim vardır. Bu lineer olmayan terimlere karşılık gelen Adomian polinomlarını bulmak için (2.3.19)'da, sırasıyla, $n=2$ ve $n=3$ almak yeterlidir. Böylece (3.1.58) denkleminin yaklaşık çözümü;

$$\begin{cases} y_0 = A + L^{-1}[p(x)], \\ y_1 = L^{-1}[q(x)y_0] + L^{-1}[r(x)A_0] + L^{-1}[s(x)B_0], \\ \vdots \\ y_{n+1} = L^{-1}[q(x)y_n] + L^{-1}[r(x)A_n] + L^{-1}[s(x)B_n], n \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.60)$$



olarak elde edilir.

Örnek 3.1.5.

Chawla ve diğer., (1988); Qu ve Agarwal (1997) tarafından, sırasıyla, collocation ve sonlu farklar metodu kullanılarak çözülen

$$y'' + \frac{2}{x} y' = -y^5, \quad x \in (0,1) \quad (3.1.61)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = \sqrt{3}/2 \quad (3.1.62)$$

iki noktalı singüler sınır-değer problemini gözönüne alalım. (3.1.61) ve (3.1.62) denklemlerinin varlık ve teklik ispatı Jain ve Jain (1989) tarafından verilmiştir. Bu tür singüler iki noktalı sınır-değer problemleri elektro-hidrodinamik ve termal patlamalarda karşımıza çıkar.

Daha önceki örneklerde olduğu gibi (3.1.61) denklemini operatör formunda yazılır, L^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$L^{-1} L y = -L^{-1} \left(\frac{2}{x} L_x y + y^5 \right) \quad (3.1.63)$$

bulunur. Burada

$$L = \frac{d^2}{dx^2}, L_x = \frac{d}{dx}, L^{-1} (.) = \int_0^x (.) dx \int_0^x (.) dx \quad (3.1.64)$$

dir. (3.1.63) denkleminde (3.1.62) ile verilen başlangıç şartı ve (3.1.7)'de verilen seri kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y(0) + x y'(0) - \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1} \left(\frac{2}{x} L_x y_n + A_n \right) \quad (3.1.65)$$

elde edilir. Burada

$$C = y(0), f(y) = y^5 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.66)$$

olup, $y(0)$ daha sonra $x=1$ noktasındaki sınır değeri kullanılarak belirlenecektir. $f(y) = y^5$ lineer olmayan terim için Adomian polinomları (2.3.19) denkleminde $n=5$ alınarak belirlenebilir. Böylece (3.1.61) ve (3.1.62) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü;

$$\begin{cases} y_0 = C, \\ y_1 = -L^{-1}\left(\frac{2}{x}L_x y_0 + A_0\right), \\ \vdots \\ y_{n+1} = -L^{-1}\left(\frac{2}{x}L_x y_n + A_n\right), n \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.67)$$

formülüyle bulunur. (3.1.67) denkleminde

$$\begin{aligned} y_0 &= C, \\ y_1 &= -\frac{x^2}{2!}C^5, \\ y_2 &= 5\frac{x^4}{4!}C^9 + C^5, \\ y_3 &= -25\frac{x^6}{6!}C^8 - \frac{x^4}{6}C^5 - \frac{5}{36}C^9 - x^2C^5, \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

elde edilir. Böylece $y(x)$ 'in yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots = C + C^5 \left(1 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4\right) \\ - \frac{25}{6!}x^6C^8 - C^9 \left(1 - \frac{5}{4!}x^4\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

olur. (3.1.69)'da $x = 1$ noktasındaki $y = \sqrt{3}/2$ değeri kullanılırsa

$$C = 0.9994 \quad (3.1.70)$$

elde edilir. Bu değer (3.1.69)'da yerine yazıldığında (3.1.61) ve (3.1.62) ile verilen iki noktalı singüler sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü bulunur. Bu denklemin analitik çözümü ise

$$y(x) = 1/\sqrt{1+x^2/3}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1.71)$$

dir. Bununla ilgili sayısal sonuçları gösteren tablo aşağıdadır :

x	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.00	1.00000	0.99999	1.00E-5
0.01	0.99998	0.99994	4.33E-5
0.02	0.99993	0.99979	1.43E-4
0.03	0.99985	0.99954	3.11E-4
0.04	0.99973	0.99919	5.43E-4
0.05	0.99958	0.99874	8.43E-4
0.06	0.99940	0.99818	1.21E-3
0.07	0.99918	0.99753	1.64E-3
0.08	0.99893	0.99678	2.14E-3
0.09	0.99865	0.99593	2.71E-3
0.10	0.99833	0.99498	3.34E-3

Tablo 3.1.5. (3.1.61) denklemi için sayısal sonuçlar.

Tablo 3.1.5’de ayrışım metodunun yalnız dört iterasyonu (ϕ_4) kullanılarak elde edilen hata miktarları görülmektedir. Dikkat edilirse ayrışım metodu kullanılarak yapılan işlemler diğer metotlara göre daha kolay ve yakınsaması daha hızlıdır, elde edilen hata miktarı ise $x = 0.00, \dots, 0.10$ değerleri için 10^{-2} ’den daha küçüktür. (3.1.69)’daki çözüm serisine yeni terimler eklenerek daha hassas sonuçlar bulunabilir.

Ayrıca ayrışım metodunu singüler pertürbe problemlerine ve yüksek mertebeden sınır-değer problemlerine rahatlıkla uygulamak mümkündür (Adomian ve Rach, 1993; Deeba ve diğer., 2000; Wazwaz, 2000b; 2000c; 2001; 2001a; 2001b; 2001c; 2001d).

Şimdi, verilen denklem için elde edilen yaklaşık çözümün collocation (CM) ve sonlu farklar metodu (FDM) ile karşılaştırmasını aşağıdaki tablo ile verelim:



İterasyon	ADM	CM	FDM
8	6.61E-12	5.33E-8	7.23E-7

Tablo 3.1.6. (3.1.61) denklemi için çeşitli metotlarla elde edilen hata miktarlarının karşılaştırılması.

Tablo 3.1.6’da sekiz iterasyon kullanılarak her üç metotla elde edilen hata miktarları görülmektedir. Ayırışım metoduyla elde edilen sonuçlar CM ve FDM’ye göre daha hassastır. Ayrıca ayırışım metodunun ilkeleri CM ve FDM metotlarına göre daha basit ve az zaman alıcıdır.

3.2. AYRIŞIM METODUNUN KISMI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu bölümde ayırışım metodunun kısmi diferensiyel denklemlere nasıl uygulandığını vereceğiz. Matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözümünü, Korteweg-de Vries (KdV) ve genişletilmiş KdV (MKdV) denklemlerinin soliton çözümlerinin ayırışım metodu kullanılarak nasıl elde edildiğini göstereceğiz. Elde ettiğimiz sonuçların doğruluğunu tablolar ve şekillerle destekleyeceğiz.

$$(L_x + L_y)u + Nu = g \quad (3.2.1)$$

kısmi türevli denklemini gözönüne alalım. Burada L_x ve L_y

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.2.2)$$

şeklinde tanımlanan lineer operatörler, Nu lineer olmayan operatör ve g bilinen bir fonksiyondur. (3.2.1) ile operatör formunda verilen denklemin çözümünü ister x -yönünde isterse y -yönünde yapmak mümkündür. Çünkü her iki yönde de yapılan çözümler birbirine eşittir (Adomian ve Rach, 1993; Wazwaz, 1997). Bu özelliğin bize getirmiş olduğu avantaj x -yönünde çözüm yaparken hesaplamalar karmaşık o zaman y -yönünde çözümü yapmak daha uygun olur. Ayrıca lineer ve homojen olmayan kısmi türevli denklemleri bu metotla

çözerken birbirini yok eden terimler sayesinde ilk iterasyonla analitik çözümü elde etmek mümkündür (Adomian ve Rach, 1992; Wazwaz, 1997a).

(3.2.1) denkleminin her iki yanına L_x^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$L_x^{-1} L_x u + L_x^{-1} L_y u + L_x^{-1} (Nu) = L_x^{-1} (g) \quad (3.2.3)$$

bulunur. Burada

$$L_x^{-1} (.) = \int_0^x (.) dx \int_0^x (.) dx \quad (3.2.4)$$

dir. Eğer verilen denklem n.mertebeden ise

$$L = \frac{d^n}{dx^n}, L_x^{-1} = \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n\text{-kez}} (.) dx \dots dx \quad (3.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. (3.2.3) denkleminde ayrışım serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = u(0, y) + y u_x(0, y) - L_x^{-1} L_y \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L_x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n) + L_x^{-1} (g) \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Böylece (3.2.1) denkleminin verilen başlangıç şartıyla birlikte çözümü

$$\begin{cases} u_0(x, y) = u(0, y) + y u_x(0, y) + L_x^{-1}(g), \\ u_1(x, y) = -L_x^{-1} L_y u_0 - L_x^{-1}(A_0), \\ \vdots \\ u_{n+1}(x, y) = -L_x^{-1} L_y u_n - L_x^{-1}(A_n), n \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

indirgeme formülü yardımıyla bulunur. Burada A_n Adomian polinomlarıdır ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$

dir.

Örnek 3.2.1.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) + k u(x, t) + f[u(x, t)] = g(x, t) \quad (3.2.8)$$

$$u(x, 0) = a(x) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = b(x) \quad (3.2.9)$$

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, t \in [0, T], \\ \Delta = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

şeklinde genel formda verilen lineer olmayan Klein-Gordon denklemini gözönüne alalım. Burada k reel, f lineer olmayan ve g bilinen bir fonksiyondur.

Lineer ve lineer olmayan Klein-Gordon (KG) denkleminin ayrışım metoduyla çözümü daha önce Deeba ve Khuri (1996) ve Kaya (2001) tarafından yapıldı. Biz ise burada genel formda verilen lineer olmayan KG denklemini gözönüne alıp, elde edilen yaklaşık çözümün, analitik çözümün ve oluşan hatanın üç boyutlu grafiklerini Matematica paket programını kullanarak çizeceğiz.

Klein-Gordon denklemi kuantum mekaniğinde ve saçılma olaylarının bir modeli olarakta relativistik fizikte ortaya çıkar (Zauderer, 1983; LeVeque, 1990; Ming ve Guo, 1993).

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, L_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2.11)$$

olmak üzere (3.2.8) denklemi operatör formunda

$$L_t u = \sum_{i=1}^m L_{x_i} u - k u - f(u) + g \quad (3.2.12)$$

olarak yazılabilir. (3.2.9) başlangıç şartıyla verilen bu denklemin varlık ve teklik ispatı Strauss ve Vazquez (1978) tarafından yapıldı. L_t operatörünün tersi olan L_t^{-1} operatörü

$$L_t^{-1} (.) = \int_0^t \int_0^t (.) dt dt \quad (3.2.13)$$

ile tanımlanır. (3.2.12)'nin her iki yanına (3.2.13)'de verilen invers operatörü uygulanırsa

$$L_t^{-1} L_t u = \sum_{i=1}^m L_t^{-1} L_{x_i} u - k L_t^{-1} u - L_t^{-1} [f(u)] + L_t^{-1} g \quad (3.2.14)$$

bulunur. Bu denklemde başlangıç şartları ve ayrışım serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = a(x) + tb(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m L_t^{-1} L_{x_i} u_n(x, t) - k \sum_{n=0}^{\infty} L_t^{-1} u_n(x, t) - \sum_{n=0}^{\infty} L_t^{-1} [A_n] + L_t^{-1} g \quad (3.2.15)$$

elde edilir. Ayrışım metoduna göre

$$u_0(x, t) = a(x) + tb(x) + L_t^{-1}(g) \quad (3.2.16)$$

ve $Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olduğundan

$$u_{n+1}(x,t) = \sum_{i=1}^m L_i^{-1} L_{x_i} u_n - k L_i^{-1} u_n - L_i^{-1} (A_n), n \geq 0 \quad (3.2.17)$$

bulunur. Böylece (3.2.9) ve (3.2.10) şartlarıyla birlikte verilen (3.2.8) denkleminin ayrışım metoduyla çözümü ;

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= a(x) + t b(x) + L_t^{-1} g, \\ u_1(x,t) &= \sum_{i=1}^m L_i^{-1} L_{x_i} u_0 - k L_i^{-1} u_0 - L_i^{-1} (f(u_0)), \\ u_2(x,t) &= \sum_{i=1}^m L_i^{-1} L_{x_i} u_1 - k L_i^{-1} u_1 - L_i^{-1} (u_1 f'(u_0)), \\ u_3(x,t) &= \sum_{i=1}^m L_i^{-1} L_{x_i} u_2 - k L_i^{-1} u_2 - L_i^{-1} \left(u_2 f'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} f''(u_0) \right), \\ u_4(x,t) &= \sum_{i=1}^m L_i^{-1} L_{x_i} u_3 - k L_i^{-1} u_3 - L_i^{-1} \left(u_3 f'(u_0) + (u_1 u_2) f''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} f'''(u_0) \right), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

indirgeme formülüyle elde edilir.

Şimdi de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^2 + \pi u = -x\pi^2 \cos \pi t + x^2 \cos^2 \pi t + \pi x \cos \pi t, \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0, \end{cases} \quad (3.2.19)$$

denklemini yukarıda açıklanan şekilde çözelim.

(3.2.19) denklemi operatör formunda

$$L_t u = L_x u - u^2 - \pi u - x\pi^2 \cos \pi t + x^2 \cos^2 \pi t + \pi x \cos \pi t \quad (3.2.20)$$

olarak yazılır. (3.2.20) denkleminin her iki yanına (3.2.13) ile tanımlanan L_t^{-1} invers operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x,0) + x u_t(x,0) + L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} A_n - \pi L_t^{-1} u \\ &\quad + L_t^{-1} (x^2 \cos^2 \pi t - x\pi^2 \cos \pi t + \pi x \cos \pi t) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

bulunur. Böylece verilen başlangıç şartlarıyla birlikte (3.2.19) denkleminin çözümü

$$\begin{cases} u_0(x,t) = u(x,0) + x u_t(x,0) + L_t^{-1} (x^2 \cos^2 \pi t - x\pi^2 \cos \pi t + \pi x \cos \pi t), \\ u_{n+1}(x,t) = L_t^{-1} L_x u_n - L_t^{-1} A_n - \pi L_t^{-1} u_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.22)$$

indirgeme formuyla elde edilir. Burada $f(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
u_0 &= x + \frac{x}{4} \left(\frac{x\pi^2 t^2 - x\cos(\pi t)^2 + 4\pi^2 \cos(\pi t) - 4\pi\cos\pi t}{\pi^2} \right), \\
u_1 &= \frac{1}{24} \left(\frac{3\cos(\pi t)^2 - 3\pi^2 t^2 + \pi^4 t^4}{\pi^4} \right) - \frac{x^2}{11520} \left(\frac{60x^2 \pi^4 t^4 - 45x^2 \pi^2 t^2 + \dots}{\pi^6} \right),
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

bulunur. Buna göre (3.2.19) denklemini için yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\
&= x + \frac{x}{4} \left(\frac{x\pi^2 t^2 - x\cos(\pi t)^2 + 4\pi^2 \cos(\pi t) - 4\pi\cos\pi t}{\pi^2} \right) \\
&+ \frac{1}{24} \left(\frac{3\cos(\pi t)^2 - 3\pi^2 t^2 + \pi^4 t^4}{\pi^4} \right) - \frac{x^2}{11520} \left(\frac{60x^2 \pi^4 t^4 - 45x^2 \pi^2 t^2 + \dots}{\pi^6} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

olur. Ayrıca (3.2.24)'ün sayısal hesaplamalarını yapmak için (2.2.11) ifadesi kullanılarak elde edilen tablo aşağıdaki gibidir :

t	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.1	0.0095106	0.0095099	6.973E-7
0.2	0.0080902	0.0080895	7.425E-7
0.3	0.0058779	0.0058771	8.129E-7
0.4	0.0030902	0.0030893	9.016E-7
0.5	0.0000000	-0.0000010	1.001E-6
0.6	-0.0030901	-0.0030912	1.098E-6
0.7	-0.0058779	-0.0058790	1.187E-6
0.8	-0.0080901	-0.0080914	1.258E-6
0.9	-0.0095105	-0.0095118	1.303E-6
1.0	-0.0100000	-0.0100013	1.318E-6

Tablo 3.2.1. (3.2.19) denklemini için sayısal sonuçlar.

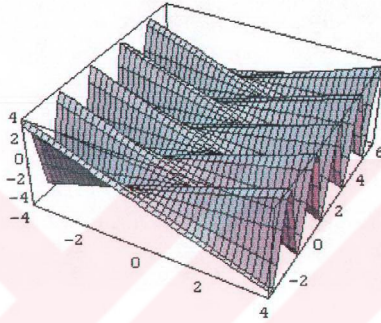
Tablo 3.2.1.'de görüldüğü gibi yalnız iki iterasyon kullanılarak (ϕ_2), $x = 0.01$ değeri için elde edilen hata miktarı görülmektedir, bu hata miktarı 10^{-5} 'den daha azdır. Eğer daha hassas sonuçlar elde edilmek istenilirse (3.2.24)'deki seriye yeni terimlerin eklenmesi gerekir.

(3.2.19) denkleminin analitik çözümü ise

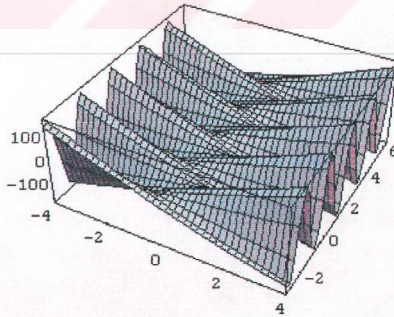
$$u(x, t) = x \cos \pi t \quad (3.2.25)$$

dir.

$-4 \leq x \leq 4$ ve $-\pi \leq t \leq 2\pi$ aralıklarında analitik ve yaklaşık çözümün üç-boyutlu resmi, sırasıyla, aşağıdaki gibidir :



Şekil 3.2.1. (3.2.19) denkleminin $-4 \leq x \leq 4$ ve $-\pi \leq t \leq 2\pi$ için analitik çözümünü gösteren yüzey.



Şekil 3.2.2. (3.2.19) denkleminin $-4 \leq x \leq 4$ ve $-\pi \leq t \leq 2\pi$ için yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.



3.2.1. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi

1834'de John Scott Russell tek dalga (Solitary wave)'yı, Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemiştir. Bu dalgayı "büyük dalga kayması" olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844'de "Dalgalar üzerine rapor (Report on Waves)" makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takiben, benzer dalgaların üretilmesiyle ilgili daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Russell, tek dalganın u hızı ve sonlu bir h derinliğindeki sıvının serbest yüzeyi üzerindeki maksimum a genişliği arasında

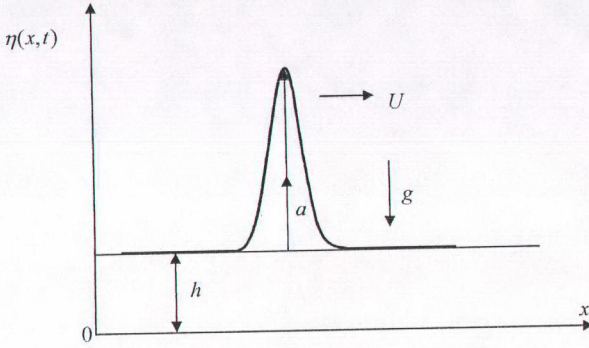
$$u^2 = g(h+a) \quad (3.2.26)$$

formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, G.B. Airy ve G.G. Stokes'in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Russell'in tek dalga hakkındaki yorumu, tek dalganın varlığı ve bu dalganın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870'lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871'de J.Boussinesq ve 1876'da Lord Rayleigh tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (3.2.26) formunda çıkarmışlardır. Gerçektende onlar tek dalga profilini (Şekil 3.2.3.), herhangi bir $a > 0$ için $z = \eta(x,t)$, $\beta^2 = 3a / \{4h^2(h+a)\}$ olmak üzere

$$\eta(x,t) = a \operatorname{sech}^2 \{ \beta(x - Ut) \} \quad (3.2.27)$$

çözümünü bulmuşlardır.





Şekil 3.2.3. Tek dalga (Solitary wave).

Bu yazarlar sadece $a \ll h$ olmak üzere geçerli olan sech^2 çözümünü bulmalarına rağmen, (3.2.27)'yi çözüm kabul eden herhangi bir diferensiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq, $c = \sqrt{gh}$ sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böyleleri uzun dalgalar için

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} \right] \quad (3.2.28)$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu denklem Boussinesq denklemi olarak bilinir ve bunun çözümünü

$$\eta(x,t) = a \text{sech}^2 \left[\left(3a/h^3 \right)^{1/2} (x \pm Ut) \right] \quad (3.2.29)$$

şeklinde bulmuştur. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1895'de D.J. Korteweg ve G.de Vries adındaki iki Hollanda'lı bilim adamı, Scott tarafından gözlemlenen olayın bir açıklamasını veren matematiksel bir model ortaya koyarak, ρ yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için, şimdi iyi bilenen,

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[\left(\varepsilon + \frac{3}{2} \eta \right) \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right] \quad (3.2.30)$$

denklemini elde etmişlerdir. Burada x , dalgayla hareket edecek şekilde seçilmiş koordinat sistemi, $c = \sqrt{gh}$ ve yüzey gerilimi $T \ll \frac{1}{3} g \rho h^2$ ihmal edildiğinde, ε küçük bir parametre olmak üzere

$$\sigma = h \left(\frac{h^2}{3} - \frac{T}{g \rho} \right) \approx \frac{1}{3} h^3 \quad (3.2.31)$$

biçimindedir. (3.2.30) denklemi KdV denklemi olarak bilinir. Bu tek dalgalar için lineer olmayan model denklemlerinin en basit ve faydalı olanlarından biri olup içerisindeki lineer olmayan terimin etkisinden dolayı dalga olayının uzun zaman yayılmasını göstermektedir. $\eta = \eta(x^*, t)$ ve $x^* = x + (\varepsilon/h)ct$ değişken değiştirmesi yapılmak suretiyle (3.2.30) denklemini

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left(\frac{3}{2} \eta \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right) \quad (3.2.32)$$

formunda yazmak mümkündür. Fermi, Pasta ve Ulam'ın 1955'de Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamada ki gelişmeler devam etmiştir. 1914'de Debye iddia ettiği: "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir". Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam'ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi-Pasta-Ulam (FPU)'nun tekrarlanan olayı olarak bilinir.

FPU'nun dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky'nin tekrarlananın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Gerçekten onlar, $\delta = \left(\frac{h}{l} \right)^2, l$ yay uzunluğu olmak üzere

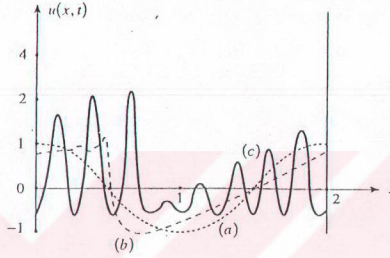


$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \quad (3.2.33)$$

formundaki iki periyotlu KdV denklemi için

$$u(x,0) = \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (3.2.34)$$

başlangıç şartını gözönüne almışlardır. Onların $\sqrt{\delta} = 0.022$ olarak yaptıkları sayısal çalışma pek çok yeni ve ilginç sonuçlar doğurmuştur (Şekil 3.2.4).



Şekil 3.2.4. Tek dalgaanın gelişmesi a) $t = 0$ 'daki başlangıç profili b) $t = \pi^{-1}$ 'deki profili c) $t = (3.6)\pi^{-1}$ 'deki dalga profili.

Başlangıç olarak onlar, negatif eğimli olduğu bölgelerdeki dalmış dalgaanın, δu_{xxx} saçılma terimi üzerindeki lineer olmayanlığın baskın etkisi sonucu olduğunu gözlemlediler. Sonraki zamanlarda sekiz tane iyi tanımlı dalga ile birlikte sech^2 dalgasına benzeyen dalgalar buldular. Bu dalgalardan uzun olanı daha hızlıdır ve diğer dalgaların üzerinden aşarak devam etmektedir. Dolayısıyla en dikkate değer olay bu dalgaanın lineer olmayan etkileşiminden sonra özelliklerini koruması ve başlangıç profilinin yeniden ortaya çıkmasıdır, yani FPU'nun tekrarlanan olayına oldukça yakın olmasıdır. Bu dalgaanın parçacık karakterlerinin yapısına benzerliği ve şeklinin korunması görüşü altında Kruskal ve Zabusky bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır. Tarihsel olarak, Kruskal ve Zabusky'nin 1965'deki meşhur makalesinde parçacık tipi nicelikleri belirlemek amacıyla bir isim olarak soliton kavramının doğuşunu vermişlerdir. Bundan sonra (Zabusky, 1967)'de iki solitonun gerçek fiziksel etkileşimini sayısal olarak göstermiş ve (Lax, 1968)'de KdV denklemi tarafından

yönlendirilen lineer olmayan etkileşim altında iki farklı çözümün korunduğunun zor bir analitik ispatını vermiştir. Fiziksel olarak iki farklı soliton, farklı genliklere (ve dolayısıyla farklı hızlara) sahip ve reel eksen üzerinde uzak olarak yerleşmişlerse sol taraftaki daha uzun (daha hızlı) dalga, kısa ve daha sağdaki (daha yavaş olan) dalgayı yakalayıp üzerinden aşarak devam eder. Bu olduğu zaman KdV denkleminde göre onlar lineer olmayan bir etkileşime uğrarlar ve sadece bir faz değişimli olarak etkileşimden tamamen şekil ve hız korunmalı olarak çıkarlar. Dolayısıyla bunlar dikkate değer iki özellik ortaya koyarlar. Bu özellikler:

i) Kararlı ve gelişen ani çözümler verir,

ii) Etkileşim sonucu dalgalar hızlarını ve şekillerini korur ve solitonun tanımını verir.

Daha sonra, (Gardner ve diğer., 1967, 1974) ve (Hirota, 1971, 1973a, 1973b) herhangi bir pozitif N tamsayısı için N -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri (Zabusky ve Galvin, 1971), (Hammack ve Segur, 1974) ve

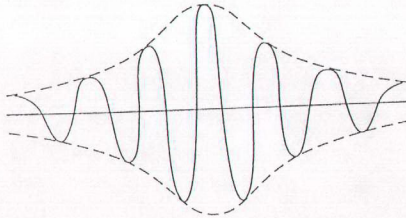
(Weidman ve Maxworthy, 1978) tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdilerde benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metot geliştirilmiştir (Hirota, 1980;

Ablowitz ve Segur, 1981; Ablowitz ve diğer., 1987; Ablowitz ve diğer., 1991; Drazin ve Johnson, 1993; Debnath, 1994; 1998). Son olarak aşağıdaki ifadeleri vermemiz uygun olacaktır. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir. KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü (solitary wave) genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminde başka denklemler için tek dalga çözümü sech^2 fonksiyonu olmayabilir, fakat sech veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer

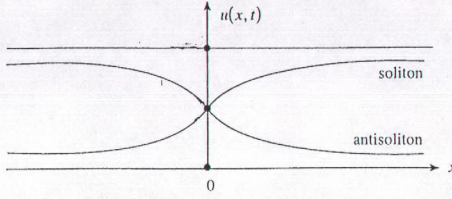
olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denklemi gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Gerçekten soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin, lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS), plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını tanımlar, NLS denklemi sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi daha sonra (Makhankov, 1978) yaptığı çalışmada bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir. Bir başka önemli model denklemi de Sine-Gordon (SG) denklemdir, bu denklemde elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemi ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.

Bizim buradaki amacımız ise KdV ve genişletilmiş KdV (MKdV) denklemlerinin var olan soliton çözümlerini ayrışım metodunu kullanarak bulmaya çalışmaktır. Ayrışım metodu yardımıyla soliton çözümlerinin bulunması ilk olarak Wazwaz (2001e; 2001f; 2001g; 2002; 2002a; 2002b) tarafından verilmiştir.

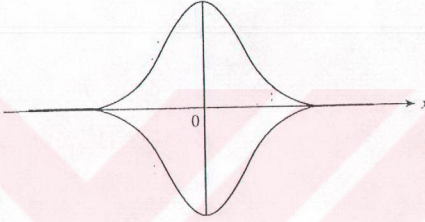
Şimdi yukarıda adı geçen birkaç solitonun şeklini verelim:



Şekil 3.2.5. Bir sarmal (envelope) soliton.



Şekil 3.2.6. Soliton veya antisoliton.



Şekil 3.2.7. Aynı eksene göre simetrik solitonlar (Breather solitonları).

3.2.2. KdV ve MKdV Denklemlerinin Soliton Çözümleri İçin Ayrışım Metodu

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = A \sec h^2(x/L), \end{cases} \quad (3.2.35)$$

ve

$$\begin{cases} v_t + v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \\ v(x,0) = A \sec h(x/L), \end{cases} \quad (3.2.36)$$

başlangıç şartlarıyla birlikte verilen, sırasıyla, KdV ve MKdV denklemlerini gözönüne alalım.

Burada KdV denklemleri için $L = \sqrt{2/A}$, $V = 2A$ ve MKdV denklemleri için de $L = 1/A$, $A = \sqrt{V}$ dir; L dalgalının genişliğini, A genişliğini ve V ise hızını tanımlar.

Öncelikle verilen (3.2.35) ve (3.2.36) denklemleri operator formunda yazılırsa

$$L_t u + 6(Nu) + L_{xxx} u = 0 \quad (3.2.37)$$

ve

$$L_t v + (Nv) + L_{xxx} v = 0 \quad (3.2.38)$$

olur. Burada

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad (3.2.39)$$

$$\begin{cases} Nu = uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ Nv = v^2 v_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \end{cases} \quad (3.2.40)$$

dır. (3.2.37) ve (3.2.38) denklemlerinin her iki tarafına L_t^{-1} invers operatörü uygulanırsa, başlangıç şartları ve ayrışım metodunun çözüm serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = A \sec h^2(x/L) - 6L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) - L_t^{-1} L_{xxx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \quad (3.2.41)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) = A \sec h(x/L) - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) - L_t^{-1} L_{xxx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \quad (3.2.42)$$

bulunur. Burada L_t^{-1} , 0'dan t'ye alınan tek-katlı integraldir, A_n ve B_n polinomları ise Adomian polinomlarıdır ve (2.3.23) formülü ile tanımlanmıştır. Böylece (3.2.35) ve (3.2.36) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\begin{cases} u_0(x, t) = A \sec h^2(x/L), \\ u_{n+1}(x, t) = -6L_t^{-1}(A_n) - L_t^{-1} L_{xxx}(u_n) \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.43)$$

$$\begin{cases} v_0(x, t) = A \sec h(x/L), \\ v_{n+1}(x, t) = -L_t^{-1}(B_n) - L_t^{-1} L_{xxx}(v_n) \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (3.2.44)$$

indirgeme ilişkileriyle elde edilir. (3.2.43) ve (3.2.44) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= A \sec h^2(x/L) = 4A \frac{e^{2x/L}}{(1 + e^{2x/L})^2}, \\ u_1(x, t) &= -32A e^{2x/L} \frac{[1 - 4e^{2x/L} + (e^{2x/L})^2 + 6L A e^{2x/L} + 6L^2 A e^{2x/L}]}{L^3(1 + e^{2x/L})^4}, \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

ve

$$v_0(x,t) = A \operatorname{sech}(x/L) = 2A \frac{e^{x/L}}{(1+e^{2x/L})},$$

$$v_1(x,t) = 2A e^{x/L} (e^{2x/L} - 1) \frac{[4L^2 A (e^{2x/L})^2 + (e^{2x/L})^2 - 22e^{2x/L} + 1]}{L^3 (1+e^{2x/L})^4} t, \quad (3.2.46)$$

bulunur. Buradan seri formundaki çözümler aşağıdaki formda

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \dots = 4A \frac{e^{2x/L}}{(1+e^{2x/L})^2}$$

$$- 32A e^{2x/L} \frac{[1 - 4e^{2x/L} + (e^{2x/L})^2 + 6L A e^{2x/L} + 6L^2 A e^{2x/L}]}{L^3 (1+e^{2x/L})^4} t + \dots \quad (3.2.47)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t) + \dots = 2A \frac{e^{x/L}}{(1+e^{2x/L})}$$

$$+ 2A e^{x/L} (e^{2x/L} - 1) \frac{[4L^2 A (e^{2x/L})^2 + (e^{2x/L})^2 - 22e^{2x/L} + 1]}{L^3 (1+e^{2x/L})^4} t + \dots \quad (3.2.48)$$

şeklinde elde edilir. (3.2.35) ve (3.2.36) denklemlerinin analitik çözümü ise

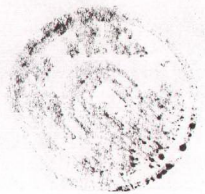
$$u(x,t) = A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-Vt}{L}\right) = 4A \frac{e^{(2x-2Vt)/L}}{(1+e^{(2x-2Vt)/L})^2} \quad (3.2.49)$$

ve

$$v(x,t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{x-Vt}{L}\right) = 2A \frac{e^{(x-Vt)/L}}{(1+e^{(2x-2Vt)/L})} \quad (3.2.50)$$

dir.

KdV ve MKdV denklemleri için elde edilen hata miktarları, sırasıyla, aşağıdaki tabloda verilmiştir.



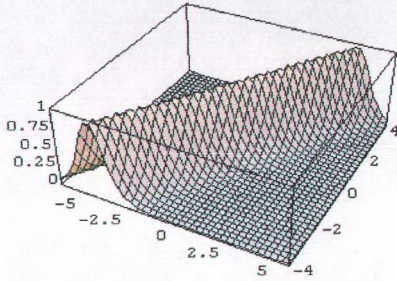
t	u_{Hata}	v_{Hata}
0.01	1.273E-11	5.0E-14
0.02	2.546E-11	1.0E-13
0.03	3.819E-11	1.5E-13
0.04	5.092E-11	2.0E-13
0.05	6.365E-11	2.5E-13
0.06	7.637E-11	3.0E-13
0.07	8.910E-11	3.5E-13
0.08	1.018E-10	4.0E-13
0.09	1.146E-10	4.5E-13
0.10	1.273E-10	5.0E-13

Tablo 3.2.2. (3.2.35) ve (3.2.36) denklemleri için elde edilen mutlak hatalar.

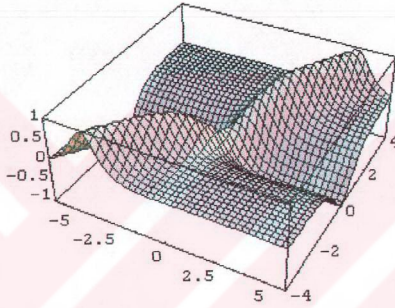
Tablo 3.2.2.'de, sırasıyla, u için $A = 10^{-4}$ ve v için $A = 10^{-2}$ alınarak $t = 0.01, \dots, 0.10$ değerlerine karşılık gelen hata miktarları bulunmuştur ($x = 0.01$). Yalnız iki iterasyonun kullanılmasıyla elde edilen hata miktarları $\%10^{-9}$ ve $\%10^{-12}$ 'den daha azdır. Metot yüksek hızlı bir yakınsaklığa sahiptir. Diğer metotlarla bu tür denklemler bir dönüşüm yardımıyla daha basit bir hale dönüştürüldükten sonra çözüm yapılırken bizim sunduğumuz metotla herhangi bir dönüşüm kullanılmadan ve karmaşık hesaplamalar yapılmadan daha hassas sonuçlar elde etmek mümkündür.

KdV ve MKdV denklemlerine ait ilgili şekiller ve grafikler aşağıdaki gibidir :

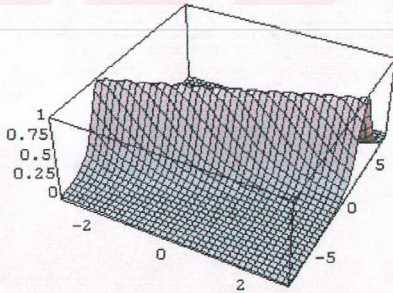




Şekil 3.2.8. $-6 \leq x \leq 6$ ve $-4 \leq t \leq 4$ için u 'nun analitik çözümünü gösteren yüzey.

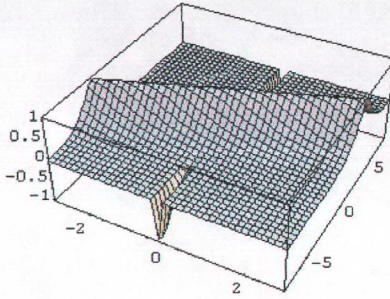


Şekil 3.2.9. $-6 \leq x \leq 6$ ve $-4 \leq t \leq 4$ için u 'nun hata çözümünü gösteren yüzey.

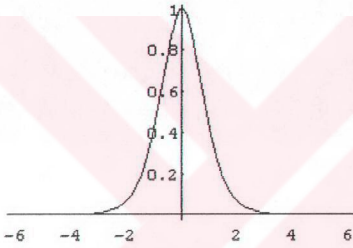


Şekil 3.2.10. $-3 \leq x \leq 3$ ve $-8 \leq t \leq 8$ için v 'nin analitik çözümünü gösteren yüzey.

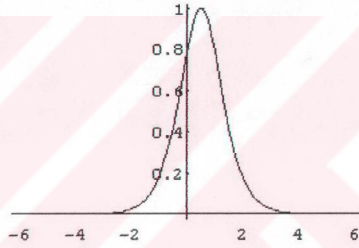




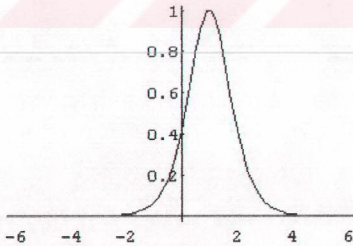
Şekil 3.2.11. $-3 \leq x \leq 3$ ve $-8 \leq t \leq 8$ için v 'nin hata çözümünü gösteren yüzey.



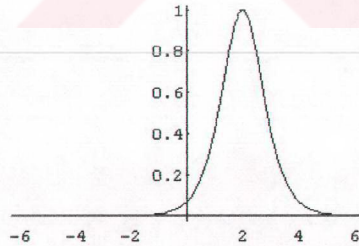
(a)



(b)

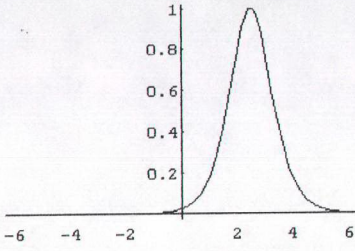


(c)

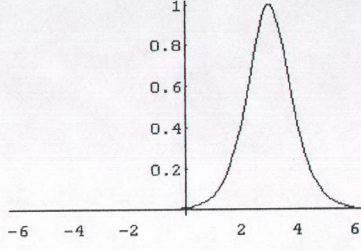


(d)



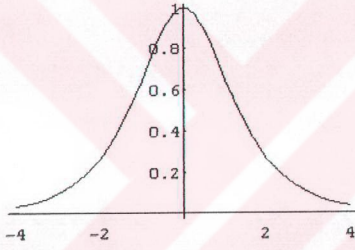


(e)

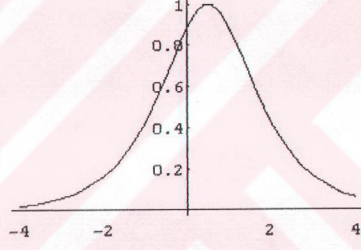


(f)

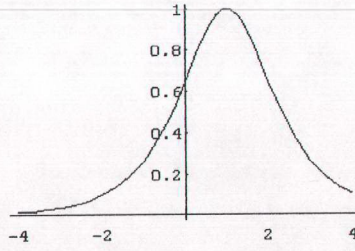
Şekil 3.2.12. KdV denklemi için elde edilen tek dalga çözümlerinin grafiği, sırasıyla $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ alınmıştır.



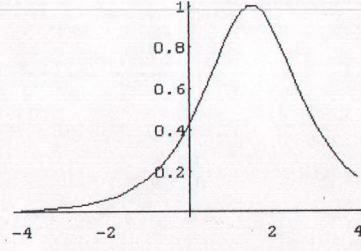
(a)



(b)

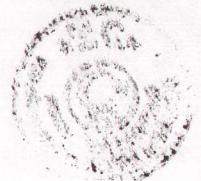


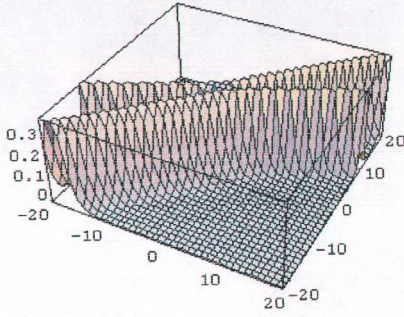
(c)



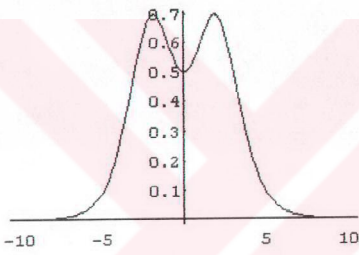
(d)

Şekil 3.2.13. MKdV denklemi için elde edilen tek dalga çözümlerinin grafiği, sırasıyla $t = 0, 0.5, 1, 1.5$ alınmıştır.

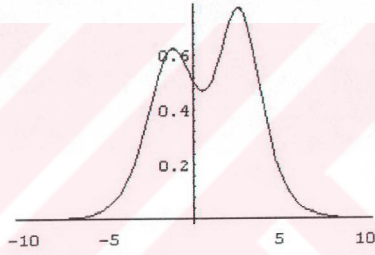




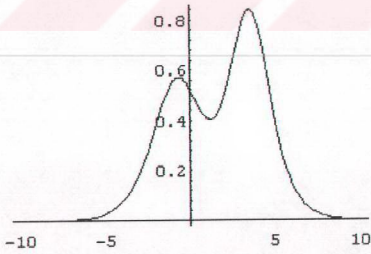
Şekil 3.2.14. KdV denklemi için iki soliton çözümünü gösteren yüzey.



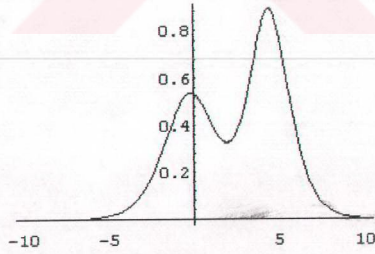
(a)



(b)

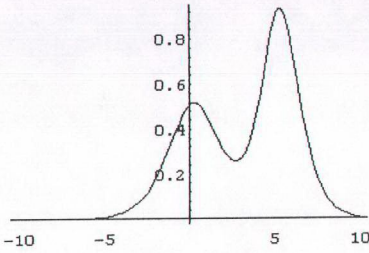


(c)

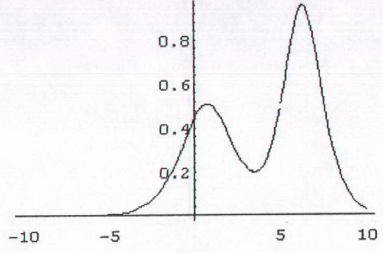


(d)



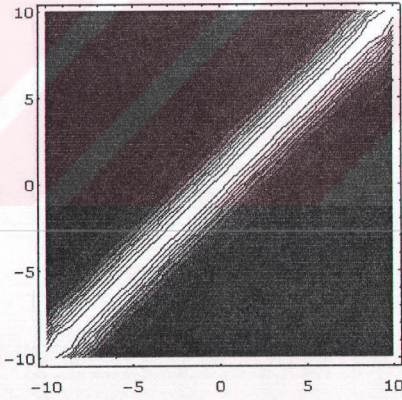


(c)



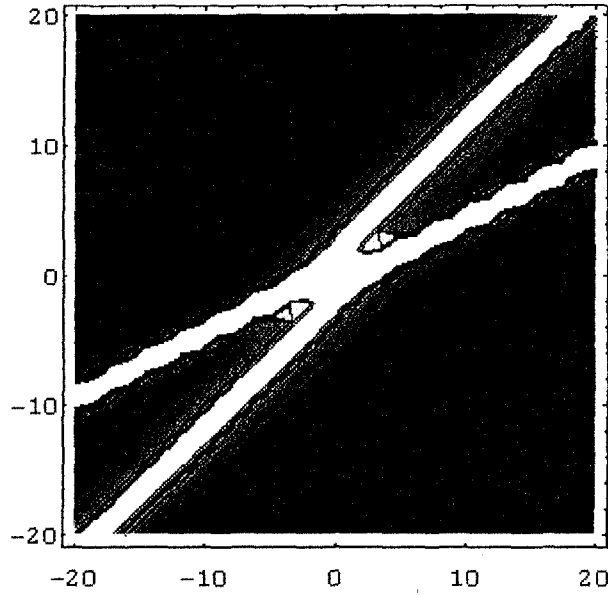
(f)

Şekil 3.2.15. *KdV denklemleri için t zamanının değışmesiyle iki-solitonun hareketini gösteren şekil, sırasıyla $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ alınmıştır.*



Şekil 3.2.16. *KdV denkleminin tek soliton çözümünün dış hat çizgileri.*





Şekil 3.2.17. KdV denkleminin iki soliton çözümünün dış hat çizgileri.

3.3. GENEL DURUMLARDA AYRISIM METODUNUN YAKINSAKLIĞI

Metodun yakınsaklığını göstermek için pek çok çalışma; Cherruault (1989), Cherruault ve diğer.(1992), Gabet (1992), Guellal ve Cherruault (1994) tarafından yapılmıştır. Fakat daha sonra Cherruault ve ekibi çözüm serisinin yakınsaklığını direkt olarak ispatlamışlardır (Abbaoui ve Cherruault, 1994; Cherruault ve diğer., 1995; Abbaoui ve Cherruault, 1995; Himoun ve diğer., 1999; Khelifa ve diğer., 2000; Abbaoui ve diğer., 2001). Guellal ve Cherruault (1994) tarafından yapılan çalışmada pratikte ispatlanması zor olan lineer olmayan operatörün üzerindeki hipotezlerle çözüm serisinin yakınsaklığı gösterilmiştir.

(Cherruault, 1989; Cherruault ve diğer., 1992)'deki çalışmalarda yazarlar gerek sabit nokta teoremini kullanarak gerekse yerine koyulmuş serinin özelliklerini kullanarak metodun yakınsaklığını ispatlamaya çalışmışlardır. Ayrışım metodunun yakınsaklığını ispatlamak için kanıtlanması kolay hipotezler Yves Cherruault ve Karim Abbaoui'nin çalışmalarıyla ortaya konmuştur. Bu bölümde yakınsaklığın çok genel bir ispatı ve Adomian polinomlarının hesaplanması için basit ve pratik bir kaç formül daha verilecektir. Bu formüller birinci terim olan u_0 fonksiyonu ile çözüm serisinin ifade edilmesini sağlayacak ve bu ise çözüm serisinin yakınsaklığını direkt olarak ispatlamamızı mümkün kılacaktır.

$$u - Nu = f ,$$

(3.3.1)

fonksiyonel denklemini gözönüne alalım, burada N , H Hilbert uzayında lineer olmayan bir operatör ve f 'de bilinen bir fonksiyon olsun. H Hilbert uzayında sabit f için bir tek u çözümünün $\sum u_n$ ile verildiğini varsayalım. Ayrışım metodu çözümü

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i, \quad (3.3.2)$$

terimlerini aramaktan ibarettir. Lineer olmayan bir N operatörü

$$N(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, \quad (3.3.3)$$

şeklinde seriye ayrıştırılmıştır. Burada A_i 'ler Adomian polinomları olarak adlandırılır ve (3.3.4)'deki ilişkilerle elde edilir.

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i, N(v) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n, \quad (3.3.4)$$

olmak üzere, A_n 'ler (Adomian tarafından sunulan) temel formül sayesinde

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) \right]_{\lambda=0} \quad (3.3.5)$$

ile bulunabilir. (3.3.2) ve (3.3.3) ifadeleri (3.3.1)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = \sum_{i=0}^{\infty} A_i + f \quad (3.3.6)$$

elde edilir. u_i 'ler ise

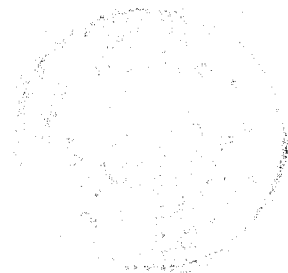
$$\begin{cases} u_0 = f, \\ u_1 = A_0, \\ \vdots \\ u_n = A_{n-1}, n \geq 1, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

formülleri kullanılarak hesaplanabilir. Böylece (3.3.7)'deki formül, çözüm serisinin bütün terimlerini belirlememizi sağlar.

$\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisinin yakınsaklığını ispatlamak için $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ serisindeki yakınsaklığın ispatlanması gerekli ve yeterlidir.

Teorem 3.3.1. (Seng ve diğer., 1996)

A_n 'ler



$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_n = \sum_{p_1 + \dots + np_n = n} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} N^{(p_1 + \dots + p_n)}(u_0)(u_{1[p_1]}, \dots, u_{n[p_n]}) \end{cases} \quad (3.3.8)$$

formülüyle verilir, burada $u_{1[p_k]} = \underbrace{(u_1, \dots, u_1)}_{p_k\text{-kez}}$ dir.

Teorem 3.3.2. (Seng ve diğer., 1996)

Adomian polinomları aşağıdaki formüllerle tanımlanmıştır,

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_n = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} \frac{1}{p_1! \dots p_k!} N^{(k)}(u_0)(u_{p_1}, \dots, u_{p_k}), n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Sonuç 3.3.1. (Seng ve diğer., 1996)

A_n 'ler

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0), \\ A_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ p_1 + \dots + np_n = n}} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} N^{(k)}(u_0)(u_{1[p_1]}, \dots, u_{n[p_n]}) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç 3.3.1 kullanılarak A_n 'lerin $n = 0, 1, \dots, 5$ için aşağıdaki şekilde basit bir listesini yapmak mümkündür.

$$\begin{aligned} A_0 &= N(u_0), \\ A_1 &= N'(u_0)(u_1), \\ A_2 &= \frac{1}{2!} N''(u_0)(u_1, u_1) + N(u_0)(u_2), \\ A_3 &= \frac{1}{3!} N'''(u_0)(u_{1[3]}) + N''(u_0)(u_1, u_2) + N'(u_0)(u_3), \\ A_4 &= \frac{1}{4!} N^{(4)}(u_0)(u_{1[4]}) + \frac{1}{3!} N^{(3)}(u_0)(u_{1[2]}, u_2) + \frac{1}{2!} N''(u_0)(u_{2[2]}) \\ &\quad + N'(u_0)(u_4), \\ A_5 &= \frac{1}{5!} N^{(5)}(u_0)(u_{1[5]}) + \frac{1}{3!} N^{(4)}(u_0)(u_{1[3]}, u_2) + \frac{1}{2!} N^{(3)}(u_0)(u_1, u_{2[2]}) \\ &\quad + N''(u_0)(u_1, u_4) + N'(u_0)(u_5), \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Teorem 3.3.3. (Abbaoui, 1995)

$\forall n \in N$ için $\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M$ olsun. Bu takdirde

$$\|F_n(N(u_0), \dots, N^{(n)}(u_0))\| \leq \exp(n+1)M^{n+1} \quad (3.3.12)$$

olacak şekilde $\exists F_n(N(u_0), \dots, N^{(n)}(u_0))$ vardır.

Teorem 3.3.4. (Khelifa ve Cherruault, 2000)

Kabul edelim ki $\forall k \in N$ ve $M < \exp(-1)$ için $\|N^{(k)}(u_0)\| \leq M$ olsun. Bu takdirde ayrışım serisinin kesme hatası

$$\|u - \varphi\| \leq \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} \frac{M^{k+1}}{(1 - M \exp(1))} \quad (3.3.13)$$

formülü ile verilir.

Teorem 3.3.5.

Kabul edelim ki N lineer olmayan operatörü

$$\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M \leq 1/e \quad (3.3.14)$$

şartını sağlasın. Bu takdirde $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi mutlak yakınsaktır ve

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq \frac{1}{n!} M \quad (3.3.15)$$

dir.

İspat:

Adomian tarafından verilen

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n}{du^n} N^{(n+1)}(u_0)$$

formül kullanılırsa,

$$n=0 \text{ için } A_0 = N'(u_0) \Rightarrow \|A_0\| \leq \|N'(u_0)\| \leq M,$$

$$n=1 \text{ için } A_1 = \frac{1}{2!} (N^2(u_0))' \Rightarrow \|A_1\| \leq \frac{1}{2!} \|N^{(3)}(u_0)\| \leq \frac{1}{2!} M,$$

$$n=2 \text{ için } A_2 = \frac{1}{3!} (N^{(3)}(u_0))^{(2)} \Rightarrow \|A_2\| \leq \frac{1}{3!} \|N^{(3)}(u_0)\| \leq \frac{1}{3!} M,$$

ve bu şekilde devam edilerek n için

$$A_n = \frac{1}{n!} (N^{(n+1)}(u_0))^{(n)} \Rightarrow \|A_n\| \leq \frac{1}{n!} \|N^{(n+1)}(u_0)\| \leq \frac{1}{n!} M,$$

sonucu bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.3.6.

Kabul edelimki u için N analitik bir fonksiyon ve $\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M, M > 0$ olsun. Bu takdirde Adomian polinomları için

$$\|A_{n+1}\| \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} M \quad (3.3.16)$$

olur, bu ise Adomian metodunun yakınsaklığı için yeterlidir.

İspat:

Adomian polinomları Taylor seri metodunun bir genellemesi olduğundan

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u-u_0)^n}{n!} N^{(n)}(u_0)$$

şeklinde yazılabilir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u-u_0)^n}{n!}$ kuvvet serisi $\forall u \in R$ için yakınsaktır. $|u-u_0| \leq R$ alırsak

$$n=1 \text{ için } A_1 = (u-u_0)N'(u_0) \Rightarrow \|A_1\| \leq \|u-u_0\| \|N'(u_0)\| \leq RM,$$

$$n=2 \text{ için } A_2 = \frac{(u-u_0)^2}{2!} N''(u_0) \Rightarrow \|A_2\| \leq \left\| \frac{(u-u_0)^2}{2!} \right\| \|N''(u_0)\| \leq \frac{R^2}{2!} M,$$

ve böyle devam edilecek olursa $n+1$ için

$$A_{n+1} = \frac{(u-u_0)^{n+1}}{(n+1)!} N^{(n+1)}(u_0) \Rightarrow \|A_{n+1}\| \leq \left\| \frac{(u-u_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right\| \|N^{(n+1)}(u_0)\| \leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

IV. BÖLÜM

4.1. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNE AYRIŞIM METODUNUN UYGULANMASI

Bu bölümde, diferensiyel denklem sistemlerine ayrışım metodunun uygulanmasını vereceğiz ve bu sonuçları lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem sistemlerinde ve birleştirilmiş (coupled) lineer olmayan Schrödinger denkleminin analitik çözümünü elde etmede kullanacağız.

$$\begin{cases} L_t u + L_x u + N_1(u, v) = F_1, \\ L_t v + L_x v + N_2(u, v) = F_2, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau_1(x), u(x_1, t) = \zeta_1(t), \\ u_t(x, 0) &= \tau_2(x), u(x_2, t) = \zeta_2(t), \\ v(x, 0) &= \sigma_1(x), v(x_1, t) = \eta_1(t), \\ v_t(x, 0) &= \sigma_2(x), v(x_2, t) = \eta_2(t) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

şeklindeki başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen, (4.1.1)'deki operatör formunda yazılmış kısmi diferensiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Burada L_t ve L_x ikinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel operatörler, N_1 ve N_2 lineer olmayan operatörler ve F_1, F_2 homojen olmayan terimlerdir.

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.1.3)$$

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt. \quad (4.1.4)$$

(4.1.1) sisteminin her iki tarafına (4.1.4) ile verilen L_t^{-1} invers operatörü uygulanır ve (4.1.2)

ile verilen başlangıç şartları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tau_1(x) + t \tau_2(x) + L_t^{-1}(F_1) - L_t^{-1} L_x(v) - L_t^{-1}[N_1(u, v)], \\ v(x, t) &= \sigma_1(x) + t \sigma_2(x) + L_t^{-1}(F_2) - L_t^{-1} L_x(u) - L_t^{-1}[N_2(u, v)], \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

bulunur. Böylece $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri ayrışım metodunda

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \\ v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t), \end{cases} \quad (4.1.6)$$

formunda ve lineer olmayan $N_1(u,v)$ ve $N_2(u,v)$ operatörleri de

$$\begin{cases} N_1(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\ N_2(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

şeklinde sonsuz seri formunda yazılabilir. Burada $u_n(x,t)$ ve $v_n(x,t), n \geq 0$ için, sırasıyla, $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümlerinin daha sonra belirtilecek terimleri ve $A_n, \tilde{A}_n$ ise Adomian polinomlarıdır.

(4.1.6) ve (4.1.7) ifadeleri (4.1.5)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) &= \tau_1(x) + t \tau_2(x) + L_t^{-1}(F_1) - L_t^{-1} L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) - L_t^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right], \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) &= \sigma_1(x) + t \sigma_2(x) + L_t^{-1}(F_2) - L_t^{-1} L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - L_t^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \right], \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

bulunur. Böylece, (4.1.8) denkleminde $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri;

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \tau_1(x) + t \tau_2(x) + L_t^{-1}(F_1), \\ u_{n+1}(x,t) = -L_t^{-1} L_x(v_n) - L_t^{-1}[A_n], n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{cases} v_0(x,t) = \sigma_1(x) + t \sigma_2(x) + L_t^{-1}(F_2), \\ v_{n+1}(x,t) = -L_t^{-1} L_x(u_n) - L_t^{-1}[\tilde{A}_n], n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.10)$$

indirgeme ilişkileriyle hesaplanır.

Ayrışım metodunun temel özelliği $u_0(x,t)$ ve $v_0(x,t)$ terimleri belirlendikten sonra bu terimlere bağlı olarak (u_1, v_1) terimleri belirlenir ve böylece (4.1.9) ve (4.1.10) indirgeme ilişkileriyle $(u_n, v_n), n \geq 2$ için diğer terimler hesaplanır.

Diğer taraftan diferensiyel denklem sistemlerinin ayrışım metoduyla çözümüne ilişkin farklı bir yaklaşım Abbaoui ve diğer. (1995) tarafından sunulmuştur.



Şimdi sistemler için sunduğumuz bu analiz metoduyla ilgili olarak lineer ve lineer olmayan birer örnek verelim :

Örnek 4.1.1.

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin x, \\ v(x,0) = \cos x, \end{cases} \quad (4.1.11)$$

başlangıç şartıyla verilen

$$\begin{cases} u_t + v_{xxx} - (u + v) = 0, \\ v_t + u_{xxx} + u + v = 0, \end{cases} \quad (4.1.12)$$

şeklindeki lineer sistemi gözönüne alalım. Bu sistem için (4.1.9) ve (4.1.10)'daki indirgeme ilişkileri

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x,t) = \sin x, \\ u_{n+1}(x,t) = -L_t^{-1} L_x(v_n) + L_t^{-1}(u_n + v_n), n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.13)$$

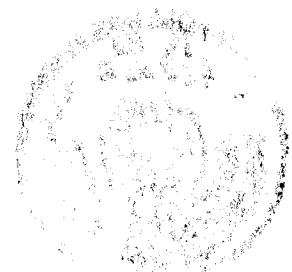
$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x,t) = \cos x, \\ v_{n+1}(x,t) = -L_t^{-1} L_x(u_n) - L_t^{-1}(u_n + v_n), n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.14)$$

formunda yazılır. Burada

$$L_t = \frac{\partial}{\partial x}, L_x = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad (4.1.15)$$

dir. $u_0(x,t)$ ve $v_0(x,t)$ terimleri belli olduğu için (4.1.13) ve (4.1.14) indirgeme ilişkileri kullanılarak diğer terimler

$$\begin{aligned} u_1 &= -L_t^{-1} L_x(v_0) + L_t^{-1}(u_0 + v_0) = t \cos x, \\ v_1 &= -L_t^{-1} L_x(u_0) - L_t^{-1}(u_0 + v_0) = -t \sin x, \\ u_2 &= -L_t^{-1} L_x(v_1) + L_t^{-1}(u_1 + v_1) = -\frac{t^2}{2!} \sin x, \\ v_2 &= -L_t^{-1} L_x(u_1) - L_t^{-1}(u_1 + v_1) = -\frac{t^2}{2!} \cos x, \\ u_3 &= -L_t^{-1} L_x(v_2) + L_t^{-1}(u_2 + v_2) = -\frac{t^3}{3!} \cos x, \\ v_3 &= -L_t^{-1} L_x(u_2) - L_t^{-1}(u_2 + v_2) = \frac{t^3}{3!} \sin x, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$



şeklinde bulunur. Burada (4.1.6) denklemini kullanılırsa

$$\begin{cases} u(x,t) = \sin x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) + \cos x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) \\ v(x,t) = \cos x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) - \sin x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) \end{cases} \quad (4.1.17)$$

olur. Bu açılım ise

$$\begin{cases} u(x,t) = \sin(x+t), \\ v(x,t) = \cos(x+t), \end{cases} \quad (4.1.18)$$

ifadesinin kapalı formudur.

Sayısal hesaplamalar için ϕ_n 'nin n-terim yaklaşımı kullanılarak $u(x,t)$ 'nin yaklaşık çözümü

$$u(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \text{ ve } \phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x,t) \quad (4.1.19)$$

veya

$$\begin{cases} \phi_1 = u_0, \\ \phi_2 = u_0 + u_1, \\ \vdots \\ \phi_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.20)$$

ifadesiyle bulunabilir. Benzer olarak φ_n 'nin n-terim yaklaşımı kullanılarak $v(x,t)$ 'nin yaklaşık çözümü de

$$v(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \text{ ve } \varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x,t) \quad (4.1.21)$$

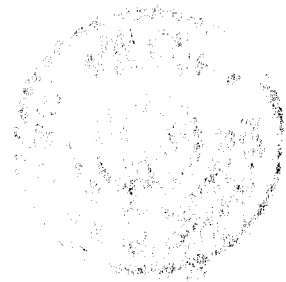
veya

$$\begin{cases} \varphi_1 = v_0, \\ \varphi_2 = v_0 + v_1, \\ \vdots \\ \varphi_{n+1} = v_0 + v_1 + \dots + v_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.22)$$

formuyla elde edilir. Yaklaşımın hatası

$$Hata = | \text{Analitik Çözüm} - \text{Yaklaşık Çözüm} |$$

formülü ile hesaplanır.



Bununla ilgili tablolar aşağıdaki gibidir :

x, t	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.1	0.198669330795061	0.198669330795061	0.000E+00
0.2	0.389418342308651	0.389418342308657	6.051E-15
0.3	0.564642473395035	0.564642473395558	5.288E-13
0.4	0.717356090899523	0.717356090911729	1.221E-11
0.5	0.841470984807897	0.841470984947391	1.395E-10

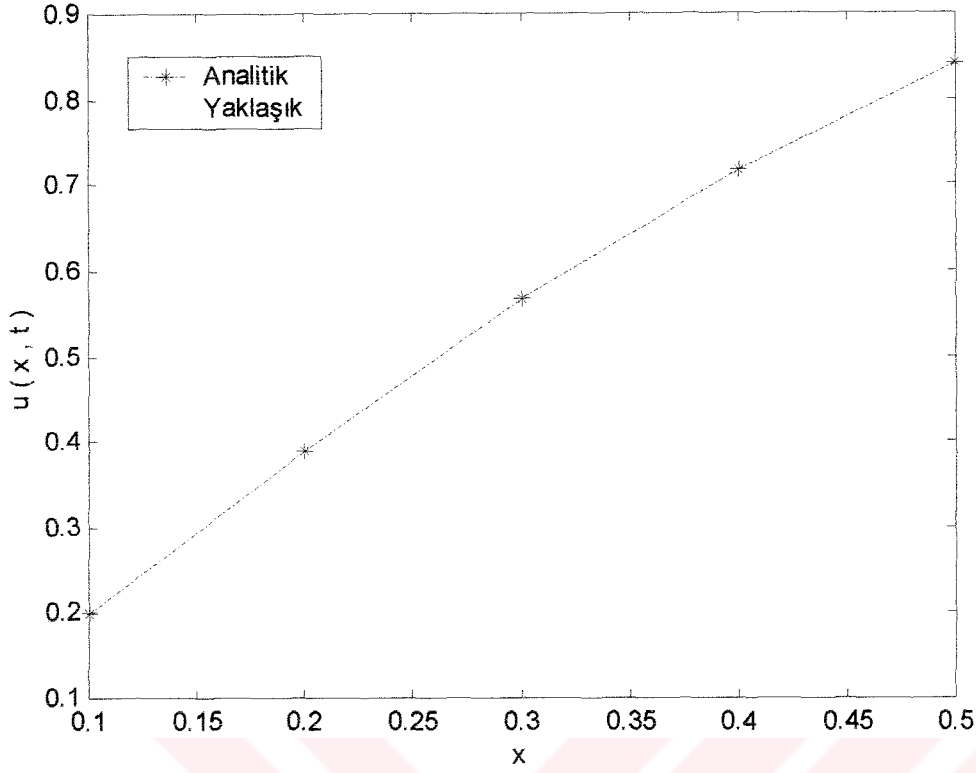
Tablo 4.1.1. $u(x,t)$ denklemi için sayısal sonuçlar.

x, t	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.1	0.980066577841242	0.980066577841242	0.000E+00
0.2	0.921060994002885	0.921060994002913	2.753E-14
0.3	0.825335614909678	0.825335614911219	1.541E-12
0.4	0.696706709347165	0.696706709373339	2.617E-11
0.5	0.540302305868140	0.540302306098008	2.299E-10

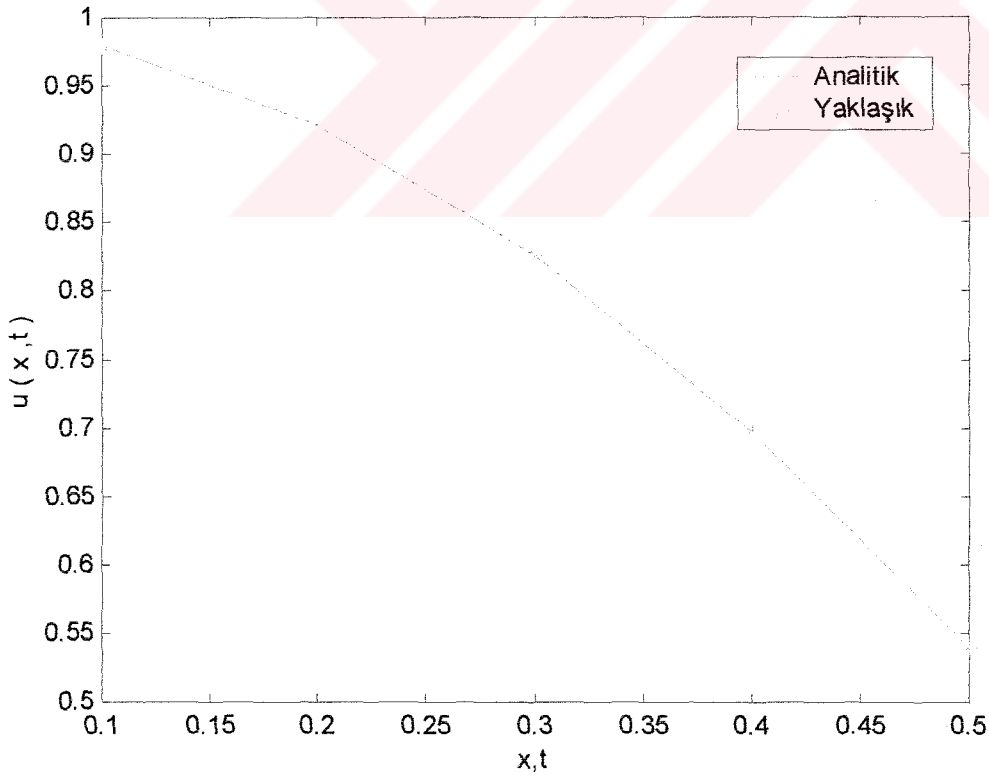
Tablo 4.1.2. $v(x,t)$ denklemi için sayısal sonuçlar.

Tablo 4.1.1 ve 4.1.2’de $n = 6$ için (ϕ_6) yaklaşık çözümü alınarak elde edilen analitik, yaklaşık çözüm ve son kolonda da hata miktarı görülmektedir. Yalnız altı iterasyon yapılarak elde edilen hata miktarları u ve v için $\%10^{-9}$ ‘dan daha küçüktür. Daha iyi sonuçlar elde etmek isteniyorsa (4.1.17)’deki yaklaşık çözüme yeni terimler eklenmesi gerekir. x ve t değerleri sıfıra yaklaştıkça hata miktarı küçülmekte, sıfırdan uzaklaştıkça hata miktarı büyümektedir.

Tablo 4.1.1 ve 4.1.2 kullanılarak elde edilen grafikler, sırasıyla, aşağıdaki gibidir :



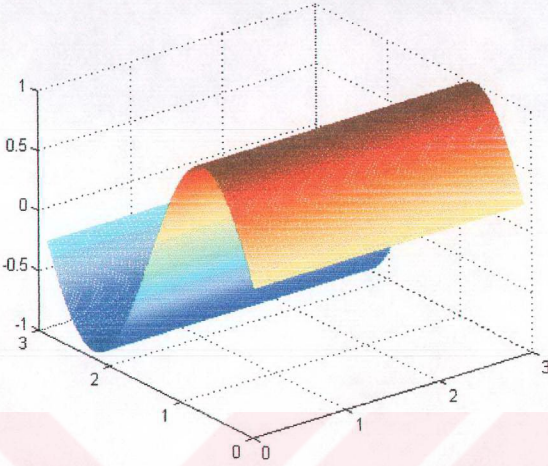
Şekil 4.1.1. $u(x,t)$ fonksiyonu için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.



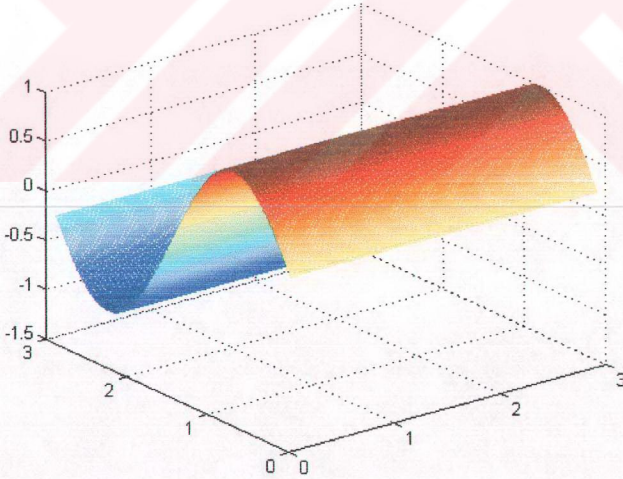
Şekil 4.1.2. $v(x,t)$ fonksiyonu için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

Örnek 4.1.1 ile ilgili şekiller aşağıdaki gibidir :



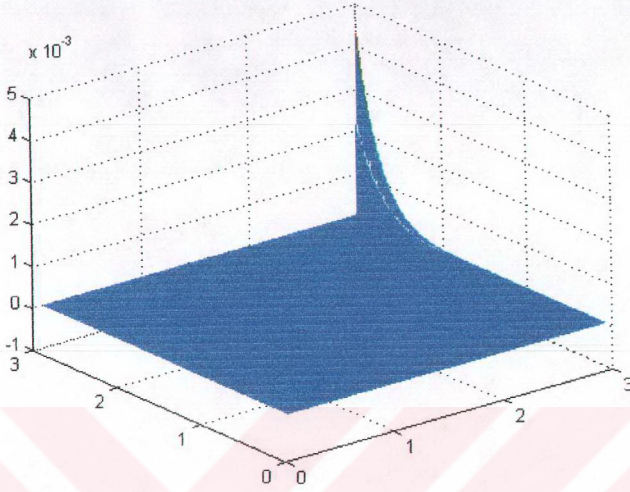


Şekil 4.1.3. $u(x,t)$ fonksiyonunun analitik çözümünü gösteren yüzey.

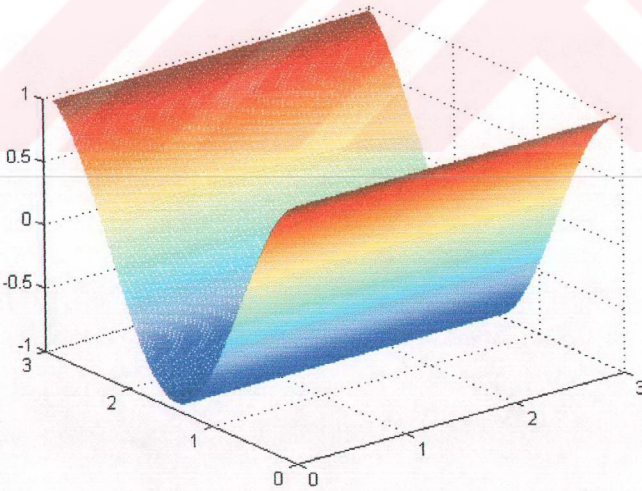


Şekil 4.1.4. $u(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.



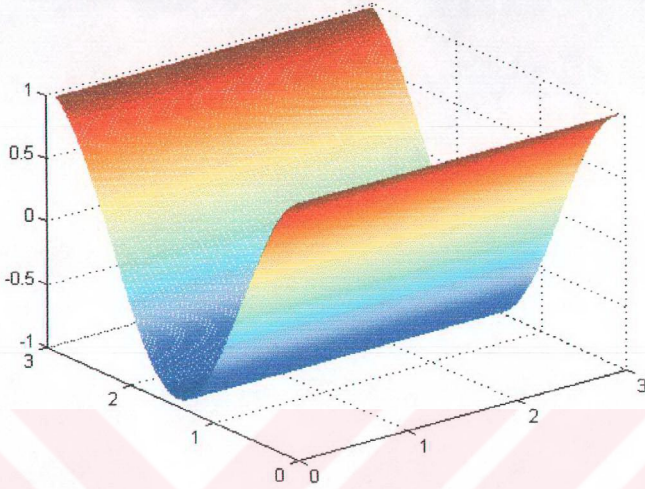


Şekil 4.1.5. $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.

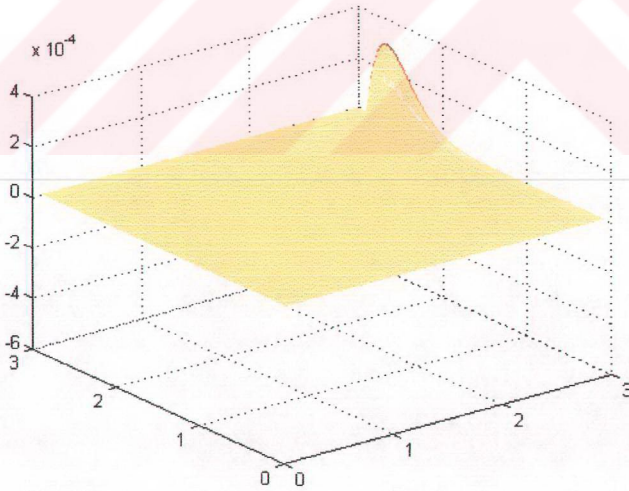


Şekil 4.1.6. $v(x,t)$ fonksiyonunun analitik çözümünü gösteren yüzey.





Şekil 4.1.7. $v(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünü gösteren yüzey.



Şekil 4.1.8. $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.



Örnek 4.1.2.

$$\begin{cases} u(x, y, 0, p) = e^{x+y-p} = u_t(x, y, 0, p), \\ v(x, y, 0, p) = e^{x+y+p}, \\ v_t(x, y, 0, p) = -e^{x+y+p}, \\ w(x, y, 0, p) = e^{-y+p} = w_t(x, y, 0, p), \\ z(x, y, 0, p) = e^{-x+y+p} = z_t(x, y, 0, p), \end{cases} \quad (4.1.23)$$

başlangıç şartlarıyla

$$\begin{aligned} u_{tt} + v_x w_y z_p + v_p w_x z_y - u &= 0 \\ v_{tt} + z_x u_y w_p - z_p u_x w_y - v &= 0 \\ w_{tt} - u_x z_y v_p + u_p z_x v_y - w &= 0 \\ z_{tt} + w_x v_y u_p + w_p v_x u_y - z &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

formundaki lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi verilsin. (4.1.24) denklemi operatör formunda yazılıp her iki tarafa (4.1.4)'teki L_t^{-1} invers operatörü uygulanır ve (4.1.23)'teki başlangıç şartları kullanılırsa

$$\begin{cases} u(x, y, t, p) = e^{x+y-p} (1+t) + L_t^{-1} (u - v_x w_y z_p - v_p w_x z_y), \\ v(x, y, t, p) = e^{x+y+p} (1-t) + L_t^{-1} (v - z_x u_y w_p + z_p u_x w_y), \\ w(x, y, t, p) = e^{-y+p} (1+t) + L_t^{-1} (w + u_x z_y v_p - u_p z_x v_y), \\ v(x, y, t, p) = e^{-x+y+p} (1+t) + L_t^{-1} (z - w_x v_y u_p - w_p v_x u_y), \end{cases} \quad (4.1.25)$$

bulunur. (4.1.25) ifadesindeki lineer ve lineer olmayan terimler ayrılırsa

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t, p) = e^{x+y-p} (1+t) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, y, t, p) = e^{x+y+p} (1-t) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, y, t, p) = e^{-y+p} (1+t) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x, y, t, p) = e^{-x+y+p} (1+t) + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n - \sum_{n=0}^{\infty} D_n - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n \right), \end{cases} \quad (4.1.26)$$

elde edilir. Burada



$$\begin{aligned}
v_x w_y z_p &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \\
v_p w_x z_y &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n, \\
z_x u_y w_p &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \\
z_p u_x w_y &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n, \\
u_x z_y v_p &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \\
u_p z_x v_y &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n, \\
w_x v_y u_p &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \\
w_p v_x u_y &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n,
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Adomian polinomlarıdır. Wazwaz (2000) tarafından sunulan algoritma bu polinomların elde edilğinde kullanılırsa, $v_x w_y z_p$ ve $v_p w_x z_y$ gibi lineer olmayan terimler için Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
A_0 &= v_{0_x} w_{0_y} z_{0_p}, \\
A_1 &= v_{0_x} w_{1_y} z_{0_p} + v_{1_x} w_{0_y} z_{0_p} + v_{0_x} w_{0_y} z_{1_p}, \\
A_2 &= v_{1_x} w_{1_y} z_{0_p} + v_{0_x} w_{2_y} z_{0_p} + v_{2_x} w_{0_y} z_{0_p} + v_{0_x} w_{1_y} z_{1_p} \\
&\quad + v_{1_x} w_{0_y} z_{1_p} + v_{0_x} w_{0_y} z_{2_p}
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_0 &= v_{0_p} w_{0_x} z_{0_y}, \\
\tilde{A}_1 &= v_{0_p} w_{1_x} z_{0_y} + v_{1_p} w_{0_x} z_{0_y} + v_{0_p} w_{0_x} z_{1_y}, \\
\tilde{A}_2 &= v_{1_p} w_{1_x} z_{0_y} + v_{0_p} w_{2_x} z_{0_y} + v_{2_p} w_{0_x} z_{0_y} + v_{0_p} w_{1_x} z_{1_y} \\
&\quad + v_{1_p} w_{0_x} z_{1_y} + v_{0_p} w_{0_x} z_{2_y}
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

şeklinde bulunur. Diğer lineer olmayan terimler için Adomian polinomları ise benzer yolla elde edilebilir. Böylece (4.1.24) denkleminin (4.1.23) başlangıç şartlarıyla birlikte yaklaşık çözümü



$$\begin{cases} u_0(x, y, t, p) = e^{x+y+p} (1+t), \\ u_{n+1}(x, y, t, p) = L_t^{-1} (u_n - A_n - \tilde{A}_n), n \geq 0, \end{cases} \quad (4.1.30)$$

$$\begin{cases} v_0(x, y, t, p) = e^{x+y+p} (1-t), \\ v_{n+1}(x, y, t, p) = L_t^{-1} (v_n - B_n + \tilde{B}_n), n \geq 0, \end{cases} \quad (4.1.31)$$

$$\begin{cases} w_0(x, y, t, p) = e^{x-y+p} (1+t), \\ w_{n+1}(x, y, t, p) = L_t^{-1} (w_n + C_n - \tilde{C}_n), n \geq 0, \end{cases} \quad (4.1.32)$$

$$\begin{cases} z_0(x, y, t, p) = e^{-x+y+p} (1+t), \\ z_{n+1}(x, y, t, p) = L_t^{-1} (z_n - D_n - \tilde{D}_n), n \geq 0, \end{cases} \quad (4.1.33)$$

indirgeme ilişkileriyle bulunur. (4.1.30)-(4.1.33) denklemlerinden

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{x+y-p} (1+t), \\ v_0 &= e^{x+y+p} (1-t), \\ w_0 &= e^{x-y+p} (1+t), \\ z_0 &= e^{-x+y+p} (1+t) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{x+y-p} \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right), \\ v_1 &= e^{x+y+p} \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \right), \\ w_1 &= e^{x-y+p} \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right), \\ z_1 &= e^{-x+y+p} \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{x+y-p} \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right), \\ v_2 &= e^{x+y+p} \left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} \right), \\ w_2 &= e^{x-y+p} \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right), \\ z_2 &= e^{-x+y+p} \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right), \end{aligned} \quad (4.1.36)$$



elde edilir. (4.1.34)-(4.1.35) denklemleri kullanılırsa (4.1.24)'ün çözümü

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\ &= e^{x+y-p} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) = e^{x+y-p+t} \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots \\ &= e^{x+y+p} \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \right) = e^{x+y+p-t} \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} w_n &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots \\ &= e^{x-y+p} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) = e^{x-y+p+t} \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z_n &= z_0 + z_1 + z_2 + \dots \\ &= e^{-x+y+p} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) = e^{-x+y+p+t} \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

olarak bulunur. Bu ise verilen lineer olmayan sistemin analitik çözümüdür.

4.2. AYRISIM METODUNUN LİNEER OLMAYAN BİRLEŞTİRİLMİŞ (COUPLED) SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u(x,0) = v(x,0) = e^{ix} \quad (4.2.1)$$

başlangıç şartıyla verilen

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a|u|^2 + |v|^2)u = 0, \\ i \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (|u|^2 + b|v|^2)v = 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

lineer olmayan birleştirilmiş Schrödinger denklemini gözönüne alalım. Burada u ve v , $(x,t) \in R^2$ 'nin fonksiyonları, a ve b reel sabitlerdir ($a=1/2$, $b=1$). (4.2.1) sistemi, optik liflerdeki iki tek renkli dalgaın lineer olmayan geçişini tanımlar (Newbould ve diğer., 1989; Wadati ve diğer., 1992).



(4.2.2) denkleminin L_t^{-1} invers operatörü uygulanır ve (4.2.1)'deki başlangıç şartı kullanılırsa,

$$\begin{cases} u(x,t) = u(x,0) + i L_t^{-1} L_x u + \frac{1}{2} i L_t^{-1} |u|^2 u + i L_t^{-1} L_x |v|^2 u \\ v(x,t) = v(x,0) + i L_t^{-1} L_x v + i L_t^{-1} |u|^2 v + i L_t^{-1} L_x |v|^2 v \end{cases} \quad (4.2.3)$$

veya

$$\begin{cases} u(x,t) = u(x,0) + i L_t^{-1} L_x u + \frac{1}{2} i L_t^{-1} f(u) + i L_t^{-1} L_x g(u) \\ v(x,t) = v(x,0) + i L_t^{-1} L_x v + i L_t^{-1} h(u) + i L_t^{-1} L_x k(u) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

bulunur. Burada $f(u) = |u|^2 u$, $g(u) = |v|^2 u$, $h(u) = |u|^2 v$ ve $k(u) = |v|^2 v$ lineer olmayan terimler olup

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \\ g(u,v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n, \\ h(u,v) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \\ k(u,v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

şeklinde ayrıştırılır. (4.1.6) ve (4.2.5) denklemleri (4.2.4)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \tau_1(x) + i L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \frac{1}{2} i L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} E_n + i L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = \sigma_1(x) + i L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} v_n + i L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} F_n + i L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n \end{cases} \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Böylece (4.2.2) denkleminin çözümü (4.2.6)'dan aşağıdaki indirgeme ilişkileriyle bulunabilir :

$$\begin{cases} u_0 = \tau_1(x), \\ u_1 = i L_t^{-1} L_x u_0 + \frac{1}{2} i L_t^{-1} E_0 + i L_t^{-1} L_x \tilde{E}_0, \\ \vdots \\ u_{n+1} = i L_t^{-1} L_x u_n + \frac{1}{2} i L_t^{-1} E_n + i L_t^{-1} L_x \tilde{E}_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (4.2.7)$$



$$\begin{cases} v_0 = \sigma_1(x), \\ v_1 = i L_t^{-1} L_x v_n + i L_t^{-1} F_n + i L_t^{-1} L_x \tilde{F}_n, \\ \vdots \\ v_{n+1} = i L_t^{-1} L_x v_n + i L_t^{-1} F_n + i L_t^{-1} L_x \tilde{F}_n, n \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

(4.2.5)'deki lineer olmayan fonksiyonlar kompleks fonksiyonlar olduğundan Adomian polinomlarını hesaplamak için (Adomian, 1996; Khuri, 1998; Wazwaz, 2000a) kullanılan yöntem kullanılacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned} |v|^2 u &= v^2 \bar{u} = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) \times (\bar{u}_0 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots) \\ &= (v_0^2 + 2v_0 v_1 + 2v_0 v_2 + v_1^2 + 2v_1 v_2 + \dots) \times (\bar{u}_0 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots) \\ &= |v_0|^2 u_0 + |v_0|^2 u_1 + |v_0|^2 u_2 + 2v_0 v_1 \bar{u}_0 + 2v_0 v_2 \bar{u}_0 + |v_1|^2 u_0 \\ &\quad + 2v_1 v_2 \bar{u}_0 + |v_0|^2 u_1 + 2v_0 v_1 \bar{u}_1 + 2v_0 v_2 \bar{u}_1 + |v_1|^2 u_1 + \dots \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ve

$$\begin{aligned} |v|^2 v &= v^2 \bar{v} = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) \times (\bar{v}_0 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots) \\ &= (v_0^2 + 2v_0 v_1 + 2v_0 v_2 + v_1^2 + 2v_1 v_2 + \dots) \times (\bar{v}_0 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots) \\ &= |v_0|^2 v_0 + |v_0|^2 v_1 + |v_0|^2 v_2 + 2v_0 v_1 \bar{v}_0 + 2v_0 v_2 \bar{v}_0 + |v_1|^2 v_0 \\ &\quad + 2v_1 v_2 \bar{v}_0 + |v_0|^2 v_1 + 2v_0 v_1 \bar{v}_1 + 2v_0 v_2 \bar{v}_1 + |v_1|^2 v_1 + \dots \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

elde edilir. (4.2.9) ve (4.2.10)'da olduğu gibi $|u|^2 u$ ve $|u|^2 v$ lineer olmayan terimleri için Adomian polinomları benzer şekilde bulunabilir. (4.2.9) ve (4.2.10)'da verilen ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= |v_0|^2 u_0, \\ \tilde{E}_1 &= 2|v_0|^2 u_1 + 2v_0 v_1 \bar{u}_0, \\ \tilde{E}_2 &= 2|v_0|^2 u_2 + 2v_0 v_2 \bar{u}_0 + 2|v_1|^2 u_0 + 2v_0 v_1 \bar{u}_1, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= |v_0|^2 v_0, \\ \tilde{F}_1 &= 2|v_0|^2 v_1 + 2v_0 v_1 \bar{v}_0, \\ \tilde{F}_2 &= 2|v_0|^2 v_2 + 2v_0 v_2 \bar{v}_0 + 2|v_1|^2 v_0 + 2v_0 v_1 \bar{v}_1, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

bulunur. Ayrıca



$$|v| = v[H(v) - H(-v)] \quad (4.2.13)$$

olup, burada $H(v)$, Heaviside fonksiyonudur. (4.2.13)'den

$$\begin{aligned} g(u) &= |v|^2 u = v^2 u [H(v) - H(-v)]^2, \\ k(u) &= |v|^2 v = v^3 [H(v) - H(-v)]^2, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

elde edilir. (4.2.14)'den de

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} [H(v) - H(-v)]^2 \tilde{E}_n \{v^2 u\}, \\ k(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} [H(v) - H(-v)]^2 \tilde{F}_n \{v^3\}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

bulunur. Heaviside fonksiyonunun tanımında $v \geq 0$ için $[H(v) - H(-v)]^2 = 1$ olduğundan,

$\tilde{E}_n \{v^2 u\}$ ve $\tilde{F}_n \{v^3\}$ lineer olmayan terimler için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 &= v_0^2 u_0, \\ \tilde{E}_1 &= 2v_0^2 u_1 + 2v_0 v_1 u_0, \\ \tilde{E}_2 &= 2v_0^2 u_2 + 2v_0 v_2 u_0 + 2v_1^2 u_0 + 2v_0 v_1 u_1, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= v_0^3, \\ \tilde{F}_1 &= 3v_0^2 v_1, \\ \tilde{F}_2 &= 3v_0^2 v_2 + 3v_1^2 v_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

şeklinde tanımlanır. (4.2.16) ve (4.2.17)'deki Adomian polinomları (4.2.7) ve (4.2.8)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{tx}, \\ v_0 &= e^{tx}, \\ u_1 &= \frac{1}{2} i t e^{tx}, \\ v_1 &= i t e^{tx}, \\ u_2 &= -\frac{1}{8} t^2 e^{tx}, \\ v_2 &= -\frac{1}{2} t^2 e^{tx}, \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

bulunur. Böylece (4.2.1) başlangıç şartı ile verilen (4.2.2) denkleminin yaklaşık çözümü



$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\
&= e^{ix} \left(1 + \frac{1}{2} it - \frac{1}{8} t^2 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} v_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots \\
&= e^{ix} \left(1 + it - \frac{1}{2} t^2 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

formunda elde edilir. Bu denklemin analitik çözümü ise

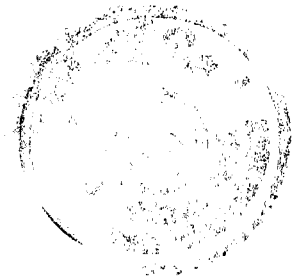
$$\begin{cases} u(x, t) = e^{i\left(x + \frac{1}{2}t\right)}, \\ v(x, t) = e^{i(x+t)}, \end{cases} \tag{4.2.21}$$

biçimindedir. Bu denklemin çözümleri ile ilgili sayısal hesaplamalar, sırası ile, aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= u_0 = e^{ix}, \\
\phi_2 &= u_0 + u_1 = e^{ix} \left(1 + \frac{1}{2} it \right), \\
\phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 = e^{ix} \left(1 + \frac{1}{2} it - \frac{1}{8} t^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= v_0 = e^{ix}, \\
\varphi_2 &= v_0 + v_1 = e^{ix} (1 + it), \\
\varphi_3 &= v_0 + v_1 + v_2 = e^{ix} \left(1 + it - \frac{1}{2} t^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Bu hesaplamalara ait tablolar aşağıdadır :



x , t	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.1	0.989+0.149i	0.989+0.149i	2.588E-7+2.859iE-8
0.2	0.955+0.296i	0.955+0.296i	4.066E-6+9.092iE-7
0.3	0.900+0.435i	0.900+0.435i	1.995E-5+6.833iE-6
0.4	0.825+0.565i	0.825+0.565i	6.028E-5+2.838iE-5
0.5	0.732+0.682i	0.732+0.682i	1.386E-4+8.501iE-5

Tablo 4.2.1. $u(x,0) = e^{ix}$ ve (4.2.2) denklemi için sayısal sonuçlar.

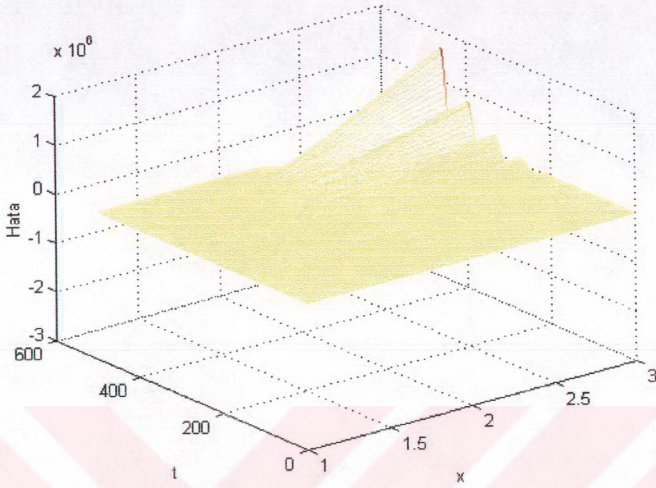
x , t	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata
0.1	0.980+0.199i	0.980+0.199i	4.136E-6+4.987iE-7
0.2	0.921+0.389i	0.921+0.389i	6.472E-5+1.584iE-5
0.3	0.825+0.565i	0.825+0.565i	3.135E-4+1.187iE-4
0.4	0.697+0.717i	0.697+0.717i	9.441E-4+4.915iE-4
0.5	0.540+0.841i	0.540+0.841i	2.142E-3+1.465iE-3

Tablo 4.2.2. $v(x,0) = e^{ix}$ ve (4.2.2) denklemi için sayısal sonuçlar.

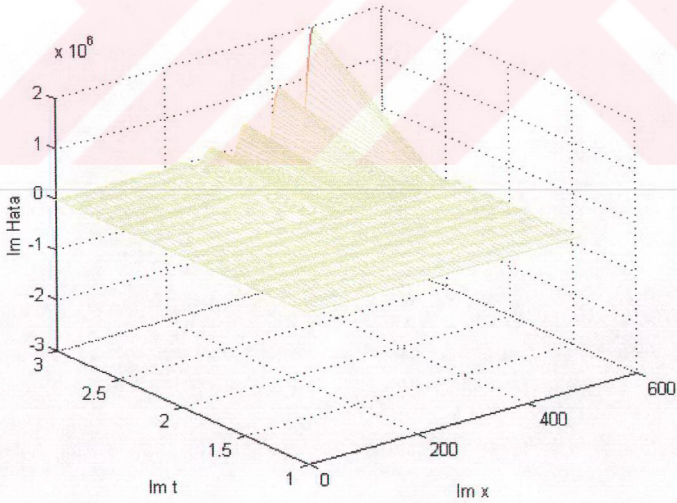
(4.2.22) ve (4.2.23)'de üç iterasyonun kullanılmasıyla (ϕ_3, φ_3) elde edilen sonuçlar Tablo 4.2.1 ve 4.2.2.'de verilmiştir. Bu tablolarda analitik çözüme yakın olan yaklaşık çözümle birlikte son kolonda mutlak hata verilmiştir. Yalnız üç iterasyon kullanılarak hassas sonuçlar elde edildi. Eğer daha hassas sonuçlar elde edilmek isteniyorsa o zaman (4.2.22) ve (4.2.23) ile verilen yaklaşık çözüm serilerine yeni terimlerin ilave edilmesi gerekir.

Bu tablolarla ilgili üç-boyutlu şekiller aşağıdadır :

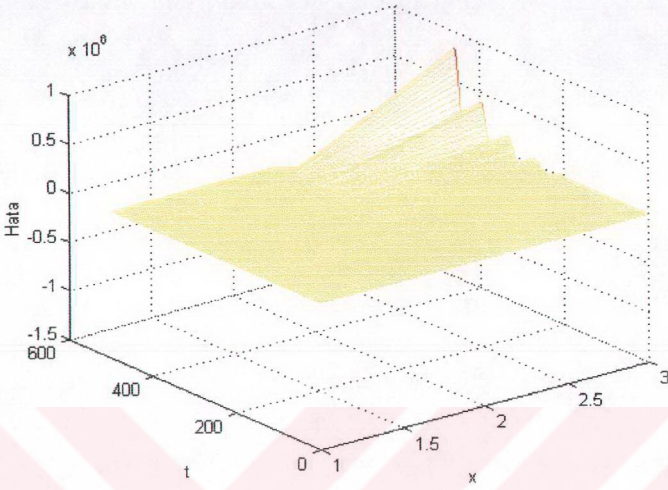




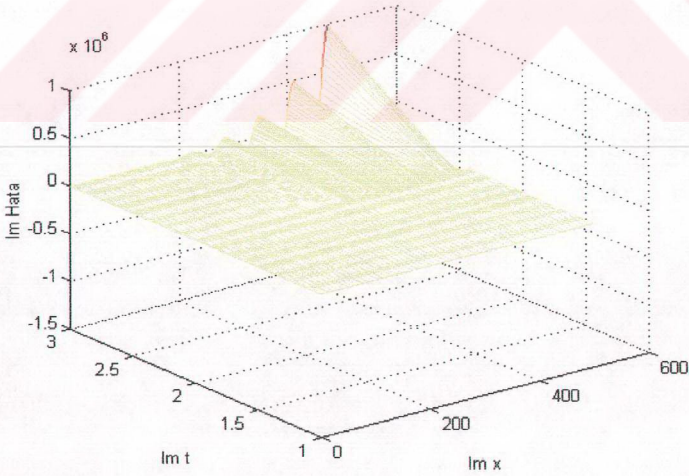
Şekil 4.2.1. Reel $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.



Şekil 4.2.2. İmajiner $u(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.



Şekil 4.2.3. Reel $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.



Şekil 4.2.4. İmajiner $v(x,t)$ fonksiyonu için elde edilen hatayı gösteren yüzey.

SONUÇ

Lineer olsun yada olmasın sınır ve başlangıç şartları verilen fonksiyonel denklemleri çözmek için bir metodu incelemeye ve ifade etmeye çalıştık. Bu metot, zaman ve uzay bakımından kesikleyerek veya lineerleştirerek (veya aşırı bir şekilde basitleştirerek), model haline gelmiş olayın doğasını tahrip etmeden, fiziğin temel hedeflerinden birini ortaya koyar. Hatta model lineer olmasa bile çözüm bir fonksiyonlar serisi (muhtemelen kesikli) yardımıyla " analitik form" biçiminde bulunabilir.

Metodun temel prensibi çok basittir ve orijinalitesi, elemanları indirgemeli bir şekilde hesaplanan bir polinom serisindeki lineer olmayan polinomları ayırtırmaktan ibarettir. Fakat Adomian tarafından verilen ilk formülasyona göre, lineer olmayanlarla ilgili problemlerin çözülmesinde bazı sıkıntılarla karşılaşıldı. Buradaki sıkıntıların çoğu; polinomların hesaplanmasında, çözüm serisinin yakınsaklığında ve metodun farklı fonksiyonel denklemlere uygulamasında meydana geldi.

Bu çalışmada; ortaya çıkan sıkıntıların ve metodun uygulanmasındaki zorlukların cevaplandırılmasını sağlayan, metodun matematiksel temellerini verdik [Bölüm II ve III]. Temel teorik kavramları, metodun farklı şekillerini doğrulayan teoremleri ve basit hipotezlere dayanan yakınsaklık teoremleri sunduk [Teorem 3.3.3]. Bütünün n parçaya ayrılması kavramını kullanarak tek ve çok değişkenli lineer olmayan skalar bir fonksiyona bağlı Adomian polinomlarının hesaplanması için önceden elde edilen basit formülleri verdik [Bölüm 2.3.1, 2.3.2 ve 2.3.3]. Bu metodun Taylor tekniğinin bir genellemesi olduğunu ispatladık [Teorem 3.1.1] ve bu formülü kullanarak yakınsaklığın yeni bir ispatını verdik [Teorem 3.3.5 ve 3.3.6]. Çözülmesi gereken fonksiyonel denklemin doğru çözümünü sağlayacak yakınsak çözümleri bulmak, bütün metotların ulaşmak istediği bir sonuçtur. Ayırışım metoduyla ilgili pek çok çalışma da yakınsaklığı ispatlamak için yapılmıştır (Cherruault ve diğer., 1992; Gabet, 1992; Guellal ve Cherruault, 1994). Çözüm serisinin yakınsaklığı ilk olarak Abbaoui (1995), Khelifa ve Cherruault (2000), Abbaoui ve diğer., (2001) tarafından yapılmıştır.



(Gabet, 1992)'de pratikte doğrulanması çok zor olan lineer olmayan operatörler üzerindeki hipotezlerle çözüm serisinin yakınsaklığı ispatlanmıştır. Ayırışım metodunun yakınsaklığını sağlayacak basit hipotezler olmadığından uygulamalarda bu tekniğin etkinliğinden şüphe edilebilir. Ortaya koyduğumuz yakınsaklık şartlarının, kanıtlanması kolaydır (lineer olmayan N operatörü üzerinde basit birkaç hipotezin uygulanması metodun yakınsaklığını sağlayacaktır). Bu çalışmada A_n 'lerin yakınsaklık serisinden, $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisinin yakınsaklığını elde ettik [Teorem 3.3.5 ve 3.3.6]. Ayrıca önceden elde edilmiş hata değerini [Teorem 3.3.4] ve A_n 'lerin hesaplanması için somut örneklerde kolaylıkla kullanılabilecek birkaç pratik formül verdik [Bölüm 2.3.4]. Bu ifadeler lineer olmayan herhangi bir denklem ve büyük n 'ler için A_n 'leri liste haline koymamızı sağlar. Bu yaklaşımdan önce $n \geq 3$ için A_n 'leri hesaplamak zordu. Farklı problemlerde çıkan lineer olmayan diferensiyel denklemlere ayırışım metodunu uygularken sık sık çok değişkenli fonksiyonlar olan ve lineer olmayan terimlerle karşılaşırız. Bu yüzden (Abbaoui ve diğer., 1995) tarafından sunulan p değişkenli fonksiyonlar için Adomian polinomlarını genelleştiren formülleri verdik.

Yine bu çalışmada; iki noktalı singüler sınır değer problemler, adi ve kısmi diferensiyel denklemler ve sistemlerle ilgili örnekler sunuldu ve elde edilen sonuçlar gösterdi ki metodun bu tür denklemlere uygulanması çok kolay ve yakınsaması çok hızlıdır. Ayrıca x 'in sıfırdan uzak değerlerinde daha iyi sonuçlar; ayırışım metodu kullanılarak elde edilen çözüm serisine Padé yaklaşımı uygulanarak bulundu [Örnek 3.1.2 ve 3.1.3].

Sonuç olarak ilk ortaya çıktığı yıllardaki hatalardan kurtulmuş olan ayırışım metodu; matematikte, fizikte ve mühendislikte bulunan lineer olmayan problemlerin çözümünde önemli bir yere sahiptir. Bugün yapılan çalışmalar sayesinde bu metod dinamik sistemlerin genel bir teorisi olarak görülebilir. Şimdi, bu çalışmayla, ne kesikleme ne lineerizasyon ne de pertürbasyon gerektiren, lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin güçlü bir çözüm metoduna sahip olduk.



KAYNAKLAR

- Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1994, Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations, **Math. Comput. Modelling**, 20 (9), 69-73.
- Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1994a, Convergence of Adomian's method applied to differential equations, **Computers Math. Applic.**, 28 (5), 103-109.
- Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1995, New ideas for proving convergence of decomposition methods, **Computers Math. Applic.**, 29 (7), 103-108.
- Abbaoui, K. ve Cherruault, Y. ve Ndour M., 1995, The decomposition method applied to differential systems, **Kybernetes**, 24 (8), 32-40.
- Abbaoui, K., Cherruault, Y. ve Seng, V., 1995, Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian polynomials, **Math. Comput. Modelling**, 22 (1), 89-93.
- Abbaoui, K., 1995, Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application a la résolution des équations issues de la Biologie et de la Médecine , **Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, France.**
- Abbaoui, K., Pujol, M.J., Cherruault, Y., Himoun, N. ve Grimalt, P., 2001, A new formulation of Adomian method and convergence result, **Kybernetes**, 30 (9/10), 1183-1191.
- Ablowitz, M. ve Segur, H., 1981, **Solitons and Inverse Scattering Transform**, Philadelphia, PA: SIAM.
- Ablowitz, M., Fuchssteiner, B. ve Kruskal, M., 1987, **Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations**, Singapore: World Scientific.
- Ablowitz, M. ve Clarkson, P.A., 1991, **Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering**, New York: Cambridge University.

Adomian, G., 1984, Convergent series solution of nonlinear equation, **Comput. Appl. Math.**, 11 (2), 113-117.

Adomian, G., 1986, **Nonlinear Stochastic Operator Equations**, Academic Press, San Diego.

Adomian, G., 1986a, On composite nonlinearities and the decomposition method, **J. Math. Anal. Appl.**, 114 (1), 130-141.

Adomian, G. ve Rach, R., 1990, Equality of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial differential equations, **Computers Math. Applic.**, 19 (12), 9-12.

Adomian, G. ve Rach, R., 1992, Noise terms in decomposition solution series, **Computers Math. Applic.**, 24 (11), 61-64.

Adomian, G. ve Rach, R., 1993, Analytic solution of nonlinear boundary-value problems in several dimensions by decomposition, **J. Math. Anal. Appl.**, 174, 118-137.

Adomian, G., 1994, **Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method**, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Adomian, G. ve Meyers, R.E., 1995, The Ginzburg - Landau equation, **Computers Math. Applic.**, 29 (3), 3-4.

Adomian, G., Cherruault, Y. ve Abbaoui, K., 1996, A nonperturbative analytical solution of immune response with time-delays and possible generalization, **Math. Comput. Modelling**, 24 (10) 89-96.

Adomian, G. ve Rach, R., 1996, Modified Adomian polynomials, **Math. Comput. Modelling**, 24 (11), 39-46.

Adomian, G., 1996, Nonlinear Klein-Gordon equation, **Appl. Math. Comput.**, 9 (3), 9-10.

Asok, K.S., 1988, An application of the Adomian decomposition method to the transient behavior of a model biochemical reaction, **J. Math. Anal. Appl.**, 131, 232-245.

Baker, G.A. ve Graves-Morris, P., 1996, **Essentials of Padé Approximants**, Cambridge University Press, Cambridge.

Badredine, T., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1999, Convergence of Adomian's method applied to integral equations, **Kybernetes**, 28 (5), 557-564.

Brigitte, A., 1999, Application of the decomposition method to the understanding of HIV immune dynamics, **Kybernetes**, 28 (3), 271-283.

Boussinesq, J., 1871, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, **Comptes Rendus**, 72, 755-759.

Chawla, M.M., Subramanian R. ve Sathi H., 1988, A fourth order method for a singular two point boundary value problem, **BIT**, 28, 88-97.

Cherruault, Y., 1989, Convergence of Adomian's method, **Kybernetes**, 18 (2), 31-38.

Cherruault, Y., Saccomandi, G. ve Some, B., 1992, New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations, **Math. Comput. Modelling**, 16 (2), 85-93.

Cherruault, Y., 1998, **Modèles et Méthodes Mathématiques Pour Les Sciences du Vivant**, Presses Universitaires de France.

Cherruault, Y., 1999, **Optimisation, Méthodes Locales et Globales**, Presses Universitaires de France.

Comtet, L., 1974, **Advanced Combinatorics**, D. Reidel.

Çağal, B., 1989, **Sayısal Analiz**, İstanbul.

Debnath, L., 1994, **Nonlinear Water Waves**, Academic Press, Boston.

Debnath, L., 1998, **Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**, Birkhauser, Berlin.

Deeba, E. ve Khuri, S.A., 1996, A decomposition method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation, **J. Comput. Physics**, 124, 442-448.

Deeba, E., Khuri, S.A. ve Xie, S., 2000, An algorithm for solving boundary value problems, **J. Comput. Physics**, 159 (2), 125-138.

Drazin, P.G. ve Johnson, R.S., 1993, **Solitons: An introduction**, Cambridge University Press, Cambridge.

Fermi, E., Pasta, J. ve Ulam, S., 1955, Studies of nonlinear problems I, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) **Amer. Math. Soc.**, 15 (1974), 143-156.

Gabet, L., 1992, Modelisation mathématiques de la diffusion des Médicaments a travers les capillaires et dans les tissus a la suite d'une injection et esquisse d'une théorie décompositionnelle et applications aux equations aux dérivées partielles, **Thèse de l'Ecole Centrale de Paris**.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. ve Miura, R.M., 1974, Korteweg-de Vries equation and generalizations VI, Methods for exact solution, **Comm. Pure Appl. Math.**, 27, 97-133.

Guellal, S. ve Cherruault, Y., 1994, Practical formulae for calculation of Adomian's polynomials and application to the convergence of the decomposition method, **Intern. Journal of Biomedical Computing**, 36, 223-228.

Halder, K., 1996, Application of Adomian's approximations to the Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates, **Appl. Math. Lett.**, 9 (4), 109-113.



Hammack, J.L. ve Segur, H., 1974, The Korteweg-de Vries equation and water waves, comparison with experiments, **J. Fluid Mech.**, 65, 289-314.

Hirota, R., 1971, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, **Phys. Rev. Lett.**, 27, 1192-1194.

Hirota, R., 1973a, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, **J. Math. Phys.**, 14, 805-809.

Hirota, R., 1973b, Exact N-solutions of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices, **J. Math. Phys.**, 14, 810-814.

Hirota, R., 1980, **Direct Methods in Soliton Theory, Solitons**, Berlin: Springer.

Himoun, N., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1999, New results of convergence of Adomian's method, **Kybernetes**, 28 (4), 423-429.

Jain, R.K. ve Jain, P., 1989, Finite difference methods for a class of singular two-point boundary value problems, **Intern. J. Computer Math.**, 27, 113-120.

Jiao, Y.C., Yamamoto, Y., Dang, C. Ve Hao, Y., 2002, An aftertreatment technique for improving the accuracy of Adomian's decomposition method, **Comput. Math. Applic.**, 43, 783-798.

Karagöz, M., 1998, **İstatistik Yöntemler**, Malatya.

Kaya, D., 2001, A closed form solution technique for solving nonlinear Klein-Gordon equations, **Proceedings of the First Intern. Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling**, (Edited by V.Lakshmikantham, A. Hasanov) Fethiye- Turkey, 28-36.

Khelifa, S. ve Cherruault, Y., 2000, New results for the Adomian method, **Kybernetes**, 29 (3), 332-354.



Khuri, S.A., 1998, A new approach to the cubic Schrödinger equation: An application of the decomposition technique, **Appl. Math. Comput.**, 97, 251-254.

Khuri, S.A., 2001, On the decomposition method for the approximate solutions of nonlinear ordinary differential equations, **Intern. J. Math. Ed. Sci. Tech.**, 32 (4), 525-539.

Kincaid, D. ve Cheney, W., 1991, **Numerical Analysis**, Pacific Grove, California.

Kreyszig, E., 1978, **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley and Sons, New York.

Korteweg, D.J. ve de Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves, **Phil. Mag.**, 39 (5), 422-443.

Lax, P.D., 1968, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, **Comm. Pure Appl. Math.**, 21, 467-490.

LeVeque, R.J., 1990, **Numerical Methods for Conservative Laws**, Birkhauser, Basel.

Makhankov, V.G., 1978, Dynamics of classical solitons, **Phys. Rep.**, 35, 1-128.

Ming, W. ve Guo, B., 1993, Fourier collocation method for solving nonlinear Klein-Gordon equation, **J. Comput. Phys.**, 108, 296-305.

Newbould, G.K., Parker, D.F. ve Faulkner, T.R., 1989, Coupled nonlinear Schrödinger equations arising in the study of monomode step-index optical fibers, **J. Math. Phys.**, 30, 930-936.

Qu, R. ve Agarwal, R.P., 1997, A collocation method for solving a class of singular nonlinear two-point boundary value problems, **J. Comput. Appl. Math.**, 83, 147-163.

Rayleigh, L., 1876, On waves, **Phil. Mag.**, 1, 257-279.



Rach, R., 1984, A convenient computational form for the A_n polynomials, **J. Math. Anal. Appl.**, 102, 415-419.

Seng, V., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., 1996, Adomian's polynomials for nonlinear operators, **Math. Comput. Modelling**, 24 (1), 59-65.

Strauss, W. ve Vazquez, L., 1978, Numerical solutions of a nonlinear Klein-Gordon equation, **J. Comput. Phys.**, 28, 271-278.

Wadati, W., Lizuka, T. ve Hisakado, M., 1992, A coupled nonlinear Schrödinger equation and optical solitons, **J. Phys. Soc. Japan**, 61, 2241-2245.

Wazwaz, A.M., 1997, Equality of partial solutions in the decomposition method for partial differential equations, **Intern. J. Computer Math.**, 65, 293-308.

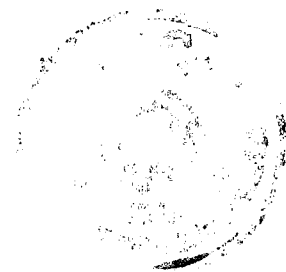
Wazwaz, A.M., 1997a, Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series, **Appl. Math. Comput.**, 81, 265-274.

Wazwaz, A.M., 1998, A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series method in the series solutions, **Appl. Math. Comput.**, 97, 37-44.

Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, **Appl. Math. Comput.**, 111, 33-51.

Wazwaz, A.M., 2000a, A reliable technique for solving linear and nonlinear Schrödinger equations by Adomian decomposition method, **Bull. Inst. Math. Academia Sinica**, 29 (2), 125-134.

Wazwaz, A.M., 2000b, Approximate solutions to boundary value problems of higher-order by the modified decomposition method, **Comput. Math. Applic.**, 40, 679-691.



Wazwaz, A.M., 2000c, The modified Adomian decomposition method for solving linear and nonlinear boundary value problems of tenth-order and 12th-order, **Intern. J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, 1, 17-24.

Wazwaz, A.M., 2001, A reliable algorithm for obtaining positive solutions for nonlinear boundary value problems, **Comput. Math. Applic.**, 41, 1237-1244.

Wazwaz, A.M., 2001a, The numerical solution of sixth-order boundary value problems by the modified decomposition method, **Appl. Math. Comput.**, 118, 311-325.

Wazwaz, A.M., 2001b, The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method, **J. Comput. Appl. Math.**, 136, 259-270.

Wazwaz, A.M., 2001c, A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations, **Appl. Math. Comput.**, 118, 327-342.

Wazwaz, A.M., 2001d, Blow-up for solutions of some linear wave equations with mixed nonlinear boundary conditions, **Appl. Math. Comput.**, 123, 133-140.

Wazwaz, A.M., 2001e, A computational approach to soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation, **Appl. Math. Comput.**, 123, 205-217.

Wazwaz, A.M., 2001f, Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method, **Chaos, Solitons and Fractals**, 12, 1549-1556.

Wazwaz, A.M., 2001g, Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method, **Chaos, Solitons and Fractals**, 12, 2283-2293.

Wazwaz, A.M., 2002, Compactons dispersive structures for variants of the K(n,n) and the KP equations, **Chaos, Solitons and Fractals**, 13, 1053-1062.

Wazwaz, A.M., 2002a, New solitary wave special solutions with compact support for the nonlinear dispersive $K(m,n)$ equations, **Chaos, Solitons and Fractals**, 13, 321-330.

Wazwaz, A.M., 2002b, Exact special solutions with solitary patterns for the nonlinear dispersive $K(m,n)$ equations, **Chaos, Solitons and Fractals**, 13, 161-170.

Weidmen, P.D. ve Maxworthy, T., 1978, Experiments on strong interactions between solitary waves, **J. Fluid Mech.**, 85, 417-431.

Vladimirov, V.S., 1979, **Generalized Functions in Mathematical Physics**, Mir Publishers, Moscow.

Zabusky, N.J. ve Kruskal, M.D., 1965, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, **Phys. Rev. Lett.**, 15, 240-243.

Zabusky, N.J., 1967, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, **Proc. Symp. Nonlinear PDEs**, Academic Press, Boston, 223-258.

Zabusky, N.J. ve Galvin, C.J., 1971, Shallow water waves, the KdV equation and solitons, **J. Fluid Mech.**, 47, 811-824.

Zauderer, E., 1983, **Partial Differential Equations of Applied Mathematics**, John Wiley Sons, New York.

