

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL OLMAYAN
SİSTEMLERİN GÖZLEYİCİ TEMELLİ DURUM
GERİBESLEMELİ KONTROLÜ**

Günyaz ABLAY

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Ahmet UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2006

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL OLMAYAN
SİSTEMLERİN GÖZLEYİCİ TEMELLİ DURUM
GERİBESLEMELİ KONTROLÜ**

Günyaz ABLAY

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman:

Üye:

Üye:

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam boyunca beni yönlendiren ve bana gereken her türlü destek ve yardımı yapan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet UÇAR'a teşekkür ederim.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bana destek olan Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

Son olarak, her zaman benim yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ.....	1
2. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ.....	3
2.1. Giriş.....	3
2.2. Kutup Yerleştirme ile Durum Geribeslemeli Kontrolör Tasarımı.....	3
2.3. Optimal Geribeslemeli Kontrol; LQR.....	15
3. BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN TÜM DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ.....	22
3.1. Giriş.....	22
3.2. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemlerin Tüm Durum Geribeslemeli Kontrolü.....	23
3.2.1. Kontrolör Tasarımı.....	24
3.2.1.1. Doğrusal Kontrolörün Tasarımı.....	24
3.2.1.2. Doğrusal Olmayan Kontrolörün Tasarımı.....	25
3.2.2. Kontrol Parametrelerinin Ayarlanması.....	29
3.2.3. Uygulama 1: Bir Maglev Aracın Süspansiyon Kontrolü.....	31
3.3. Belirsizlik İçeren Doğrusal Olmayan Sistemlerin Tüm Durum Geribeslemeli Kontrolü.....	39
3.3.1. Uygulama 2: Belirsizlik İçeren Tek Eklemlili Bir Robot Kolunun Kontrolü.....	39
3.4. Sonuçlar.....	48
4. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER İÇİN GÖZLEYİCİ TASARIMI.....	50
4.1. Giriş.....	50
4.2. Kapalı Çevrim Dinamiği.....	53
4.3. Minimum Mertebeli Gözleyici Tasarımı.....	60
4.4. Sonuçlar.....	67
5. BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN GÖZLEYİCİ TEMELLİ DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÖR TASARIMI.....	69
5.1. Giriş.....	69
5.2. Gözleyici Tasarımı.....	69
5.2.1.Özet ve Algoritma.....	77
5.3. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemlerin Gözleyici Temelli Durum Geribeslemeli Kontrolü.....	79
5.3.1. Bir Maglev Aracın Süspansiyon Kontrolü.....	79

5.4. Belirsizlik İçeren Doğrusal Olmayan Sistemlerin Gözleyici Temelli Durum	
Geribeslemeli Kontrolü.....	89
5.4.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Gözleyici Temelli Durum Geribeslemeli	
Kontrolü	89
5.4.1.1. Kontrolör Tasarımı.....	90
5.4.1.2. Gözleyici Tasarımı.....	95
5.5. Sonuçlar.....	105
6. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	106
KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	109

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1: Regülatör sistem.....	6
Şekil 2.2: Örnek 2.1’de verilen sistemin durum değişkenleri ve kontrol sinyali	8
Şekil 2.3: 1 tipli servo sistem.....	9
Şekil 2.4: Örnek 2.2’deki 1 tipli sistemin birim basamak yanıtı	11
Şekil 2.5: 0 tipli servo sistem.....	12
Şekil 2.6: Örnek 2.3’teki 0 tipli sistemin birim basamak yanıtı.....	11
Şekil 2.7: Örnek 2.4’te verilen sistem için Matlab/SIMULINK programı.....	20
Şekil 2.8: $Q = \text{diag}[20, 1, 1]$, $R = 1$ ve $x(0) = (1, 0, 0)^T$ için kapalı çevrimli sistemin durum değişkenleri ve kontrol sinyali.....	21
Şekil 3.1: Belirsizlik içeren maglev sistemi için dayanıklı durum geribeslemeli kontrol şeması.....	35
Şekil 3.2: (a) Belirsizlik içeren maglev sistemin simülasyonu için Matlab/SIMULINK programı, (b) Doğrusal_olmayan_kontrol alt sisteminin içyapısı ve (c) $p(x)$ alt sisteminin içyapısı.....	36
Şekil 3.3: Maglev sisteminin denklem (3.40)’taki P_R ve denklem (3.31)’teki P_L ve sistemin başlangıç şartları $x_1=0.001$, $x_2=0.005$ ve $x_3=0$, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....	37
Şekil 3.4: Maglev sisteminin denklem (3.40)’taki $P_R=P_L$ ve sistemin başlangıç şartları $x_1=0.001$, $x_2=0.005$ ve $x_3=0$, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....	38
Şekil 3.5: Tek eklemlı robot kolu.....	40
Şekil 3.6: Tek eklemlı robot kolu için dayanıklı durum geribeslemeli kontrol şeması.....	44
Şekil 3.7: $w(t)$ bozucu sinyali.....	44
Şekil 3.8: Şekil 3.5’teki sistemin (3.58)’deki P_R matrisi ve (3.61)’deki P_L matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$, belirsizliklerin, $ \alpha_1(t) \leq 1$, $ \alpha_2(t) = \beta(t) \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) Durum uzay diyagramı, (c) $u(t)$ kontrol sinyali. (1) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ ’da, (2) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 10$ ’da sisteme uygulanıyor.....	45

- Şekil 3.9:** Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki $P_R=P_L$ matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 1, |\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) Durum uzay diyagramı, (c) $u(t)$ kontrol sinyali. (1) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ 'da, (2) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 10$ 'da sisteme uygulanıyor..... 46
- Şekil 3.10:** Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki P_R matrisi ve (3.61)'deki P_L matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$ ve belirsizliklerin $|\alpha_1(t)| \leq 1, |\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$ değerlerine göre tasarlanan kontrolör için, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 2, |\alpha_2(t)| \leq 1$ ve $|\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 47
- Şekil 3.11:** Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki $P_R=P_L$ matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$ ve belirsizliklerin $|\alpha_1(t)| \leq 1, |\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$ değerlerine göre tasarlanan kontrolör için, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 2, |\alpha_2(t)| \leq 1$ ve $|\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 48
- Şekil 4.1:** Tüm durum gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem..... 52
- Şekil 4.2:** Örnek 4.1'de verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları için; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri (d) e_2 hata sinyali. (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi..... 57
- Şekil 4.3:** Örnek 4.2'de verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları için; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri (d) e_2 hata sinyali. (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi..... 59
- Şekil 4.4:** Minimum mertebeli gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem.... 64
- Şekil 4.5:** Örnek 4.3'te verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e_2(0)=(1000)$ başlangıç şartları için minimum mertebeli gözleyicili sistemin durum değişkenleri ve hata sinyallerinin zamanla değişimi. (a) x_1 durum değişkeni, (b) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri, (c) e_2 hata sinyali ve (d) x_3 durum değişkeni..... 67
- Şekil 5.1:** Gözleyici şeması..... 71

- Şekil 5.2:** Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[2,-3,-2]^T$ başlangıç şartları için nominal sistemin; (a) $x_1-\hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2-\hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3-\hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi..... 81
- Şekil 5.3:** Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[2,-3,-2]^T$ başlangıç şartları için belirsizlik içeren sistemin; (a) $x_1-\hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2-\hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3-\hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi..... 81
- Şekil 5.4:** Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[0.001,0.005,0]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 83
- Şekil 5.5:** Maglev sisteminin (5.48)'deki $P_R=P_L$, $x(0)=[0.001,0.005,0]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 84
- Şekil 5.6:** Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'teki P_L , sistemin $x(0)=[0.001,0.005,0]^T$ ve $\hat{x}_2(0)=[0]$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 86
- Şekil 5.7:** Maglev sisteminin (5.48)'deki $P_L=P_R$, sistemin $x(0)=[0.001,0.005,0]^T$ ve $\hat{x}_2(0)=[0]$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 87
- Şekil 5.8:** Doğrusal olmayan sistemin, nominal sistem değerleri, başlangıç şartları $x(0)=[-2,1,-1]^T$ ve $u(t)=0$ için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) Durum uzay diyagramı..... 90

- Şekil 5.9:** Doğrusal olmayan sistemin $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları ve nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 91
- Şekil 5.10:** Doğrusal olmayan sistemin, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 92
- Şekil 5.11:** Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki $P_R = P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....93
- Şekil 5.12:** Gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol şeması..... 95
- Şekil 5.13:** Doğrusal olmayan sistemin $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $e(0) = [2, -1, 1]^T$ başlangıç şartları için nominal sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.....96
- Şekil 5.14:** Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki $P_R = P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali..... 97
- Şekil 5.15:** Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $e(0) = [2, -1, 1]^T$ başlangıç şartları için belirsizlik içeren sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.....98
- Şekil 5.16:** Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana

göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....99

Şekil 5.17: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki $P_R=P_L$, $x(0)=[-2,1,-1]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....100

Şekil 5.18: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[-2,1,-1]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....102

Şekil 5.19: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki $P_R=P_L$, $x(0)=[-2,1,-1]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.....103

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1: Maglev aracın sistem parametreleri.....	31
Tablo 4.1: Minimum mertebeli gözleyicideki değişkenlerin tüm durum gözleyicideki değişkenler cinsinden karşılıkları.....	61

EKLER LİSTESİ

Ek-1: Bölüm 5 İçin Matlab/SIMULINK Programları

SİMGELER LİSTESİ

A	: Sistem matrisi
$\bar{A}$	: $A - BK$ matrisi
B	: Kontrol matrisi
C	: Çıkış matrisi
D	: Giriş çıkış matrisi
D	: Gözleyici kazanç matrisi
e	: Hata fonksiyonu veya gözleyici hatası vektörü
$\hat{e}$	: Gözleyici temelli hata fonksiyonu
H	: Girişteki bozucuların veya doğrusal olmayan elemanların matrisi
$I = I_K$	: Birim matris
J	: Performans indeksi
K	: Kontrol kazanç matrisi
L	: Kazanç matrisi
M	: Tüm durum kontroledilebilirlik matrisi
N	: Tüm durum gözlenebilirlik matrisi
P	: Kuadratik Lyapunov fonksiyonu için kullanılan simetrik matris
R	: Kontrol ağırlık matrisi
R^n	: n boyutlu Euclidean uzayı
r	: Birim basamak fonksiyonu
s	: Laplace durum değişkeni veya özdeğer
T	: Transformasyon matrisi
T	: Gözleyici kazanç matrisi
t	: Zaman değişkeni
t_0	: Zaman değişkeninin başlangıç değeri
u	: Kontrol sinyali
u_l	: Doğrusal kontrol sinyali
u_n	: Doğrusal olmayan kontrol sinyali
V	: Lyapunov fonksiyonu
v	: Giriş vektörü
y	: Çıkış
z	: Dönüşüm vektörü
Q	: Kuadratik Lyapunov fonksiyonunun birinci türevi için kullanılan simetrik matris

Q_L	: Lyapunov denklemi için hata ağırlık matrisi
Q_R	: Riccati denklemi için hata ağırlık matrisi
W	: Transformasyon için kullanılan matris
w	: Ölçüm hatası
x	: Durum değişkeni vektörü
$\dot{x}$	: Durum değişkeninin birinci türevi
$\hat{x}$	: Gözleyici durum değişkeni vektörü
x_0	: Durum değişkeninin başlangıç değeri
α	: Belirsiz parametre
β	: Belirsiz parametre
η	: Belirsizlik içeren sistemin kararlılık sınırını belirleyen yarıçap
μ	: Hedeflenen özdeğerler
$\bar{\mu}$	: Hedeflenen gözleyici özdeğerleri
λ	: Sistemin özdeğerleri
ε	: Pozitif bir sabite
ρ	: Belirsiz parametrelere ve doğrusal olmayan terimlere bağlı fonksiyon
ΔA	: Sistem matrisindeki belirsizlikleri içeren matris
ΔB	: Giriş matrisindeki belirsizlikleri içeren matris
∇	: Gradient
$\dot{V}$	: Lyapunov fonksiyonunun türevi
ξ	: Gözleyici durum değişkeni
τ	: Zaman sabitesi
sgn	: Signum (işaret) fonksiyonu
$ \cdot $	: Mutlak değer
$\ \cdot\ $	: Norm
$\max$	: Maksimum

KISALTMALAR LİSTESİ

LQR	: Linear Quadratic Regulator (Doğrusal Kuadratik Regülatör)
MAGLEV	: Magnetically Levitated (Manyetik yastık üzerinde hareket eden araçlar)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN GÖZLEYİCİ TEMELLİ DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ

Günyaz ABLAY

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

2006, Sayfa: 109

Bu tezde, belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin gözleyici temelli dayanıklılık kontrolü yapılmıştır. Kapalı çevrimli sistemin kararlılığı Lyapunov yöntemiyle sağlanmıştır. Performansın iyileştirilmesi için kontrol parametrelerinin ayarı yapılmıştır. Yapısal olarak kontrolör doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısımdan oluşmaktadır. Doğrusal kontrol kazançları literatürde LQR olarak bilinen doğrusal kuadratik regülatör yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kontrolörün doğrusal olmayan kısmı ise sistemdeki belirsizliklerin ve doğrusal olmayan elemanların etkisini karşılamak için iki konumlu bir eleman içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan sistemler, doğrusal olmayan kontrol, belirsizlik içeren sistemler, doğrusal sistemler, gözleyici, LQR.

ABSTRACT

Master Thesis

OBSERVER BASED STATE FEEDBACK CONTROL OF UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

Günyaz ABLAY

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical and Electronics Engineering

2006, Page: 109

In this thesis, an observer based robust control is designed for the uncertain linear and nonlinear systems. The closed loop stability is achieved by employing Lyapunov stability theory. The control parameters are adjusted in order to achieve the desired closed loop performance. The controller has linear and nonlinear parts. The gains of linear part are designed based on linear quadratic regulator, LQR. The nonlinear part of the controller has bang-bang characteristic to cope with nonlinearities and uncertainties.

Keywords: Nonlinear systems, nonlinear control, uncertain systems, linear systems, observer, LQR.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin durum geribeslemeli ve gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü için bir kontrol yöntemi verilmiştir. Verilen kontrolör ile belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin dayanıklı durum geribeslemeli ve gözleyici temelli dayanıklı durum geribeslemeli kontrolü yapılmış ve benzetim sonuçları yorumlanarak verilmiştir.

Bu tez çalışmasının 2. bölümünde verilen kutup yerleştirme ile durum geribeslemeli kontrol tasarımı ve optimal geribeslemeli kontrol, LQR, sistem parametrelerinde herhangi bir değişikliğin olmadığı durumlarda kullanılır. Kutup yerleştirmede hedeflenen dominant kutup belirlenir ve diğer kutuplar sol yarı s düzleminde seçilir. Optimal geribeslemeli kontrolör, LQR, tasarımında ise kontrolör kazançları verilen performans indeksini minimize edecek şekilde tasarlanır [1–5]. Ancak fiziksel sistemler yapıları gereği veya örneğin robotlarda olduğu gibi taşıdıkları yüklerdeki değişimden dolayı belirsizlik içerirler. Ayrıca belirsizlikler sistemin bilinmeyen parametrelerinden, tanımlanması zor olan doğrusal olmayan niceliklerden ve modellenemeyen dinamiklerden meydana gelebilir. Bu tip sistemlerin kontrolü için birçok kontrolör tasarım metodu geliştirilmiştir [6–17]. Böyle belirsizlik içeren sistemler için belirsizliğin değişim aralığı biliniyorsa, bu belirsizliğin değişim aralığını karşılayacak ve hedeflenen kapalı çevrimli sistem performansını da sağlayacak kontrolör tasarlanmalıdır.

Belirsizlikler iki genel sınıfa ayrılabilir, yapısal (veya parametrik) belirsizlikler ve yapısal olmayan belirsizlikler (veya modellenemeyen dinamikler). Bu tez çalışmasında literatürde “matching conditions” olarak bilinen denkleştirme şartlarını sağlayan parametrik (yapısal) belirsizlikleri içeren dinamik sistemlerin kontrolü yapılacaktır. Bu tip belirsizlikler sistemin doğal yapısından meydana gelebileceği gibi, sistem girişinden veya sistem çıkışından da kaynaklanabilir. Tasarlanan kontrolörler ile bu tip belirsizlikleri içeren sistemin hedeflenen davranışı göstermesi sağlanacak ve sistemin kararlılığı garanti altına alınacaktır. Bu amacı gerçekleştirebilmek için [6]’da verilen ve tanımlanan doğrusal sistemler için geliştirilen kontrolör doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulanacaktır. Önerilen kontrolör doğrusal ve doğrusal olmayan iki kontrolörün birleşiminden oluşmuştur. Kontrolörün doğrusal kısmı ile nominal sistemin kararlılığı ve hedeflenen geçici rejim performansı sağlanacaktır. Doğrusal olmayan kısmı ile kapalı çevrimde belirsiz parametrelerin etkileri giderilecek ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığı Lyapunov kararlılık metodu kullanılarak sağlanacaktır.

Bölüm 2 ve 3’te kontrolör tasarımı tüm durum değişkenlerinin ölçülebildiği varsayılarak yapıldı. Ancak, pratik uygulamalarda durum değişkenlerinden yalnızca bazıları ölçülebilir. Bunun sebepleri teknik olabilir veya durum değişkenlerinin ölçümü çok pahalı olabilir. Bu nedenle ölçülebilen durum değişkenlerinden, ölçülemeyen durum değişkenlerini

elde edebilmek için, bölüm 4 ve 5'te anlatılan [1–6, 18]'de verilen gözleyici kullanılır. Bölüm 5'te belirsizlik içeren doğrusal sistemler için, belirsizliklere karşı duyarsız bir gözleyici tasarlanacaktır. Bunun yanı sıra, belirsizliklere duyarsız gözleyicinin kullanılmasıyla sistemin asimptotik ve pratik kararlılığı, Lyapunov kararlılık yöntemine göre, garantilenecek ve ispatlanacaktır. Tanımlanan doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için kontrolör kazançları ve gözleyici kazançlarının ayrı ayrı tasarlanabilmesine olanak veren bağımsızlık (separation) prensibinin varlığı ve ispatı verilmiştir. Daha sonra [6]'da verilen doğrusal ve [19]'da verilen doğrusal olmayan birer sistem üzerinde uygulama yapılarak, sonuçlar verilmiştir. Tezin 6. bölümünde elde edilen sonuçlar özetlenerek geleceğe yönelik öneriler yapılmıştır.

Bu tezde, değişim aralıkları bilinen veya tahmin edilebilen yapısal belirsizlikleri içeren dinamik sistemlerin dayanıklı (robust) durum geribeslemeli ve gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü yapılmıştır. [6]'da verilen kontrolör kullanılarak bir teorem önerilmiş ve önerilen teorem, kaynaklardan da yararlanılarak, Lyapunov kararlılık yöntemi kullanılarak ispatlanmıştır. Daha sonra, [6]'da verilen kontrolör ve gözleyici tasarımı genişletilerek doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulanmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler üzerindeki uygulamaların benzetimi Matlab/SIMULINK 6.5 ortamında gerçekleştirilmiş ve benzetim sonuçları yorumlanmıştır.

2. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ

2.1. Giriş

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin dinamik denklemi,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

ve çıkışı,

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2)$$

ile tanımlanır. $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi, $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisi, $D \in R^{m \times r}$ giriş-çıkış geçiş matrisi, $x(t) \in R^n$ durum değişkeni, $u(t) \in R^r$ giriş vektörü, $y(t) \in R^m$ çıkış vektörüdür. Denklem (2.1) ve (2.2) sisteminde verilen matris boyutlarında n , r , m sayıları fiziksel olarak sırasıyla; durum değişkeni sayısı, kontrol girişi sayısı ve çıkış değişkeni sayısına karşılık gelmektedir.

Durum değişkeni, giriş vektörü ve çıkış vektörü sırası ile $x(t) = x$, $u(t) = u$ ve $y(t) = y$ alınırsa, denklem (2.1) ve (2.2) yeni formda aşağıdaki gibi olur:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.3)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.4)$$

Denklem (2.3) ve (2.4)'te tanımlanan sistemde durum değişkenlerinin geribeslemede kullanılabilmesi için; sistemin tüm durum değişkenlerinin çok iyi ölçülmesi ve sistemin Kalman tarafından tanıtılmış olan tüm durum kontroledilebilirlik özelliğine sahip olması gerekir [1].

Tüm Durum Kontroledilebilirlik: Eğer denklem (2.3) sisteminin tüm $x(t)$ durumları sınırsız bir kontrol işareti $u(t)$ ile, sınırlı bir $t_0 \leq t \leq t_1$ süresinde $x(t_0)$ başlangıç durumundan $x(t_1)$ durumuna götürülebiliyorsa, bu sistem tüm durum kontroledilebilirdir denilir. n . mertebeden bir sistemin kontroledilebilirlik matrisi,

$$M = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.5)$$

dir ve sistemin tüm durum kontroledilebilmesi için $rank(M) = n$ olmalıdır.

2.2. Kutup Yerleştirme ile Durum Geribeslemeli Kontrolör Tasarımı

Denklem (2.3) ve (2.4)'te tanımlanan sistemin tüm durum kontroledilebilir olduğu ve durum değişkenlerinin ölçülebildiği varsayılırsa, tüm durum geribeslemeli kontrol,

$$u = -Kx \quad (2.6)$$

ve kazancı $K \in R^{1 \times n}$ hedeflenen kapalı çevrim performansını sağlayacak şekilde tasarlanabilir. Denklem (2.6)'da verilen kontrol, denklem (2.3)'te yerine yazılırsa kapalı çevrim dinamiği,

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.7)$$

olur. Kontrol kazancı $K \in R^{1 \times n}$ nin hedeflenen kapalı çevrim performans kriterini sağlayacak şekilde tasarımı için birçok tasarım metodu geliştirilmiştir. Bu metotlar genel olarak [1-5]'te detaylı olarak verilmiştir.

Bu çalışmada, kutup yerleştirme olarak adlandırılan ve [1]'de belirlenen tasarım ve tasarım adımları verilecektir. Daha sonra, optimal kontrol kazançlarının sınırlandırılmış kontrol işaretiyle nasıl tasarlanacağı da ileride verilecektir.

Kontrol edilebilir kanonik form ve kutup yerleştirme:

Denklem (2.3) ve (2.4), doğrusal durum transformasyonu $|T| \neq 0$ olmak üzere;

$$x = Tz \quad (2.8)$$

ile kontrol edilebilir kanonik forma;

$$\dot{z} = T^{-1}AT z + T^{-1}Bu \quad (2.9)$$

$$y = CTz + Du \quad (2.10)$$

olarak getirilir. Burada $T^{-1}AT$ sistem matrisi;

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$T^{-1}B$ giriş matrisi;

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ve CT çıkış matrisidir. M kontrol edilebilirlik matrisi, a_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) denklem (2.3)'teki kontrolsüz sistemin karakteristik denkleminin;

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (2.13)$$

katsayıları ve W matrisi;

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

olmak üzere, denklem (2.8)'deki T dönüşüm matrisi;

$$T = MW \quad (2.15)$$

olur.

Hedeflenen kapalı çevrim kutupları $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ için, kapalı çevrim karakteristik denklem,

$$\begin{aligned} |sI - (A - BK)| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

olur. Denklem (2.8)'de verilen transformasyonla kontrol işareti, z durum değişkeni formunda $u = -KTz$ olur. Kontrol edilebilir kanonik formdaki kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi ise,

$$|sI - (T^{-1}AT - T^{-1}BKT)| = 0 \quad (2.17)$$

dir. $\delta_i = \alpha_i - a_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) olmak üzere yeni durum değişkeni z cinsinde kontrol kazanç matrisi,

$$KT = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (2.18)$$

dir. x durum değişkeni cinsinde kontrol kazanç matrisi K yalnız bırakılırsa;

$$K = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] T^{-1} \quad (2.19)$$

yada açık formda,

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (2.20)$$

dir.

Kutup Yerleştirme Tasarım Adımları:

Adım 1: Sistemin tüm durum kontrol edilebilirlik şartı, $\text{rank}(M) = n$ ise adım 2'ye geçilir. $\text{rank}(M) < n$ ise sistem için tüm durum kontrolör tasarlanamaz.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları belirlenir ve W matrisi oluşturulur.

Adım 3: Kontrol edilebilir kanonik formdaki $T = MW$ transformasyon matrisi bulunur. Eğer sistem kontrol edilebilir kanonik formda ise T matrisi birim matristir. T transformasyon matrisi kullanılarak sistem,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du \end{aligned}$$

kontrol edilebilir kanonik forma getirilir.

Adım 4: Hedeflenen kapalı çevrim özdeğerleri, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 'den hedeflenen kapalı çevrim karakteristik polinomu yazılır;

$$\begin{aligned} \left| sI - (T^{-1}AT - T^{-1}BKT) \right| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

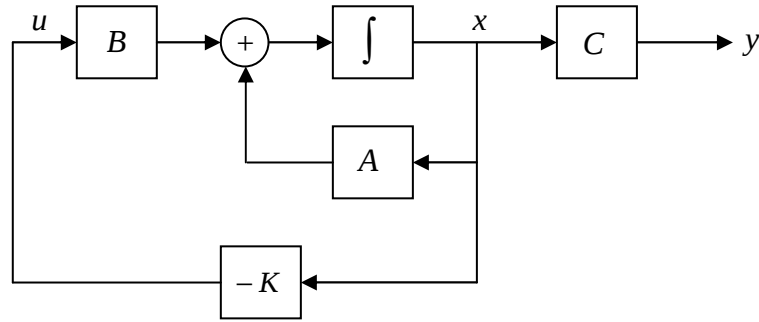
ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ katsayıları belirlenir.

Adım 5: Durum geribesleme kazanç matrisi K ,

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

elde edilir.

Örnek 2.1: Şekil 2.1'deki regülatör (girişi sıfır) sistem verilsin ve A , B ve C matrisleri sırası ile;



Şekil 2.1: Regülatör sistem

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

olarak verilsin. Şekildeki kontrol kazançları hedeflenen kapalı çevrim sistemin özdeğerlerini, $\mu_1 = -2 + j4$, $\mu_2 = -2 - j4$ ve $\mu_3 = -10$ 'u sağlayacak şekilde elde edelim.

Adım 1: Sistemin tüm durum kontroledilebilirlik şartı;

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(M) = 3$ olduğundan sağlandı.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$\begin{aligned}
|sI - A| &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\
&= \begin{vmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix} \\
&= (s+1)(s+2)(s+3) \\
&= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0
\end{aligned}$$

$a_1 = 6, a_2 = 11, a_3 = 6$ olarak bulunur.

Adım 3: T transformasyon matrisi;

$$T = MW = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve kontroledilebilir kanonik formda sistem:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
\end{aligned}$$

$$y = CTz + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Adım 4: Hedeflenen kapalı çevrim sistemin özdeğerlerinden hedeflenen karakteristik polinom;

$$\begin{aligned}
(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) &= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 \\
&= (s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) \\
&= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0
\end{aligned}$$

Buradan $\alpha_1 = 14, \alpha_2 = 60, \alpha_3 = 200$ olarak saptanır.

Adım 5: Kontrol kazanç matrisi;

$$\begin{aligned}
K &= [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1} \\
&= [200 - 6 \quad 60 - 11 \quad 14 - 6] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [25 \quad 128 \quad 8]
\end{aligned}$$

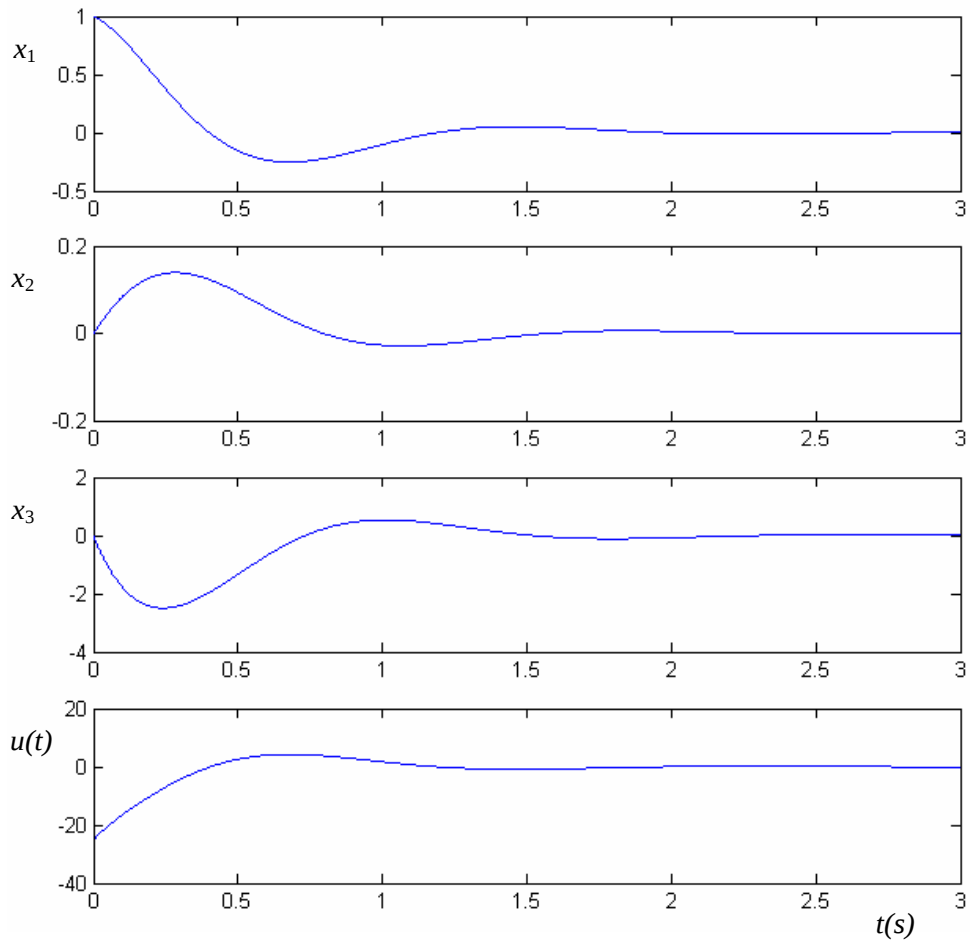
olarak bulunur.

Geribeslemeli kontrolör;

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 25 & 128 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= -25x_1 - 128x_2 - 8x_3$$

olur.

Şekil 2.2’de $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 0, 0)$ başlangıç şartları için regülatör sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı görülmektedir. Geçici rejim yanıtını sistemin dominant kutbu belirlediğinden $\tau = 1/2$ zaman sabitesi olmak üzere; hedeflenen geçici rejim yanıtı $4\tau = 2$ s olup, şekilden de görüldüğü gibi sistem $t = 2$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak ulaşmaktadır.



Şekil 2.2: Örnek 2.1’de verilen sistemin durum değişkenleri ve kontrol sinyali

Servo ($r(t)$ girişi sabit olan) sistemler için durum geribeslemeli kontrolör tasarımı:

a) 1 tipli, transfer fonksiyonu $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 'nin paydasında s çarpanı olan [1], sistemin blok diyagramı şekil 2.3'te verilmiştir. Burada, $K_T = [0 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n]$ 'dir. Durum uzay formunda $D = [0]$ için sistem;

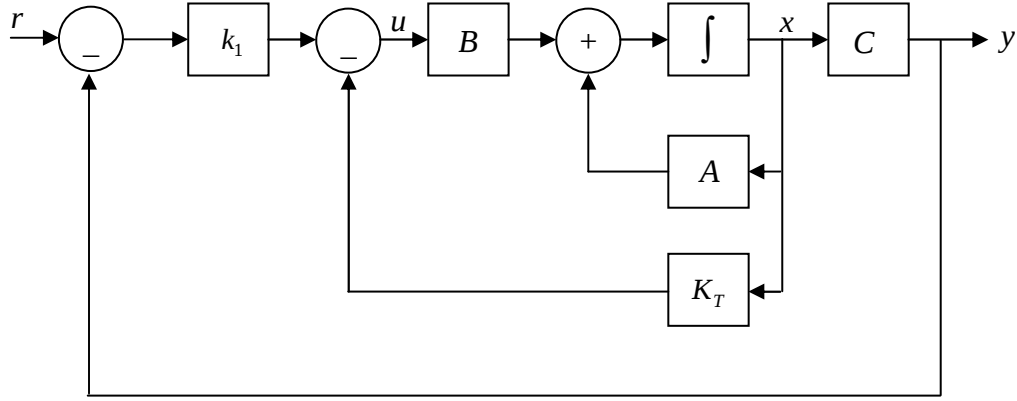
$$\dot{x} = Ax + B[u + r] \quad (2.21)$$

$$y = Cx \quad (2.22)$$

dir. Şekil 2.3'teki tek girişli tek çıkışlı kontroledilebilir kanonik formdaki sistem için kapalı çevrimli sistemin dinamiği;

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_1r \quad (2.23)$$

dir.



Şekil 2.3: 1 tipli servo sistem

Örnek 2.2: Şekil 2.3'teki servo sistem için A , B ve C matrisleri sırası ile;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

olarak verilsin. Şekildeki kontrol kazançları hedeflenen kapalı çevrim sistemin özdeğerlerini, $\mu_1 = -2 + j4$, $\mu_2 = -2 - j4$ ve $\mu_3 = -10$ 'u sağlayacak şekilde elde edelim.

Sistemin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

olup, paydasında s çarpanı içerdiğinden sistem 1 tiplidir.

Adım 1: Sistemin tüm durum kontroledilebilirlik şartı;

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(M) = 3$ olduğundan sağlandı.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$\begin{aligned} |sI - A| &= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s = 0 \end{aligned}$$

$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 0$ olarak bulunur.

Adım 3: Transformasyon matrisi T ;

$$T = MW = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birim matris olduğundan sistem kontroledilebilir kanonik formdadır ve $T^{-1} = T$ 'dir.

Adım 4: Hedeflenen kapalı çevrim sistemin özdeğerlerinden hedeflenen karakteristik polinom;

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) &= s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3 \\ &= (s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) \\ &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0 \end{aligned}$$

Buradan $\alpha_1 = 14, \alpha_2 = 60, \alpha_3 = 200$ olarak saptanır.

Adım 5:

$$\begin{aligned} K &= [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1} \\ &= [200 - 0 \quad 60 - 2 \quad 14 - 3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [200 \quad 58 \quad 11] \end{aligned}$$

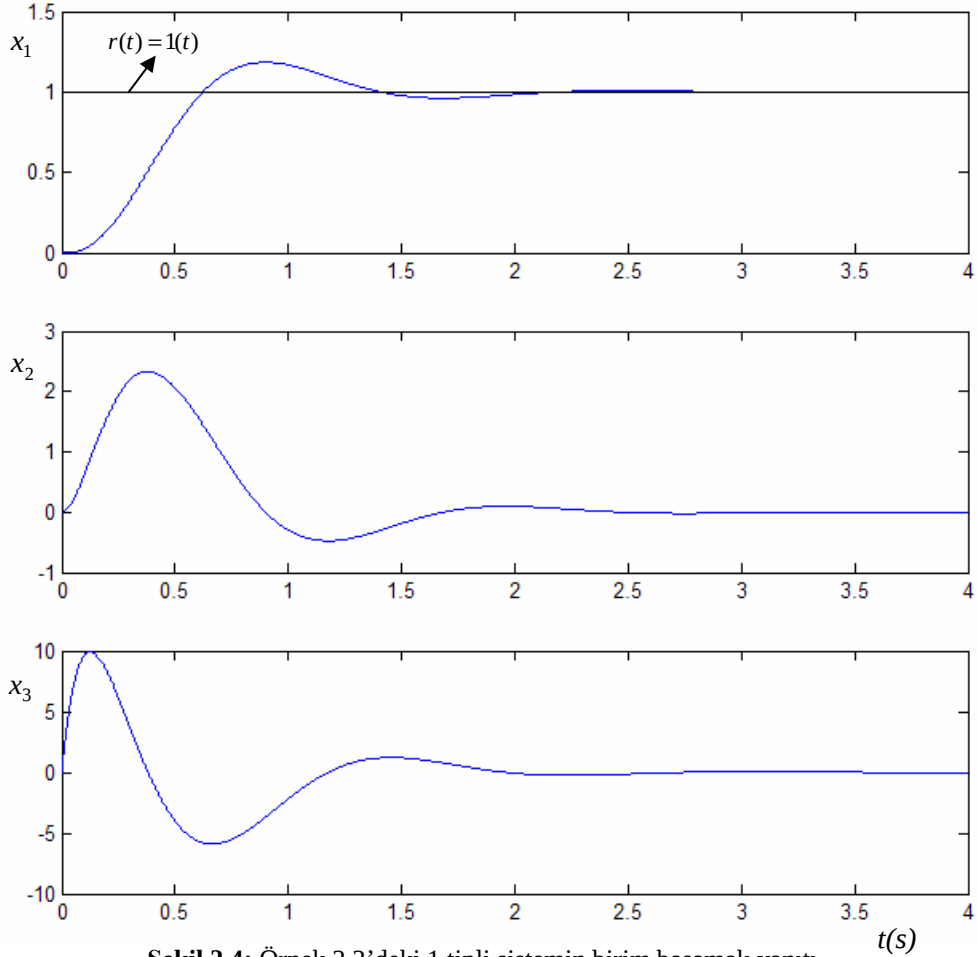
olur.

$r(t)$ sabit girişi için kapalı çevrim sistem dinamiği;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Bk_1r \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} r \end{aligned}$$

dir.

Referans girişi $r(t) = 1(t)$ için sistemin birim basamak yanıtı şekil 2.4'te verilmiştir. Hedeflenen geçici rejim yanıtı $\tau = \frac{1}{2}$ zaman sabitesi olmak üzere $4\tau = 2$ s olup, şekilden de görüldüğü gibi sistemin sürekli duruma erişme süresi $t = 2$ s'dir. Sistem çıkışı sürekli durumda referans girişe $t = 2$ s'de asimptotik olarak ulaşmakta ve referans girişi takip etmektedir.



şekil 2.4: Örnek 2.2'deki 1 tipli sistemin birim basamak yanıtı

b) 0 tipli, transfer fonksiyonunun paydasında s çarpanı olmayan sistemin blok diyagramı şekil 2.5'te verilmiştir. Durum uzay formunda $D = [0]$ için sistemin dinamiğı;

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.24)$$

$$y = Cx \quad (2.25)$$

dir. Sistem girişi $r(t)$ ve çıkışı $y(t)$ arasındaki hatanın integralini alan dinamik;

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (2.26)$$

dir. Bu durumda kontrol işareti;

$$u = -Kx + k_i \xi \quad (2.27)$$

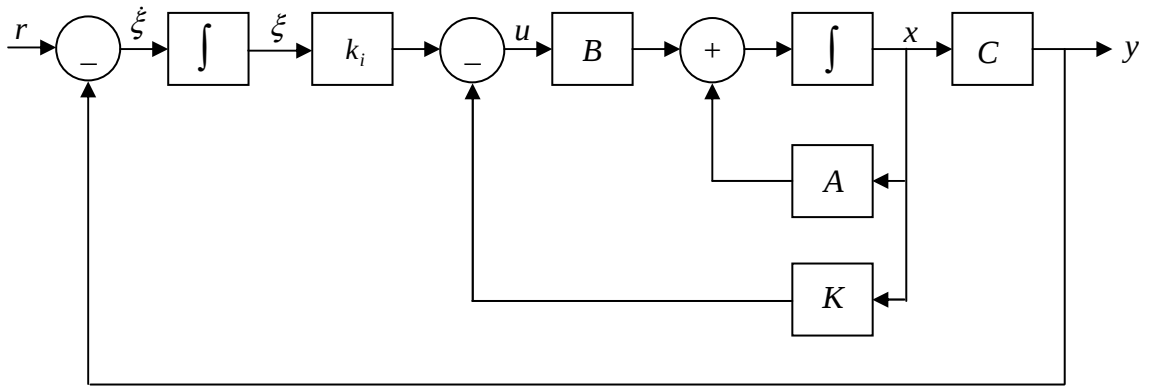
olur. Burada, k_i hata dinamiği üzerindeki kazançtır. Kontrolsüz sistemin dinamiği eklenmiş durum uzay formunda;

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (2.28)$$

olur. Denklem (2.27)'de verilen kontrolör ile kapalı çevrim dinamiği;

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (2.29)$$

olur.



Şekil 2.5: 0 tipli servo sistem

Örnek 2.3: Şekil 2.5'te verilen servo sistem için A , B ve C matrisleri sırası ile;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

dir. Sistemin transfer fonksiyonu,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

olduğundan sistem 0 tiplidir. $r(t)$ sabit girişi için sistem dinamiği;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

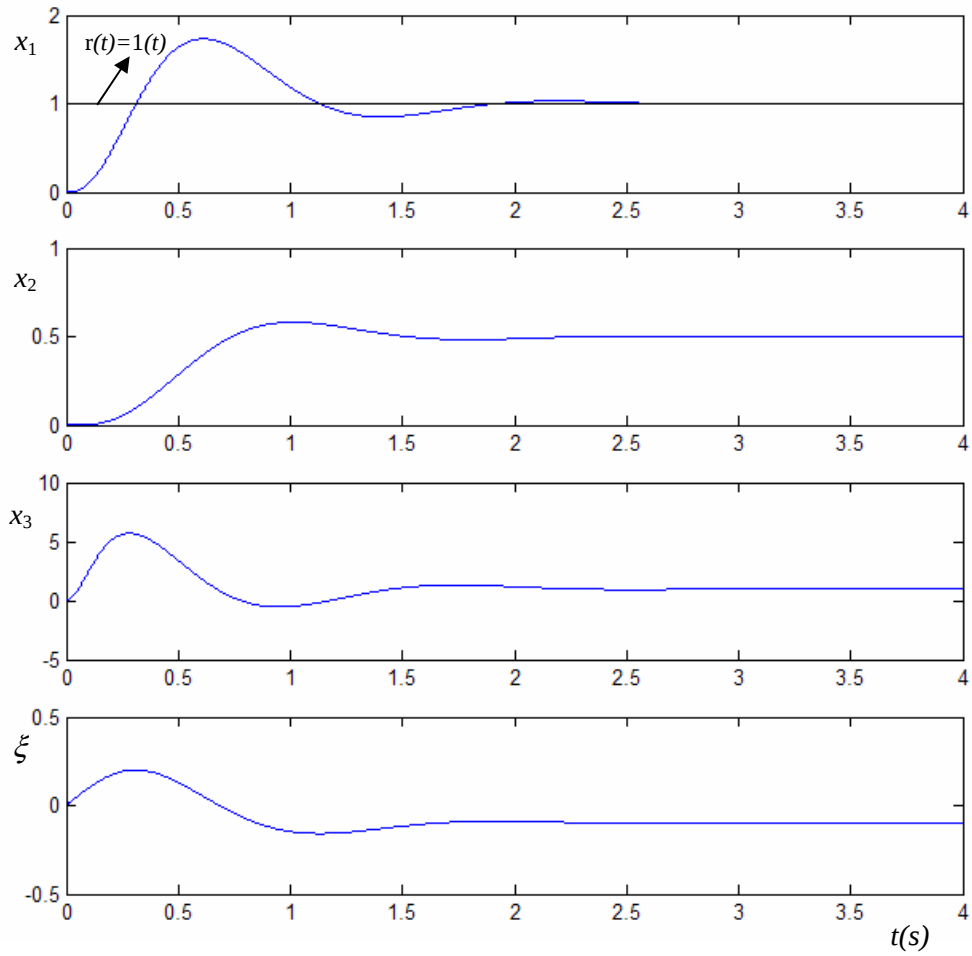
dir. Hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını $\mu_1 = -2 - j4$, $\mu_2 = -2 + j4$, $\mu_3 = -10$ ve $\mu_4 = -10$ olarak seçelim. Durum geribeslemeli kontrol kazançları eklenmiş durum değişkeni formundaki kapalı çevrimli sistemin hedeflenen performansı sağlamak üzere;

$$u = -Kx + k_1\xi = -\begin{bmatrix} 135 & -512 & 18 & \vdots & -1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$= -135x_1 + 512x_2 - 18x_3 + 1000\xi$$

olarak bulunur.

Referans girişi $r(t) = 1(t)$ için sistemin birim basamak yanıtı şekil 2.6'da verilmiştir. Hedeflenen geçici rejim yanıtı $\tau = 1/2$ zaman sabitesi olmak üzere $4\tau = 2$ s olup, şekilden de görüldüğü gibi sistemin sürekli duruma erişme süresi $t_s = 2$ s 'dir. Sistem çıkışı $y(t) = x_1(t)$,



Şekil 2.6: Örnek 2.3'teki 0 tipli sistemin birim basamak yanıtı

sürekli durumda $r(t) = 1(t)$ referans girişine $t = 2$ s 'de asimptotik olarak ulaşmakta ve referans girişi takip etmektedir. Sonuç olarak, kapalı çevrimli sistem hedeflenen geçici rejim davranışını göstermektedir.

Sonuçlar:

Kutup yerleştirmede ilk adım hedeflenen kapalı çevrim kutuplarını seçmektir. Bu yaklaşım root locus tasarımındaki deneyimlere dayanır ve bu yaklaşımda önce kapalı çevrimin dominant kutuplarının yerleri belirlenir, sonra diğer kutuplar sol yarı s düzleminde kapalı çevrim kutuplarının solunda seçilir. Ancak, dominant kapalı çevrim kutupları $j\omega$ ekseninden uzaklaştıkça sistemin dinamik tepkisi hızlanır, sistemdeki sinyaller oldukça büyür ve sonuçta belki de sistem doğrusal olmayan hale gelebilir [1].

Verilen sistem için K matrisinin seçimi tek değildir, fakat hedeflenen kapalı çevrim kutuplarının seçimine bağlıdır. Kapalı çevrim kutupları dinamik tepkinin hızını ve sönüm oranını belirler. Dinamik tepkinin hızı yüksek kazançlı sistemlerde istenmeyen gürültüler oluşturabilir. Ayrıca yüksek mertebeden sistemler için kapalı çevrim kutuplarının yerleri tam olarak belirlenemeyebilir. Bundan dolayı, verilen sistem için durum geribesleme kazanç matrisi K 'nın belirlenmesinde pek çok farklı K matrisleri için sistemin karakteristik tepkisi bilgisayar simülasyonları kullanılarak incelenebilir ve bunlardan en iyi sistem performansını veren seçilebilir.

Bu bölümde kutup yerleştirme metoduyla kontrolör kazanç matrisi K 'nın hesaplanması verildi. Diğer yaklaşım, kapalı çevrim kutupları, gereksinim duyulan kontrol enerjisini sınırlayan ve en uygun dinamik tepkiyi verecek şekilde tanımlayan ve ileriki bölümde verilen kuadratik optimal kontrol yaklaşımı temellidir.

2.3. Optimal Geribeslemeli Kontrol; LQR

Bu bölümde doğrusal kuadratik regülatör (LQR) metoduyla optimal geribeslemeli kontrol tasarlanacaktır. Tasarıma geçmeden önce “Niçin optimal kontrol?” sorusunu yanıtlamak gerekir. Bu sorunun cevabını vermek için önceki bölümde verilen kutup yerleştirme metoduna “Kutup yerleştirme metoduyla tasarımda acaba dinamik tepkinin hızı ve sönüm oranı yeterli midir?” sorusunun sorulması gerekir.

Optimal kontrol tasarımı için ilk sebep; kutup yerleştirme tekniğinin kontrolör parametrelerini (kazançlarını) tam olarak belirleyemiyor olduğu çok girişli-çok çıkışlı sistemlerdir. Örneğin r girişli ve bütün durum değişkenleri geribeslemede kullanılabilen n . mertebeden bir sistemi düşünelim. Böyle bir sistemin kontrolörü $n \times r$ parametreyle tanımlanabilir; fakat sistemin yalnızca n tane kapalı çevrim kutbu olabilir. Bu nedenle aynı kapalı çevrim kutuplarını elde edilebilen son derece çok yol vardır. Bu kapalı çevrim kutuplarını elde eden yollardan hangisinin en iyisi olduğunun bilinmemesi ve en uygun sistem performansını verecek bir algoritmanın olmaması sistem tasarımcısı için kayıptır. Bu durumdan kurtulmak için en uygun sistem performansını veren bir kontrol seçilmelidir.

Optimal kontrolör tasarımı için ikinci sebep; kutup yerleştirme metoduyla tasarımda hedeflenen dominant kutuplar dışındaki seçilen diğer kutuplar orijinden uzaklaştıkça sistemin dinamik tepkisi çok hızlı olabilir; fakat gerekli kontrol sinyalleri uygun güç sağlanamayacak kadar çok büyük olabilir. Kazançların kullanımı için bu sinyaller üretilebilmelidir. Güç sınırlaması yapılmaksızın elde edilen kontrol sinyalleri fiziksel sınırları aşmaya (saturasyon gibi) neden olabilir. Böyle durumda kapalı çevrim sistemin dinamik davranışı doğrusal analizlerde tahmin edildiği gibi olmayacaktır ve belki de karasız olacaktır [5]. Bu problemten kaçınmak için dinamik tepkinin hızı saturasyona sebep olmayacak şekilde sınırlandırılır.

Optimal kontrol tasarımı için üçüncü sebep; dinamik tepkinin hız limitinin tipik olarak yüksek kazançlı sistemlerde ortaya çıkardığı istenmeyen gürültü probleminden kaçınmaktır.

Optimizasyon teorisinin amacı tüm bu problemlerden kurtulmaktır. Tüm fiziksel kısıtlamalara rağmen en uygun sistem performansının sağlanması istenir. Optimal geribeslemeli kontrol kullanılarak kontrol sinyalinin genliği ayarlanarak sınırlandırılabilir ve bu sınırlar içinde en uygun sistem performansı sağlanabilir.

Optimal regülatör problemi için kontrol edilecek sistem, denklem (2.3) ile verilen,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.30)$$

dir. Denklem (2.30) ile tanımlanan sistem için optimal kontrol vektörü $u(t)$ 'nin belirlenmesi problemini ele alalım. Performans indeksi, $Q \in R^{n \times n}$ pozitif veya pozitif yarı tanımlı simetrik

matris, $R \in R^{r \times r}$ pozitif tanımlı simetrik matris ve $u(t)$ sınırlandırılmamış kontrol işareti olmak üzere, performans indeksi

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (2.31)$$

dir. Denklem (2.6)'da verilen kontrol kazançları öyle seçilir ki denklem (2.31)'deki performans indeksi olsun. Optimal kazanç matrisi K , Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak elde edilebilir. Denklem (2.31)'in sağ tarafındaki birinci terim hata sinyalini ve ikinci terim kontrol sinyalini harcadığı enerjiyi verir. Q ve R matrisleri sırasıyla, hata sinyalini ve kontrol sinyali enerjisini sınırlayan ağırlık matrisleridir. Bundan dolayı Q , hata ağırlık matrisi ve R , kontrol ağırlık matrisi olarak adlandırılır. Ele alınan optimal kontrol probleminde K matrisinin elde edilmesinde R , kontrol vektörü $u(t)$ 'nin saturasyona girmeyeceği şekilde seçilir.

Denklem (2.6)'daki doğrusal kontrolör denklem (2.31) esas alınarak tasarlanırsa optimaldır. Yani, K matrisinin bilinmeyen elemanları performans indeksini minimize edecek şekilde tanımlanmışsa, $u = -Kx$ kontrolü herhangi bir başlangıç şartı $x(0)$ için optimaldır.

Optimizasyon problemini çözmek için denklem (2.6) ile verilen kontrol işareti denklem (2.30) sisteminde yerine yazılırsa;

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.32)$$

elde edilir. Bulunacak K matrisi için $A - BK$ matrisi kararlı olduğundan, aşağıdaki kapalı çevrimli sistemin karakteristik matrisi $|sI - (A - BK)|$ 'nin kararlıdır veya $A - BK$ matrisinin özdeğerlerinin hepsi kompleks düzlemin negatif reel bölümündedir. Denklem (2.6), denklem (2.31)'de yerine yazılırsa;

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

elde edilir. Eğer $\dot{x} = (A - BK)x$ sistemi kararlı ise, P pozitif tanımlı ve simetrik bir matris olmak üzere, seçilen Lyapunov fonksiyonu $V(x) = x^T P x$ pozitif tanımlı bir fonksiyonu için Lyapunov fonksiyonunun türevi $\dot{V}(x) = -x^T (Q + K^T R K) x$ negatif tanımlıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} x^T (Q + K^T R K) x &= -\frac{d}{dt}(V(x)) \\ x^T (Q + K^T R K) x &= -\frac{d}{dt}(x^T P x) \end{aligned}$$

dir. Kapalı çevrimli sistem için,

$$\begin{aligned}
x^T (Q + K^T RK) x &= -\frac{d}{dt} (x^T P x) = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\
&= -[(A - BK)x]^T P x - x^T P [(A - BK)x] \\
&= -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemin her iki tarafının denkleştirilmesi ile denklem herhangi bir $x(t)$ için,

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK) \quad (2.33)$$

olur. Lyapunov'un ikinci metoduna [3,22] göre, eğer $(A - BK)$ matrisi orijine göre kararlı bir matris ise denklem (2.33)'ü sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi vardır. Bu durumda, $x(0)$ seçilen durum değişkeninin başlangıç şartı ve $x(\infty)$ durum değişkeninin alacağı son değer olmak üzere, performans indeksi açık formda;

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T RK) x dt = -x^T P x \Big|_0^{\infty} = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0)$$

dir. Kapalı çevrimli sistem $A - BK$, orijine göre asimptotik kararlı olduğundan $x(\infty) \rightarrow 0$ 'dır. Bu nedenle, performans indeksi J , $x(0) \neq 0$ için $J > 0$ ve $x(0) = 0$ için $J = 0$ olduğundan pozitif tanımlıdır ve durum değişkenlerinin başlangıç şartı $x(0)$ ve P terimlerinden elde edilebilir.

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (2.34)$$

Denklem (2.31)'de belirtildiği gibi R pozitif tanımlı reel simetrik bir matris ve T singüler olmayan bir matris olduğundan,

$$R = T^T T$$

iki matrisin çarpımı olarak yazılabilir. Böylece, denklem (2.33);

$$(A^T - K^T B^T) P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0$$

olarak yazılabilir. Bu denklemi düzenlersek;

$$A^T P + PA + Q + K^T T^T T K - K^T B^T P - PBK = 0 \quad (2.35)$$

olur. Denklem (2.35) ile verilen eşitlikte,

$$K^T T^T T K - K^T B^T P - PBK = K^T T^T T K - K^T T^T (T^T)^{-1} B^T P - P B T^{-1} T K \quad (2.36)$$

olarak yazılırsa ve denklem (2.36)'ya $P B T^{-1} (T^{-1})^T B^T P$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
K^T T^T T K - K^T B^T P - PBK &= K^T T^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B T^{-1} T K + P B T^{-1} (T^{-1})^T B^T P \\
&\quad - P B T^{-1} (T^{-1})^T B^T P \\
&= K^T T^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B T^{-1} [TK - (T^T)^{-1} B^T P] \\
&\quad - P B T^{-1} (T^{-1})^T B^T P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [K^T T^T - P B T^{-1}] [T K - (T^T)^{-1} B^T P] - P B T^{-1} (T^{-1})^T B^T P \\
&= [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P
\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden denklem (2.35),

$$A^T P + P A + [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

formunda olur. Performans indeksi J 'nin kontrol kazanç matrisi K 'ya göre minimizasyonu için;

$$x^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T K - (T^T)^{-1} B^T P] x$$

ifadesi sıfıra gitmelidir. Burada K matrisi, değişken ve tasarlanacak parametre olduğundan bu ifadenin K 'ya göre minimizasyonu gerekir. Bu ifade negatif olmadığından bunu minimum yapan değer, bu ifadeyi sıfır yapan,

$$T K = (T^T)^{-1} B^T P$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
K &= T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P \\
&= (T^T T)^{-1} B^T P \\
&= R^{-1} B^T P
\end{aligned} \tag{2.37}$$

elde edilir. Denklem (2.37) optimal K matrisini verir. Böylece performans indeksi denklem (2.31)'deki gibi olan optimal kontrol problemi için verilen doğrusal optimal kontrolör;

$$u = -Kx = -R^{-1} B^T P x \tag{2.38}$$

olur. Denklem (2.37)'deki pozitif tanımlı P matrisi denklem (2.33)'ü veya aşağıdaki indirgenmiş Riccati matris denklemini [1] sağlamak zorundadır:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{2.39}$$

Doğrusal sistemler için optimal kuadratik kontrol tasarım adımları:

Adım 1: Sistem matrisi A , giriş matrisi B , hata sinyali ağırlık matrisi Q ve kontrol sinyali ağırlık matrisi R kullanılarak indirgenmiş Riccati matris denkleminde, $A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$, pozitif tanımlı ve simetrik P matrisi bulunur.

Adım 2: Bulunan P matrisi kullanılarak K optimal kontrol kazanç matrisi $K = R^{-1} B^T P$ 'den hesaplanır.

Elde edilen K matrisine göre, $(A - BK)$ matrisi kararlı olduğundan bu metot daima doğru sonuç verir. Böylece, $u = -R^{-1} B^T P x$ kontrolü kullanılarak $J = x^T(0) P x(0)$ 'ı minimize eden indirgenmiş Riccati matris denklemini elde edilir.

Örnek 2.4: Şekil 2.1'deki regülatör sistem için A , B ve C matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

dir. Bölüm 2.2'de verilen örnek 2.1 ile karşılaştırma yapabilmek amacı ile performans indeksi,

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$= \int_0^{\infty} [(20x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + u^2] dt$$

sağlayacak optimal durum geribeslemeli kontrolör, $u = -Kx$ kazançlarının denklem (2.39) kullanılarak tasarlanması için hata ağırlık matrisi,

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve sistem tek girişli olduğundan kontrol ağırlık matrisi $R = [1]$ olarak seçilebilir.

Adım 1: Optimal durum geribeslemeli kazanç matrisi K aşağıdaki matlab programı kullanılarak indirgenmiş Riccati denkleminde;

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

pozitif tanımlı ve simetrik P matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} 8.4475 & 0.0754 & 1.8044 \\ 0.0754 & 0.25 & 0.0132 \\ 1.8044 & 0.0132 & 0.689 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Adım 2: Adım 1'de elde edilen P matrisini kullanarak optimal kazanç matrisi K :

$$K = R^{-1}B^T P$$

$$= [1][0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 8.4475 & 0.0754 & 1.8044 \\ 0.0754 & 0.25 & 0.0132 \\ 1.8044 & 0.0132 & 0.689 \end{bmatrix}$$

$$= [1.8044 \ 0.0132 \ 0.689]$$

olarak hesaplanır.

Matlab programı:

%Örnek 2.4'te verilen sistem için kontrol kazançlarının indirgenmiş Riccati denklemi kullanılarak elde edilmesi için önerilen matlab programı:

$A=[-1 \ 0 \ 1;1 \ -2 \ 0;0 \ 0 \ -3];$

$B=[0;0;1];$

$$C=[1 \ 0 \ 0];$$

$$D=[0];$$

$$Q=[20 \ 0 \ 0;0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 1];$$

$$R=[6];$$

$[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)$ %optimal kontrol kazancı K 'nın hesaplanması, burada E kapalı
%çevrimli sistemin özdeğerlerini verir.

Böylece, optimal geribeslemeli kontrol;

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 1.8044 & 0.0132 & 0.689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

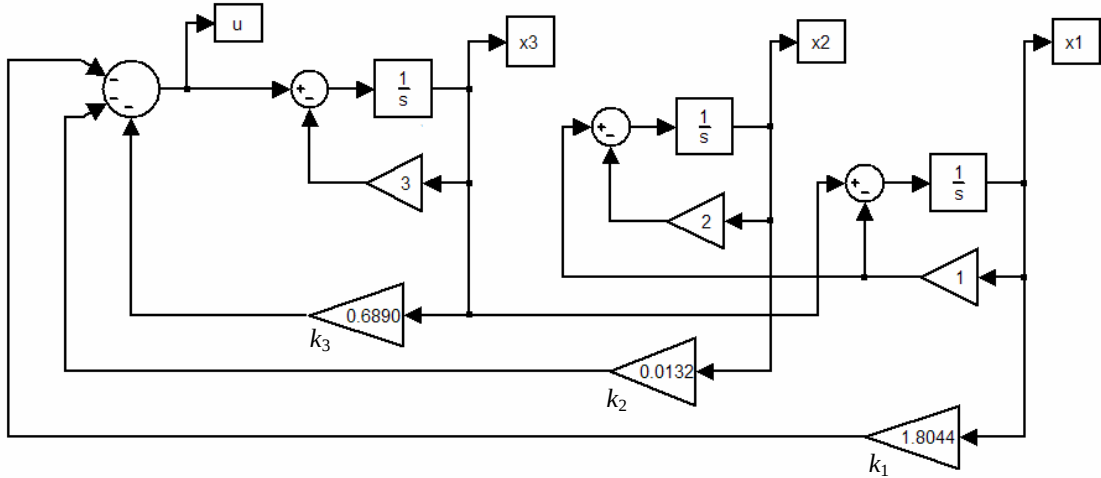
$$= -1.8044x_1 - 0.0132x_2 - 0.689x_3$$

olur. Kontrol sinyali durum değişkeninin herhangi bir başlangıç koşulu için verilen performans indeksini sağlar. Kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi $|sI - (A - BK)| = 0$ 'dan,

$$s_1 = -2.0871 + j0.1347, \quad s_2 = -2.0871 - j0.1347, \quad s_3 = -2.5149$$

kapalı çevrim kutupları elde edilir ve hedeflenen geçici rejim yanıtı $4\tau \approx 2$ s olur.

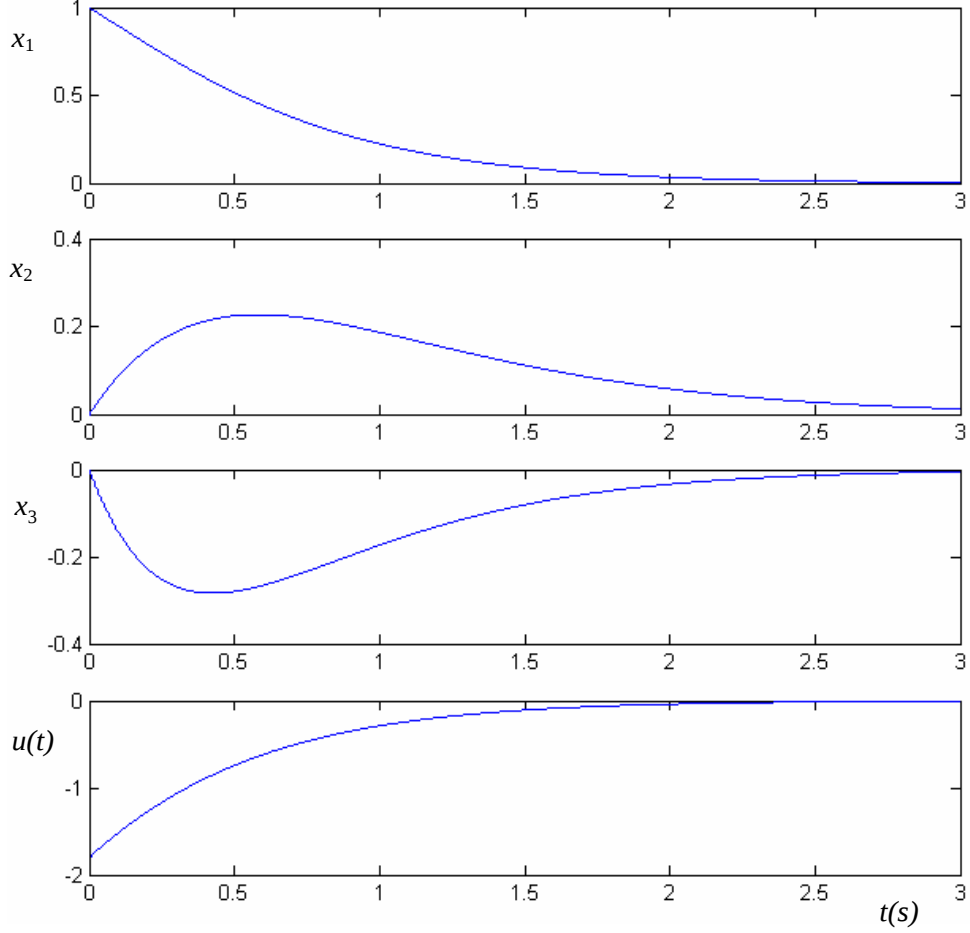
Simülasyon programı (Matlab/SIMULINK):



Şekil 2.7: Örnek 2.4'te verilen sistem için Matlab/SIMULINK programı

Şekil 2.8'de kapalı çevrimli sistemin durum değişkenlerinin ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi görülüyor. Sistem yaklaşık olarak $t = 2$ s 'de sürekli duruma ulaşmaktadır. Şekil 2.2 ile şekil 2.8 karşılaştırılırsa, optimal kontrol ile tasarımın, kutup yerleştirme metoduyla tasarıma göre birçok üstünlüğü hemen görülmektedir. Bu üstünlüklerden bazılarını şöyle sıralayabiliriz: Aynı durum değişkenlerinin başlangıç şartları $x(0)$ için optimal kontrol ile tasarımda kontrol sinyalinin genliği oldukça çok azalmıştır. Kutup yerleştirme metoduyla

tasarımda görülen maksimum aşım oranı, optimal kontrol ile tasarım görülmemektedir. Ayrıca kontrol sinyalinin genliği ve durum değişkenlerindeki dalgalanma (veya değişim hızı), kutup yerleştirme metoduyla tasarıma göre oldukça azalmıştır.



Şekil 2.8: $Q = \text{diag}[20, 1, 1]$, $R=1$ ve $x(0) = (1, 0, 0)^T$ için kapalı çevrimli sistemin durum değişkenleri ve kontrol sinyali.

Sonuçlar:

Verilen herhangi bir başlangıç durumu $x(t_0) = x_0$ için optimal regülatör problemi performans indeksini minimize eden ve sistemin hedeflenen davranışı göstermesini sağlayan uygun $u(t)$ kontrol vektörü bulmaktır. Optimal kontrol vektörü $u(t)$ 'nin varlığı için sistem tüm durum kontrol edilebilmelidir.

Seçilen performans indeksi mümkün olduğu kadar azaltılarak tasarlanan sistem optimaldır. Kontrol sistemi genelde bir performans indeksi altında optimal iken, bir başka performans indeksi altında optimal olmayabilir.

3. BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN TÜM DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ

3.1. Giriş

Bu tez çalışmasının 2. bölümünde verilen kutup yerleştirme ile durum geribeslemeli kontrol tasarımı ve optimal geribeslemeli kontrol, LQR, sistem parametrelerinde herhangi bir değişikliğin olmadığı durumlarda kullanılır. Kutup yerleştirmede hedeflenen dominant kutup belirlenir ve diğer kutuplar sol yarı s düzleminde seçilir. Optimal geribeslemeli kontrolör, LQR, tasarımında ise kontrolör kazançları verilen performans indeksini minimize edecek şekilde tasarlanır. Ancak fiziksel sistemler yapıları gereği veya örneğin robotlarda olduğu gibi taşıdıkları yüklerdeki değişimden dolayı belirsizlik içerirler. Ayrıca belirsizlikler sistemin bilinmeyen parametrelerinden, tanımlanması zor olan doğrusal olmayan niceliklerden ve modellenemeyen dinamiklerden meydana gelebilir [10]. Bu tip sistemlerin kontrolü için birçok kontrolör tasarım metodu geliştirilmiştir [6–17]. Böyle belirsizlik içeren sistemler için belirsizliğin değişim aralığı biliniyorsa, bu belirsizliğin değişim aralığını karşılayacak ve hedeflenen kapalı çevrimli sistem performansını da sağlayacak kontrolör tasarlanmalıdır.

Belirsizlikler iki genel sınıfa ayrılabilir, yapısal (veya parametrik) belirsizlikler ve yapısal olmayan belirsizlikler (veya modellenemeyen dinamikler). Bu tez çalışmasında literatürde “matching conditions” olarak bilinen denkleştirme şartlarını sağlayan parametrik (yapısal) belirsizlikleri içeren dinamik sistemlerin kontrolü yapılacaktır. Bu tip belirsizlikler sistemin doğal yapısından meydana gelebileceği gibi, sistem girişinden veya sistem çıkışından da kaynaklanabilir. Tasarlanan kontrolörler ile bu tip belirsizlikleri içeren sistemin hedeflenen davranışı göstermesi sağlanacak ve sistemin kararlılığı garanti altına alınacaktır. Bu amacı gerçekleştirebilmek için [6]’da verilen doğrusal sistemler için geliştirilen kontrolör doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulanacaktır. Önerilen kontrolör doğrusal ve doğrusal olmayan iki kontrolörün birleşiminden oluşmuştur. Kontrolörün doğrusal kısmı ile nominal sistemin kararlılığı ve hedeflenen geçici rejim performansı sağlanacaktır. Doğrusal olmayan kısmı ile kapalı çevrimde belirsiz parametrelerin etkileri giderilecek ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığı Lyapunov kararlılık metodu kullanılarak sağlanacaktır.

Değişim aralıkları bilinen veya tahmin edilebilen denkleştirme şartlarını sağlayan yapısal belirsizlikleri içeren dinamik sistemlerin dayanıklı (robust) kontrolü yapılacaktır. Uygulamalar, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler üzerinde gösterilecek, uygulamaların simülasyonları Matlab/SIMULINK ortamında gerçekleştirilecek ve sonuçlar yorumlanarak verilecektir.

3.2. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemlerin Tüm Durum Geribeslemeli Kontrolü

Belirsizlik içeren fiziksel bir sistemin durum uzay diyagramı, $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^r$ kontrol vektörü ve $v(t) \in R^l$ giriş vektörü olmak üzere;

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(\alpha(t))]x(t) + [B + \Delta B(\beta(t))]u(t) + H v(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\quad (3.1)$$

olarak tanımlanabilir [6]. Burada $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi ve $H \in R^{n \times l}$ girişe uygulanan bozucu matrisidir. $\alpha(t)$ parametresine bağlı $\Delta A(\alpha(t))$ sistem matrisindeki belirsizlik ve $\beta(t)$ parametresine bağlı $\Delta B(\beta(t))$ giriş matrisindeki belirsizliktir. $H v(t)$ terimi girişteki belirsizlikleri belirtir. Sistemin durum değişkenlerinin ölçülmesinden oluşan hatalar $w(t)$ ile tanımlanırsa, sistem çıkışı da;

$$y(t) = C x(t) + w(t) \quad (3.2)$$

olur. Burada $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisi ve $w(t)$ ölçme devresinden oluşan hatadır. Denklem (3.1) ve (3.2)'deki sistemin nominal kısmı,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.3)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.4)$$

dir.

Denklem (3.1) ve (3.2)'de verilen sistem için [6]'daki kabuller gereği;

Kabul 1: $\alpha \in R^p$ ve $\beta \in R^s$ olmak üzere $\Delta A(\cdot)$ ve $\Delta B(\cdot)$ sırasıyla R^p ve R^s 'de sürekli fonksiyonlardır.

Kabul 2: Uygun uzayların tüm altkümeleri $\mathcal{A} \subset R^p$, $\mathcal{B} \subset R^s$, $\mathcal{V} \subset R^l$ ve $\mathcal{W} \subset R^m$ olmak üzere $\alpha(\cdot): R \rightarrow \mathcal{A}$, $\beta(\cdot): R \rightarrow \mathcal{B}$, $v(\cdot): R \rightarrow \mathcal{V}$ ve $w(\cdot): R \rightarrow \mathcal{W}$ belirsiz parametreleri Lebesgue ölçülebilirler [20].

Kabul 3: Denklem (3.1)'deki belirsizliklerin hepsi kontrol işareti $u(t)$ 'nin matrisi içinde etkin olduğu veya denkleştirme şartlarını sağladığı (matching conditions) varsayılmıştır [6, 7]. Yani $G(\cdot)$, R^p 'de sürekli ve $E(\cdot)$, R^s 'de sürekli uygun boyutta matris fonksiyonları ile uygun boyutta F sabit matrisi için,

$$\Delta A(\alpha) = BG(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad (3.5a)$$

$$\Delta B(\beta) = BE(\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{B}, \quad (3.5b)$$

$$H = BF \quad (3.5c)$$

dir.

Kabul 4: Denklem (3.3)'te verilen sistemin tüm durum değişkenleri ölçülebilirdir ve sistemin nominal kısmı (A, B) tüm durum kontroledilebilirdir.

Burada amaç; denklem (3.1)'de verilen ve yukarıdaki şartları sağlayan sisteme öyle bir durum geribeslemeli kontrol tasarlanmalı ki, tüm belirsizliklere rağmen seçilen durum değişkenlerinin başlangıç şartları için sistemin yörüngesi sifıra veya sifıra yakın bir bölgeye asimptotik olarak ulaşınsın ve sürekli durumda orada kalsın.

3.2.1. Kontrolör Tasarımı

Breinl ve Leitmann tarafından [6]'da önerilen kontrolör, doğrusal $u_l(t)$ ve doğrusal olmayan $u_n(t)$ kontrolörlerinin toplamından oluşmuştur ve

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (3.6)$$

dir.

3.2.1.1. Doğrusal Kontrolör

Doğrusal kontrol tasarımı denklem (3.1)'in sadece denklem (3.3) ile verilen nominal kısmı esas alınarak yapılır. Doğrusal kontrolörün amacı, nominal sistemin kararlılığını sağlamak ve hedeflenen geçici rejim yanıtını oluşturmaktır. Doğrusal kontrolör bu tezin bölüm 2.3'te verilen optimal doğrusal kuadratik regülatör (LQR) metodu kullanılarak tasarlanacaktır. Denklem (3.3) ve (3.4)'te tanımlanan sistem için optimal kontrolör $u(t) = -Kx(t)$ 'nin kazançlarının hesaplanması için önerilen kuadratik performans indeksi, Q_R pozitif simetrik durum ağırlık ve R pozitif simetrik kontrol ağırlık matrisi olmak üzere;

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q_R x(t) + u_l^T(t)R u_l(t)] dt \quad (3.7)$$

dir. Denklem (3.7) ile verilen performans indeksini minimize edecek optimal kazanç matrisi K , indirgenmiş Riccati matris denklemi [1]:

$$A^T P_R + P_R A - P_R B R^{-1} B^T P_R + Q_R = 0 \quad (3.8)$$

çözülerek elde edilir [1]. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemin optimal kontrolü için, denklem (3.8) ile verilen indirgenmiş Riccati matris denklemi seçilen Q_R ve R için çözüldüğünde elde edilen pozitif tanımlı ve simetrik P_R matrisi için kontrolörün doğrusal kısmı,

$$u_l(x) = -R^{-1} B^T P_R x(t) = -Kx(t) \quad (3.9)$$

dir. Ağırlık matrisleri Q_R ve R uygun seçilerek elde edilen optimal durum geribeslemeli kontrolör ile nominal sistemin hedeflenen davranışı göstermesi sağlanır [2].

3.2.1.2. Doğrusal Olmayan Kontrolör

Doğrusal olmayan kontrol tasarımında, denklem (3.1)'de verilen parametrik belirsizlikleri ve girişteki belirsizliklerin tümünü içeren sistem esas alınarak tasarım yapılır. Doğrusal olmayan kontrolün amacı, belirsiz parametrelerin etkilerini karşılamak ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlamaktır. Denklem (3.3)'teki nominal sistem ve denklem (3.9)'da verilen kontrolörden oluşan kapalı çevrim sistemin kararlı sistem matrisi, $\bar{A} = A - BK$ ve $Q_L \in R^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik matris olmak üzere, P_L denklem (3.10)'da verilen Lyapunov denkleminin çözümüdür.

$$P_L \bar{A} + \bar{A}^T P_L + Q_L = 0 \quad (3.10)$$

Kontrolörün doğrusal olmayan kısmı $u_n(t)$ durum geribeslemeli kontrolördür ve $u_n(t) = u_n(x)$ olarak tanımlanırsa ve $\varepsilon > 0$ tasarımcı tarafından belirlenen yeterince küçük değerli bir sabite olmak üzere;

$$u_n(x) = \begin{cases} -\frac{B^T P_L x}{\|B^T P_L x\|} \rho(x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\frac{B^T P_L x}{\varepsilon} \rho(x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (3.11)$$

dir. Denklem (3.11)'de verilen $\rho(x)$ fonksiyonu, ileride de görüleceği gibi, durum değişkenlerinin değişim aralığına ve belirsiz parametrelerin maksimum değerine bağlıdır.

Denklem (3.6)'da verilen kontrolör $u(t) = -Kx + u_n(x)$ ve denklem (3.5)'te tanımlanan kabuller denklem (3.1)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)]u + Hv \\ &= [A + BG(\alpha)]x + [B + BE(\beta)]u + BFv \\ &= Ax + BG(\alpha)x + B[-Kx + u_n(x)] + BE(\beta)[-Kx + u_n(x)] + BFv \\ &= Ax + BG(\alpha)x - BKx + Bu_n(x) - BE(\beta)Kx + BE(\beta)u_n(x) + BFv \\ &= [A - BK]x + Bu_n(x) + B[G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv] \end{aligned}$$

olur. Tüm belirsizlikler $e(x, t)$ 'de bir araya toplanırsa;

$$e(x, t) = G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv \quad (3.12)$$

olur. Böylece kapalı çevrimli sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A - BK]x + Bu_n(x) + Be(x, t) \\ &= \bar{A}x + Bu_n(x) + Be(x, t) \\ &= \bar{A}x + B[u_n(x) + e(x, t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

formunda olur. Denklem (3.12)'de tanımlanan $e(x, t)$ 'nin normu;

$$\begin{aligned}\|e(x, t)\| &= \|G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv\| \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)u_n(x)\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| = \rho_1(x)\end{aligned}\quad (3.14)$$

dir. Burada $\max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)u_n(x)\| \leq \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \rho(x)$ olarak yazabiliriz. Böylece $e(x, t)$ işareti;

$$\|e(x, t)\| \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \rho(x) + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| = \rho(x)$$

olur. Buradan $\rho(x)$ eşitliği,

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \rho_2(x) + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \\ \rho(x) \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right] &= \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \|x\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\|\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer,

$$1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| > 0 \quad (3.15)$$

şartı sağlanırsa [1-2], $\rho(x)$ yalnız bırakılarak;

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| \|x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \|x\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ &= a + b\|x\|\end{aligned}\quad (3.16)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}a &= \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ b &= \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \right]\end{aligned}$$

dir. Böylece denklem (3.11)'de tanımlanan kontrolörün tüm parametreleri tanımlanmış ve belirlenmiş olur.

Teorem 1: Denklem (3.1)'de tanımlanan ve 1– 4 kabullerini sağlayan sistemin denklem (3.9) ve (3.11)'de tanımlanan kontrolörler ile oluşturduğu kapalı çevrim dinamiği kararlıdır ve hedeflenen performans indeksi J 'yi sağlar.

İspat: Denklem (3.13)'te verilen kapalı çevrimli sistem için Lyapunov fonksiyonu $\forall x \in R^n$ için,

$$V(x, t) = x^T P_L x > 0, \quad x \neq 0 \quad (3.17a)$$

ve Lyapunov fonksiyonunun x 'e göre gradienti,

$$\dot{V}(x, t) = \nabla_x^T V(x, t) [\bar{A}x + B(u_n + e)] < 0, \quad x(0) \neq 0 \quad (3.17b)$$

olarak alınırsa $V(x, t)$ 'nin türevi, $P_L = P_L^T > 0$ için $P_L x + P_L^T x = 2P_L x$ olduğundan [21];

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,t) &= \nabla_x^T V(x,t) (\bar{A}x + B(u_n + e)) \\
&= (P_L x + P_L^T x)(\bar{A}x) + 2P_L x B(u_n + e) \\
&= P_L x \bar{A}x + P_L^T x \bar{A}x + 2x^T P_L B(u_n + e) \\
&= x^T P_L \bar{A}x + x^T \bar{A}^T P_L x + 2x^T P_L B(u_n + e) \\
&= -x^T Q_L x + 2x^T P_L B(u_n + e)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak bulunur. Denklem (3.18)'in sağındaki ikinci terime,

$$x^T P_L B[u_n(x) + e(x, t)] = M \tag{3.19}$$

denilirse;

$$\dot{V}(x,t) = -x^T Q_L x + 2M \tag{3.20}$$

olur. Bölüm 3.2.1.1 gereğince $\bar{A} = A - BK$ matrisi kararlı olduğundan pozitif tanımlı ve simetrik Q_L matrisi için P_L matrisi pozitif tanımlı ve simetrik bir matristir. Denklem (3.20)'deki $\dot{V}(x,t)$ skaler fonksiyonunun negatif tanımlı olabilmesi için denklem (3.19)'da tanımlanan M skaler niceliğinin negatif tanımlı veya sıfır olması gerekir. İşlem kolaylığı için $\delta = B^T P_L x$ alınırsa $M = \delta^T (u_n + e)$ olur. Denklem (3.14)'te $\|e(x,t)\| \leq \rho$ ve denklem (3.11)'deki doğrusal olmayan kontrolörün ilk durumu $\|\delta\| > \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
\delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} + e \right) = \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} \right) + \delta^T e \\
&\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\|\delta\|} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \\
&\leq -\|\delta\| \rho + \|\delta\| \rho \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. Denklem (3.11)'deki doğrusal olmayan kontrolörün ikinci durumu $\|\delta\| \leq \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
\delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\varepsilon} + e \right) = \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\varepsilon} \right) + \delta^T e \\
&\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\varepsilon} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \\
&\leq -\|\delta\|^2 \frac{\rho}{\varepsilon} + \|\delta\| \rho
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olur. Denklem (3.22)'nin en büyük değerini elde edebilmek için eğer $\|\delta\| = \frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
\delta^T (u_n + e) &\leq -\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \rho = \rho \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \right) \\
&\leq \rho \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\delta^T(u_n + e)$ 'nin en büyük değeri $\rho(x)\frac{\varepsilon}{4}$ olarak elde edilmiş olur [14]. Bu ifade $\dot{V}(x,t)$ 'de yerine konursa;

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -x^T Q_L x + 2\rho \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq -x^T Q_L x + \rho \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\quad (3.23)$$

elde edilir. Tüm t ve tüm x değerleri için,

$$x^T Q_L x - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (3.24)$$

şartı sağlanırsa, Lyapunov fonksiyonunun türevi orijin $x = 0$ ve yakın civarı için,

$$\dot{V}(x,t) < 0, \quad x \neq 0 \quad (3.25)$$

olur.

Kapalı çevrimli sistemin kararlı olduğu başlangıç şartlarının değişim aralığının tanımlanması: Denklem (3.10)'daki pozitif tanımlı Q_L matrisinin en küçük [en büyük] özdeğeri $\lambda_{\min}(Q) > 0$ [$\lambda_{\max}(Q) > 0$] olmak üzere [8]'de verilen,

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 \leq x^T Q_L x \leq \lambda_{\max}(Q_L) \|x\|^2 \quad (3.26)$$

eşitsizliği kullanılırsa, ve bunun için [7]'deki işlemler takip edilerek, denklem (3.26)'teki sonuç denklem (3.24)'te yerine yazılırsa,

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (3.27)$$

olur. Denklem (3.16)'da verilen $\rho(x) = a + b\|x\|$ ifadesini denklem (3.27)'da yerine koyalım.

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} &> 0 \\ \lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| - \frac{\varepsilon}{2} a &> 0\end{aligned}$$

Eşitliğin her tarafını $\lambda_{\min}(Q_L)$ ile çarpalım ve eşitliğe $\frac{\varepsilon^2}{16} b^2$ terimini ekleyip - çıkaralım.

$$\begin{aligned}[\lambda_{\min}(Q_L)]^2 \|x\|^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a &> 0 \\ [\lambda_{\min}(Q_L)]^2 \|x\|^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 - \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 &> 0 \\ [\lambda_{\min}(Q_L)]^2 \|x\|^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a - \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 &> 0\end{aligned}$$

$$\left[\lambda_{\min}(Q_L) \|x\| - \frac{\varepsilon}{4} b \right]^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a - \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 > 0$$

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\| - \frac{\varepsilon}{4} b > \pm \left[\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 \right]^{1/2}$$

Burada $\|x\| = \eta_1$ denirse ve $\lambda_{\min}(Q_L) > 0$ olduğundan olabilecek en büyük yarıçap değerini elde edebilmek için eşitliğin sağındaki terimin pozitif olduğu durumu alınırsa;

$$\lambda_{\min}(Q_L) \eta_1 - \frac{\varepsilon}{4} b > \sqrt{\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2}$$

$$\lambda_{\min}(Q_L) \eta_1 > \frac{\varepsilon}{4} b + \sqrt{\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2}$$

$$\eta_1 > \frac{\frac{\varepsilon}{4} b + \sqrt{\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2}}{\lambda_{\min}(Q_L)}$$

olur. Buradan,

$$\eta = \frac{\varepsilon/4}{\lambda_{\min}(Q_L)} b + \sqrt{\frac{\varepsilon/2}{\lambda_{\min}(Q_L)} a + \left(\frac{\varepsilon/4}{\lambda_{\min}(Q_L)} \right)^2 b^2} \quad (3.28)$$

bulunur. $x=0$ merkezli ve η yarıçaplı, $B(\eta)$ küresi tanımlansın. Tüm $x \notin B(\eta)$ ve tüm $t \in \mathbb{R}^1$ için denklem (3.25)'te verilen $\dot{V}(x,t) < 0$ şartı sağlanmış olur. Bozucuların ve ölçüm hatalarının olmadığı durumda, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $x=0$ 'ın asimptotik kararlılığı da sağlanır [7].

3.2.2. Kontrol Parametrelerinin Ayarlanması

Denklem (3.9) ve (3.11)'de verilen kontrolörlerin birlikte tasarımında, denklem (3.8) ile verilen indirgenmiş Riccati denklemindeki Q_R ve R ağırlık matrislerinin seçiminde ve denklem (3.10) ile verilen Lyapunov denklemindeki Q_L ağırlık matrisinin seçiminde bazı serbestlikler vardır [6].

Kontrolörün doğrusal kısmının tasarımı denklem (3.3) ile verilen nominal sistem temel alınarak yapıldı. Hedeflenen geçici rejim davranışı denklem (3.8) ile verilen indirgenmiş Riccati denkleminde Q_R ve R ağırlık matrisleri uygun seçilerek sağlandı. Eğer R birim matris, $R = I_K$, olarak seçilirse denklem (3.9) aşağıdaki gibi olur.

$$u_l = -B^T P_R x \quad (3.29)$$

Doğrusal olmayan kontrolördeki pozitif $\rho(x)$ fonksiyonu belirsiz parametrelerin ve doğrusal olmayan elemanın maksimum değerine ve durum değişkenlerinin değişim aralığına bağlıdır.

$B^T P_L x / \|B^T P_L x\|$ birim vektörü geribeslemenin işaretini belirler. Bu ifade sistemin tek girişli olması durumunda geribeslemenin işaretini belirleyen bir signum (işaret) fonksiyonudur. Signum fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Denklem (3.11)'deki kontrolün $\varepsilon \rightarrow 0$ durumundaki anahtarlama düzlemi için bir anahtarlama bölgesi tanımlayan aşağıdaki manifold düşünülürse,

$$\mathcal{N}_L \triangleq \{x \in R^n \mid B^T P_L x = 0\} \quad (3.30)$$

denklem (3.11) ile verilen kontrol, $\mathcal{N}_L$ düzleminin yörünge doğrultusunu ve yönünü çekici yapar. Yani her durumda sistem yörüngesi anahtarlama bölgesine girdikten sonra orijine doğru ilerler ve $\mathcal{N}_L$ düzleminin ε yakın civarında kalır. Kontrolörün doğrusal olmayan kısmındaki $\rho(x)$ fonksiyonunun değeri artırılarak $\mathcal{N}_L$ 'nin çekiciliği daha da artırılabilir.

Şimdi de aşağıdaki manifoldu düşünelim,

$$\mathcal{N}_R \triangleq \{x \in R^n \mid B^T P_R x = 0\} \quad (3.31)$$

Sistem yörüngesi $\mathcal{N}_R$ düzlemi boyunca ilerlediğinden, denklem (3.12)'de verilen $e(x, t)$ hatası

$$\forall x \in \mathcal{N}_R \text{ için, } e(x, t) = G(\alpha)x + E(\beta)u_n(x) + Fv \quad (3.32)$$

olur. Denklem (3.16) ile verilen doğrusal olmayan kontrol büyüklüğü

$$\rho(x) = \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)x\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \quad (3.33)$$

olur. Eğer denklem (3.32) ile (3.12)'yi ve denklem (3.33) ile (3.16)'yı karşılaştırsak $\max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)Kx\|$ teriminin yok olduğu görülür. $\max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)Kx\|$ terimi, $\mathcal{N}_R$ düzleminin yakın civarındaki sistem yörüngesi için küçük değerler alır. Başka bir deyişle sistem yörüngesinin $\mathcal{N}_R$ düzleminin yakın civarında kalması için doğrusal olmayan kontrol büyüklüğü $\rho(x)$ ve $e(x, t)$ hatası azaltılmalıdır. Bu iki terimin değeri sistem matrisindeki belirsizliği veren $G(\alpha)x$ ve girişteki belirsizlikleri içeren Fv terimleri tarafından belirlenir.

Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa,

$$\mathcal{N}_R \equiv \mathcal{N}_L \quad (3.34)$$

o zaman $e(x, t)$ hatasının küçük olduğu ve doğrusal olmayan kontrol büyüklüğünden daha küçük olduğu bir bölgeye sistem yörüngesinin girmesi ve orada kalması sağlanabilir. Denklem (3.34) ile verilen şart

$$P_R = P_L \quad (3.35)$$

seçilerek sağlanabilmelidir [6]. Böylece Riccati denkleminin çözümünden elde edilen P_R , Lyapunov denkleminin çözümünde P_L 'nin yerine konulabilir. Daha önce belirtildiği gibi P_L ve P_R pozitif tanımlı matrislerdir. Bununla beraber P_L ve P_R 'nin pozitif tanımlılığı denklem (3.10)'da verilen Q_L 'nin pozitif tanımlı olduğunu her zaman gerektirmeyebilir. Bu yüzden Q_L matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığının belirlenmesi için denklem (3.10) ile verilen Lyapunov denkleminde mutlaka kontrol edilmesi gerekir.

Doğrusal kontrolörün $e(x,t)$ hatası üzerinde etkisi olduğu gibi, doğrusal olmayan kontrolör üzerine de etkisi vardır. Bununla beraber $e(x,t)$ ve buna bağlı olan $\rho(x)$ değerlerinin daha fazla azaltılması doğrusal olmayan elemanı ve girişteki belirsizlikleri içeren $F v$ 'nin sınırlanması gibi sadece büyük sınırlamalarla mümkündür [6].

3.2.3. Uygulama 1: Bir Maglev Aracın Süspansiyon Kontrolü

Burada Avrupa'da özellikle Almanya'da birçok uygulama alanı olan ve [6]'da süspansiyon kontrolü verilen maglev araç (manyetik yastık üzerinde hareket eden araç) uygulama olarak verilecektir. Tek girişli sistemin girişindeki bozucular ihmal edilirse, durum uzay formu ve matrisi;

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [B + \Delta B]u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s R}{m L_0} & \left(\frac{K_s}{m} - \frac{K_i K_s}{m L_0} \right) & -\frac{R}{L_0} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_i}{m L_0} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

dir. Burada $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ durum değişkeni; x_1 pozisyon, x_2 hız ve x_3 ivmeyi belirtir. Tablo 3.1'de verilen sistem parametreleri [6]'daki değerler olup sistemin laboratuvar modelinden elde edilmiştir.

Tablo 3.1: Maglev aracın sistem parametreleri

SİSTEM PARAMETRELERİ	
Mıknatısın kütlesi	$m = 16 \text{ kg}$
Omik rezistans	$R = 8 \ \Omega$
x_1 hava aralığı katsayısı	$K_s = 5.7 \times 10^4 \text{ N / m}$
x_2 hız ve i akım katsayısı	$K_i = K_s = 114 \text{ N / m}$
İndüktans	$L_0 = 0.5 \text{ Vs / A}$

Böyle sistemlerde indüktansı tam olarak ölçmek oldukça zor olduğundan, indüktansın değerinde bir belirsizliğin olduğu varsayılacaktır. İndüktansın nominal değeri L_0 ve indüktansın değerindeki değişim ΔL ile verilirse, indüktanstaki bağıl değişim,

$$L_r = \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L} \quad (3.38)$$

olur. Bağıl değişimden dolayı denklem (3.36)'de verilen ve parametre belirsizliklerini içeren $\Delta A(\alpha)$ ve $\Delta B(\beta)$ matrisleri;

$$\Delta A(L_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s R}{m L_0} L_r & \frac{K_i K_s}{m L_0} L_r & \frac{R}{L_0} L_r \end{bmatrix}, \quad \Delta B(L_r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_i}{m L_0} L_r \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

olur. Böylece denklem (3.5)'ten dolayı,

$$\begin{aligned} \Delta A(L_r) = B G(L_r) & \Rightarrow G(L_r) = \begin{bmatrix} \frac{K_s R}{K_i} L_r & -K_s L_r & -\frac{R m}{K_i} L_r \end{bmatrix}, \\ \Delta B(L_r) = B E(L_r) & \Rightarrow E(L_r) = -L_r \end{aligned} \quad (3.40)$$

olur. Denklem (3.36) ile verilen sistem tüm durum kontroledilebilirdir.

Doğrusal Kontrol Tasarımı: Maglev aracın nominal sistem matrisleri;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix}$$

dir. Burada elde edilen sonuçların [6]'daki sonuçlarla karşılaştırılması için ağırlık matrisleri, $Q_R = \text{diag}[10^5, 0, 1]$ ve $R = 1$ olarak seçilmiştir. Aşağıdaki matlab programı kullanılarak indirgenmiş Riccati matris denkleminin çözümünden P_R 'nin üçüncü satırı;

$$P_{R3} = [562.279, 30.781, 0.481] \quad (3.41)$$

olarak bulunur. Böylece optimal kazanç katsayıları,

$$k_1 = -8012.480 \text{ V/m}, \quad k_2 = -438.638 \text{ Vs/m}, \quad k_3 = -6.866 \text{ Vs}^2/\text{m} \quad (3.42)$$

olur. Kapalı çevrimli sistemin özdeğerleri;

$$\lambda_{1,2} = -30.798 \pm j12.076, \quad \lambda_3 = -52.246$$

olarak bulunur.

%% MATLAB PROGRAMI %%

```
%Sistem matrisleri
A=[0 1 0;0 0 1;57000 1938 -16]; B=[0;0;-14.25];
%Ağırlık matrisleri
QR=[1e5 0 0;0 0 0;0 0 1]; R=[6];
% Riccati matris denkleminin çözümü
```

$[K,P,E]=lqr(A,B,QR,R)$ % K kontrol kazancı, $P=P_R$ ve E kapalı çevrim özdeğerleridir.

Doğrusal Olmayan Kontrol Tasarımı: Sistem tek girişli olduğundan denklem (3.11) ile verilen kontrol, tanımı bölüm 3.2.2’de verilen signum (işaret) fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_n(x) = \begin{cases} -\rho(x)\text{sgn}(B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\rho(x)\frac{1}{\varepsilon}(B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (3.43)$$

Ağırlık matrisi $Q_L = \text{diag}[10^6, 1, 1]$ olarak seçilirse, aşağıdaki matlab programı kullanılarak denklem (3.10)’da verilen P_L ’nin üçüncü satırı;

$$P_{L3} = [8.7446, 0.3273, 7.267 \times 10^{-3}] \quad (3.44)$$

olarak hesaplanır. Böylece denklem (3.43)’teki $B^T P_L$ matrisi,

$$B^T P_L = [124.611 \quad 4.664 \quad 0.1035]$$

olur. Denklem (3.10) ile verilen Lyapunov denkleminde P_R kullanılırsa Q_L ’nin yine pozitif tanımlı olduğu görülür. Bu nedenle, kontrolörde P_L yerine P_R kullanılabilir.

```
%% MATLAB PROGRAMI %%
%Sistem matrisleri
A=[0 1 0;0 0 1;57000 1938 -16]; B=[0;0;-14.25];
%Optimal kontrol kazanç matrisi
K=[-8012.480 -438.638 -6.866];
%Ağırlık matrisi
QL=[1e6 0 0;0 1 0;0 0 1];
% Lyapunov matris denkleminin çözümü
PL=lyap((A-B*K)',QL)
BTPL=B'*PL
```

$\Delta L = -0.2$ ve $L_0 = 0.5$ için denklem (3.38)’in maksimum değeri,

$$L_{r \max} = \left| \frac{-0.2}{0.5 - 0.2} \right| = \frac{2}{3}$$

kullanılarak denklem (3.16)’da tanımlanan $\rho(x)$;

$$\begin{aligned} \rho(x) &= (1 - L_{r \max})^{-1} \left(\left| \frac{K_s R}{K_i} L_{r \max} x_1 - K_s L_{r \max} x_2 - \frac{m R}{K_i} L_{r \max} x_3 \right| + L_{r \max} |k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3| \right) \\ &= |8000x_1 - 228x_2 - 2.2456x_3| + 2|-8012.48x_1 - 438.638x_2 - 6.866x_3| \end{aligned} \quad (3.45)$$

olarak elde edilir.

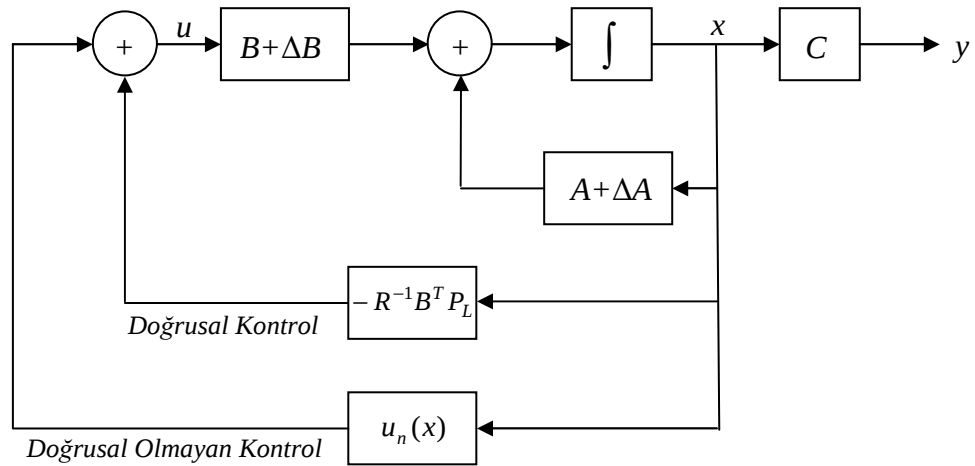
Simülasyon Sonuçları: Maglev sistemi için yukarıda verilen ve elde edilen değerler kullanılarak yapılan Matlab/SIMULINK simülasyon programı şekil 3.2’de ve simülasyon sonuçları şekil 3.3 ve 3.4’te gösterilmiştir. Sistem matrislerindeki parametre belirsizliğine neden olan maglev aracın indüktansındaki değişim $\pm \%40$ olarak kabul edildiğinden, indüktanstaki bağıl değişim $-2/3 \leq L_r \leq 2/7$ olur. Simülasyon için durum değişkenlerinin başlangıç şartları $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.001, 0.005, 0)$ ve tasarımcı tarafından seçilen ε pozitif sabitesi, $\varepsilon = 0.1$ olarak alınmıştır.

Şekil 3.3’te verilen simülasyonlar sonuçları denklem (3.41)’deki P_R ve denklem (3.44)’teki P_L için, belirsizliklerin maksimum, minimum değerleri ve nominal sistem kullanılarak elde edildi. Şekil 3.3 (a)’da, maglev sisteminin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerini sistemin nominal değeri ile karşılaştırmak amacı ile aynı diyagramda verilmiştir. Şekil 3.3 (a)’dan görüldüğü gibi sistem maksimum ve minimum belirsizlikler için nominal değere yakın bir performans göstermektedir ve sistem yörüngesi sürekli durumda hedeflenen orijine ulaşmaktadır. Şekil 3.3 (b)’de, sistemin x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi yukarıdaki üç durumu için verilmiştir. Şekil 3.3 (b)’de de görüldüğü gibi kapalı çevrimli sistem belirlenen süre içerisinde sürekli duruma ulaşmıştır. Şekil 3.3(c)’de sistemin durum uzay diyagramı çizilmiştir. Görüldüğü gibi sistem yörüngesi kısa bir süre içerisinde N_L düzlemine ulaştıktan sonra bu düzlem boyunca orijine asimptotik olarak ulaşmaktadır. Şekil 3.3 (d)’de sistemin $u(t)$ kontrol sinyali verilmiştir. Kontrol sinyalinin belirsizlik değerlerine göre değişiminin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Şekil 3.3’te verilen performansın sadece doğrusal kontrolör LQR tasarımı ile sağlanmayacağı açıktır. Ayrıca Şekil 3.3 (d)’deki kontrol işareti doğrusal olmayan diğer kontrolörler [16] ile karşılaştırıldığında parametre değişimine karşılık genliğinin az değişmesi ve titreşimsiz oluşu önemli bir özelliktir.

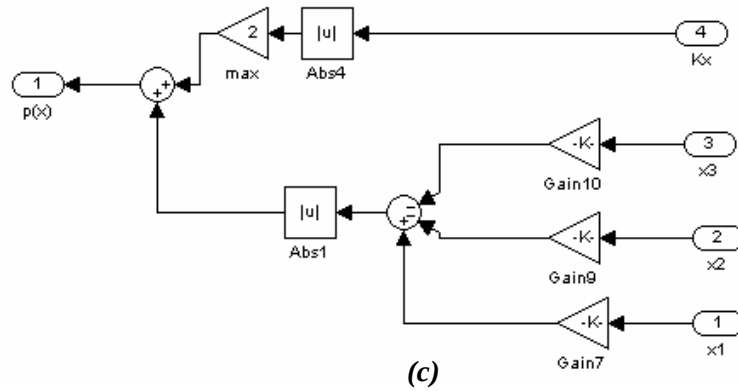
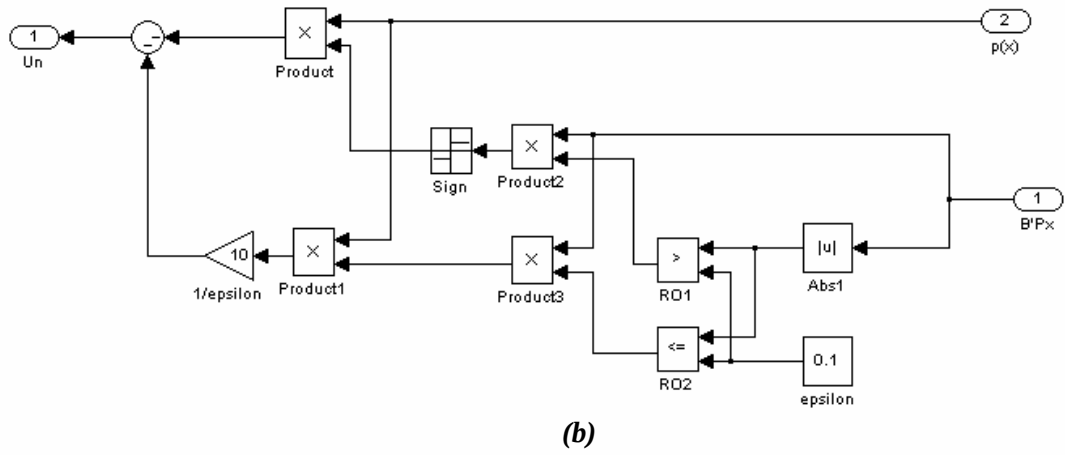
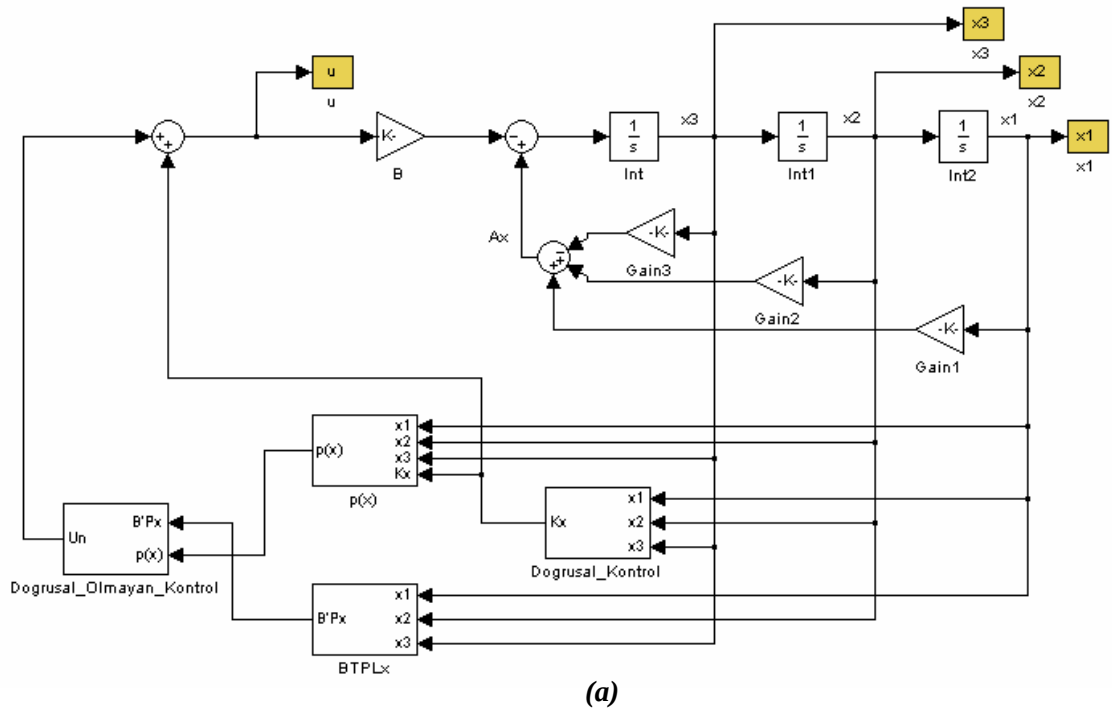
Bölüm 3.2.2’de tartışılan kontrol parametrelerinin ayarlanması kısmında belirtildiği gibi $P_R = P_L$ alınırsa, yani denklem (3.44)’teki Lyapunov denkleminde elde edilen P_L matrisi yerine denklem (3.41)’deki Riccati denkleminde elde edilen P_R matrisi kullanıldığında şekil 3.3’teki sistem değerleri için simülasyon sonuçları şekil 3.4’te verilmiştir. Şekil 3.4 (a), (b), (c) ve (d)’de sırası ile sistemin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, sistemin durum uzay diyagramı ve $u(t)$ kontrol sinyalinin değişimi verilmiştir. Şekil 3.3 ve şekil 3.4’teki simülasyon sonuçları karşılaştırıldığında bölüm 3.2.2’de de belirtildiği gibi kapalı çevrimli sistemin performansı daha da iyileşmiştir. Şekil 3.4 (c)’de sistemin durum uzay diyagramında görüldüğü gibi sistem yörüngesi durum değişkenlerinin

başlangıç değerinden başlayarak N_R yüzeyine ulaştıktan sonra orijine ulaşmaktadır. Şekil 3.4 (c)'de belirtilen N_R yüzeyine kayma yüzeyi de denilmektedir [15]. Her iki durumdaki simülasyon için de şekil 3.3 (d) ve şekil 3.4 (d)'deki kontrol sinyallerinin maksimum değeri aynıdır. Ayrıca sistemin sürekli durum hatası ilk duruma göre çok daha küçük bir değerdedir. Böylece kontrol parametrelerinin ayarlanmasıyla sistemin kararlılığının daha da artırıldığı ve sistemin belirsizliklere karşı daha da dayanıklı hale getirildiği şekil 3.4'te açıkça görülmektedir. Ayrıca sistemin durum değişkenlerinin başlangıç şartları artırıldığında bile sistemin beklenildiği gibi çalıştığı görülmüştür.

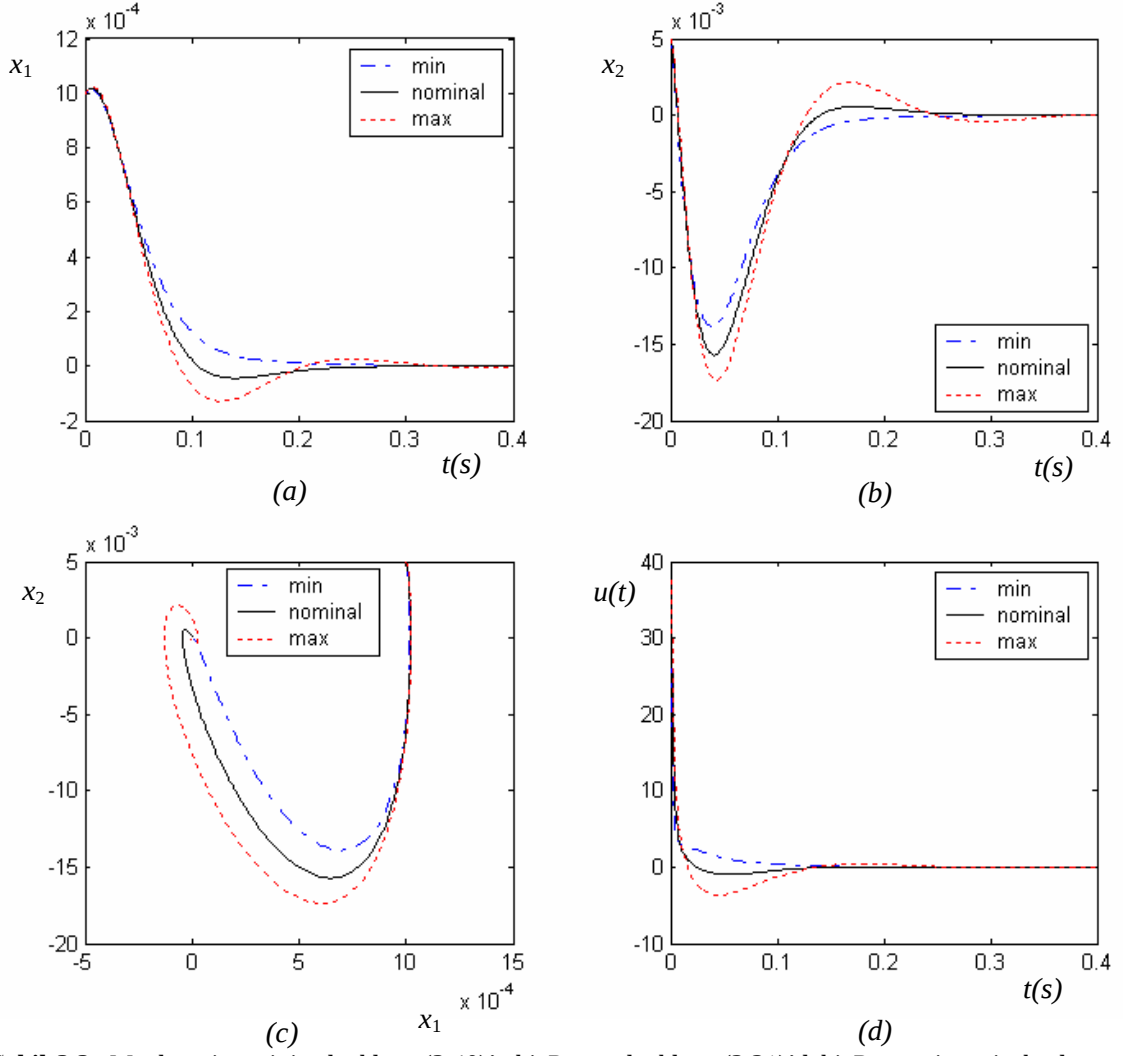
Denklem (3.43)'teki doğrusal olmayan kontrolörde $\varepsilon \rightarrow 0$ için kontrolörün yalnızca ilk durumu vardır. Bu durum içinde maglev sisteminin simülasyon sonuçları elde edilmiştir. Sistemin kararlılığı ve hedeflenen performansı sağladığı görülmüştür; ancak beklenildiği gibi kontrol sinyalinde pratik uygulamalarda sorun olan ve istenmeyen yüksek frekanslı titreşimler görülmüştür.



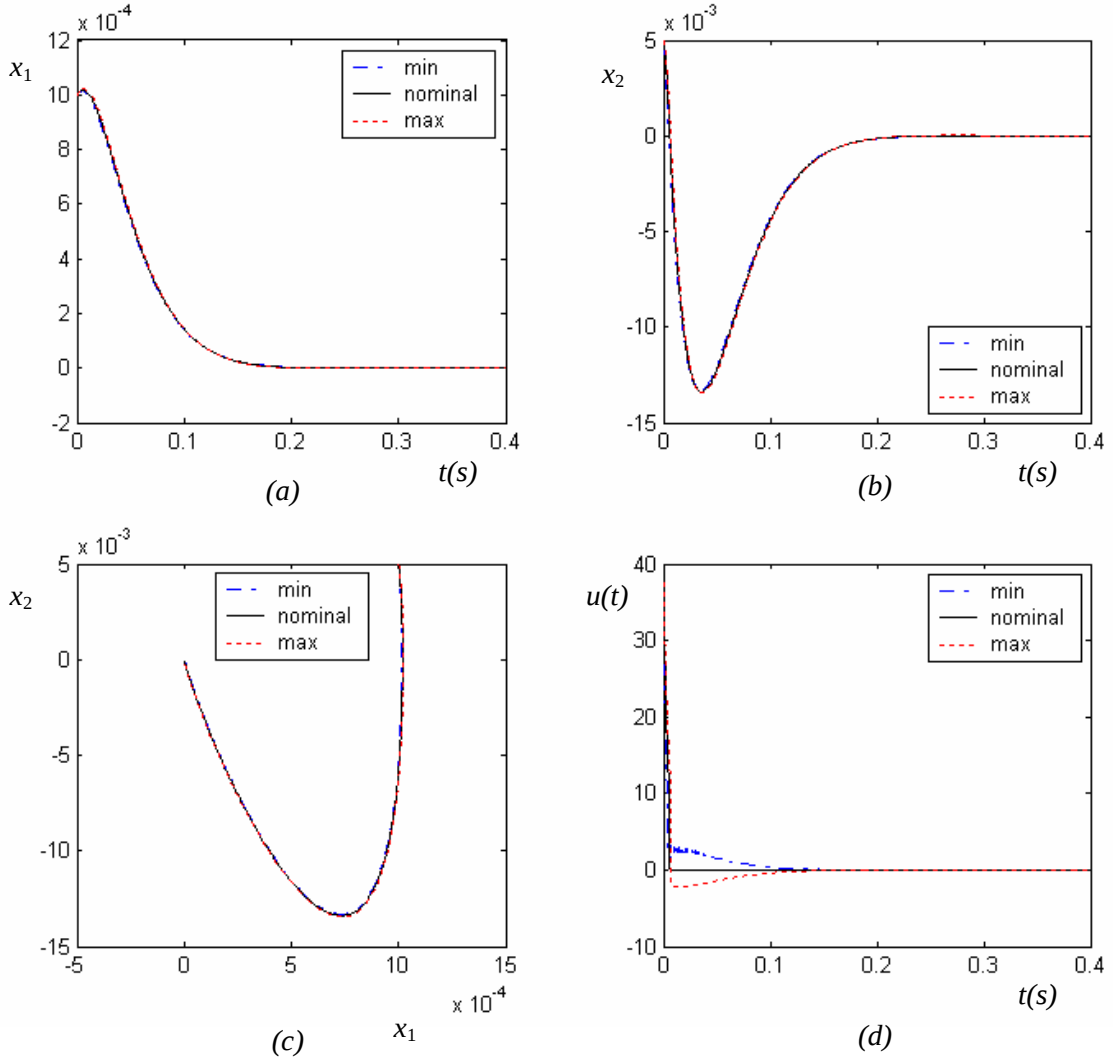
Şekil 3.1: Belirsizlik içeren maglev sistemi için dayanıklı durum geribeslemeli kontrol şeması



Şekil 3.2: (a) Belirsizlik içeren maglev sistemin simülasyonu için Matlab/SIMULINK programı, (b) Doğrusal_olmayan_kontrol alt sisteminin içyapısı ve (c) $p(x)$ alt sisteminin içyapısı.



Şekil 3.3: Maglev sisteminin denklem (3.40)'taki P_R ve denklem (3.31)'deki P_L ve sistemin başlangıç şartları $x_1=0.001$, $x_2=0.005$ ve $x_3=0$, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.



Şekil 3.4: Maglev sisteminin denklem (3.40)'taki $P_R=P_L$ ve sistemin başlangıç şartları $x_1=0.001$, $x_2=0.005$ ve $x_3=0$, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

3.3. Belirsizlik İçeren Doğrusal Olmayan Sistemlerin Tüm Durum Geribeslemeli Kontrolü

Burada denklem (3.46)'da verilen sistem sınıfına giren doğrusal olmayan sistemlerin tüm durum geribeslemeli kontrolü yapılacaktır. Denklem (3.1) ve (3.2)'de verilen belirsizlik içeren fiziksel bir dinamik sistemin durum uzay diyagramı formunda yeniden yazalım.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\alpha(t))]x(t) + [B + \Delta B(\beta(t))]u(t) + H v(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.46)$$

$$y(t) = C x(t) + w(t) \quad (3.47)$$

Burada, $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^r$ kontrol vektörü, $v(t) \in R^l$ giriş vektörü, $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi, $H \in R^{n \times l}$ girişe uygulanan bozucu ya da doğrusal olmayan elemanların matrisi, $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisi ve $w(t)$ ölçme devresinden kaynaklanan hatadır. $\Delta A(\alpha(t))$, $\alpha(t)$ parametresine bağlı olup sistem matrisindeki belirsizlikleri ve $\Delta B(\beta(t))$, $\beta(t)$ parametresine bağlı olup giriş matrisindeki belirsizlikleri içerir. $H v(t)$ terimi girişteki belirsizlikleri ya da doğrusal olmayan terimleri belirtir.

Denklem (3.46) ve (3.47)'deki sistemin nominal kısmı,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.48)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.49)$$

dir.

Bölüm 3.2'de verilen doğrusal sistemlerin kontrolünde yapılan kabuller ve kontrolör tasarımı esas alınarak denklem (3.46)'da verilen sistem sınıfına giren doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü yapılacaktır. Bu nedenle burada varsayılan kabuller ve kontrolör tasarımı verilmeyecek, sadece önerilen kontrolörün doğrusal olmayan sistemlere uygulanması, doğrusal olmayan bir sistem üzerinde gösterilecektir.

Bu bölümde [6]'da önerilen doğrusal sistemler için geliştirilmiş kontrolör bazı doğrusal olmayan sistemlere uygulanacaktır. Bunun için doğrusal olmayan sistemler iki kısma bölünecektir. İlk kısım sistemin doğrusal terimlerini ve ikinci kısım sistemin doğrusal olmayan terimlerini içirecektir. Her iki kısımda da belirsizlikler olabileceği varsayılarak kontrolör tasarlanacaktır. Doğrusal olmayan terimlerin en büyük değerleri doğrusal olmayan kontrolörün içerisine alınarak, sistemin doğrusal olmayan terimlerinin etkisi giderilecek veya azaltılacaktır.

3.3.1. Uygulama 2: Belirsizlik İçeren Tek Eklemlili Bir Robot Kolunun Kontrolü

Burada Corless tarafından [10]'da tanımlanan ve şekil 3.5'te verilen tek eklemlili robot kolu modeli uygulama olarak alındı. Robot kolu O noktasında yatay eksen boyunca dönebilmektedir. Modelde verilen u sistemin kontrol girişi, w belirsiz bozucu momenti, I

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(t) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ a \sin(x_1(t)) \end{bmatrix} \quad (3.54a)$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \alpha_1(t) \leq 1 \\ -0.5 &\leq \alpha_2(t) \leq 0.5 \\ -0.5 &\leq \beta(t) \leq 0.5 \end{aligned} \quad (3.54b)$$

dir. Böylece denklem (3.5)'ten dolayı $G(\alpha)$, $E(\beta)$ ve F matrisleri;

$$\begin{aligned} \Delta A(\alpha(t)) &= BG(\alpha(t)) &\Rightarrow G(\alpha(t)) &= [\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t)] \\ \Delta B(\beta(t)) &= BE(\beta(t)) &\Rightarrow E(\beta(t)) &= \beta(t) \\ H &= BF &\Rightarrow F &= a \sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Kapalı çevrimli sistem,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)]u + Hv \\ &= [A + BG(\alpha)]x + [B + BE(\beta)] [-Kx + u_n(x)] + BFv \\ &= Ax + BG(\alpha)x - BKx + Bu_n(x) - BE(\beta)Kx + BE(\beta)u_n(x) + BFv \\ &= Ax - BKx + Bu_n(x) + Be(x, t) \\ &= \bar{A}x + Bu_n(x) + Be(x, t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

olur. Tüm belirsizlikler ve doğrusal olmayan elemanın maksimum değişim aralığını içeren $e(x, t)$ fonksiyonu;

$$e(x, t) = G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv$$

olduğundan, $e(x, t)$ 'nin normu alınır aşağıdaki norm eşitsizliğini sağlar.

$$\|e(x, t)\| \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \rho(x) + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \triangleq \rho(x)$$

Böylece $\rho(x)$ fonksiyonu,

$$1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| > 0$$

şartı sağlanırsa [1-2];

$$\rho(x) = \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)Kx\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \quad (3.56)$$

olarak elde edilir. Sonuçta,

$$\rho(x) = (1 - \beta_{\max})^{-1} \left[|\alpha_{1\max} x_1 + \alpha_{2\max} x_2| + \beta_{\max} |k_1 x_1 + k_2 x_2| + |a| \right] \quad (3.57)$$

olur.

Doğrusal Kontrol Tasarımı: Denklem (3.9)'da verilen doğrusal kontrolörün denklem (3.7)'de verilen hedeflenen performans indeksi $Q_R = \text{diag}[10, 1]$ ve $R = 5$ için denklem (3.8)'de verilen Riccati denkleminin çözümünden elde edilen denklem (3.58)'daki P_R kullanılarak bulundu. Bölüm 3.2.3'te verilen matlab programında sistem ve ağırlık matrisleri yerine konularak P_R matrisi;

$$P_R = \begin{bmatrix} 9.1353 & 3.6603 \\ 3.6603 & 3.1610 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

olduğundan, kazanç katsayıları;

$$K = [0.7321 \quad 0.6322] \quad (3.59)$$

olarak bulunur. Bu durumda nominal sistemin karakteristik polinomal denkleminin kökleri $\lambda_{1,2} = -0.8161 \pm j1.0325$ 'dir.

Doğrusal Olmayan Kontrol Tasarımı: Denklem (3.11)'deki doğrusal olmayan kontrolör bölüm 3.2.2'de verilen signum (işaret) fonksiyonu ile tekrar yazılırsa;

$$u_n(x) = \begin{cases} -\rho(x) \operatorname{sgn}(B^T P_L x), & |B^T P_L x| > \varepsilon \text{ için} \\ -\rho(x) \frac{1}{\varepsilon} (B^T P_L x), & |B^T P_L x| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (3.60)$$

olur. Burada P_L 'yi $Q_L = \operatorname{diag}[1, 1]$ için denklem (3.10)'da verilen Lyapunov denkleminin bölüm 3.2.3'te verilen matlab programı kullanılarak çözümünden;

$$P_L = \begin{bmatrix} 1.3081 & 0.2887 \\ 0.2887 & 0.4832 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

olarak bulunur. Böylece $B^T P_L$ matrisi,

$$B^T P_L = [0.2887 \quad 0.4832] \quad (3.62)$$

olur. Lyapunov denkleminde P_L yerine P_R kullanılırsa elde edilen Q_L 'nin yine pozitif tanımlı olduğu görülür.

Böylece denklem (3.60)'deki $\rho(x)$ fonksiyonu,

$$\rho(x) = 2(|x_1 + 0.5x_2| + 0.5|0.7321x_1 + 0.6322x_2| + |10|) \quad (3.63)$$

dir.

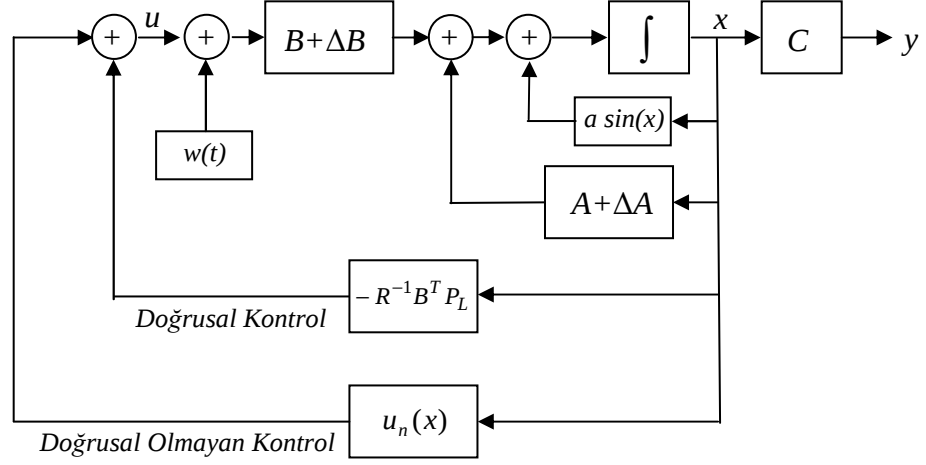
Simülasyon Sonuçları: Tek eklemlı robot kolu sistemi, durum değişkenlerinin başlangıç şartları $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 0.5)$ ve doğrusal olmayan kontrolördeki tasarımcı tarafından seçilen $\varepsilon = 0.1$ pozitif sabitesi için, Matlab/SIMULINK ortamında modellenerek simülasyonu yapıldı ve elde edilen sonuçlar 3.8 – 3.9'da verildi.

Şekil 3.7'de sistem girişine uygulanan bozucu sinyali görölmektedir. Şekil 3.8 ve 3.9'daki simülasyonlarda $w(t)$ bozucu sinyalinin etkisini görebilmek için ilk önce $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ 'da, daha sonra $t_0 \geq 10$ 'da tek eklemlı robot kolu sistemine uygulanmıştır. Şekil 3.8'de verilen simülasyon sonuçları denklem (3.58)'deki P_R ve denklem (3.61)'deki P_L için, belirsizliklerin maksimum, minimum değerleri ve nominal sistem kullanılarak elde edildi. Şekil 3.8(a)'da, tek eklemlı robot kolu sisteminin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi,

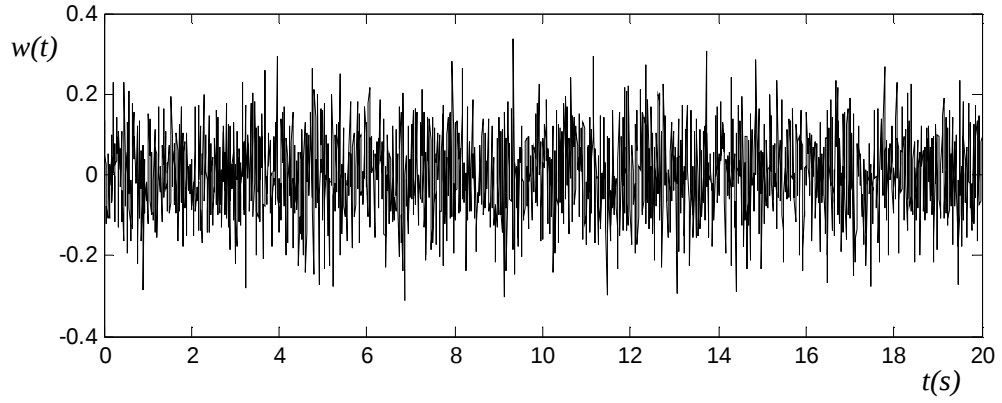
belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerini sistemin nominal değeri ile karşılaştırmak amacı ile aynı diyagramda verilmiştir. Şekil 3.8(a)'daki simülasyon sonuçlarına bakıldığında kapalı çevrimli sistemin hedeflenen sürekli duruma erişme süresi, τ zaman sabitesi olmak üzere $5\tau \cong 6s$ süresinde sürekli duruma ulaştığı görülmektedir. Şekil 3.8(b)'de sistemin durum uzay diyagramı verilmiştir. Şekil 3.8(b)'de görüldüğü gibi sistem yörüngesi kısa bir süre içerisinde N_L düzlemine ulaştıktan sonra bu düzlem boyunca orijine asimptotik olarak ulaşmaktadır. Şekil 3.8(c)'de sistemin $u(t)$ kontrol sinyali verilmiştir. Kontrol sinyalinin belirsizlik değerlerine göre değişiminin birbirine yakın olduğu görülmektedir.

Bölüm 3.2.2'de verilen kontrol parametrelerinin ayarlanması kısmında belirtildiği gibi $P_R = P_L$ alınırsa, yani Lyapunov denkleminde elde edilen denklem (3.61)'deki P_L matrisi yerine Riccati denkleminde elde edilen denklem (3.58)'deki P_R matrisi kullanıldığında şekil 3.8'deki sistem değerleri için simülasyon sonuçları şekil 3.9'da verilmiştir. Şekil 3.9(a), (b) ve (c)'de sırası ile sistemin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, sistemin durum uzay diyagramı ve $u(t)$ kontrol sinyalinin değişimi verilmiştir. Şekil 3.8 ve şekil 3.9'daki simülasyon sonuçları karşılaştırıldığında, şekil 3.9'da kapalı çevrimli sistemin performansı daha da iyileşmiştir. Şekil 3.9 (b)'de sistemin durum uzay diyagramında görüldü gibi sistem yörüngesi durum değişkenlerinin başlangıç değerinden başlayarak N_R yüzeyine ulaştıktan sonra orijine ulaşmaktadır. Her iki durumdaki simülasyon için de şekil 3.8 (c) ve şekil 3.9 (c)'deki kontrol sinyallerinin maksimum değeri aynıdır. Ayrıca sistemin sürekli durum hatası ilk duruma göre çok daha küçük bir değerdedir. Böylece kontrol parametrelerinin ayarlanmasıyla sistemin kararlılığının daha da artırıldığı ve sistemin belirsizliklere karşı daha da dayanıklı hale getirildiği şekil 3.9'da açıkça görülmektedir. Ayrıca sistemin durum değişkenlerinin başlangıç şartları artırıldığında bile sistemin beklenildiği gibi çalıştığı görülmüştür.

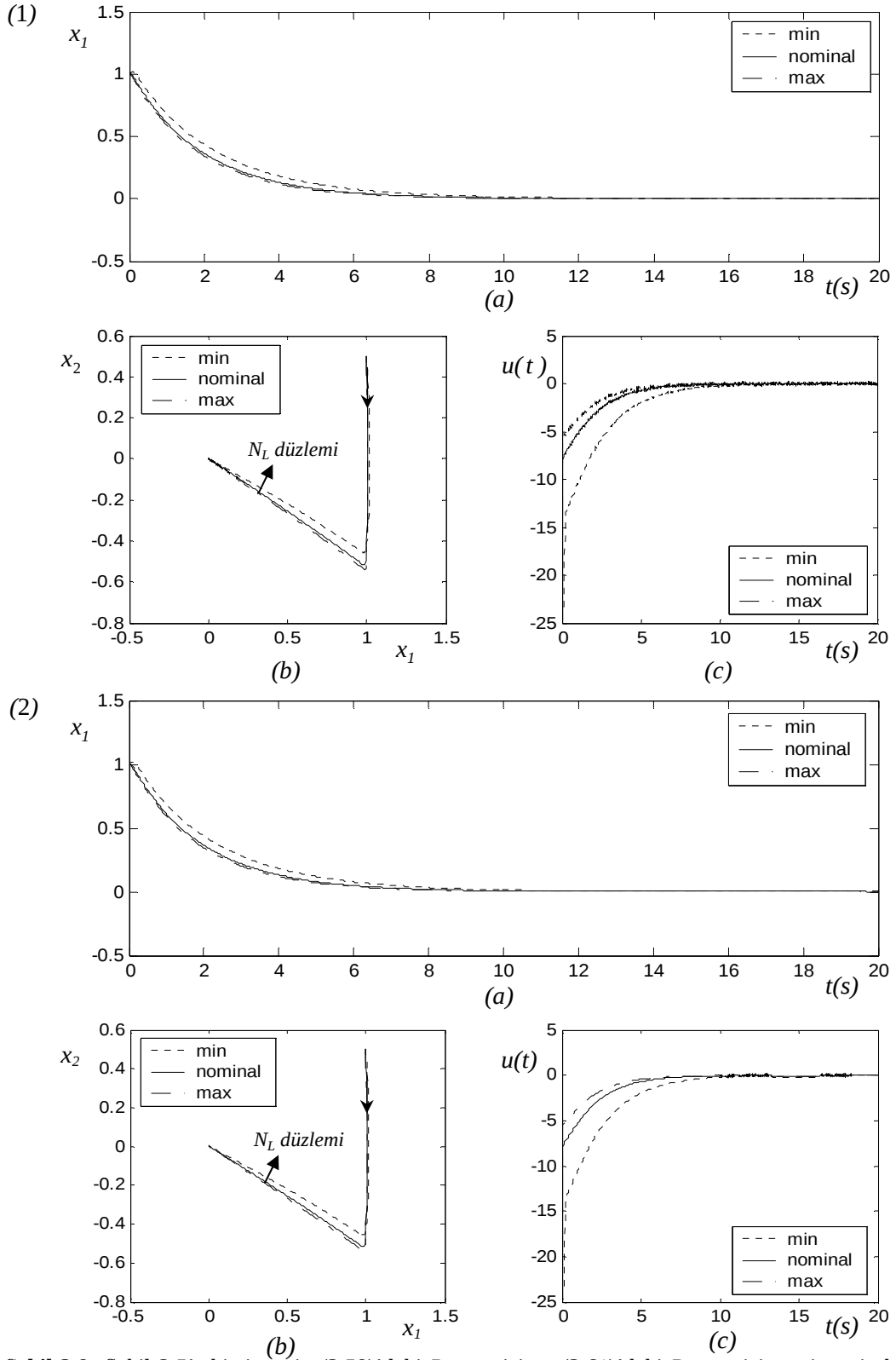
Şekil 3.8(1) ve 3.9(1)'den de görüldüğü gibi $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ 'da sisteme uygulanmış ve $t_0 \geq 0$ 'dan itibaren sinyallerde küçük titreşimler görülmektedir. Şekil 3.8(2) ve 3.9(2)'de $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 10$ 'da tek eklemli robot kolu sistemine uygulanmıştır ve sinyallerdeki küçük titreşimler $t_0 \geq 10$ 'dan itibaren başlamaktadır. x_1 durum değişkeninde titreşimlerin neredeyse yok oluşu kontrolörün etkinliğinin sonucudur.



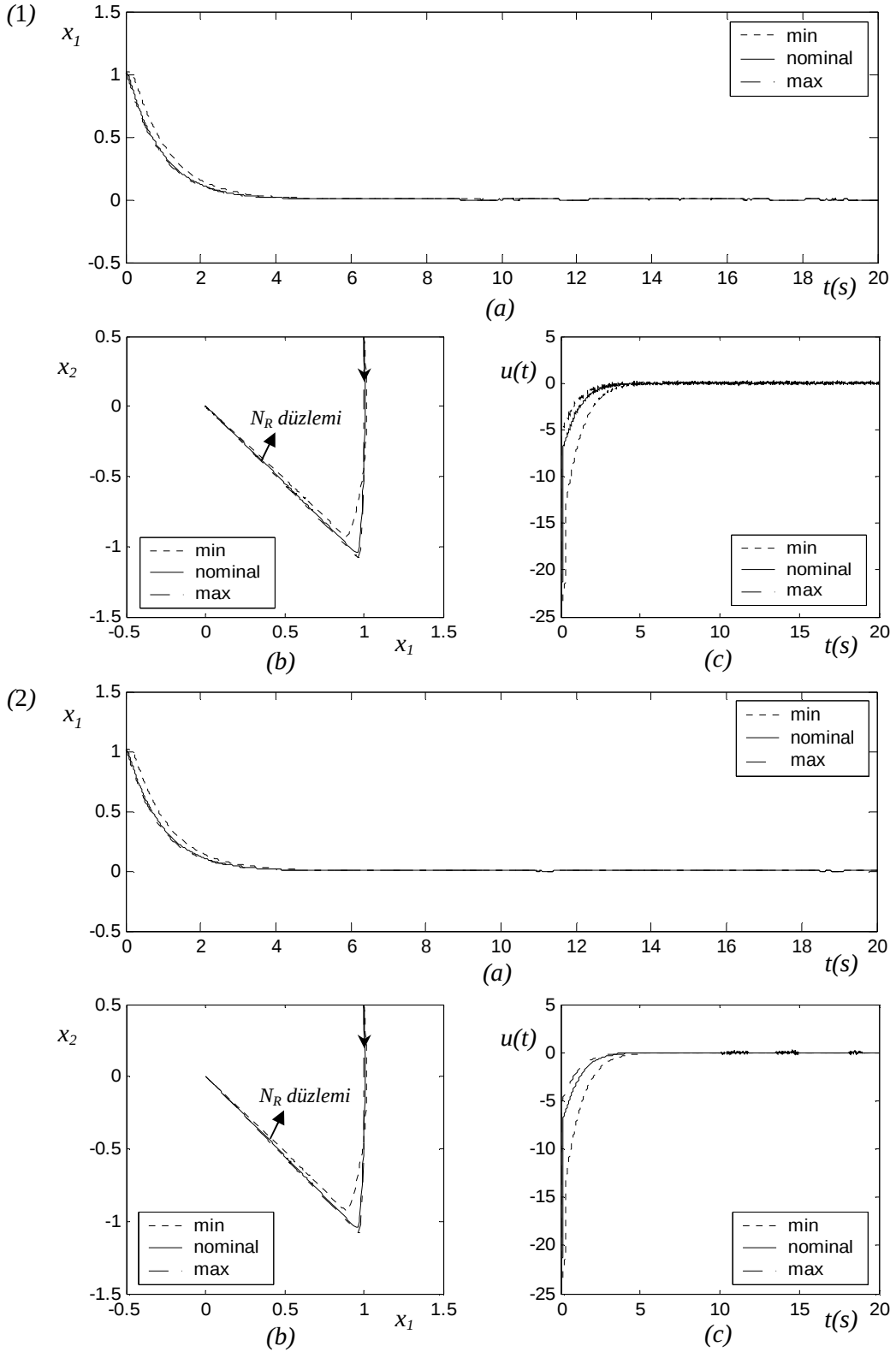
Şekil 3.6: Tek eklemlı robot kolu için dayanıklı durum geribeslemeli kontrol şeması.



Şekil 3.7: $w(t)$ bozucu sinyali

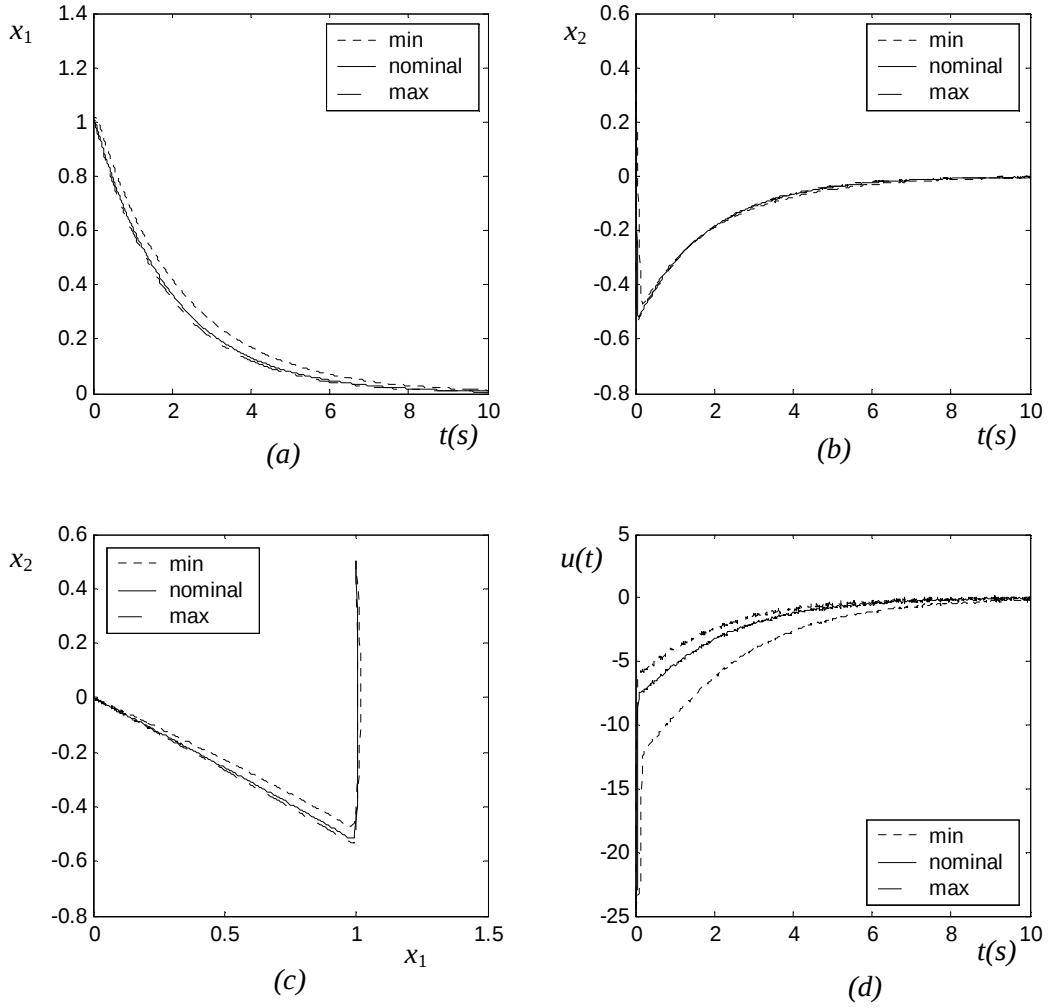


Şekil 3.8: Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki P_R matrisi ve (3.61)'deki P_L matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 1$, $|\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) Durum uzay diyagramı, (c) $u(t)$ kontrol sinyali. (1) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ 'da, (2) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 10$ 'da sisteme uygulanıyor.

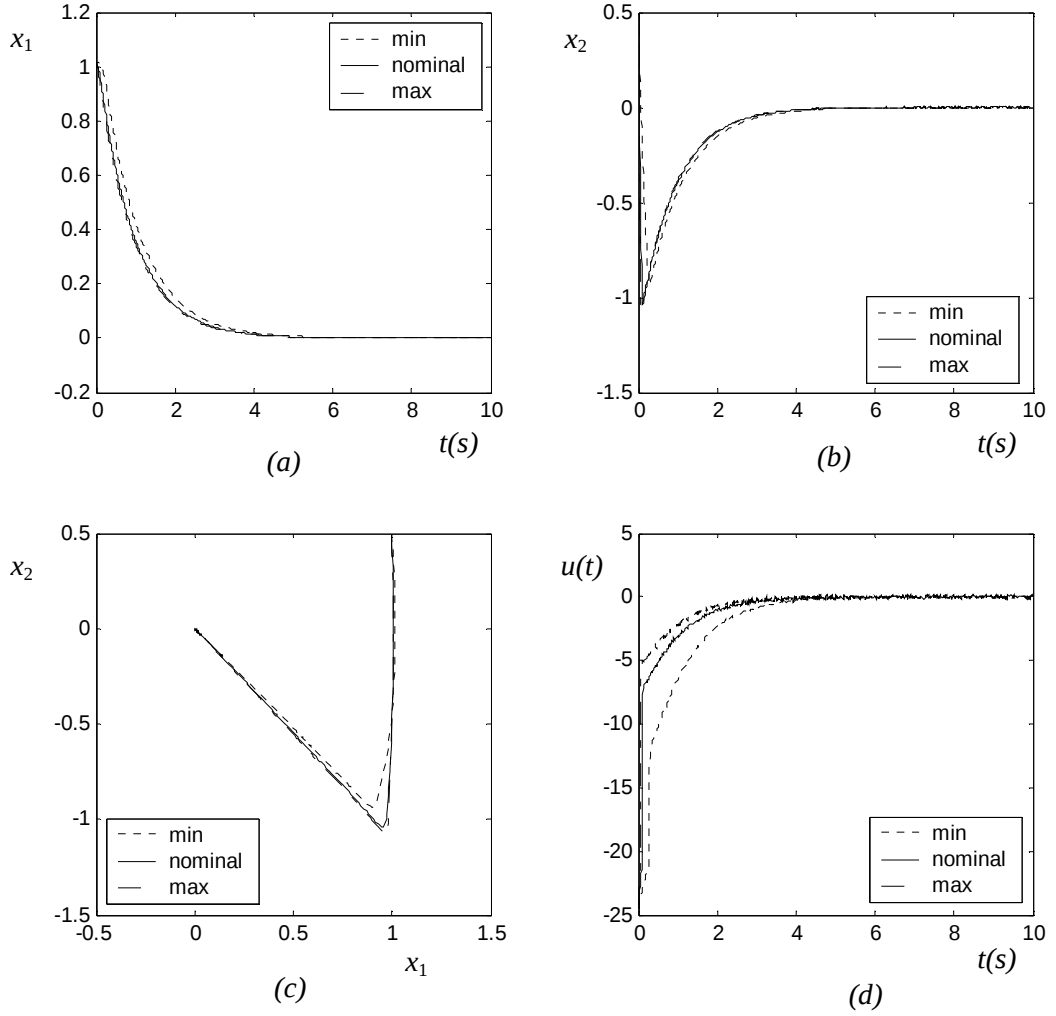


Şekil 3.9: Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki $P_R=P_L$ matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 1$, $|\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) Durum uzay diyagramı, (c) $u(t)$ kontrol sinyali. (1) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 0$ 'da, (2) $w(t)$ bozucu sinyali $t_0 \geq 10$ 'da sisteme uygulanıyor.

Denklem (3.52)'de verilen sistem ve denklem (3.54)'teki belirsizlik değerlerine göre yapılan kontrolör tasarımı için, denklem (3.52)'de verilen sistemin belirsizlik değerleri $|\alpha_1(t)| \leq 2$, $|\alpha_2(t)| \leq 1$ ve $|\beta(t)| \leq 0.5$ alınarak simülasyon yapıldı ve sonuçlar şekil 3.10 – 3.11'de verildi. Yapılan simülasyonda $w(t)$ bozucu sinyali de sisteme uygulanmıştır. Böyle bir durumda bile sistemin çalıştığı ve hedeflenen davranışı gösterdiği şekillerden de görülmektedir.



Şekil 3.10: Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki P_R matrisi ve (3.61)'deki P_L matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$ ve belirsizliklerin $|\alpha_1(t)| \leq 1$, $|\alpha_2(t)| = |\beta(t)| \leq 0.5$ değerlerine göre tasarlanan kontrolör için, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 2$, $|\alpha_2(t)| \leq 1$ ve $|\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.



Şekil 3.11: Şekil 3.5'teki sistemin (3.58)'deki $P_R=P_L$ matrisi ve sistemin başlangıç şartları $x_1=1$ ve $x_2=0.5$ ve belirsizliklerin $|\alpha_1(t)| \leq 1$, $|\alpha_2(t)|=|\beta(t)| \leq 0.5$ değerlerine göre tasarlanan kontrolör için, belirsizliklerin, $|\alpha_1(t)| \leq 2$, $|\alpha_2(t)| \leq 1$ ve $|\beta(t)| \leq 0.5$, maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

3.4. Sonuçlar

Bu bölümde yapısal belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin dayanıklı (robust) durum geribeslemeli kontrolü yapıldı. Çoğu mühendislik sistemleri parametre belirsizliği ve modellenmesi sorun olan doğrusal olmayan dinamikler içerir. Burada belirsizliklerin değişim aralığı verildiğinden, bu değişim aralığını karşılayan ve hedeflenen kapalı çevrimli sistem performansını da sağlayan kontrolü tasarlandı. Bu kontrolü, doğrusal ve doğrusal olmayan iki kontrolden oluşmaktadır. Doğrusal kontrolü, nominal sistemin kararlılığını ve hedeflenen geçici durum davranışını, doğrusal olmayan kontrolü ise belirsiz parametrelerin ve doğrusal olmayan elemanın etkisini karşılar ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlar.

Yapısal belirsizliklerin “matching conditions” olarak bilinen denkleştirme şartlarını sağladığı durum için kontrolü tasarlandı. Tasarlanan kontrolü ile sistem yörüngesinin, doğrusal olmayan eleman, tüm parametre belirsizlikleri ve başlangıç şartlarına rağmen sıfıra yakın bir bölgeye girmesi ve orada kalması sağlandı. Başka bir deyişle tasarlanan kontrolü ile nominal modeli karasız, belirsizlik ve doğrusal olmayan eleman içeren sistemlerin asimptotik kararlılığı garantilendi.

Doğrusal sistemler için geliştirilen [6]’da verilen kontrolü belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulandı. Sistem performansının iyileşmesi için kontrol parametrelerinin ayarı yapıldı. Bölüm 3.2.2’de belirtildiği gibi kontrol parametreleri ayarlandığında ve $P_R = P_L$ alındığında kapalı çevrimli sistemin kararlılığının daha da arttığı, sistemin belirsizliklere karşı daha da dayanıklı hale geldiği ve belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde kontrol sinyalinin nominal sistem değerlerindeki değişimine oldukça yaklaştığı görülmüştür.

4. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER İÇİN GÖZLEYİCİ TASARIMI

4.1. Giriş

Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin dinamik denklemi;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

ve çıkışı,

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.2)$$

ile tanımlanabilir. Burada $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $u(t) \in R^r$ giriş vektörü, $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi ve $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisidir.

Gözlenebilirlik olabilecek minimum zaman aralığında ölçülebilen durum değişkenleri $y(t)$ kullanılarak, $x(t)$ ölçülemeyen durum değişkenlerinin oluşturulmasıdır. Pratikte tüm durum geribeslemeli kontrolde karşılaşılan zorluk, durum değişkenlerinin bir veya birkaçının doğrudan ölçülememesidir. Bu nedenle ölçülemeyen durum değişkenlerini tahmin etmek amacıyla gözleyici kullanarak kontrol işaretleri oluşturmak gerekir [1].

Tüm durum gözlenebilirlik: Eğer denklem (4.1) ve (4.2) sistemleri için sınırlı bir $t_0 \leq t \leq t_1$ zaman aralığı içerisinde sistem çıkışı $y(t)$ gözlenerek her durum değişkeninin $x(t_0)$ başlangıç durumu tanımlanabiliyorsa, verilen sistem tüm durum gözlenebilirdir. Bu çalışmada $t_0=0$ alınacaktır. Tüm durum gözlenebilirlik matrisi, n . mertebeden bir sistem için,

$$N = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \quad (4.3)$$

dir ve sistemin tüm durum gözlenebilmesi için $rank(N) = n$ olmalıdır.

Durum değişkenlerini gözleyen aygıt veya bilgisayar programı durum gözleyici veya sadece gözleyici olarak adlandırılır. Eğer gözleyici bazı durum değişkenlerinin doğrudan ölçülmeye uygun olup olmadığına bakmaksızın sistemin tüm durum değişkenlerini gözlüyorsa tüm durum gözleyici adını alır.

Durum gözleyici: Denklem (4.1) ve (4.2)'de verilen sistem için gözleyici, ancak ve ancak verilen sistemin gözlenebilirlik şartının sağlanması ile tasarlanır. Burada basitlik açısından, gözleyici hatası ve durum değişkenlerinin başlangıç hatası dışında denklem (4.1)'de verilen sistem ile aynı olan gözleyicinin matematiksel modeli verilecektir. Gözleyici hatası, sistemin ölçülen $y(t)$ çıkışı ile gözleyici çıkış değeri $C\hat{x}$ arasındaki farktır. Başlangıç hatası ise sistemin durum değişkenlerinin başlangıç şartı ile gözleyicinin durum değişkenlerinin başlangıç şartı arasındaki farktır. Sonuç olarak gözleyicinin matematiksel modeli,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \quad (4.4)$$

dir. Burada, $\hat{x}$ gözleyici durum değişkeni, K_e gözleyici kazanç matrisi ve $C\hat{x}$ gözleyici çıkışıdır. Gözleyici girişi, sistem çıkışı $y(t)$ ve kontrol girişi $u(t)$ 'den oluşur.

Tüm durum gözleyici: Gözleyicinin mertebesi sistemin mertebesi n ile aynıdır. Denklem (4.1) ve (4.2) ile tanımlanan sistem için gözleyici dinamiği denklem (4.4) ile tanımlandığına göre sistem ile gözleyici arasındaki hata denklemi, $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ için;

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x})] \\ &= Ax - A\hat{x} - K_e(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - K_eC)x - (A - K_eC)\hat{x} \\ &= (A - K_eC)(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\dot{e}(t) = (A - K_eC)e(t) \quad (4.6)$$

olur. Denklem (4.6)'ya göre hata vektörünün dinamik davranışı $A - K_eC$ matrisinin özdeğerleri ile tanımlanır. Eğer $A - K_eC$ matrisi kararlıysa, hata vektörü herhangi bir başlangıç değeri $e(0)$ 'dan sıfıra yaklaşacaktır. Yani $\hat{x}(t)$, başlangıç değerleri $x(0)$ ve $\hat{x}(0)$ 'a bakmaksızın $x(t)$ 'ye yaklaşacaktır. Eğer $A - K_eC$ matrisinin özdeğerleri hata vektörünün dinamik davranışını asimptotik kararlı yapacak şekilde ve yeterince hızlı seçilirse, o zaman herhangi bir hata vektörü orijine (veya sıfıra) yeteri derecede hızlı olarak yaklaşma eğiliminde olacaktır. *Pratikte gözleyici kazancı K_e tasarlanırken hedeflenen gözleyici kutupları, gözleyicinin hızının kontrollü sistemin hızından iki ile beş kat daha hızlı olacak şekilde seçilmelidir [1].*

Gözleyici kazançları K_e , bu tezin 2. bölümündeki nominal sistem için doğrusal durum geribeslemeli kontrol kazançlarının hesaplanmasında kullanılan metotlarla tasarlanabilir. Burada sadece metotlardan kutup yerleştirme metodu ile gözleyici tasarımı verilecektir.

Tüm durum gözleyici kazanç matrisi K_e 'nin hesaplanması için kutup yerleştirme tasarım adımları:

Adım 1: Sistemin tüm durum gözlenebilirlik şartı, $rank(N) = n$ ise adım 2'ye geçilir. Eğer $rank(N) < n$ ise, sistem için tüm durum gözleyici tasarlanamaz.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-2}s^2 + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (4.7)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları bulunur ve denklem (4.8)'de verilen W matrisi oluşturulur.

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Adım 3: $Q = (WN^T)^{-1}$ transformasyon matrisi bulunur.

Adım 4: Hedeflenen gözleyici özdeğerleri, $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_n$ 'den hedeflenen gözleyici kapalı çevrim karakteristik polinomu yazılır;

$$\begin{aligned} |sI - (A - K_e C)| &= (s - \bar{\mu}_1)(s - \bar{\mu}_2) \cdots (s - \bar{\mu}_n) \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

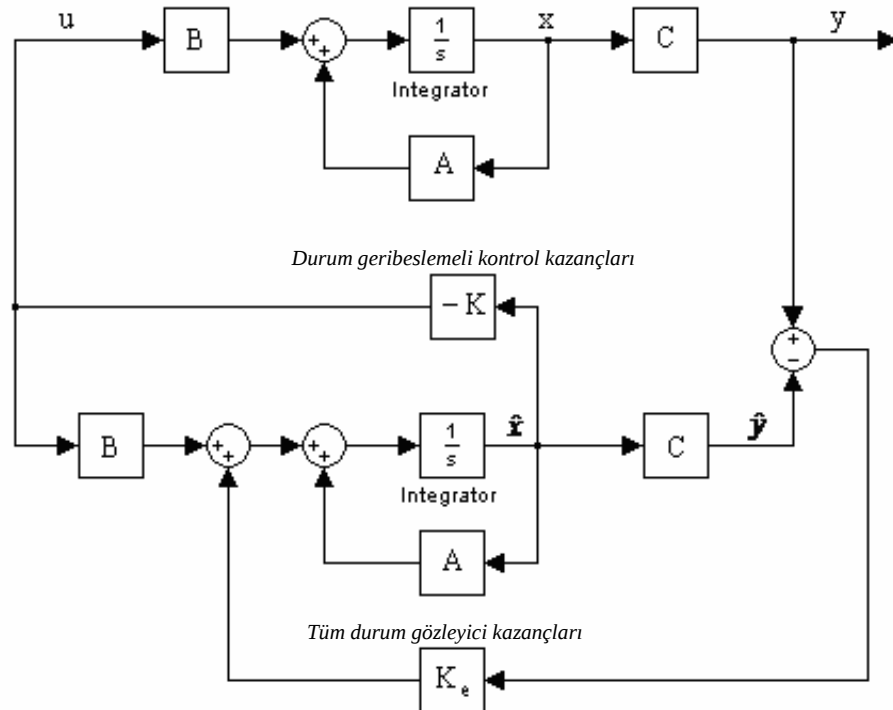
ve $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ katsayıları bulunur.

Adım 5: Gözleyici kazanç matrisi K_e ,

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_n - a_n \\ \bar{\alpha}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_1 - a_1 \end{bmatrix} = (WN^T)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_n - a_n \\ \bar{\alpha}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

elde edilir.

Şekil 4.1'de gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem şeması görülmektedir.



Şekil 4.1: Tüm durum gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem

4.2. Kapalı Çevrim Dinamiği

Gözleyicinin durum değişkenleri $\hat{x}(t)$ kullanılarak durum geribeslemeli kontrolör iki aşamada tasarlanır. İlk aşamada kontrolör kazançları hedeflenen kapalı çevrim karakteristik denklemini sağlamak için geribesleme kazanç matrisi K hesaplanır ve ikinci aşamada hedeflenen gözleyici karakteristik denklemini sağlamak için gözleyici kazanç matrisi K_e hesaplanır.

Burada gerçek sistemin durum değişkeni $x(t)$ 'den ziyade gözleyici durum değişkeni $\hat{x}(t)$ 'nin kapalı çevrimli sistemin karakteristik denklemi üzerindeki etkisini inceleyeceğiz.

Tüm durum kontroledilebilir ve tüm durum gözlenebilir sistemin denklem (4.1) ve (4.2)'deki gibi tanımlandığını varsayalım. Burada $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ alınırsa;

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.11)$$

$$y = Cx \quad (4.12)$$

Gözleyici durum değişkeni $\hat{x}(t)$ temelli durum geribeslemeli kontrol,

$$u = -K\hat{x} \quad (4.13)$$

dir. Denklem (4.13) ile verilen kontrolü denklem (4.11)'de yerine yazarsak;

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = (A - BK)x + BK(x - \hat{x}) \quad (4.14)$$

olur ve $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, denklem (4.14)'te yerine konursa,

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t) \quad (4.15)$$

olur. Denklem (4.6) ile verilen gözleyici hata denklemini tekrar yazalım.

$$\dot{e}(t) = (A - K_e C)e(t) \quad (4.16)$$

Gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistemin dinamiği denklem (4.15) ve (4.16)'nın birleşiminden,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Denklem (4.17) ile verilen sistemin karakteristik denklemi;

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$|sI - A + BK| |sI - A + K_e C| = 0 \quad (4.18)$$

dir. Gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol sisteminin kapalı çevrim kutupları kutup yerleştirme tasarımından gelen kutuplardan ve gözleyici tasarımından gelen kutuplardan oluşur. Bunun anlamı, kutup yerleştirmeye tasarım ile gözleyici tasarımı birbirinden bağımsızdır. Yani

gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol tasarlamak için kontrolör tasarımı ile gözleyici tasarımı birbirinden bağımsız ve ayrı olarak tasarlanabilir ve birleştirilebilirler. Buna bağımsızlık veya ayrıştırma prensibi (separation principle) denilir. Bu prensip doğrusal zamanla değişmeyen tüm sistemler için geçerlidir.

Örnek 4.1: Denklem (4.19) ve (4.20)'de verilen regülatör sistem için,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.19)$$

$$y = Cx \quad (4.20)$$

A , B ve C matrisleri sırası ile,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

olarak verilsin. Hedeflenen kapalı çevrim kutupları $\mu_1 = -1.8 + j2.4$, $\mu_2 = -1.8 - j2.4$ ve $\mu_3 = -2$ 'yi sağlayacak şekilde gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol tasarlayalım.

(i) Durum geribesleme kazanç matrisi K 'nın hesaplanması:

Adım 1: Sistemin tüm durum kontroledilebilirlik şartı,

$$M = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14.25 \\ 0 & -14.25 & 228 \\ -14.25 & 228 & -31264.5 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(M) = 3$ olduğundan sağlandı.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$\begin{aligned} |sI - A| &= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -57000 & -1938 & s+16 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + 16s^2 - 1938s - 57000 = 0 \end{aligned}$$

$a_1 = 16$, $a_2 = -1938$, $a_3 = -57000$ olarak bulunur.

Adım 3: T transformasyon matrisi;

$$T = MW = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14.25 \\ 0 & -14.25 & 228 \\ -14.25 & 228 & -31264.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1938 & 16 & 1 \\ 16 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.25 & 0 & 0 \\ 0 & -14.25 & 0 \\ 0 & 0 & -14.25 \end{bmatrix}$$

olur ve sistem kontroledilebilir kanonik formda olduğundan T birim matrisin -14.25 ile çarpımı olarak elde edildi.

Adım 4: Hedeflenen kapalı çevrim sisteminin özdeğerlerinden hedeflenen karakteristik polinom;

$$\begin{aligned}
(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) &= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 \\
&= (s + 1.8 - j2.4)(s + 1.8 + j2.4)(s + 2) \\
&= s^3 + 5.6s^2 + 16.2s + 18 = 0
\end{aligned}$$

Buradan $\alpha_1 = 5.6$, $\alpha_2 = 16.2$, $\alpha_3 = 18$ olarak bulunur.

Adım 5: Kontrol kazanç matrisi;

$$\begin{aligned}
K &= [\alpha_3 - a_3 \quad \alpha_2 - a_2 \quad \alpha_1 - a_1] T^{-1} \\
&= [18 + 57000 \quad 16.2 + 1938 \quad 5.6 - 16] \begin{bmatrix} -0.07 & 0 & 0 \\ 0 & -0.07 & 0 \\ 0 & 0 & -0.07 \end{bmatrix} \\
&= [-4001.3 \quad -137.13 \quad 0.73]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Durum geribeslemeli kontrolör,

$$\begin{aligned}
u &= -Kx = -[-4001.3 \quad -137.13 \quad 0.73] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= 4001.3x_1 + 137.13x_2 - 0.73x_3
\end{aligned}$$

olur. Durum değişkenleri x yerine gözleyici durum değişkenleri $\hat{x}$ elde edilerek gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol;

$$\begin{aligned}
u &= -K\hat{x} = -[-4001.3 \quad -137.13 \quad 0.73] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \\
&= 4001.3\hat{x}_1 + 137.13\hat{x}_2 - 0.73\hat{x}_3
\end{aligned}$$

olur.

(ii) Gözleyici kazanç matrisi K_e 'nin hesaplanması:

Gözleyicinin kutupları kontrollü geribeslemeli sistemin kutuplarından 2 ile 5 kat daha hızlı olması gerektiğinden, gözleyici kutuplarını;

$$\bar{\mu}_1 = -8, \quad \bar{\mu}_2 = -8.001, \quad \bar{\mu}_3 = -8.0001$$

olarak seçelim.

Adım 1: Sistemin tüm durum gözlenebilirlik şartı;

$$N = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$rank(N) = 3$ olduğundan sağlandı.

Adım 2: Kontrolsüz sistemin karakteristik polinomundan;

$$\begin{aligned}
|sI - A| &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -57000 & -1938 & s+16 \end{vmatrix} \\
&= s^3 + 16s^2 - 1938s - 57000 = 0
\end{aligned}$$

$a_1 = 16$, $a_2 = -1938$, $a_3 = -57000$ olarak bulunur.

Adım 3: $Q = (WN^T)^{-1}$ transformasyon matrisi bulunur.

$$\begin{aligned}
Q = (WN^T)^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} -1938 & 16 & 1 \\ 16 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16 \\ 1 & -16 & 2194 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Adım 4: Hedeflenen gözleyici özdeğerlerinden, hedeflenen gözleyici karakteristik polinomu;

$$\begin{aligned}
(s - \bar{\mu}_1)(s - \bar{\mu}_2)(s - \bar{\mu}_3) &= s^3 + \bar{\alpha}_1 s^2 + \bar{\alpha}_2 s + \bar{\alpha}_3 \\
&= (s + 8)(s + 8)(s + 8) \\
&= s^3 + 24s^2 + 192s + 512 = 0
\end{aligned}$$

ve $\bar{\alpha}_1 = 24$, $\bar{\alpha}_2 = 192$, $\bar{\alpha}_3 = 512$ olarak bulunur.

Adım 5: Gözleyici kazanç matrisi;

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_3 - a_3 \\ \bar{\alpha}_2 - a_2 \\ \bar{\alpha}_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16 \\ 1 & -16 & 2194 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 512 + 57000 \\ 192 + 1938 \\ 24 - 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2002 \\ 40984 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Denklem (4.4) ile verilen gözleyici denklemi;

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + K_e y \quad (4.21)$$

ve gözleyici temelli kontrol,

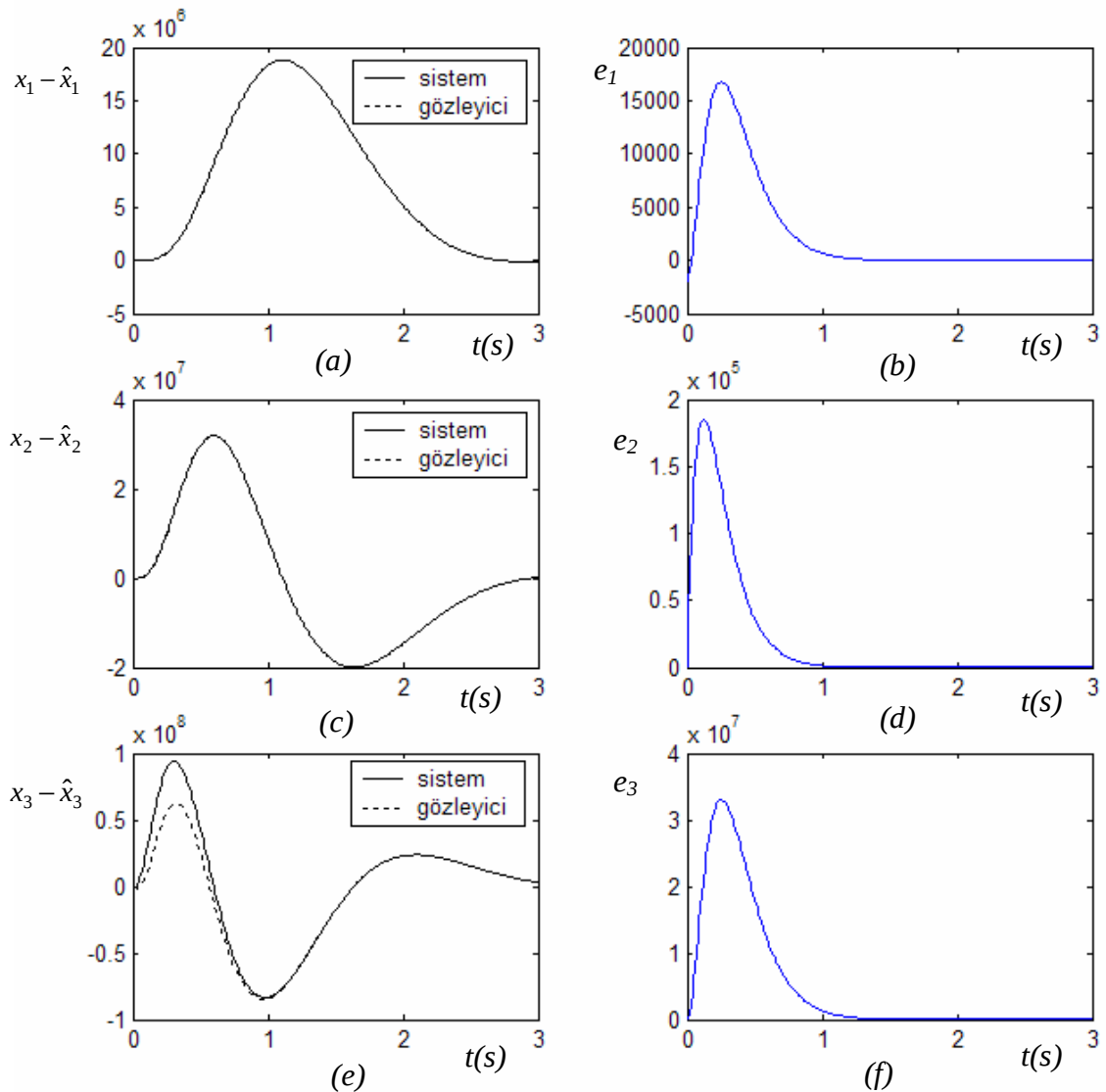
$$u = -K\hat{x} \quad (4.22)$$

olduğundan, denklem (4.21),

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= (A - K_e C - BK)\hat{x} + K_e y \\
\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -2002 & 0 & 1 \\ -40984 & -14.25 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2002 \\ 40984 \end{bmatrix} y
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şekil 4.2’de $x(0)=[0, 0, 0]^T$ ve $\hat{x}(0)=[2000,-1000,-5000]^T$ başlangıç şartları için $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = [-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları hatası kullanılarak şekil 4.1’de verilen regülatör sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve hata vektörlerinin zamanla değişimi verilmiştir. Zaman sabitesi $\tau = \frac{1}{1.8}$ olmak üzere sistemin sürekli duruma erişme süresi $4\tau \cong 2.25$ s olup, şekilden de görüldüğü gibi sistem $t = 2.25$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Ayrıca, gözleyici durum değişkenleri verilen başlangıç şartlarından gelerek sistemin durum değişkenlerini $t = 0.8$ s civarında yakalamaktadır.



Şekil 4.2: Örnek 4.1’de verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0) = [-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları için; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali. (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

Örnek 4.2: Aşağıdaki tek girişli, iki çıkışlı sistem verilsin [6].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Hedeflenen kapalı çevrim kutupları $\mu_{1,2} = -1.8 \pm j2.4$, $\mu_3 = -2$ 'yi ve gözleyici kutupları $\bar{\mu}_1 = -8$, $\bar{\mu}_2 = -8.001$, $\bar{\mu}_3 = -8.0001$ 'i sağlayacak şekilde gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol tasarlayalım.

Durum geribesleme kazanç matrisi ve gözleyici kazanç matrisi Matlab programı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

```
%% MATLAB PROGRAMI %%
% Sistem
A=[0 1 0;0 0 1;57000 1938 -16];
B=[0;0;-14.25];
C=[1 0 0;0 0 1];
% Hedeflenen kapalı çevrim kutupları
p=[-1.8+2.4j -1.8-2.4j -2];
% Hedeflenen gözleyici kutupları
q=[-8 -8.001 -8.0001];
% Kontrolör kazancı
K=place(A,B,p)
% Gözleyici kazancı
Ke=place(A',C',q)'
```

Durum geribesleme kazanç matrisi,

$$K = \begin{bmatrix} -4001.3 & -137.13 & 0.73 \end{bmatrix}$$

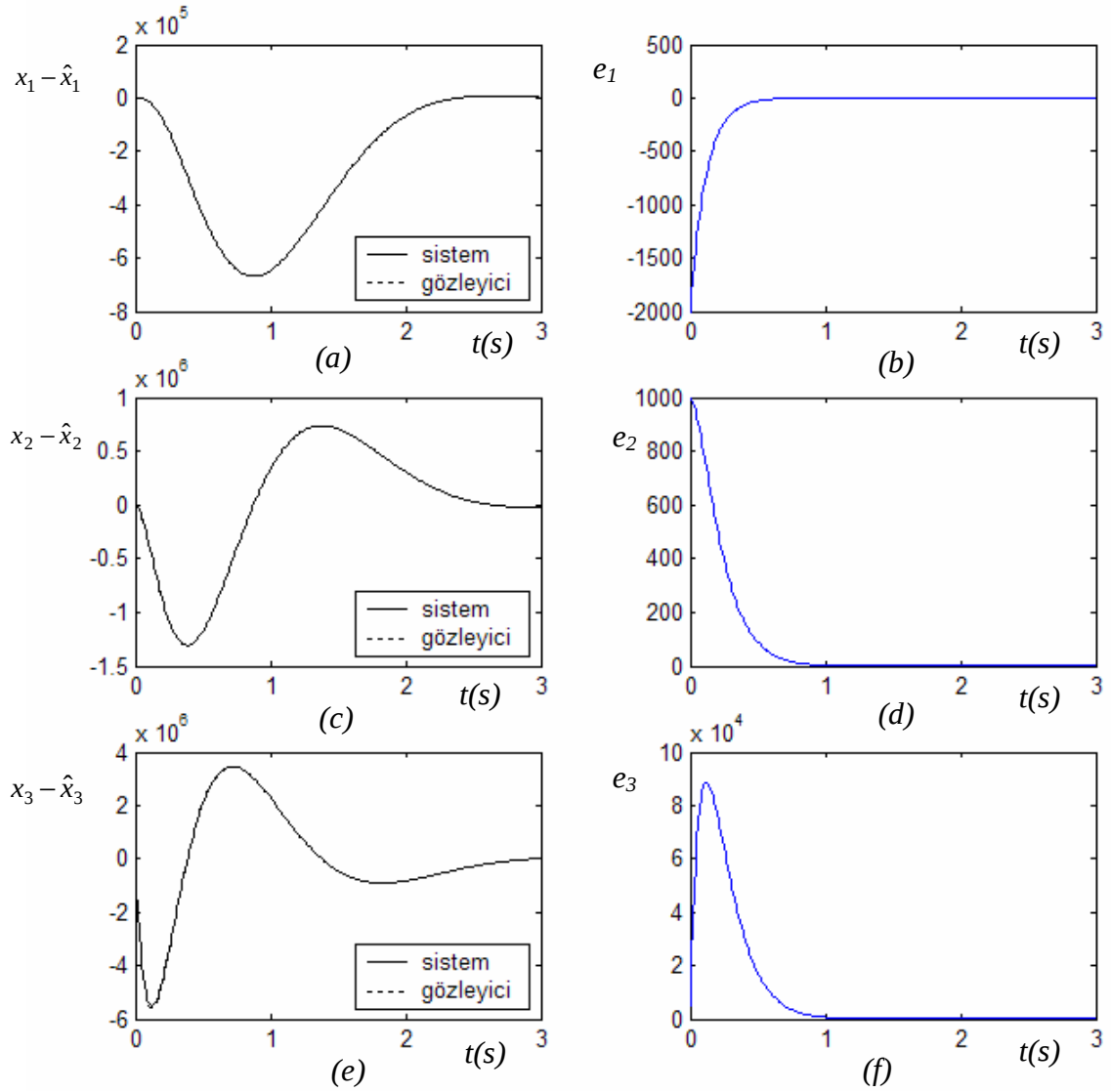
ve gözleyici kazanç matrisi,

$$K_e = \begin{bmatrix} 7.99754 & -0.0197 & 56995.23 \\ 0.00413 & 1.0330 & 0.00356 \end{bmatrix}^T$$

dir.

Şekil 4.3'te $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $\hat{x}(0) = [2000, -1000, -5000]^T$ başlangıç şartları için $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = [-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları hatası kullanılarak örnek 4.2'de verilen regülatör sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve hata vektörlerinin zamanla değişimi verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi sistem $t = 2.25$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmekte ve gözleyici durum değişkenleri verilen başlangıç şartlarından gelerek sistemin durum değişkenlerini $t = 0.8$ s civarında yakalamaktadır. Örnek 4.1'de verilen tek girişli, tek çıkışlı sistem ile örnek 4.2'de verilen tek girişli, çok çıkışlı sistemi

karşılaştırsak; örnek 4.2'deki sonuçlardan görüldüğü gibi sistemin gözleyici hatası daha küçük değerlidir.



Şekil 4.3: Örnek 4.2’de verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[-2000, 1000, 5000]^T$ başlangıç şartları için; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali. (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

4.3. Minimum Mertebeli Gözleyici

Durum değişkeni x 'in n -vektör ve çıkış vektörü y 'nin m -vektör olarak ölçüldüğünü varsayalım. Çıkış değişkenleri m , durum değişkenlerinin doğrusal kombinasyonu olduğundan, m durum değişkeninin ölçülen değerleri geribeslemeli kontrolörde kullanılabilir. Bu durumda sadece $n - m$ durum değişkenini gözleyiciden elde etmeye gereksinim duyulur. Bu nedenle minimum mertebeli gözleyici, $(n - m)$ 'yinci mertebeden gözleyici olur. Böyle $(n - m)$ 'yinci mertebeden gözleyiciye minimum mertebeli gözleyici denilir. *Burada önemli bir nokta, eğer ölçülen çıkış değişkenleri ihmal edilemeyecek derecede gürültü içeriyorsa ve oldukça hatalı ise, o zaman tüm durum gözleyici kullanılarak en iyi sistem performansını veren sonuç elde edilebilir [1].*

İşlem kolaylığı için sistem çıkışının skaler olduğu ($m=1$) durumda minimum mertebeli gözleyici için gerekli formülasyonlar yapılacaktır.

Denklem (4.1) ve (4.2)'de tanımlanan sistemde durum değişkeni $x_a(t)$ çıkış vektörü $y(t)$ 'ye eşittir ve bu nedenle doğrudan ölçülebilirdir. $x_b(t)$ ise durum vektörlerinin ölçülemeyen bölümüdür. Böylece, denklem (4.1) ve (4.2) için bölünmüş durum ve çıkış denklemleri;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dots \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \vdots & A_{ab} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{ba} & \vdots & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \dots \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (4.23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

formunda olur. Burada, $A_{aa} \in R^1$, $A_{ab} \in R^{1 \times (n-1)}$, $A_{ba} \in R^{(n-1) \times 1}$, $A_{bb} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, $B_a \in R^1$ ve $B_b \in R^{(n-1) \times 1}$ matristir. Denklem (4.23)'ten durum değişkenlerinin ölçülebilen bölümünün denklemi;

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u$$

veya

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = A_{ab}x_b \quad (4.25)$$

olur. Denklem (4.25)'in sol tarafındaki terimler ölçülebilenlerdir. Denklem (4.25) çıkış denklemi olarak değerlendirilebilir. Minimum mertebeli gözleyici tasarımında denklem (4.25)'in sol tarafı bilinen nicelikler olarak alınır. Denklem (4.23)'ten durum değişkenlerinin ölçülemeyen bölümünün denklemi,

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b u \quad (4.26)$$

olur. Burada $A_{ba}x_a$ ve B_bu terimlerinin bilinen nicelikler olduğuna dikkat edilmelidir. Denklem (4.26) durum değişkenlerinin ölçülemeyen bölümünün dinamiğini tanımlar.

Minimum mertebeli gözleyici tasarımı, tüm durum gözleyici için geliştirilen tasarım teknikleri kullanılarak basitleştirilebilir. Tablo 4.1’de minimum mertebeli gözleyici denklemleri ile tüm durum gözleyici denklemleri karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

Tablo 4.1: Minimum mertebeli gözleyici ile tüm durum gözleyicindeki değişkenlerin karşılaştırılmalı tablosu

Tüm Durum Gözleyici	Minimum Mertebeli Gözleyici
$\hat{x}$	$\hat{x}_b$
A	A_{bb}
Bu	$A_{ba}x_a + B_bu$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
C	A_{ab}
$K_e \in R^{n \times 1}$	$K_e \in R^{(n-1) \times 1}$

Minimum mertebeli gözleyici tasarımı, denklem (4.4)’te verilen tüm durum gözleyici denklemini yeniden yazılırsa;

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - K_e C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_e y(t) \quad (4.27)$$

ve tablo 4.1’de verilen minimum mertebeli gözleyiciye eşdeğer ifadeler denklem (4.27)’de yazılırsa,

$$\dot{\hat{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + A_{ba}x_a + B_bu + K_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u) \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (4.28)’de $\hat{x}_b(t)$ ’nin tahmin edilebilmesi için $x_a(t)$ ’nin türevine gereksinim duyulur. Bu problemten kaçınmak için $\dot{x}_a(t)$ aşağıdaki yolla elimine edilir.

(i) İlk önce denklem (4.28)’de x_a yerine y yazalım ve bu denkleme $(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e y$ terimini ekleyip- çıkaralım.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa})y + (B_b - K_e B_a)u \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa})y + (B_b - K_e B_a)u \\ &\quad + (A_{bb} - K_e A_{ab})K_e y - (A_{bb} - K_e A_{ab})K_e y \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab})(\hat{x}_b - K_e y) \\ &\quad + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada,

$$x_b - K_e y = x_b - K_e x_a = \eta \quad (4.30)$$

ve gözleyici için,

$$\hat{x}_b - K_e y = \hat{x}_b - K_e x_a = \hat{\eta} \quad (4.31)$$

olarak tanımlanırsa; Denklem (4.29),

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{\eta} + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u \quad (4.32)$$

olur. Denklem (4.24)'te verilen,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_b \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

eşitliğinden dolayı gözleyici durum değişkeni,

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix} [\hat{x}_b - K_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ K_e \end{bmatrix} y \quad (4.34)$$

olur. Burada 0, $(n-1)$ sıfırdan oluşmuş satır vektörüdür.

(ii) Son olarak, denklem (4.25)'te verilen eşitlik, denklem (4.28)'de yerine konursa,

$$\dot{\hat{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e A_{ab}x_b \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. Böylece türev içeren terim elimine edilmiş oldu.

Kapalı çevrim dinamiği:

Minimum mertebeli gözleyici hata denklemini elde edebilmek için, denklem (4.26)'dan denklem (4.35) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{x}_b - \dot{\hat{x}}_b &= A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b u - A_{bb}\hat{x}_b + K_e A_{ab}\hat{x}_b - A_{ba}x_a - B_b u - K_e A_{ab}x_b \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab})x_b - (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{x}_b \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab})(x_b - \hat{x}_b) \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir. Burada, hata $e(t) = x_b - \hat{x}_b = \eta - \hat{\eta}$ olarak tanımlanırsa, denklem (4.36) aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{e}(t) = (A_{bb} - K_e A_{ab})e(t) \quad (4.37)$$

Denklem (4.37) minimum mertebeli gözleyicinin hata denklemi olup, $e(t)$, $(n-1)$ vektördür.

Denklem (4.13)'te verilen gözleyici temelli durum geribeslemeli $u(t) = -K \hat{x}(t)$ kontrolörünü denklem (4.24)'te yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax - BK \hat{x} = Ax - BK \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \\ &= Ax - BK \begin{bmatrix} x_a \\ x_b - e \end{bmatrix} = Ax - BK \left\{ \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \right\} = Ax - BK \left\{ x - \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Burada $K_a \in R^{1 \times m}$ ve $K_b \in R^{1 \times (n-m)}$ olmak üzere $K = [K_a \quad \vdots \quad K_b]$ olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BKx + B \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \\ &= Ax - BKx + BK_b e\end{aligned}\quad (4.38)$$

elde edilir. Böylece kapalı çevrimli sistemin dinamiği, denklem (4.37) ve (4.38) kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_b \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}\quad (4.39)$$

olarak yazılabilir. Denklem (4.39), minimum mertebeli gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolün dinamiğidir. Denklem (4.39)'un karakteristik denklemi, denklem (4.18)'deki formda;

$$|sI - A + BK| |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| = 0$$

dir. Bu denklem, bize kontrolör tasarımı ile minimum mertebeli gözleyici tasarımının birbirinden bağımsız yapılabileceğini gösterir.

Kutup yerleştirme metoduyla minimum mertebeli gözleyici tasarımı:

Tüm durum gözleyici tasarımına benzer şekilde minimum mertebeli gözleyici tasarlanır.

Kutup yerleştirme metoduyla minimum mertebeli gözleyici tasarım adımları:

Adım 1: Minimum mertebeli gözleyici tasarımı için gözlenebilirlik şartı,

$$\hat{N} = [A_{ab}^T \quad A_{bb}^T A_{ab}^T \quad \dots \quad (A_{bb}^{n-2})^T A_{ab}^T]\quad (4.40)$$

matrisinin rankı, $\text{rank}(\hat{N}) = n - 1$ ise adım 2'ye geçilir.

Adım 2: Bölünmüş sistemin karakteristik polinomundan,

$$|sI - A_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \dots + \hat{a}_{n-2} s + \hat{a}_{n-1} = 0\quad (4.41)$$

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-2}$ katsayıları bulunur ve denklem (4.42)'de verilen $\hat{W}$ matrisi oluşturulur.

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-1} & \dots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (n-1) \times (n-1) \text{ matris}\quad (4.42)$$

Adım 3: $\hat{Q}$ transformasyon matrisi bulunur.

$$\hat{Q} = (\hat{W}\hat{N}^T)^{-1}\quad (4.43)$$

Adım 4: Hedeflenen minimum mertebeli gözleyici özdeğerleri, $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_n$ 'den hedeflenen minimum mertebeli gözleyici kapalı çevrim karakteristik polinomu yazılır;

$$\begin{aligned}|sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| &= (s - \bar{\mu}_1)(s - \bar{\mu}_2) \dots (s - \bar{\mu}_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \dots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0\end{aligned}\quad (4.44)$$

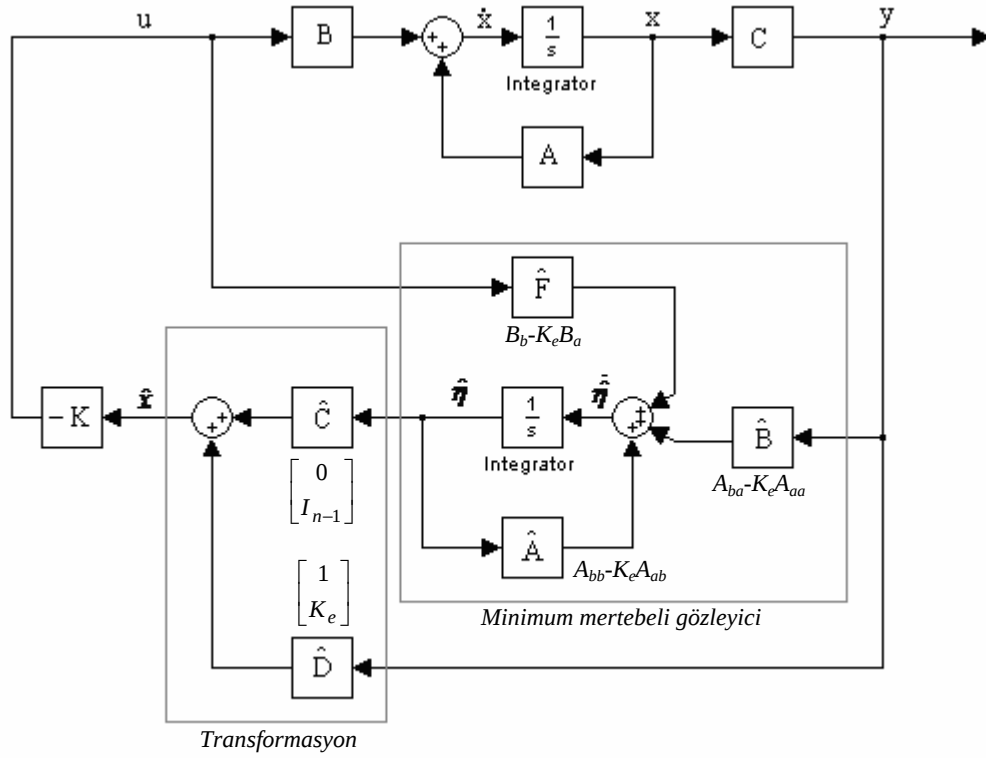
ve $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-2}$ katsayıları bulunur.

Adım 5: Minimum mertebeli gözleyici kazanç matrisi K_e ,

$$K_e = \hat{Q} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{W}\hat{N}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

elde edilir. Burada, K_e kazanç matrisi $(n-1) \times 1$ boyutlu bir matristir.

Şekil 4.4'te minimum mertebeli gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem şeması görülmektedir.



Şekil 4.4: Minimum mertebeli gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü sistem

Örnek 4.3: Örnek 4.2’de verilen aşağıdaki sistemi düşünelim.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Burada, sistem matrisi, giriş matrisi, çıkış matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve hedeflenen kapalı çevrim kutupları $\mu_1 = -1.8 + j2.4$, $\mu_2 = -1.8 - j2.4$ ve $\mu_3 = -2$ olarak verilsin. Hedeflenen gözleyici kutbu $\bar{\mu}_2 = -8.001$ için minimum mertebeli gözleyici tasarlayalım.

Gerçek sistem;

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \dots \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 57000 & 1938 & \vdots & -16 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -14.25 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, minimum mertebeli gözleyici sabitleri;

$$A_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 57000 & 1938 \end{bmatrix}, \quad A_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \end{bmatrix}, \quad A_{ba} = [0 \ 0], \quad A_{bb} = [1], \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -14.25 \end{bmatrix}, \quad B_b = [0]$$

olarak elde edilir.

Durum geribesleme kazanç matrisi ve gözleyici kazanç matrisi Matlab programı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

%% MATLAB PROGRAMI %%

```
% Sistem
A=[0 1 0;0 0 1;57000 1938 -16];
B=[0;0;-14.25];
C=[1 0 0;0 0 1];
% Hedeflenen kapalı çevrim kutupları
p=[-1.8+2.4j -1.8-2.4j -2];
% Durum geribeslemeli kontrol kazançları
K=place(A,B,p)
% Minimum mertebeli gözleyici tasarımı
Abb=[6];
Aab=[0;-16];
% Hedeflenen gözleyici kutupları
q=[-8.001];
% Gözleyici kazançları
Ke=place(Abb',Aab',q)
```

Durum geribesleme kazanç matrisi;

$$K = [-4001.3 \quad -137.13 \quad 0.73]$$

ve gözleyici kazanç matrisi,

$$K_e = [0 \quad -0.5625]$$

olarak bulunur.

Denklem (4.32)'den minimum mertebeli gözleyici denklemi;

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\hat{\eta} + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u \quad (4.46)$$

olarak yazılır. Yukarıda elde edilen değerler denklem (4.46)'da yerine yazılırsa;

$$A_{bb} - K_e A_{ab} = [1] - [0 \quad -0.5625] \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \end{bmatrix} = [-8]$$

denklem (4.46) ile verilen minimum mertebeli gözleyici denklemi;

$$\dot{\hat{\eta}}_2 = [-8]\hat{\eta}_2 + [32062.5 \quad 1094.625]y + [8.015625]u$$

olur. Burada, denklem (4.31)'den,

$$\hat{\eta} = \hat{x}_b - K_e y = \hat{x}_b - K_e x_a = \hat{x}_b - K_e x_1 \quad (4.47)$$

olduğundan;

$$\hat{\eta}_2 = \hat{x}_2 - K_e y$$

veya minimum mertebeli gözleyici sisteminin durum değişkenleri,

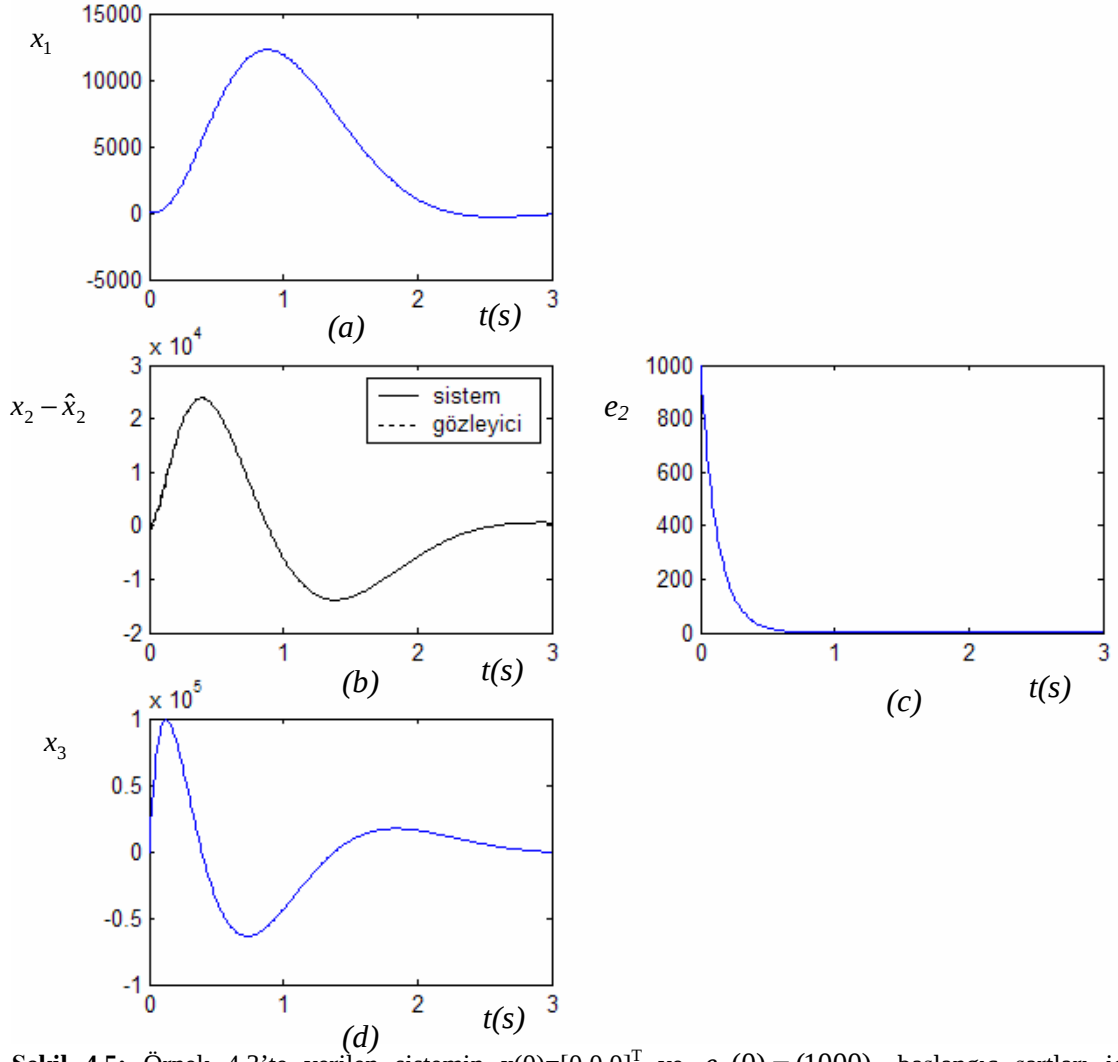
$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= \hat{\eta}_2 + K_e y \\ &= \hat{\eta}_2 + [0 \quad -0.5625] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \hat{\eta}_2 - 0.5625x_3 \end{aligned} \quad (4.48)$$

dir. Diğer durum değişkenleri ise $\hat{x}_1 = x_1$ ve $\hat{x}_3 = x_3$ 'tür.

Sonuçta, gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol sinyali $u(t)$ aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} u &= -K\hat{x} \\ &= -[-4001.3 \quad -137.13 \quad 0.73] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \\ &= 4001.3\hat{x}_1 + 137.13\hat{x}_2 - 0.73\hat{x}_3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Şekil 4.5'te $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ olmak üzere, $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $e_2(0) = (1000)$ başlangıç şartları için şekil 4.4'te verilen regülatör sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve hata vektörlerinin zamanla değişimi verilmiştir. Zaman sabitesi $\tau = 1/1.8$ olmak üzere sistemin sürekli duruma erişme süresi $4\tau \cong 2.25$ s olup, şekilden de görüldüğü gibi sistem $t = 2.25$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Ayrıca, gözleyici durum değişkenlerinin $t = 0.8$ s civarında sistemin durum değişkenlerini yakaladığı görülmektedir.



Şekil 4.5: Örnek 4.3'te verilen sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e_2(0)=(1000)$ başlangıç şartları için minimum mertebeli gözleyicili sistemin durum değişkenleri ve hata sinyallerinin zamanla değişimi. (a) x_1 durum değişkeni, (b) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri, (c) e_2 hata sinyali ve (d) x_3 durum değişkeni.

4.4. Sonuçlar

Sistemin tüm durum değişkenleri ölçülemiyorsa, ölçülemeyen durum değişkenlerini tahmin edebilmek için bir gözleyici kullanılmak zorundadır.

Sisteme bir gözleyicinin eklenmesi genellikle sistemin kararlılık marjini azaltır. Eğer sistemin matematiksel modeli belirsizlikler içeriyorsa, sistemin kararlılık marjininin düşük olması durumunda tasarlanan sistemin kararsız olabilmesi mümkündür. Ayrıca bazı durumlarda sağ yarı s düzleminde sıfırlar oluşabilir.

Sisteme gözleyici ilave edilmesi sistemin mertebesini artırır. Yani, n . mertebeden bir sisteme m . mertebeden bir gözleyici ilave ediliyorsa tasarlanan sistemin mertebesi $n+m$. mertebeden olur.

Gözleyici kutupları sol yarı s düzleminin çok uzağında seçildiğinden dolayı genellikle gözleyicili sistemin bant genişliği artar. Bu durum yüksek frekanslı gürültüleri geçireceğinden gürültü problemine neden olur. Minimum mertebeli gözleyicili sistemin bant genişliği tüm durum gözleyicili sistemin bant genişliğinden daha yüksektir. Bu nedenle, eğer sensör gürültüsü ciddi bir problemse, bu durumda tüm durum gözleyici kullanılması önerilir [1].

5. BELİRSİZLİK İÇEREN DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN GÖZLEYİCİ TEMELLİ DURUM GERİBESLEMELİ KONTROLÜ

5.1. Giriş

Daha önceki bölümlerde, bölüm 2 ve 3, kontrolör tasarımı tüm durum değişkenlerinin ölçülebildiği varsayılarak yapıldı. Ancak, gerçek uygulamalarda durum değişkenlerinden bazıları ölçülemeyebilir. Bunun sebepleri bölüm 4'te açıklamıştır ve özetle teknik olabilir veya durum değişkenlerinin ölçümü çok pahalı olabilir. Bu nedenle ölçülebilen durum değişkenlerinden, ölçülemeyen durum değişkenlerini elde edebilmek için, bölüm 4'te belirtildiği gibi, gözleyici kullanılır. Bir önceki bölümde nominal sistem için tüm durum ve minimum mertebeli gözleyici ve tasarımı verildi. Bu bölümde ise bölüm 3'te tanımlanan belirsizlik içeren sistemler için bir gözleyici tasarlanacaktır. Bunun yanı sıra, gözleyicinin kullanılmasıyla kapalı çevrimli sistemin asimptotik ve pratik kararlılığı, Lyapunov kararlılık yöntemine göre, garantilenecek ve ispatlanacaktır. Daha sonra belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan birer sistem üzerinde uygulama yapılarak, sonuçlar verilecektir.

5.2. Gözleyici Tasarımı

Gözleyici tasarımı, denklem (5.1) ve (5.2)'de verilen nominal sistem temellidir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.2)$$

Burada $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $u(t) \in R^r$ giriş vektörü, $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi ve $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisidir.

Gözleyici denklemini, $\xi(t) \in R^q$ gözleyici vektörü, $D \in R^{q \times q}$ gözleyici matrisi, $T \in R^{q \times n}$ kazanç matrisi ve $L \in R^{q \times m}$ kazanç matrisi olmak üzere, tüm $t \geq 0$ için $\xi(t) = Tx(t)$ dönüşümüyle;

$$\dot{\xi} = D\xi + Ly + TBu_1, \quad \xi(0) = 0 \quad (5.3)$$

olarak yazabiliriz [1,19]. Burada $u_1 = u \in R^r$ doğrusal giriş vektörüdür. Tüm matrisler, $\xi(t)$ 'nin $Tx(t)$ 'in uygun doğrusal birleşiminin bir asimptotik gözleyicisi olmasını sağlayacak şekilde tanımlanır. Yani, gözleyici hatası;

$$e_\xi(t) = \xi(t) - Tx(t) \quad (5.4)$$

denklem (5.5)'te verildiği gibi sıfıra yaklaşmalıdır.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\xi(t) = 0 \quad (5.5)$$

Denklem (5.4)'ün birinci türevi,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\xi &= \dot{\xi} - T\dot{x} \\
&= D\dot{\xi} + Ly + TBu_l - TA\dot{x} - TBu_l \\
&= D\dot{\xi} + Ly - TA\dot{x}
\end{aligned}$$

Burada, $\xi(t) = Tx(t)$ dönüşümü ve denklem (5.2)'de verilen $y(t) = Cx(t)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\xi &= D\dot{\xi} + Ly - TA\dot{x} \\
&= DT\dot{x} + LCx - TA\dot{x} \\
&= [DT - TA + LC]x
\end{aligned} \tag{5.6}$$

olarak bulunur. Burada, T dönüşüm matrisi $DT - TA + LC = 0$ denklemini sağlayacak şekilde bulunabilir. Böylece denklem (5.6)'da verilen hata denkleminin türevi $\dot{e}_\xi$ sıfır olur.

Durum değişkeni $\hat{x}(t)$, $S_1 \in R^{n \times q}$ ve $S_2 \in R^{n \times m}$ nin aşağıda verildiği gibi doğrusal kombinasyonu olsun;

$$\hat{x}(t) = S_1\xi(t) + S_2y(t) \tag{5.7}$$

Burada, $\xi(t) = Tx(t)$ dönüşümü ve denklem (5.2) kullanılarak, $\hat{x}(t)$ tekrar yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= S_1\xi(t) + S_2y(t) \\
&= S_1Tx(t) + S_2Cx(t) \\
&= [S_1T + S_2C]x(t)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

olarak bulunur. Burada, eğer $S_1T + S_2C = I_n$ olursa, $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ olarak yazılabilir ve kontrolör terimindeki x yerine $\hat{x}$ yazılabilir. Daha önce belirtildiği gibi durum gözleyici vektörü $\hat{x}(t)$ 'nin nominal sistem durum vektörü $x(t)$ 'nin asimptotik gözleyicisi için;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0 \tag{5.9}$$

olması gerekir.

Denklem (5.9) ile verilen şartın sağlanması için yukarıda verilenler özetlenecek olursa;

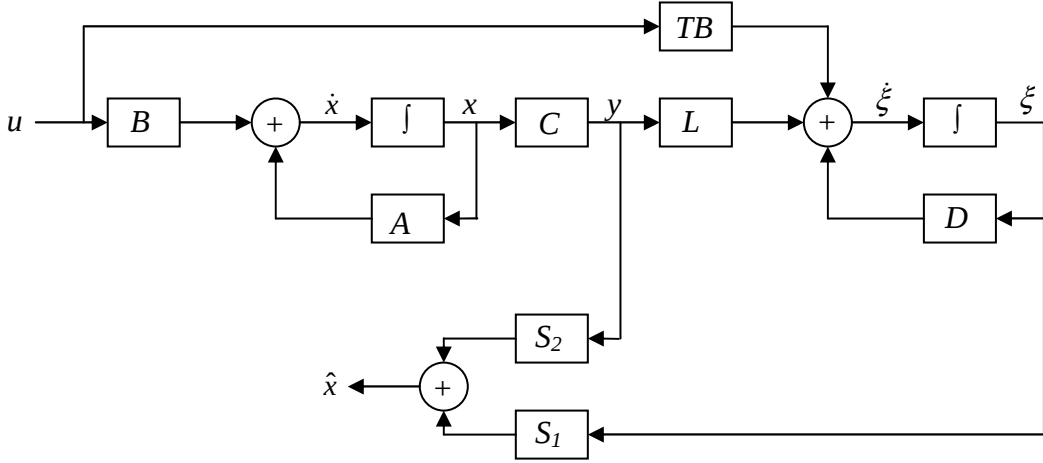
$$n - m \leq q \leq n, \tag{5.10a}$$

$$DT - TA + LC = 0, \tag{5.10b}$$

$$S_1T + S_2C = I, \tag{5.10c}$$

$$\text{Re } \lambda_i(D) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \tag{5.10d}$$

Denklem (5.1) ve (5.2)'de verilen sistemin durum değişkenlerini elde etmek için denklem (5.3) ve (5.7) ile verilen gözleyici tasarımı, şekil 5.1'de grafiksel olarak sistemle birlikte gösterilmiştir.



Şekil 5.1: Gözleyici şeması.

Nominal sistem için geliştirilen yukarıda verilen gözleyiciyi belirsizlikleri de içine alan gerçek sistemde kullanalım. Bölüm 3'te verilen denklem (3.9)'daki doğrusal ve (3.11)'deki doğrusal olmayan kontrolörlerde, $x(t)$ durum vektörü yerine, $\hat{x}(t)$ gözleyici durum vektörünü yazarsak, doğrusal kontrolör,

$$u_l(\hat{x}) = -K\hat{x}(t) \quad (5.11)$$

ve doğrusal olmayan kontrolör,

$$u_n(\hat{x}) = \begin{cases} -\frac{B^T P_L \hat{x}}{\|B^T P_L \hat{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}), & \|B^T P_L \hat{x}\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\frac{B^T P_L \hat{x}}{\varepsilon} \hat{\rho}(\hat{x}), & \|B^T P_L \hat{x}\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (5.12)$$

olur. Belirsizlikleri ve gözleyiciyi kapsayan kapalı çevrimli sistemin denklemi $\hat{x}(t) = S_1 \xi(t) + S_2 y(t)$, $y = Cx + w$, $\xi = e_\xi + Tx$ ve $S_1 T + S_2 C = I$ ile;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)]u + Hv \\ &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)][-K\hat{x} + u_n(\hat{x})] + Hv \\ &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)][-K(S_1 \xi + S_2 y) + u_n(\hat{x})] + Hv \\ &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)][-K(S_1 e_\xi + S_1 Tx + S_2 Cx + S_2 w) + u_n(\hat{x})] + Hv \\ &= [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)][-K(S_1 e_\xi + (S_1 T + S_2 C)x + S_2 w) + u_n(\hat{x})] + Hv \end{aligned}$$

Denklem 5.10(c)'de verilen özellik kullanılırsa,

$$\dot{x} = [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)][-K(x + S_1 e_\xi + S_2 w) + u_n(\hat{x})] + Hv$$

Burada eşitliğin sağındaki ikinci terim ayrıştırılırsa,

$$\dot{x} = [(A + \Delta A(\alpha)) - (B + \Delta B(\beta))K]x + [B + \Delta B(\beta)][-KS_1 e_\xi - KS_2 w + u_n(\hat{x})] + Hv \quad (5.13)$$

olarak bulunur. Belirsizliklerle birlikte gözleyici hatasının türevi;

$$\begin{aligned}\dot{e}_\xi &= \dot{\xi} - T \dot{x} \\ &= D\dot{\xi} + Ly + TBu_l - T[(A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + Hv]\end{aligned}$$

Burada $y = Cx + w$ ve $u_l(\hat{x}) = -K\hat{x}(t)$ yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\dot{e}_\xi &= D\dot{\xi} + LCx + Lw - TBK\hat{x} + TBu_n(\hat{x}) - TA x - T\Delta A x + TBK\hat{x} - TBu_n(\hat{x}) - T\Delta B[-K\hat{x} + u_n(\hat{x})] - THv \\ &= De_\xi + DTx + LCx + Lw - TA x - T\Delta A x - T\Delta B[-K(x + S_1 e_\xi + S_2 w) + u_n(\hat{x})] - THv \\ &= De_\xi + Lw - THv + [DT + LC - TA]x - T\Delta A x - T\Delta B[-K(x + S_1 e_\xi + S_2 w) + u_n(\hat{x})] \\ &= De_\xi + Lw - THv - T\Delta A x - T\Delta B[-K(x + S_1 e_\xi + S_2 w) + u_n(\hat{x})]\end{aligned}\tag{5.14}$$

olur. Kapalı çevrimli sistem dinamiği, denklem (5.13) ve (5.14)'te elde edilen sonuçların matrissel biçimde yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_\xi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A + \Delta A) - (B + \Delta B)K & -(B + \Delta B)KS_1 \\ -T(\Delta A - \Delta BK) & D + T\Delta BKS_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B + \Delta B \\ -T\Delta B \end{bmatrix} u_n(\hat{x}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} H & -(B + \Delta B)KS_2 \\ -TH & L + T\Delta BKS_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.15a}$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.15a)'daki sistem matrisinin karakteristik denklemi,

$$\begin{vmatrix} \lambda I - [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)K] & (B + \Delta B)KS_1 \\ T(\Delta A - \Delta BK) & \lambda I - (D + T\Delta BKS_1) \end{vmatrix} = 0\tag{5.15b}$$

olur. Denklem (5.15b)'deki karakteristik denkleme bakıldığında, kontrolör ve gözleyici birbirinden bağımsız değildir. Bu nedenle bağımsızlık prensibi yani “separation principle” geçerli değildir. Eğer [6] ve ekindeki referanslarda ispatı yapılan denklem (5.15)'te $\forall \alpha(t) \in \mathcal{A}$ ve $\forall \beta(t) \in \mathcal{B}$ için,

$$\begin{aligned}T\Delta A(\alpha) &= 0 \\ T\Delta B(\beta) &= 0\end{aligned}\tag{5.16}$$

şartı sağlanırsa, kapalı çevrimli sistemin karakteristik denkleminde,

$$\begin{vmatrix} \lambda I - [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)K] & (B + \Delta B)KS_1 \\ 0 & \lambda I - D \end{vmatrix} = 0\tag{5.17}$$

ve

$$|\lambda I - [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)K]| |\lambda I - D| = 0$$

olur. Burada determinantlar $|\lambda I - [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)K]| = 0$ ve $|\lambda I - D| = 0$ olduğundan, kontrolör ile gözleyici tasarımları birbirinden bağımsız olur. Böylece denklem (5.15);

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_\xi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A + \Delta A) - (B + \Delta B)K & -(B + \Delta B)KS_1 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B + \Delta B \\ 0 \end{bmatrix} u_n(\hat{x}) \\ &\quad + \begin{bmatrix} H & -(B + \Delta B)KS_2 \\ -TH & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.18}$$

biçimine gelir. Denklem (5.18)'den görüldüğü gibi, belirsizliklerin olması durumunda bile bağımsızlık prensibi sağlanır ve kontrolörler $u_l(t) = -K\hat{x}(t)$ ve $u_n(t) = u_n(\hat{x})$ ile gözleyici matrislerini bağımsız olarak tasarlayabiliriz. Sonuç olarak, gözleyici tasarımı belirsizlikleri içeren $\Delta A(\alpha)$ ve $\Delta B(\beta)$ terimlerinden bağımsızdır.

Denklem (5.14) ile verilen hata denklemi, denklem (5.16)'dan dolayı;

$$\dot{e}_\xi(t) = De_\xi(t) + Lw(t) - THv(t) \quad (5.19)$$

olur. ρ_v aşağıdaki sınırla belirlenen bir sabite,

$$\rho_v = sabite = \max_{\substack{v \in V \\ w \in W}} \|Lw - THv\| \quad (5.20)$$

ve gözleyici özdeğerleri matrisi D kararlı olduğu için, denklem (5.19)'da verilen e_ξ hata denkleminin tepkisi de sınırlıdır. Yani, $t \geq t_0 + \tau$ için $\|e_\xi(t)\| \leq \rho_e$ 'dir [6]. Burada ρ_e hesaplandığı halde τ aralığı, bilinmeyen e_ξ terimini içerdiğinden dolayı tanımlanamaz [7].

Denklem (5.18)'de verilen kapalı çevrimli sistemin ilk satırında verilen $\dot{x}$ durum değişkeni denklem (3.5)'teki denkleştirme şartları ve $\bar{A} = A - BK$ matrisi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)K]x - (B + \Delta B)KS_1e_\xi + (B + \Delta B)u_n(\hat{x}) + Hv - BKS_2w - \Delta BKS_2w \\ &= [A + BG - BK - BEK]x - BKS_1e_\xi - BEKS_1e_\xi + Bu_n(\hat{x}) + BEu_n(\hat{x}) + BFv - BKS_2w - BEKS_2w \\ &= \bar{A}x + Bu_n(\hat{x}) + B\hat{e}(\hat{x}, t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Tüm belirsiz parametreler $\hat{e}(\hat{x}, t) = \hat{e}$ 'da bir araya toplanırsa,

$$\hat{e}(\hat{x}, t) = Gx - EKx - KS_1e_\xi - EKS_1e_\xi + Eu_n(\hat{x}) + Fv - KS_2w - EKS_2w \quad (5.22)$$

olur. Gözleyici hatası,

$$\tilde{x} = \hat{x} - x = S_1e_\xi + S_2w \quad (5.23)$$

denklem (5.22)'de yerine konursa;

$$\begin{aligned} \hat{e}(\hat{x}, t) &= Gx - EKx - KS_1e_\xi - EKS_1e_\xi + Eu_n(\hat{x}) + Fv - KS_2w - EKS_2w \\ &= G[\hat{x} - \tilde{x}] - EK[x + S_1e_\xi + S_2w] - K[S_1e_\xi + S_2w] + Eu_n(\hat{x}) + Fv \\ &= G\hat{x} - G\tilde{x} - EK\hat{x} - K\tilde{x} + Eu_n(\hat{x}) + Fv \end{aligned} \quad (5.24)$$

olur. Burada e_ξ ve w belirli bir aralıkta sınırlandırıldığından, gözleyici hatası da belirli bir aralıkta sınırlandırılmıştır. Yani, $\tilde{x} = S_1e_\xi + S_2w$ ve $\|e_\xi\| \leq \rho_e$ den dolayı $\forall t \geq t_0 + \tau$ için $\|\tilde{x}(t)\| \leq \tilde{\rho}$ olarak alınır;

$$\tilde{\rho} \geq \|S_1\|\rho_e + \max_{w \in \mathcal{W}} \|S_2w\| \quad (5.25)$$

olur. Böylece $\hat{e}(\hat{x}, t)$ hatası norm eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} \|\hat{e}(\hat{x}, t)\| &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\hat{x}\| + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\tilde{x}\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\hat{x}\| + \|K\tilde{x}\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)u_n(\hat{x})\| + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\hat{x}\| + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\|\tilde{\rho} + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\hat{x}\| + \|K\|\tilde{\rho} + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\|\hat{\rho} + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \triangleq \hat{\rho}(\hat{x}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

olarak bulunur. Denklem (3.15) ile verilen şartın sağlandığı varsayılırsa $\hat{\rho}(\hat{x})$;

$$\hat{\rho} \triangleq \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\hat{x}\| + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\|\tilde{\rho} + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\hat{x}\| + \|K\|\tilde{\rho} + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \quad (5.27)$$

olarak bulunur. Burada $\hat{x} = \tilde{x} + x$ ve $\|\tilde{x}(t)\| \leq \tilde{\rho}$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x) &\triangleq \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| \|x\| + 2 \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\|\tilde{\rho} + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \|x\| \right. \\ &\quad \left. + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\|\tilde{\rho} + \|K\|\tilde{\rho} + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ &\triangleq \bar{a} + \bar{b}\|x\| \end{aligned} \quad (5.28)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{a} &\triangleq \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[2 \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\|\tilde{\rho} + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\|\tilde{\rho} + \|K\|\tilde{\rho} + \max_{v \in \mathcal{V}} \|Fv\| \right] \\ \bar{b} &\triangleq \left[1 - \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \|G(\alpha)\| + \max_{\beta \in \mathcal{B}} \|E(\beta)K\| \right] \end{aligned}$$

dir. Denklem (5.27) ve (5.28)'den de görüldüğü gibi, tüm x ve $\hat{x}$ için;

$$\bar{\rho}(x) \geq \hat{\rho}(\hat{x}) \quad (5.29)$$

dir.

Denklem (5.21)'deki kapalı çevrimli sistemin Lyapunov fonksiyonu $\forall x(t) \in R^n$ için,

$$V(x, t) = x^T(t) P_L x(t) > 0, \quad x \neq 0 \quad (5.30)$$

olarak alınırsa, $\bar{A} = A - BK$ kararlı matris olmak üzere, Lyapunov fonksiyonu $V(x, t)$ 'nin türevi;

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \nabla_x^T V(x, t) [\bar{A}x + B(u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x}, t))] \\ &= -x^T Q_L x + 2x^T P_L B [u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x}, t)] \end{aligned} \quad (5.31)$$

olur. Denklem (5.23)'ten dolayı $x(t) = \hat{x}(t) - \tilde{x}(t)$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,t) &= -x^T Q_L x + 2(B^T P_L \hat{x})^T [u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x},t)] - 2(B^T P_L \tilde{x})^T [u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x},t)] \\
&\leq -x^T Q_L x + 2(B^T P_L \hat{x})^T \left[u_n(\hat{x}) + \frac{B^T P_L \hat{x}}{\|B^T P_L \hat{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] \\
&\quad - 2(B^T P_L \tilde{x})^T \left[u_n(\hat{x}) - \frac{B^T P_L \tilde{x}}{\|B^T P_L \tilde{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

olur [6]. Denklem (5.32)'nin sağındaki ikinci teriminin en büyük değeri, denklem (5.12)'de verilen doğrusal olmayan kontrolörün ilk konumu $\|B^T P_L \hat{x}\| > \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
2(B^T P_L \hat{x})^T \left[u_n(\hat{x}) + \frac{B^T P_L \hat{x}}{\|B^T P_L \hat{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] &\leq 2(B^T P_L \hat{x})^T \left[-\frac{B^T P_L \hat{x}}{\|B^T P_L \hat{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) + \frac{B^T P_L \hat{x}}{\|B^T P_L \hat{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

ve denklem (5.12)'de verilen doğrusal olmayan kontrolün ikinci konumu $\|B^T P_L \hat{x}\| \leq \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
2(B^T P_L \hat{x})^T [u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x},t)] &\leq 2(B^T P_L \hat{x})^T \left[-\frac{B^T P_L \hat{x}}{\varepsilon} \hat{\rho}(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x},t) \right] \\
&\leq -2 \frac{\|B^T P_L \hat{x}\|^2}{\varepsilon} \hat{\rho}(\hat{x}) + 2\|B^T P_L \hat{x}\| \hat{\rho}(\hat{x}) \\
&\leq 2\|B^T P_L \hat{x}\| \hat{\rho}(\hat{x}) \left[1 - \frac{\|B^T P_L \hat{x}\|}{\varepsilon} \right]
\end{aligned} \tag{5.34}$$

burada, denklem (5.34)'ün en büyük değerini elde edebilmek için $\|B^T P_L \hat{x}\| = \frac{\varepsilon}{2}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
2(B^T P_L \hat{x})^T [u_n(\hat{x}) + \hat{e}(\hat{x},t)] &\leq 2\hat{\rho}(\hat{x}) \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] \\
&\leq \hat{\rho}(\hat{x}) \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (5.32)'nin sağındaki ikinci teriminin en büyük değeri elde edilmiş olur. Denklem (5.32)'nin sağındaki üçüncü teriminin en büyük değeri ise, birim vektörler $B^T P_L \hat{x} / \|B^T P_L \hat{x}\| = B^T P_L \tilde{x} / \|B^T P_L \tilde{x}\|$ eşitliği seçilirse [6];

$$\begin{aligned}
-2(B^T P_L \tilde{x})^T \left[u_n(\hat{x}) - \frac{B^T P_L \tilde{x}}{\|B^T P_L \tilde{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] &\leq -2(B^T P_L \tilde{x})^T \left[-\frac{B^T P_L \tilde{x}}{\|B^T P_L \tilde{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) - \frac{B^T P_L \tilde{x}}{\|B^T P_L \tilde{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] \\
&\leq -2(B^T P_L \tilde{x})^T \left[-2 \frac{B^T P_L \tilde{x}}{\|B^T P_L \tilde{x}\|} \hat{\rho}(\hat{x}) \right] \\
&\leq 4\|B^T P_L \tilde{x}\| \hat{\rho}(\hat{x})
\end{aligned} \tag{5.36}$$

olur. Böylece denklem (5.31) ile verilen Lyapunov denkleminin türevi,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -x^T Q_L x + \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L \tilde{x}\| \right] \hat{\rho}(\hat{x}) \\ &\leq -x^T Q_L x + \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \hat{\rho}(\hat{x})\end{aligned}\quad (5.37)$$

olur. Burada, denklem (5.29)'da verilen,

$$\bar{\rho}(x) \geq \hat{\rho}(\hat{x})$$

eşitsizliğinden dolayı;

$$\dot{V}(x, t) \leq -x^T Q_L x + \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{\rho}(x) \quad (5.38)$$

olarak yazılabilir. Tüm $t \geq t_0 + \tau$ ve tüm x değerleri için;

$$x^T Q_L x - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{\rho}(x) > 0 \quad (5.39)$$

şartı sağlanırsa, Lyapunov fonksiyonunun türevi;

$$\dot{V}(x, t) < 0, \quad x \neq 0 \quad (5.40)$$

olur.

Kapalı çevrimli sistemin kararlı olduğu başlangıç şartlarının değişim aralığının tanımlanması: Denklem (3.10)'daki Q_L pozitif tanımlı matrisinin en küçük özdeğeri $\lambda_{\min}(Q) > 0$ ve en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}(Q) > 0$ olmak üzere [8]'de verilen,

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 \leq x^T Q_L x \leq \lambda_{\max}(Q_L) \|x\|^2 \quad (5.41)$$

eşitsizliği kullanılarak denklem (5.39),

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{\rho}(x) > 0 \quad (5.42)$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.28)'de verilen $\bar{\rho}(x) = \bar{a} + \bar{b} \|x\|$ ifadesini denklem (5.42)'de yerine koyalım.

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] [\bar{a} + \bar{b} \|x\|] &> 0 \\ \lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{a} - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{b} \|x\| &> 0\end{aligned}\quad (5.43)$$

Denklem (5.43)'ün her iki tarafını $\lambda_{\min}(Q_L)$ ile çarpalım.

$$\lambda_{\min}^2(Q_L) \|x\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{b} \|x\| > 0 \quad (5.44)$$

Denklem (5.44)'e $\left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2$ terimini ekleyip - çıkaralım.

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\min}^2(Q_L) \|x\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{b} \|x\| \\
& \quad + \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2 - \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2 > 0 \\
& \left[\lambda_{\min}(Q_L) \|x\| - \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{b} \right]^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} - \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2 > 0 \\
& \lambda_{\min}(Q_L) \|x\| - \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{b} > \pm \left[\left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} + \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2 \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Burada $\|x\| = \eta_1$ denirse ve $\lambda_{\min}(Q_L) > 0$ olduğundan olabilecek en büyük yarıçap değerini elde edebilmek için yukarıdaki eşitliğin sağındaki terimin pozitif değeri alınırsa;

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(Q_L) \eta_1 & > \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{b} + \sqrt{\left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} + \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2} \\
\eta_1 & > \frac{\left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \bar{b} + \sqrt{\left[\frac{\varepsilon}{2} + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right] \lambda_{\min}(Q_L) \bar{a} + \left[\frac{\varepsilon}{4} + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho} \right]^2 \bar{b}^2}}{\lambda_{\min}(Q_L)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\eta = \frac{\varepsilon/4 + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho}}{\lambda_{\min}(Q_L)} \bar{b} + \sqrt{\frac{\varepsilon/2 + 4 \|B^T P_L\| \tilde{\rho}}{\lambda_{\min}(Q_L)} \bar{a} + \left[\frac{\varepsilon/4 + 2 \|B^T P_L\| \tilde{\rho}}{\lambda_{\min}(Q_L)} \right]^2 \bar{b}^2} \quad (5.45)$$

bulunur. $x(t) = 0$ merkezli ve η yarıçaplı, $B(\eta)$ küresi tanımlansın. Tüm $x(t) \notin B(\eta)$ ve tüm $t \in R^1$ için denklem (5.40)'ta verilen $\dot{V}(x, t) < 0$ şartı sağlanmış olur. Bozucuların ve ölçüm hatalarının olmadığı durumda, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $x(t) = 0$ 'ın asimptotik kararlılığı da garanti altına alınabilir [6].

5.2.1.Özet ve Algoritma

Gözleyici denklemleri;

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= D\xi + Ly + TBu, & \xi(0) &= 0 \\
\hat{x} &= S_1\xi + S_2y
\end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Bu formun durum gözleyici olabilmesi ancak ve ancak aşağıdaki şartların sağlanması ile mümkündür.

$$TA - DT = LC, \quad S_1T + S_2C = I_n, \quad \text{Re } \lambda_{i(i=1,2,\dots,q)}(D) < 0$$

Gözleyicinin belirsizlik içeren sistemlerde bağımsızlık prensibini sağlaması için de aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

$$T\Delta A(\alpha) = 0, \quad T\Delta B(\beta) = 0$$

Belirsizlik İçeren Kontrol edilebilir Kanonik Formdaki Sistemler için Gözleyici Tasarım Algoritması:

- 1) $\text{rank}[C^T \ T^T] = n$ olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A(\alpha) & \Delta B(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C[\Delta A(\alpha) & \Delta B(\beta)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\text{rank}[\Delta A(\alpha) \ \Delta B(\beta)] \leq \text{rank}[C]$ 'dir.

- 2) Belirsizlikler A ve B matrislerinin son satırlarında olduğundan, $T = [T_1 \ T_2 \ T_3]$ olarak yazılırsa $T_3 = 0$ olur.

- 3) $S_1 T + S_2 C = I_n$ eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{21} \\ S_{22} \\ S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{12} & 0 \\ 0 & 0 & I_{13} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağlanması için $S_{23}C_3 = I_{13}$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\text{rank}[C_3] = \text{rank}[I_{13}]$$

olmalı.

- 4) Gözleyici özdeğerler matrisi $D = -\mu[I_n]$ olarak seçilebilir.
- 5) $TA - DT = LC$ eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu T_1 & T_1 A_{11} + \mu T_2 & T_2 A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 & L_2 C_2 & L_3 C_3 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $L_1 C_1 \neq 0$ olmalıdır. $C_2 = 0$ ve $S_1 = I_n$ için 3) ve 5) eşitliklerinden aşağıdaki denklemler kullanılarak T, L, S_2 bulunur.

1. $\mu T_1 = L_1 C_1$
2. $T_2 A_{22} = L_3 C_3$
3. $T_1 A_{11} = -\mu T_2$
4. $T_1 + S_{21} C_1 = I_1$
5. $T_2 = I_2$
6. $S_{23} C_3 = I_3$

Aşağıdaki sistemler için gözleyici tasarlanırken yukarıdaki tasarım algoritması kullanılmıştır.

5.3. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemlerin Gözleyici Temelli Durum Geribeslemeli Kontrolü

Bir önceki bölümde verilen gözleyici tasarımı, bu bölümde doğrusal sistemlere uygulanarak sonuçlar verilecektir. Gözleyici tasarımı, bölüm 3'te tüm durum geribeslemeli kontrolör tasarlanan bir maglev aracın süspansiyon kontrolü için gerçekleştirilecektir.

5.3.1. Bir Maglev Aracın Süspansiyon Kontrolü

Bölüm 3'te verilen maglev aracın süspansiyon sistemini, gözleyici tasarımı için yeniden ele alalım. Maglev aracın durum uzay formu ve matrisleri [6]'da verildiği gibi;

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + [B + \Delta B]u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.46)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.47)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s R}{m L_0} & \left(\frac{K_s}{m} - \frac{K_i K_s}{m L_0} \right) & -\frac{R}{L_0} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_i}{m L_0} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Denklem (5.46) ve (5.47) sistemi tüm durum kontroledilebilir ve tüm durum gözlenebilirdir. Burada $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ durum değişkeni; x_1 pozisyon, x_2 hız ve x_3 ivmeyi belirtir. Durum değişkenlerinden x_1 pozisyon ve x_3 ivme ölçülebilmektedir.

Böyle sistemlerde indüktansı tam olarak ölçmek oldukça zor olduğundan, indüktansın değerinde bir belirsizliğin olduğu varsayılacaktır. İndüktansın nominal değeri L_0 ve indüktansın değerindeki değişim ΔL ile verilirse, indüktanstaki bağıl değişim,

$$L_r = \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L}$$

olur. Bağıl değişimden dolayı denklem (5.46)'da verilen ve parametre belirsizliklerini içeren $\Delta A(\alpha)$ ve $\Delta B(\beta)$ matrisleri;

$$\Delta A(L_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s R}{m L_0} L_r & \frac{K_i K_s}{m L_0} L_r & \frac{R}{L_0} L_r \end{bmatrix}, \quad \Delta B(L_r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_i}{m L_0} L_r \end{bmatrix}$$

dir. Böylece denklem (3.5)'ten dolayı G ve E matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \Delta A(L_r) = B G(L_r) & \Rightarrow G(L_r) = \begin{bmatrix} \frac{K_s R}{K_i} L_r & -K_s L_r & -\frac{R m}{K_i} L_r \end{bmatrix}, \\ \Delta B(L_r) = B E(L_r) & \Rightarrow E(L_r) = -L_r \end{aligned}$$

Doğrusal Kontrol Tasarımı: Maglev aracın nominal sistem matrisleri;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $(A, \sqrt{Q_R})$ gözlenebilir olmak üzere, ağırlık matrisleri $Q_R = \text{diag}[10^5, 0, 1]$ ve $R = 1$ olarak seçilsin. Bölüm 3'te verilen matlab programı kullanılarak indirgenmiş Riccati matris denkleminin çözümünden P_R 'nin üçüncü satırı;

$$P_{R3} = [562.279, 30.781, 0.481] \quad (5.48)$$

olarak bulunur. Böylece optimal kazanç katsayıları,

$$k_1 = -8012.480 \text{ V/m}, \quad k_2 = -438.638 \text{ Vs/m}, \quad k_3 = -6.866 \text{ Vs}^2/\text{m}$$

olur. Kapalı çevrimli sistemin özdeğerleri;

$$\lambda_{1,2} = -30.798 \pm j12.076, \quad \lambda_3 = -52.246$$

olarak bulunur.

Doğrusal Olmayan Kontrol Tasarımı: Sistem tek girişli olduğundan denklem (5.12) ile verilen kontrol işaret (signum) fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_n(\hat{x}) = \begin{cases} -\hat{\rho}(\hat{x}) \text{sgn}(B^T P_L \hat{x}), & |B^T P_L \hat{x}| > \varepsilon \text{ için} \\ -\hat{\rho}(\hat{x}) \frac{1}{\varepsilon} (B^T P_L \hat{x}), & |B^T P_L \hat{x}| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases}$$

Ağırlık matrisi $Q_L = \text{diag}[10^6, 1, 1]$ olarak seçilirse, bölüm 3'te verilen matlab programı kullanılarak denklem (3.10)'da verilen P_L 'nin üçüncü satırı;

$$P_{L3} = [8.7446, 0.3273, 7.267 \times 10^{-3}] \quad (5.49)$$

olarak hesaplanır. Böylece denklem (5.54)'teki $B^T P_L$ matrisi,

$$B^T P_L = [124.611 \quad 4.664 \quad 0.1035]$$

olur. Denklem (3.10) ile verilen Lyapunov denkleminde P_R kullanılırsa Q_L 'nin yine pozitif tanımlı olduğu görülür. Bu nedenle, doğrusal olmayan kontrolörde P_L yerine P_R kullanılabilir.

Tüm Durum Gözleyici Tasarımı: Bu bölümde sistem çıkışı kullanılarak sistemin tüm durum değişkenlerini yeniden oluşturularak geribeslemeli kontrolde kullanılacaktır. Denklem (5.10)'da verilen şartları sağlamak için, D gözleyicinin özdeğerler matrisi olmak üzere, D , T , L , S_1 ve S_2 matrisleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$D = \begin{bmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -60 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3600 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler gözleyici denklemlerinde yerlerine konursa, denklem (5.3)'te verilen gözleyici denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D\xi + Ly + TBu \\ \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3600 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -60 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix} u \quad (5.50) \\ &= \begin{bmatrix} -60\xi_1 \\ -60\xi_2 - 3600x_1 + x_3 \\ -60\xi_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve denklem (5.7)'de verilen gözleyici durum değişkenleri,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= S_1\xi + S_2y \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + x_1 \\ \xi_2 + 60x_1 \\ \xi_3 + x_3 \end{bmatrix} \quad (5.51) \end{aligned}$$

olur.

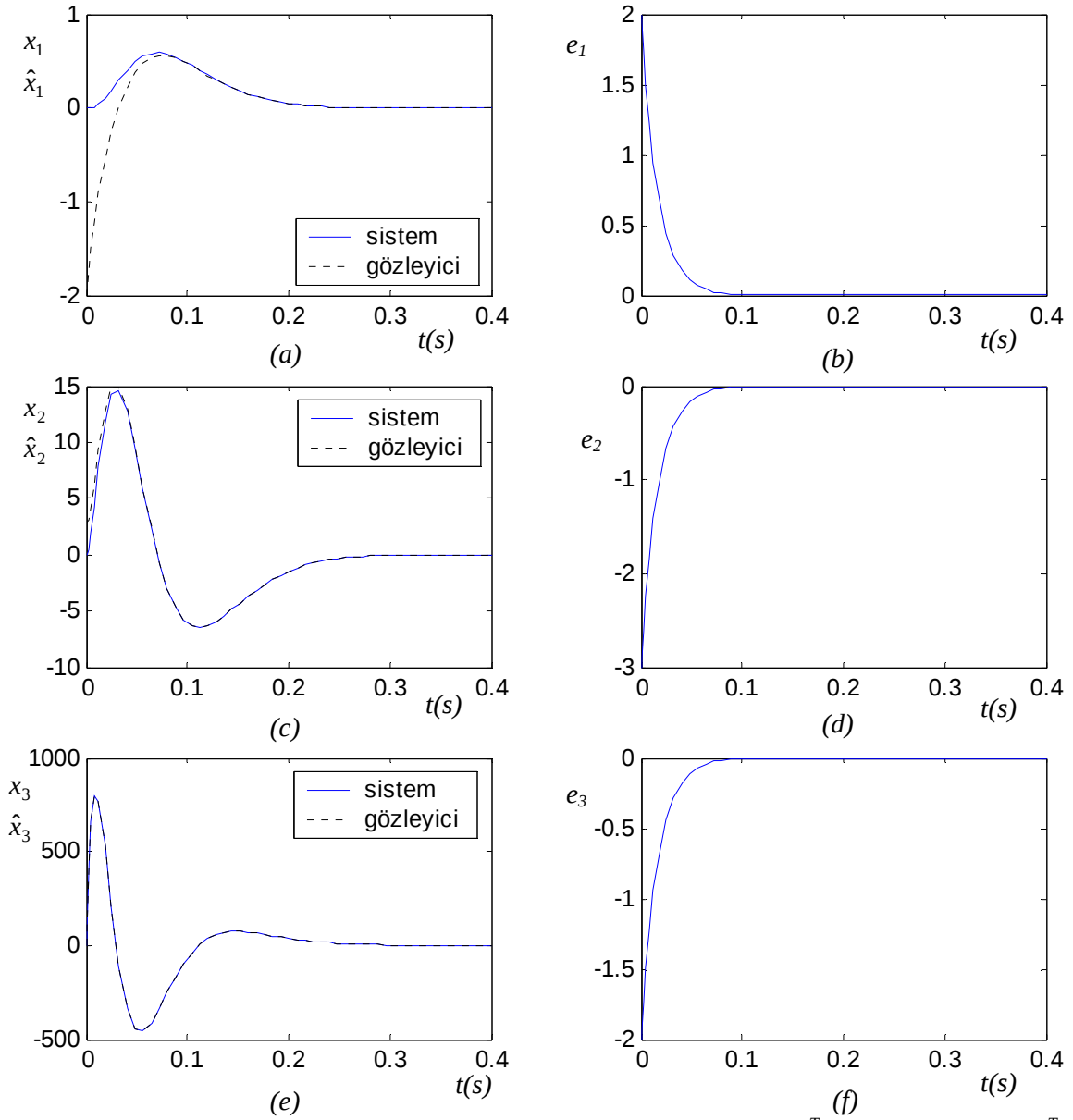
İndüktanstaki hatanın maksimum değeri, $L_{r\max} = 2/3$ kullanılarak denklem (5.27)'de tanımlanan $\hat{\rho}(\hat{x})$ aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\hat{x}) &= (1 - L_{r\max})^{-1} \left(\left| \frac{K_s R}{K_i} L_{r\max} \hat{x}_1 - K_s L_{r\max} \hat{x}_2 - \frac{mR}{K_i} L_{r\max} \hat{x}_3 \right| + L_{r\max} |k_1 \hat{x}_1 + k_2 \hat{x}_2 + k_3 \hat{x}_3| \right) \\ &= |8000\hat{x}_1 - 228\hat{x}_2 - 2.2456\hat{x}_3| + 2|-8012.48\hat{x}_1 - 438.638\hat{x}_2 - 6.866\hat{x}_3| \end{aligned}$$

Simülasyon Sonuçları: Maglev sistemi için yukarıda verilen ve elde edilen değerler kullanılarak yapılan Matlab/SIMULINK simülasyonunun sonuçları şekil 5.2, 5.3, 5.4 ve 5.5'te gösterilmiştir. Sistem matrislerindeki parametre belirsizliğine neden olan maglev aracın indüktansındaki değişim $\pm\%40$ olarak kabul edildiğinden, indüktanstaki bağıl değişim $-2/3 \leq L_r \leq 2/7$ olur. Simülasyon için kontrol tasarımcısı tarafından seçilen ε pozitif sabitesi, $\varepsilon = 0.1$ olarak seçilmiştir.

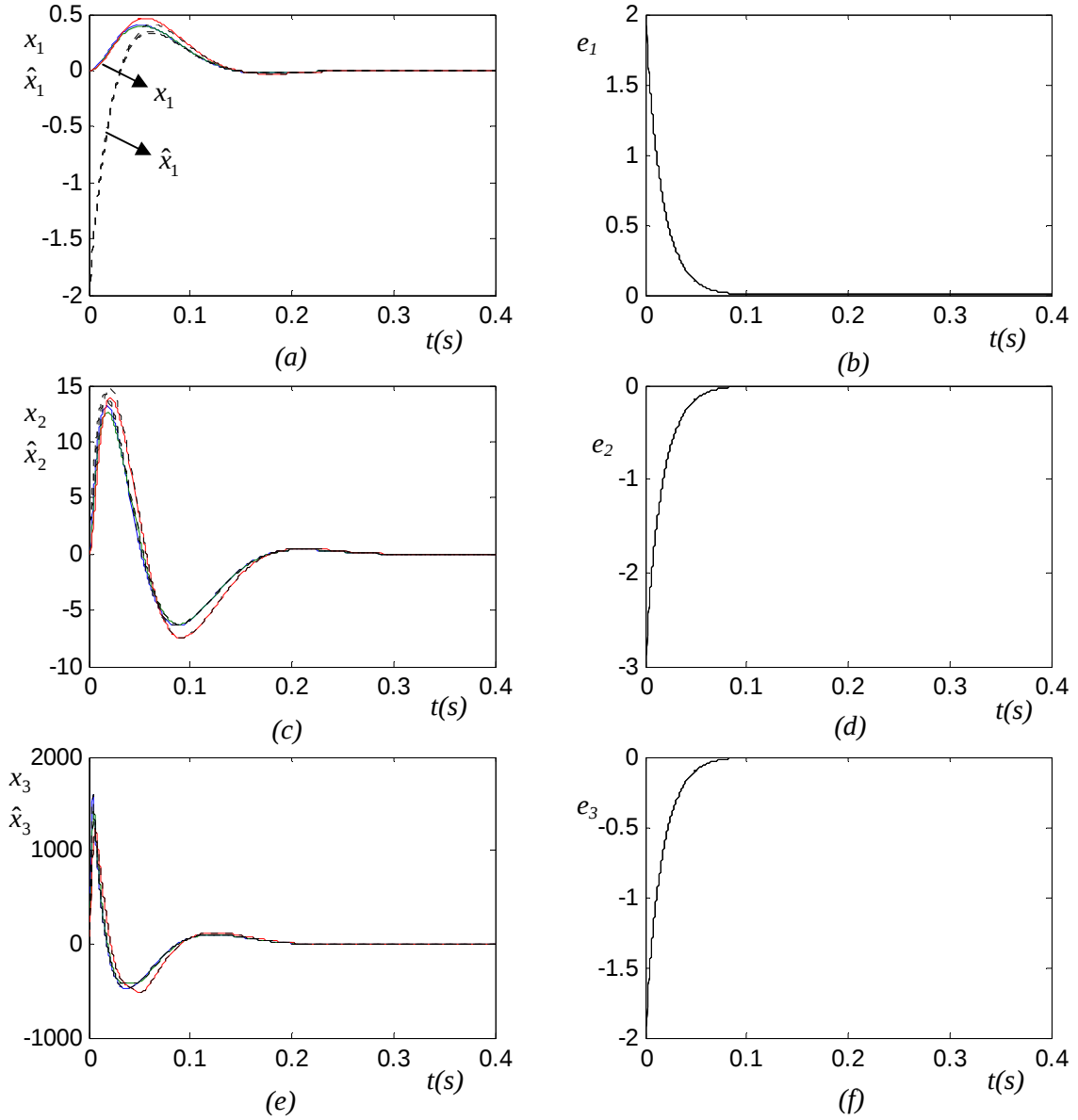
Şekil 5.2'de $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $\hat{x}(0) = [-2, 3, 2]^T$ başlangıç şartları için $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = [2, -3, -2]^T$ başlangıç şartları hatası kullanılarak nominal maglev sisteminin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve hata vektörlerinin zamanla değişimi

verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t = 0.25$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmekte ve gözleyici durum değişkenleri verilen başlangıç şartlarından gelerek sistemin durum değişkenlerini $t = 0.08$ s civarında yakalamaktadır.



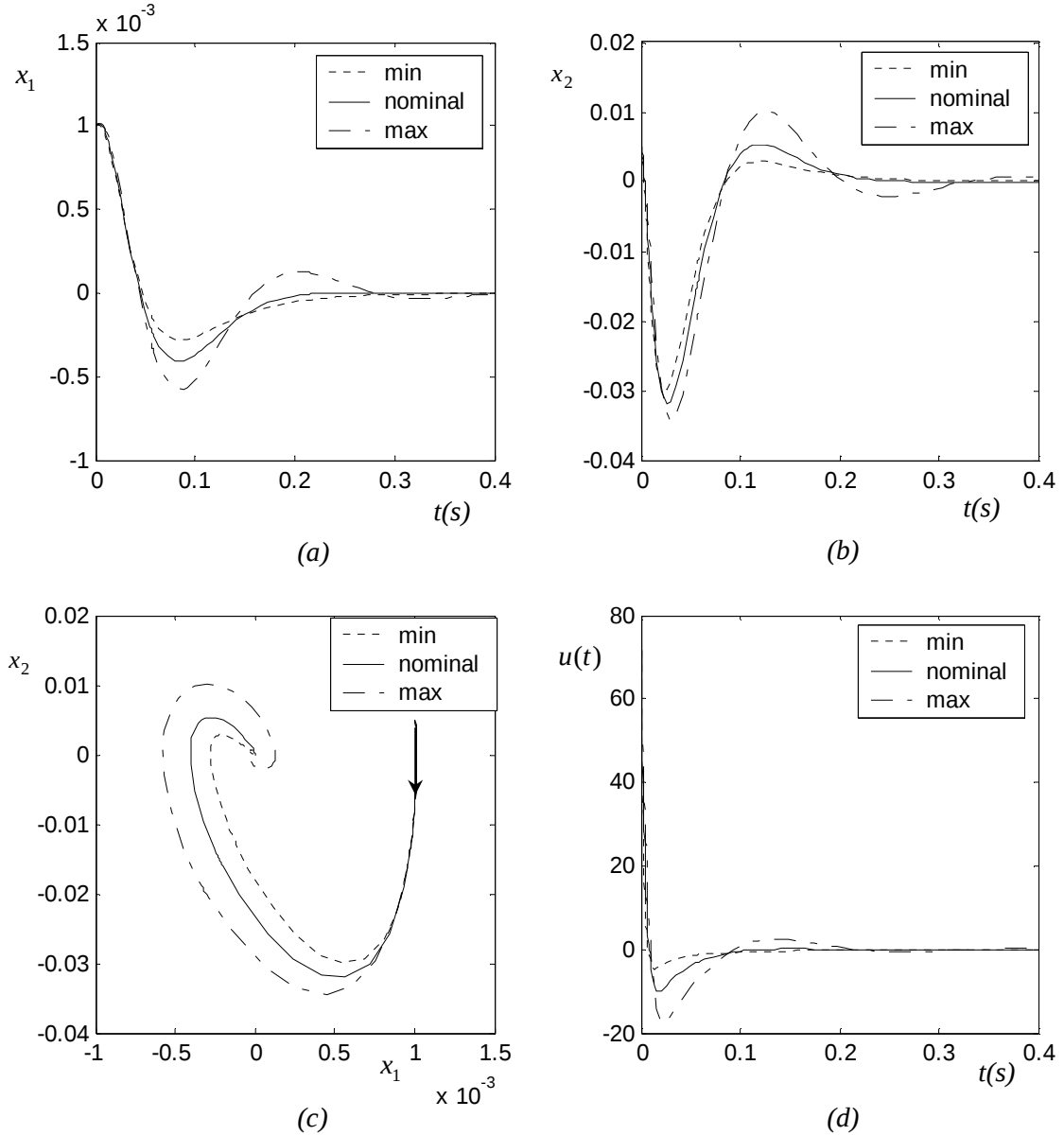
Şekil 5.2: Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[2,-3,-2]^T$ başlangıç şartları için nominal sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

Şekil 5.3'te belirsizlik içeren maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'teki P_L , $\varepsilon = 0.1$ ve şekil 5.2'deki başlangıç şartları için simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi tüm belirsizliklere rağmen gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü maglev sisteminin durum değişkenlerinin yörüngeleri hedeflenen sürede ve asimptotik olarak sürekli duruma ulaşmıştır.



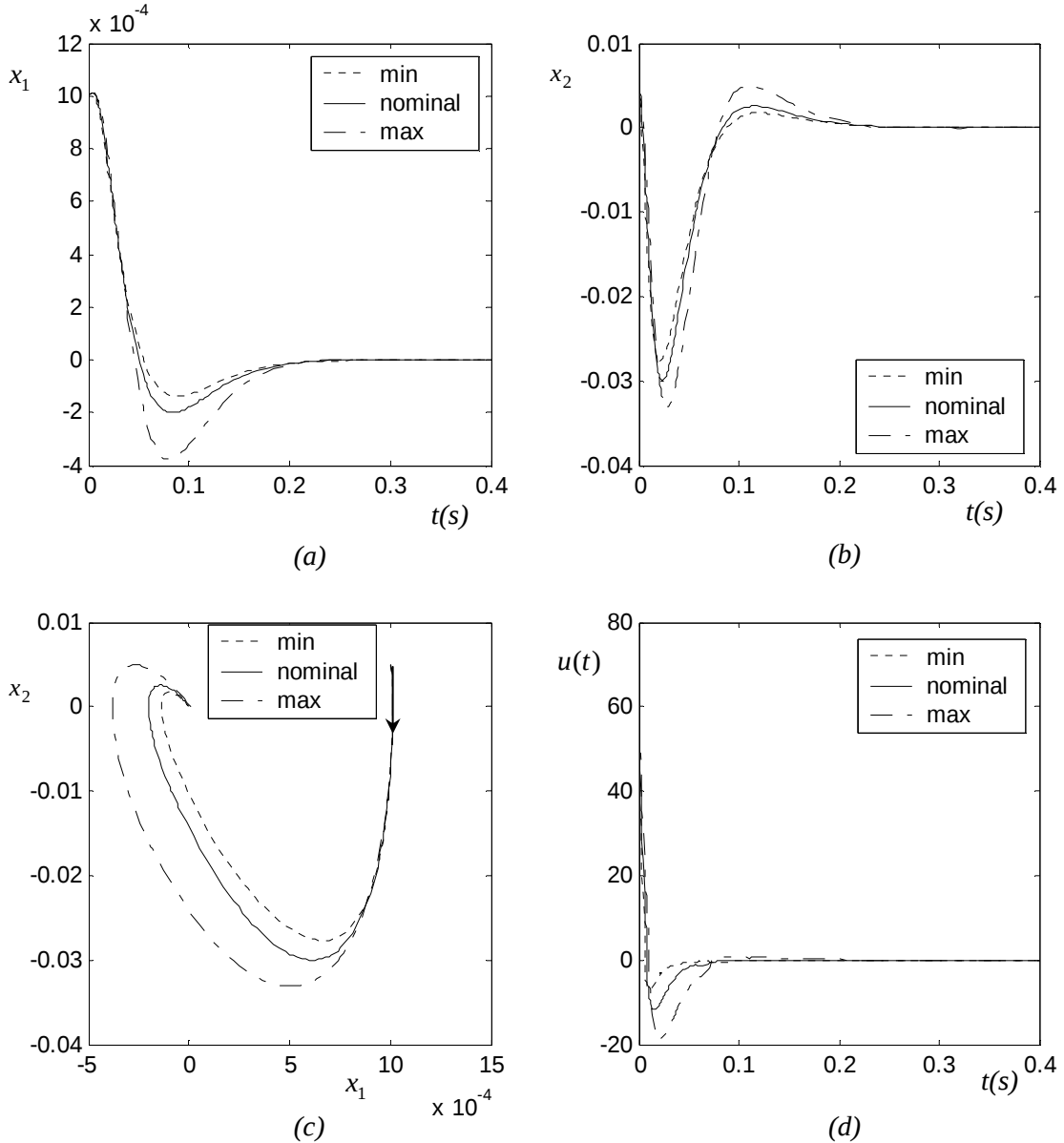
Şekil 5.3: Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $e(0) = [2, -3, -2]^T$ başlangıç şartları için belirsizlik içeren sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

Şekil 5.4'te bölüm 3'te elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak amacıyla başlangıç şartlarını $x(0)=[0.001, 0.005, 0]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ alınarak maglev sisteminin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi verilmiştir. simülasyonda (5.48)'deki P_R ve (5.49)'daki P_L kullanılmıştır. Şekillerden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t = 0.25$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Bölüm 3'te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde tüm durum gözleyici temelli kontrollü sistemin simülasyon sonuçlarında sistem yörüngesindeki salınımın ve kontrol sinyalindeki genliğin biraz arttığı görülmektedir.



Şekil 5.4: Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0)=[0.001, 0.005, 0]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.5'te ise kontrol parametrelerinin ayarı yapılarak (5.49)'teki P_L yerine (5.48)'deki P_R kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Bölüm 3'te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde gözleyici temelli kontrollü sistemin simülasyon sonuçlarında belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi, nominal sistem değerlerine daha az yaklaşmıştır. Bunun yanı sıra salınımlar ve kontrol sinyalinin genliği biraz daha artmıştır.



Şekil 5.5: Maglev sisteminin (5.48)'deki $P_R=P_L$, $x(0) = [0.001, 0.005, 0]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Minimum Mertebeli Gözleyici Tasarımı: Minimum mertebeli gözleyici tasarımı için durum değişkenlerinden x_1 pozisyon ve x_3 ivme durum değişkenleri ölçüme uygun olduğundan sadece x_2 hız durum değişkeni için $q = n - m = 1$ adet minimum mertebeli gözleyici tasarlayacağız. Denklem (5.10)'da verilen gözleyici şartlarını sağlamak için, D gözleyicinin özdeğeri olmak üzere; D , T , L , S_1 ve S_2 matrisleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$D = -60, \quad L = [-3600 \ 1], \quad T = [-60 \ 1 \ 0]$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklem (5.3)'te verilen gözleyici denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D\xi + Ly + TBu \\ &= -60\xi + [-3600 \ 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + [-60 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix} u \\ &= -60\xi - 3600x_1 + x_3 + 0 \\ &= -60(\xi + 60x_1) + x_3 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Denklem (5.7)'de verilen gözleyici durum değişkenleri,

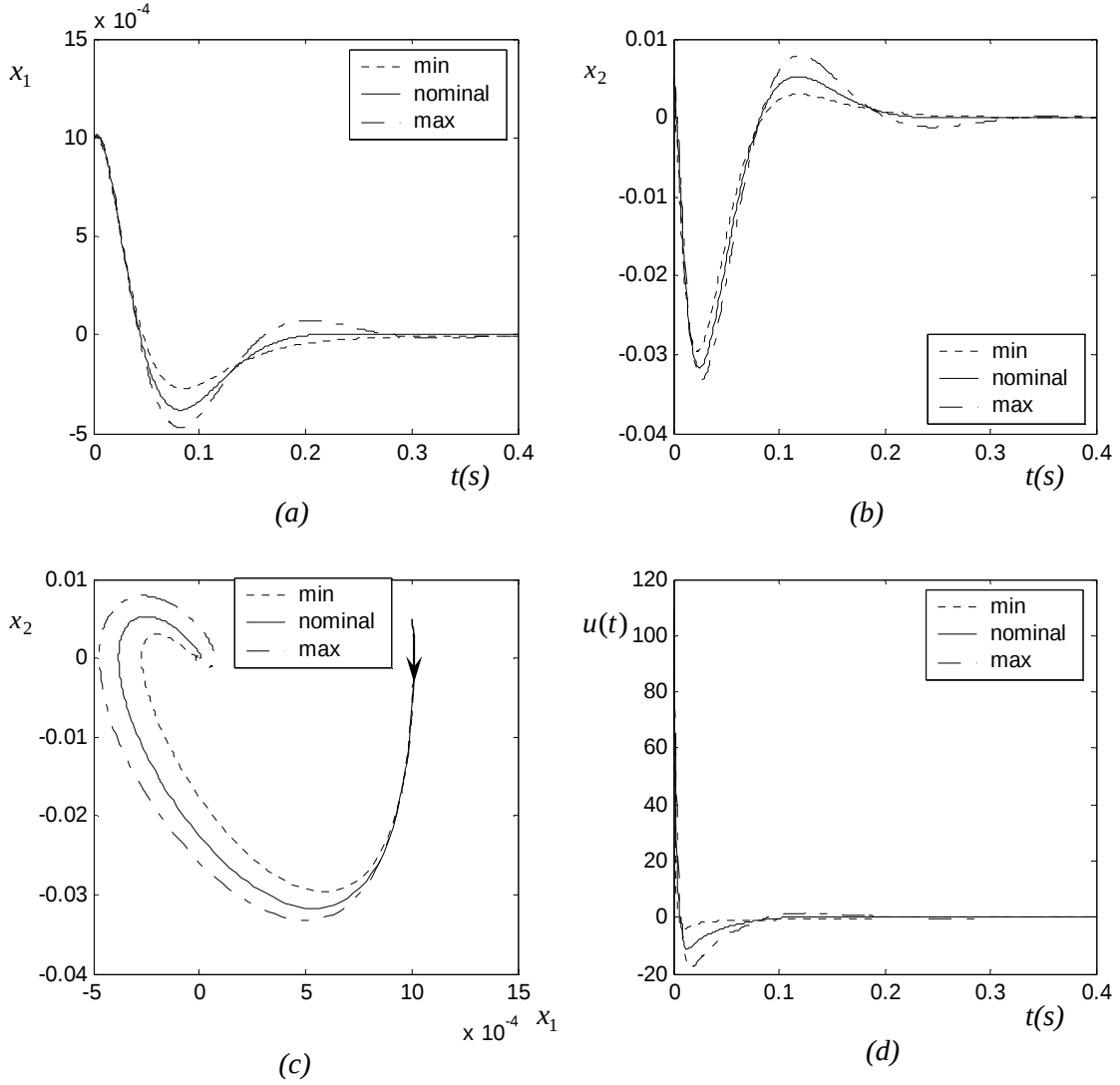
$$\begin{aligned} \hat{x} &= S_1\xi + S_2y \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi + 60x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.53)$$

olur.

Simülasyon Sonuçları: Maglev sistemi için yukarıda verilen ve elde edilen değerler kullanılarak yapılan Matlab/SIMULINK simülasyon sonuçları şekil 5.6 ve 5.7'de gösterilmiştir. Simülasyon için maglev sisteminin durum değişkenlerinin başlangıç şartları bölüm 3'teki sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek amacıyla $x(0) = [0.001, 0.005, 0]^T$, gözleyici durum değişkeninin başlangıç şartı $\hat{x}(0) = \hat{x}_2(0) = 0$ ve tasarımcı tarafından seçilen ε pozitif sabitesi, $\varepsilon = 0.1$ olarak seçilmiştir.

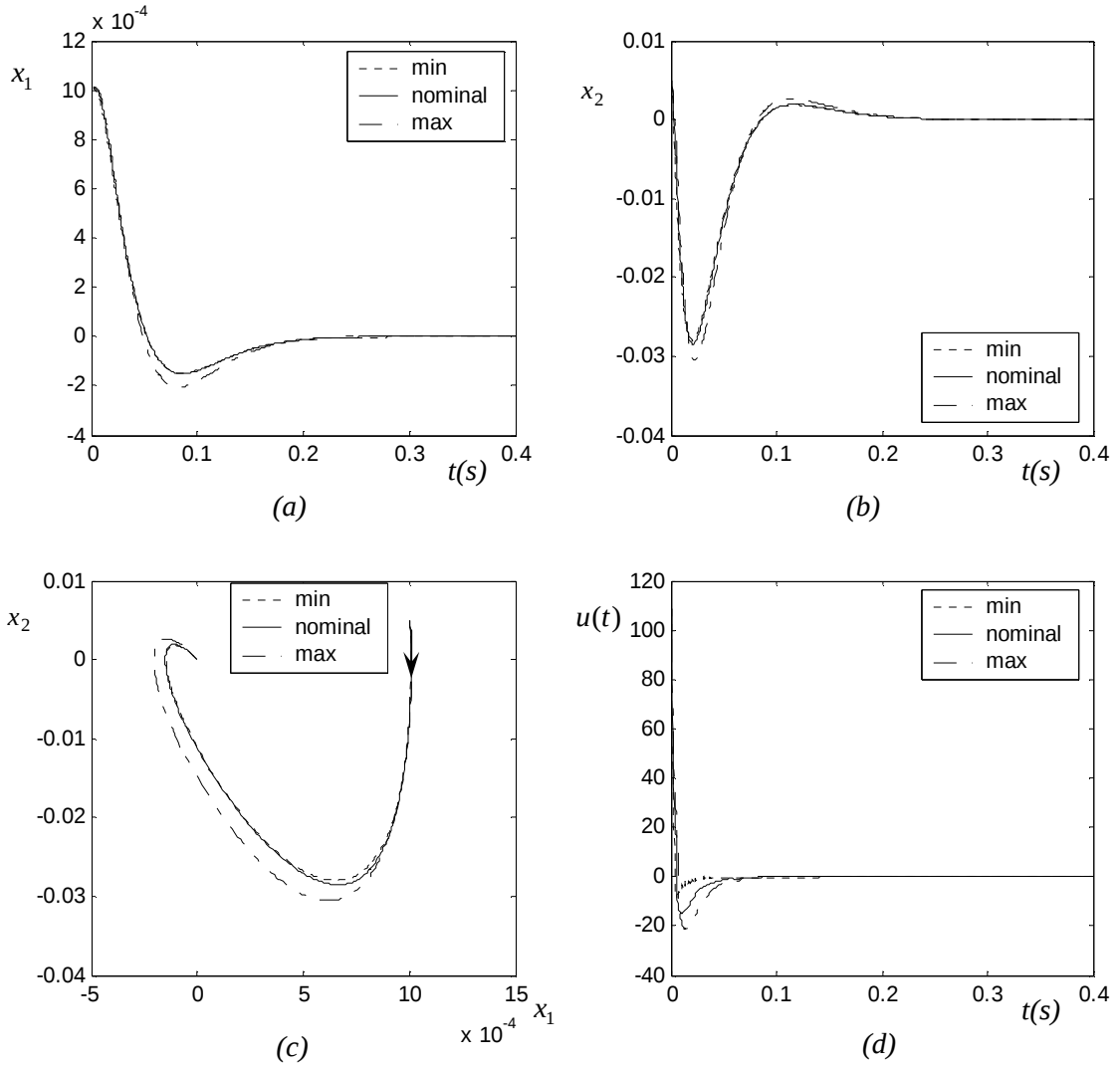
Şekil 5.6'da belirsizlik içeren maglev sisteminin (5.48)'deki P_R ve (5.49)'daki P_L için simülasyon sonuçları verilmiştir. Bölüm 3'te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde minimum mertebeli gözleyicinin kullanılmasıyla sistem yörüngesindeki salınımlar biraz daha artmıştır. Ancak tüm durum gözleyici tasarımına göre salınımlar biraz daha azalmıştır. Kontrol sinyalinin genliği bakımından karşılaştırma yapacak olursak, minimum mertebeli gözleyici temelli durum

geribeslemeli kontrollü maglev sisteminin kontrol sinyalinin genliği bölüm 3'tekine ve tüm durum gözleyici tasarımına göre en büyük değerlere sahiptir.



Şekil 5.6: Maglev sisteminin (5.48)'deki P_R , (5.49)'teki P_L , sistemin $x(0) = [0.001, 0.005, 0]^T$ ve $\hat{x}_2(0) = [0]$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.7’de ise kontrol parametrelerinin ayarı yapılarak (5.49)’teki P_L yerine (5.48)’deki P_R kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Bölüm 3’te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde gözleyicili sistemin simülasyon sonuçlarında belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi, nominal sistem değerlerine daha az yaklaşmıştır. Bunun yanı sıra salınımlar ve kontrol sinyalinin genliği biraz daha artmıştır. Ancak tüm durum gözleyicili sisteme göre belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi, nominal sisteme daha yakındır.



Şekil 5.7: Maglev sisteminin (5.48)’deki $P_L=P_R$, sistemin $x(0)=[0.001,0.005,0]^T$ ve $\hat{x}_2(0)=[0]$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeni, (b) x_2 durum değişkeni, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

5.4. Belirsizlik İçeren Doğrusal Olmayan Sistemlerin Gözleyici Temelli Durum Geribeslemeli Kontrolü

Bölüm 3'te ve denklem (5.54) ve (5.55)'te verilen belirsizlik içeren fiziksel bir dinamik sistem, durum uzay diyagramı formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\alpha(t))]x(t) + [B + \Delta B(\beta(t))]u(t) + Hv(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.54)$$

$$y(t) = Cx(t) + w(t) \quad (5.55)$$

Burada, $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^r$ kontrol vektörü, $v(t) \in R^l$ giriş vektörü, $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi, $H \in R^{n \times l}$ girişe uygulanan bozucu ya da doğrusal olmayan elemanların matrisi, $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisi ve $w(t)$ ölçme devresinden kaynaklanan hatadır. $\Delta A(\alpha(t))$, $\alpha(t)$ parametresine bağlı olup sistem matrisindeki belirsizlikleri ve $\Delta B(\beta(t))$, $\beta(t)$ parametresine bağlı olup giriş matrisindeki belirsizlikleri içerir. $Hv(t)$ terimi girişteki belirsizlikleri ya da doğrusal olmayan terimleri belirtir.

Bölüm 5.2'de tasarımı ve ispatı verilen gözleyici, bu bölümde doğrusal olmayan sistemlere uygulanacaktır. Gözleyici tasarımı ve ispatı daha önce verildiğinden burada yapılacak işlem elde edilen sonuçları doğrusal olmayan sistemlere uygulamak olacaktır. Bunu yaparken, doğrusal olmayan terimlerin çok iyi bilindiği ve herhangi bir modelleme hatası olmadığı varsayılmıştır.

Bu bölümde, [6]'da önerilen kontrolör doğrusal olmayan sistemlere uygulanacaktır. Bunun için doğrusal olmayan sistemler iki kısma bölünecektir. İlk kısım sistemin doğrusal terimlerini ve ikinci kısım sistemin doğrusal olmayan terimlerini içirecektir. Sistemin doğrusal kısmında belirsizlikler olduğu varsayılarak kontrolör tasarlanacaktır. Doğrusal olmayan terimlerin en büyük değerleri doğrusal olmayan kontrolörün içerisine alınarak, sistemin doğrusal olmayan terimlerinin etkisi giderilecek veya azaltılacaktır. Aşağıdaki örnekte bir doğrusal olmayan sistem için gözleyici tasarımı ayrıntılı olarak verilmiştir.

5.4.1. Uygulama: Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Gözleyici Temelli Durum Geribeslemeli Kontrolü

Aşağıda, [19]'dan alınan ve kontrol girişi ile sistem çıkışı eklenen, denklem (5.56) ve (5.57)'de verilen doğrusal olmayan sistemi düşünelim.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= cx_1(t) - bx_2(t) - ax_3(t) - x_1^3(t) + du(t) \end{aligned} \quad (5.56)$$

dir. Burada $x(t)$ durum değişkenleri, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ten oluşmaktadır. Durum değişkenlerinden x_1 ve x_3 'ün ölçülebildiği varsayılmıştır. Böylece sistem çıkışı da,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_3(t) \end{aligned} \quad (5.57)$$

dir. Denklem (5.56) ve (5.57) sistemi tüm durum kontroledilebilir ve tüm durum gözlenebilirdir.

Denklem (5.56)'da $a = 0.7 - \alpha_3$, $b = 1 - \alpha_2$, $c = 1 + \alpha_1$ ve $d = 1 + \beta$ olmak üzere, sistemin nominal kısmının matrisleri;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Sistemdeki belirsizlikler ΔA sistem matrisinde, ΔB giriş matrisindedir. ΔA , ΔB ve H matrisleri ile $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ ve $\beta(t)$ belirsiz parametrelerinin değişim aralığı;

$$\begin{aligned} \Delta A(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}, & \Delta B(\beta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, & H &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} \\ |\alpha_1(t)| &= |\alpha_2(t)| = |\alpha_3(t)| \leq 1, & |\beta(t)| &\leq 0.5 \end{aligned}$$

dir. Böylece denklem (3.5)'ten dolayı $G(\alpha)$, $E(\beta)$ ve F matrisleri;

$$\begin{aligned} \Delta A(\alpha) &= BG(\alpha) & \Rightarrow & G(\alpha) = [\alpha_1(t) \ \alpha_2(t) \ \alpha_3(t)] \\ \Delta B(\beta) &= BE(\beta) & \Rightarrow & E(\beta) = [\beta(t)] \\ H &= BF & \Rightarrow & F = [-x_1^3] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.4.1.1. Kontrolör Tasarımı

Doğrusal Kontrol Tasarımı: Denklem (3.9)'da verilen doğrusal kontrolörün denklem (3.7)'de verilen hedeflenen performans indeksi $Q_R = \text{diag}[1, 1, 1]$ ve $R = 1$ için denklem (3.8)'de verilen Riccati denkleminin çözümünden elde edilen denklem (5.58)'deki P_R kullanılarak bulundu. P_R matrisinin üçüncü satırı;

$$P_{R3} = [2.4142 \quad 2.2047 \quad 1.7289] \quad (5.58)$$

olduğundan, kazanç katsayıları;

$$K = [2.4142 \quad 2.2047 \quad 1.7289]$$

olarak bulunur. Bu durumda nominal sistemin karakteristik polinomal denkleminin kökleri

$\lambda_1 = -0.7142$ ve $\lambda_{2,3} = -0.8573 \pm j1.1158$ 'dir. Burada $(A, \sqrt{Q_R})$ gözlenebilirdir.

Doğrusal Olmayan Kontrol Tasarımı: Denklem (3.11)'deki doğrusal olmayan kontrolör işaret (signum) fonksiyonu ile tekrar yazılırsa;

$$u_n(\hat{x}) = \begin{cases} -\hat{\rho}(\hat{x}) \operatorname{sgn}(B^T P_L \hat{x}), & |B^T P_L \hat{x}| > \varepsilon \text{ için} \\ -\hat{\rho}(\hat{x}) \frac{1}{\varepsilon} (B^T P_L \hat{x}), & |B^T P_L \hat{x}| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases}$$

olur. Burada P_L 'nin üçüncü satırı, $Q_L = \operatorname{diag}[1, 1, 1]$ için denklem (3.10)'da verilen Lyapunov denkleminin çözümünden;

$$P_{L3} = [0.3536 \quad 0.6291 \quad 0.4649] \quad (5.59)$$

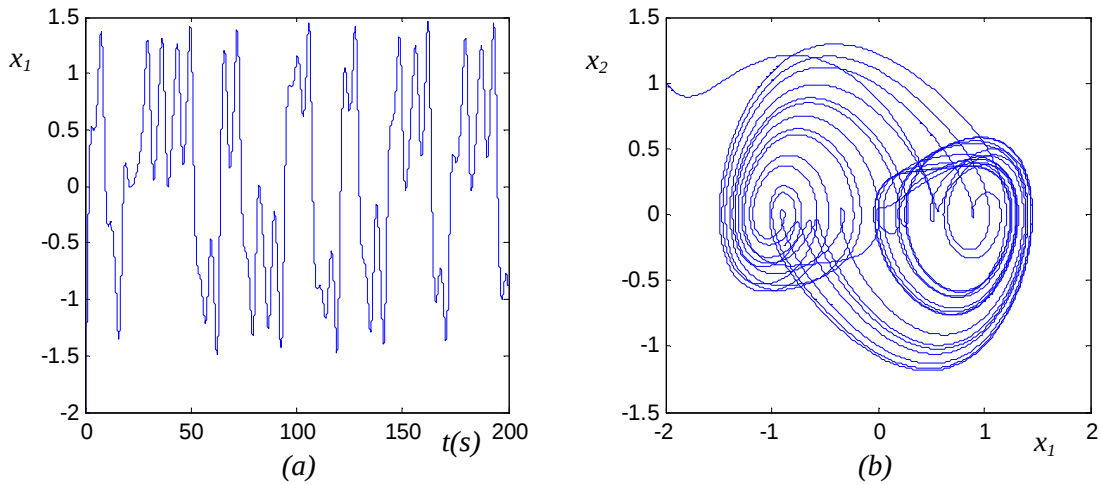
olarak bulunur. Böylece $B^T P_L$ matrisi,

$$B^T P_L = [0.3536 \quad 0.6291 \quad 0.4649]$$

olur. Lyapunov denkleminde P_L yerine Riccati denkleminde elde edilen P_R kullanılırsa, elde edilen Q_L 'nin yine pozitif tanımlı olduğu görülür.

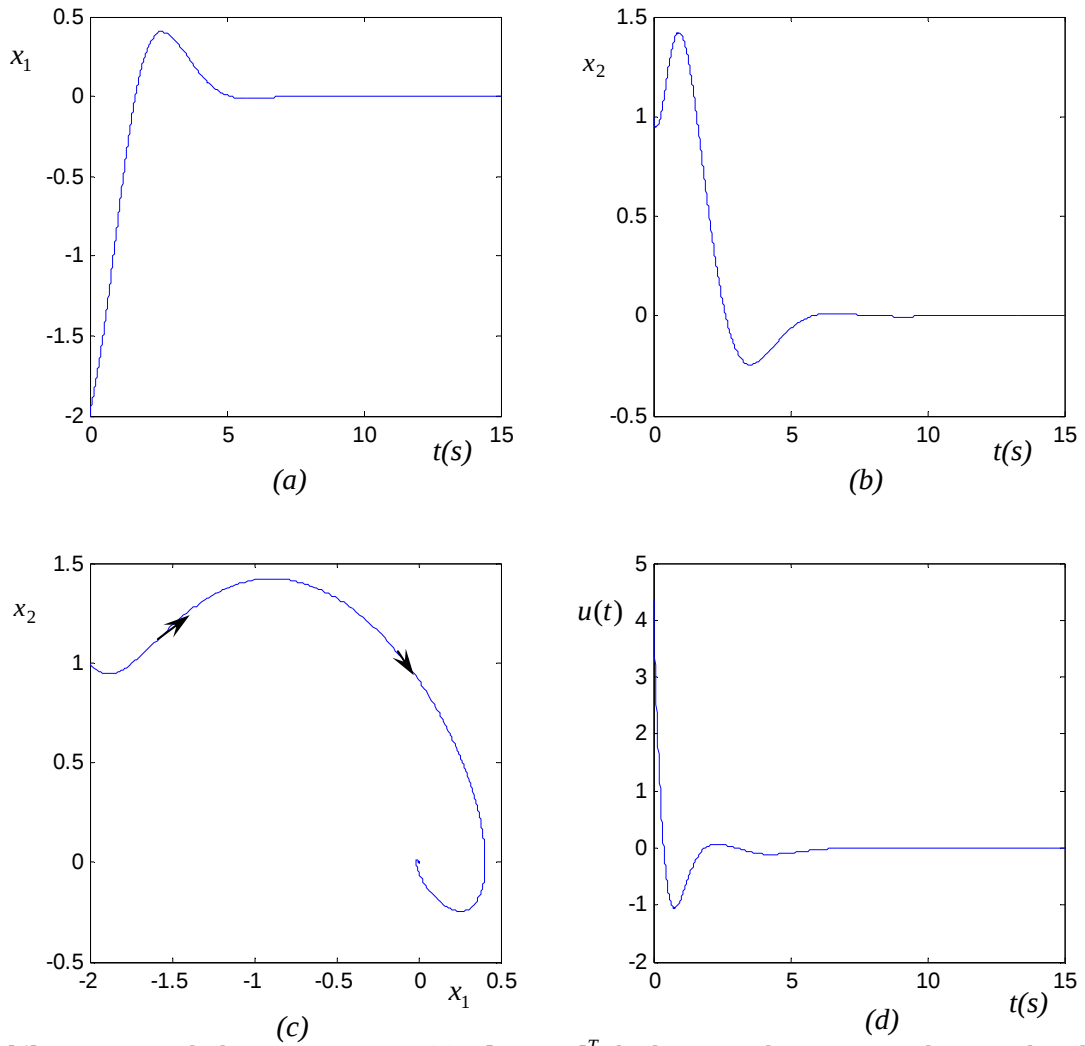
Simülasyon Sonuçları: Uygulama için verilen doğrusal olmayan sistemin durum geribeslemeli kontrolü için yukarıda verilen ve elde edilen değerler kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları şekil 5.8, 5.9, 5.10 ve 5.11'de gösterilmiştir. Simülasyon için kontrol tasarımcısı tarafından seçilen ε pozitif sabitesi, $\varepsilon = 0.1$ olarak seçilmiştir.

Şekil 5.8'de doğrusal olmayan sistemin nominal değerleri ve kontrol sinyalinin $u(t) = 0$ olduğu durum için, sistemin x_1 durum değişkeni ve durum uzay diyagramı verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi doğrusal olmayan sistemin girişi sıfır alındığında, sistem yörüngesi başlangıç şartlarına duyarlı olarak hareket etmektedir ve kontrolsüz sistem kararsızdır.



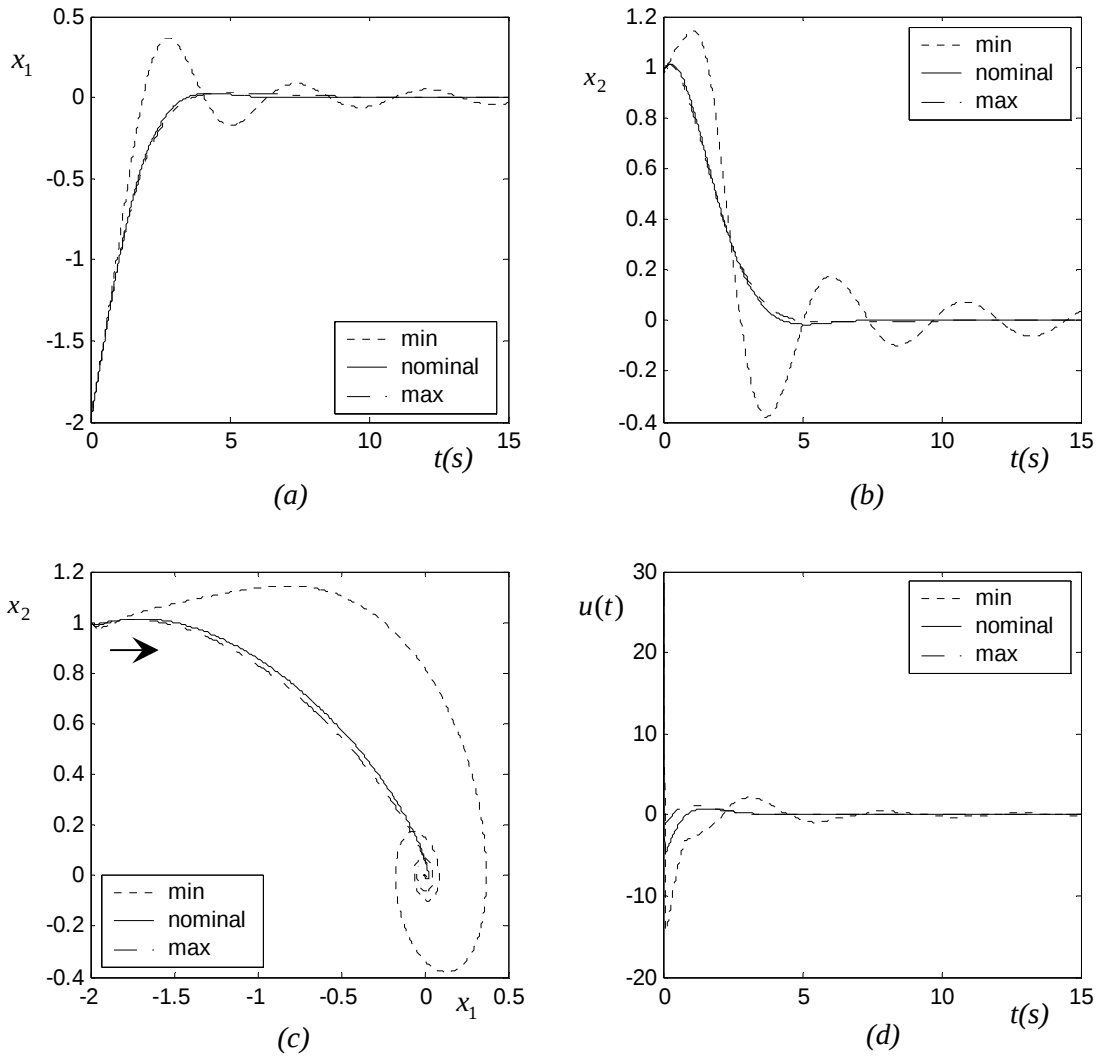
Şekil 5.8: Doğrusal olmayan sistemin, nominal sistem değerleri, başlangıç şartları $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $u(t)=0$ için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) Durum uzay diyagramı.

Şekil 5.9'da doğrusal olmayan sistemin nominal değerleri ve $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları için, sistemin x_1 durum değişkeni x_2 durum değişkeni, x_1 - x_2 durum uzay diyagramı ve $u(t)$ kontrol sinyali verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi kontrolsüz nominal sistemi kararsız olan doğrusal olmayan sistem, yalnızca doğrusal kontrolör kullanılarak kararlı hale getirilmiştir. Sistem yörüngesi başlangıç noktasından orijine asimptotik olarak yaklaşmaktadır.



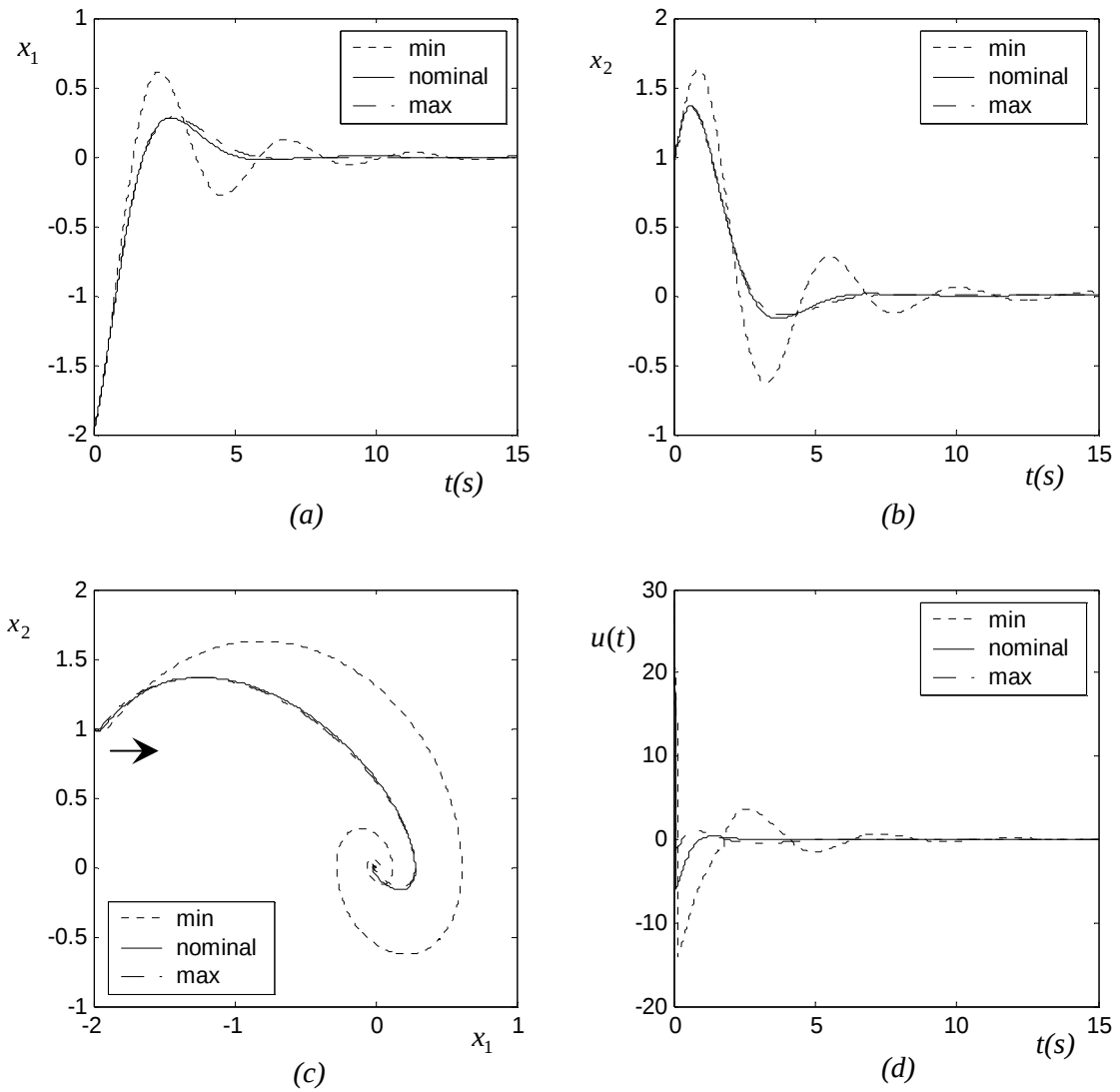
Şekil 5.9: Doğrusal olmayan sistemin $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları ve nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.10'da belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları için, sistemin x_1 durum değişkeni x_2 durum değişkeni, x_1 - x_2 durum uzay diyagramı ve $u(t)$ kontrol sinyali verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal değerlerde sistem yörüngesi, önerilen kontrolör kullanılarak kararlı hale getirilmiştir. Şekil 5.9'a göre kontrol sinyalinin genliği artmıştır.



Şekil 5.10: Doğrusal olmayan sistemin, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.11’de belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları ve denklem (5.48)’deki $P_L = P_R$ için, sistemin x_1 durum değişkeni x_2 durum değişkeni, x_1 - x_2 durum uzay diyagramı ve $u(t)$ kontrol sinyali verilmiştir. Şekil 5.10’a göre sistemin kararlılığı daha da artırılarak belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi nominal değerlerdeki sistem yörüngesine daha çok yaklaşmıştır.



Şekil 5.11: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)’deki $P_R = P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

5.4.1.2. Gözleyici Tasarımı

(a) Tüm Durum Gözleyici Tasarımı:

Bu bölümde sistem çıkışı kullanılarak, sistemin tüm durum değişkenleri yeniden oluşturulacak ve durum geribeslemeli kontrolde kullanılacaktır. Denklem (5.10)'da verilen şartları sağlamak için, D gözleyicinin özdeğerler matrisi olmak üzere, D , T , L , S_1 ve S_2 matrisleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler gözleyici denklemlerinde yerlerine konursa, denklem (5.3)'te verilen gözleyici denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D\xi + Ly + TBu \\ \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} -2\xi_1 \\ -2\xi_2 - 4x_1 + x_3 \\ -2\xi_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.60)$$

ve denklem (5.7)'de verilen gözleyici durum değişkenleri,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= S_1\xi + S_2y \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + x_1 \\ \xi_2 + 2x_1 \\ \xi_3 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.61)$$

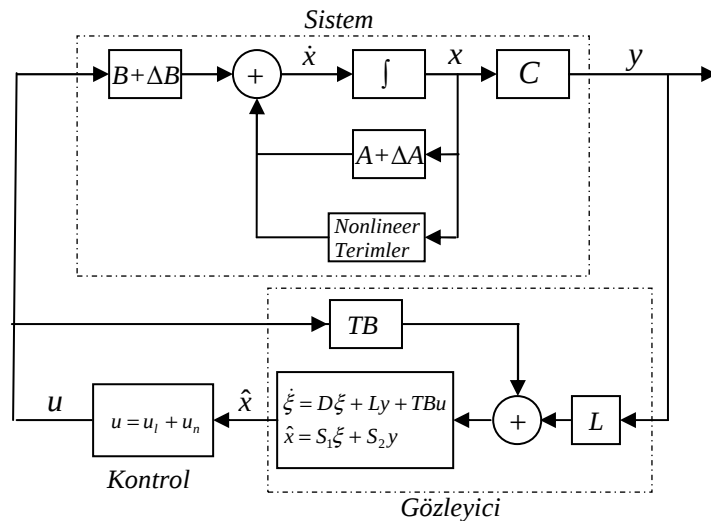
olur.

Sistemdeki belirsiz parametrelerin maksimum değeri ve kontrol kazançları kullanılarak denklem (5.27)'de tanımlanan $\hat{\rho}(\hat{x})$ aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\hat{x}) &= (1 - \beta_{\max})^{-1} \left\{ |\alpha_{1\max} \hat{x}_1 + \alpha_{2\max} \hat{x}_2 + \alpha_{3\max} \hat{x}_3| + \beta_{\max} |k_1 \hat{x}_1 + k_2 \hat{x}_2 + k_3 \hat{x}_3| + |x_1^3| \right\} \\ &= 2 \left\{ |\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3| + 0.5 |2.4142 \hat{x}_1 + 2.2047 \hat{x}_2 + 1.7289 \hat{x}_3| + |x_1^3| \right\} \end{aligned}$$

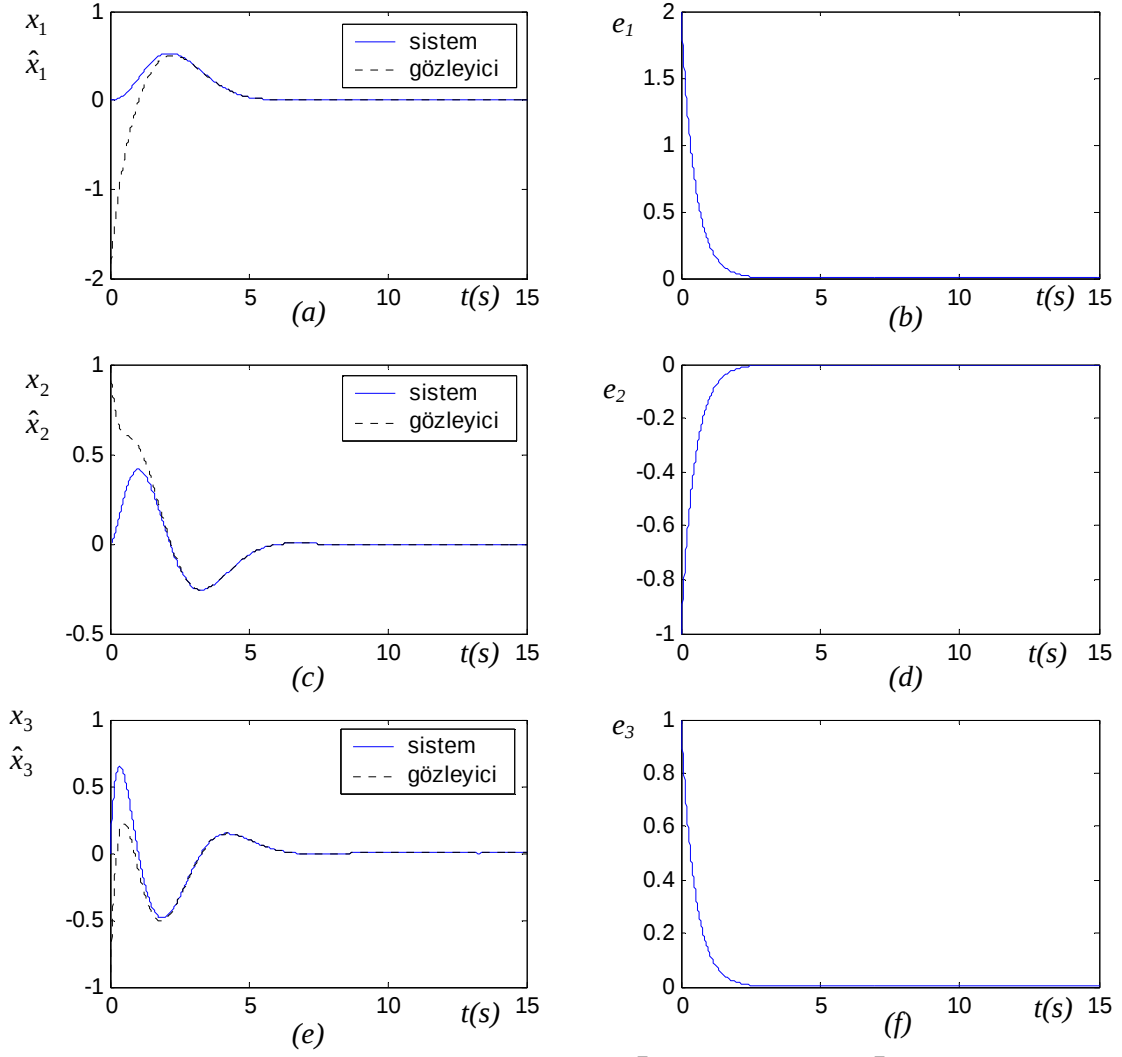
Simülasyon Sonuçları: Uygulamada verilen doğrusal olmayan sistemin tüm durum gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü için yukarıda verilen ve elde edilen değerler kullanılarak yapılan Matlab/SIMULINK simülasyonunun sonuçları şekil 5.13 ile 5.17 arasında gösterilmiştir. Simülasyon için kontrol tasarımcısı tarafından seçilen ε pozitif sabitesi, $\varepsilon = 0.1$ olarak seçilmiştir. Simülasyonlarda önce nominal, daha sonra belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistem için gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol tasarlanmıştır.

Şekil 5.12’de belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemler için önerilen gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol şeması görülmektedir.



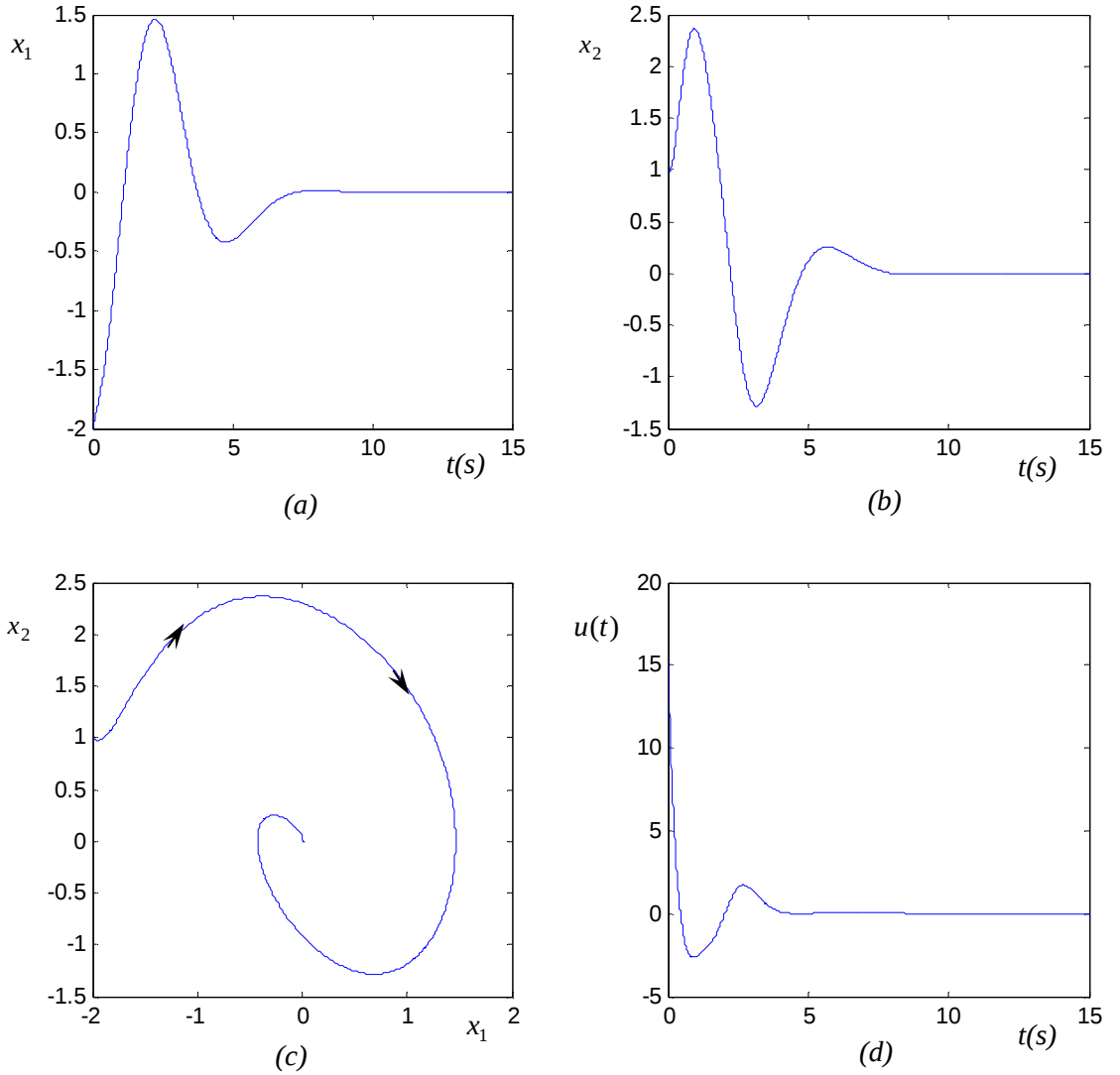
Şekil 5.12: Gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrol şeması.

Şekil 5.13’te $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $\hat{x}(0) = [-2, 1, -1]^T$ başlangıç şartları için $e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = [2, -1, 1]^T$ başlangıç şartları hatası kullanılarak nominal doğrusal olmayan sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve hata vektörlerinin zamanla değişimi verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t = 7$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmekte ve gözleyici durum değişkenleri verilen başlangıç şartlarından gelerek sistemin durum değişkenlerini $t = 2.5$ s civarında yakalamaktadır.



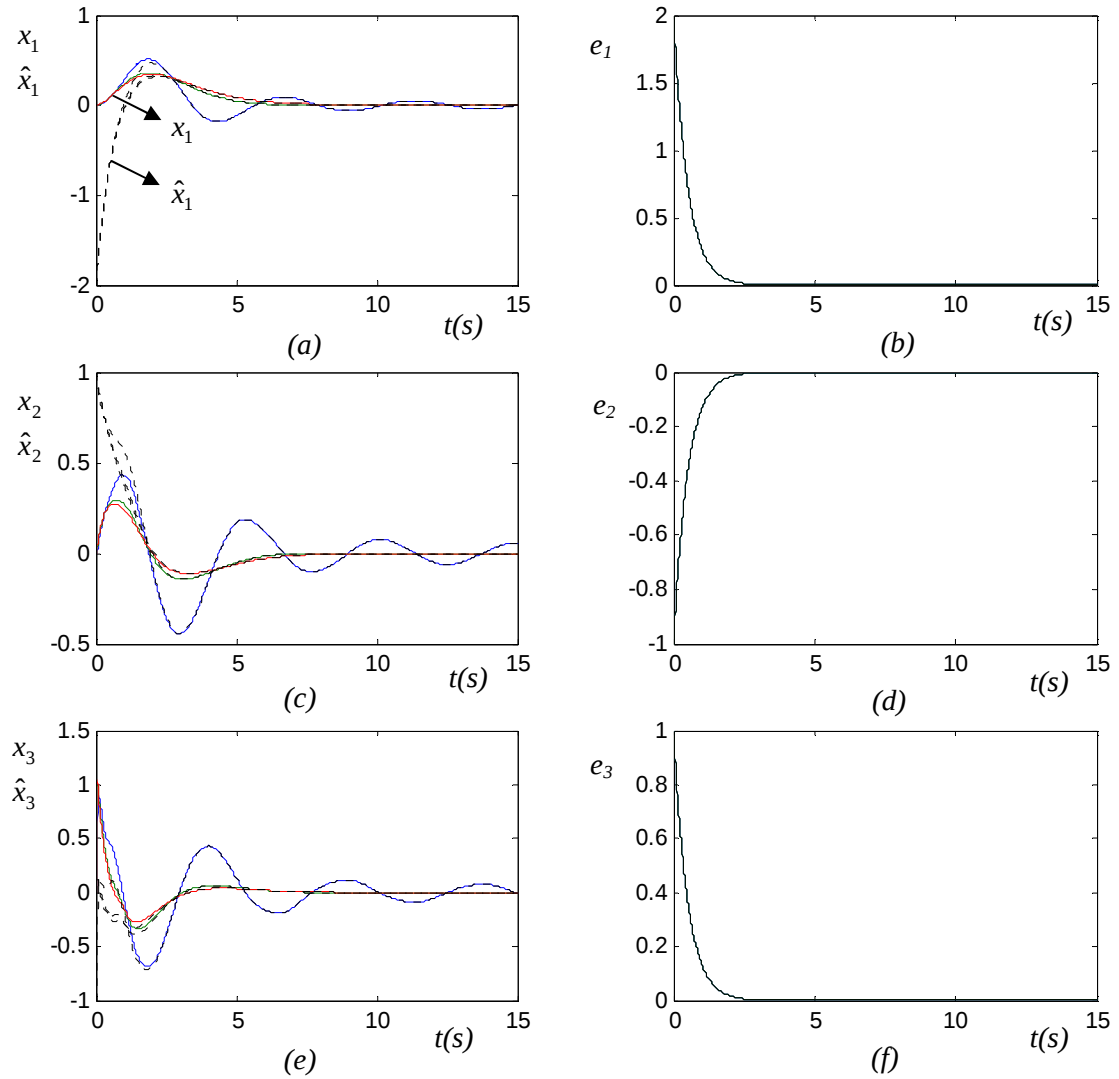
Şekil 5.13: Doğrusal olmayan sistemin $x(0)=[0,0,0]^T$ ve $e(0)=[2,-1,1]^T$ başlangıç şartları için nominal sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

Şekil 5.14'te $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları kullanılarak nominal doğrusal olmayan sistemin durum değişkenlerinin zamanla değişimi ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t = 7$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Durum geribeslemeli kontrolörün tasarlandığı şekil 5.9'daki sonuçlara göre buradaki sonuçlarda salınımlar ve genlikler artmıştır.



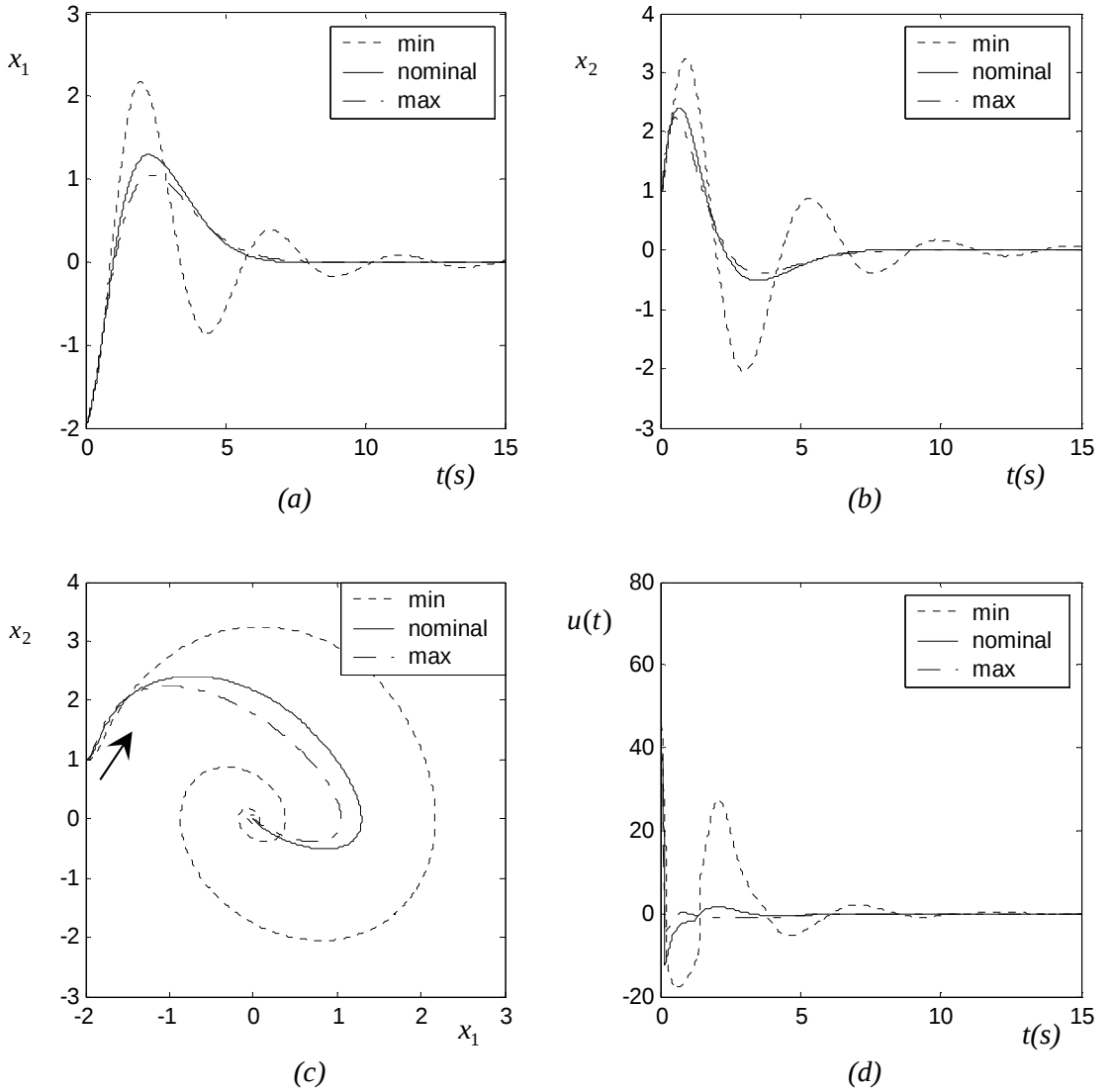
Şekil 5.14: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki $P_R=P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.15'te belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki P_R , (5.49)'teki P_L , $\varepsilon = 0.1$ ve şekil 5.14'teki başlangıç şartları için simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi tüm belirsizliklere rağmen gözleyici temelli kontrollü doğrusal olmayan sistemin durum değişkenlerinin yörüngeleri hedeflenen sürede, $t = 7$ s , sürekli duruma asimptotik olarak ulaşmıştır.



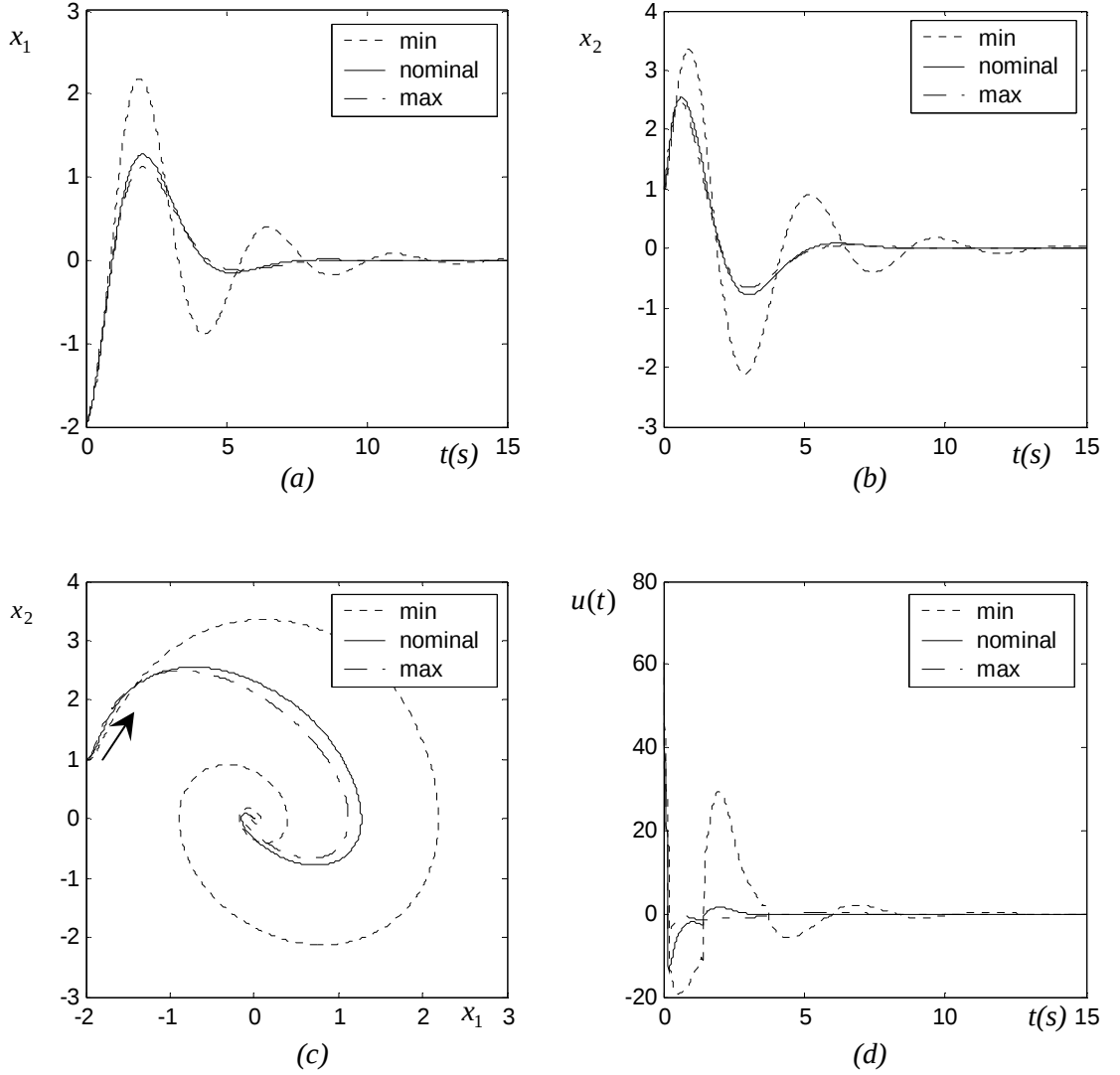
Şekil 5.15: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)'deki P_R , (5.49)'daki P_L , $x(0) = [0, 0, 0]^T$ ve $e(0) = [2, -1, 1]^T$ başlangıç şartları için belirsizlik içeren sistemin; (a) $x_1 - \hat{x}_1$ durum değişkenleri, (b) e_1 hata sinyali, (c) $x_2 - \hat{x}_2$ durum değişkenleri ve (d) e_2 hata sinyali, (e) $x_3 - \hat{x}_3$ durum değişkenleri ve (f) e_3 hata sinyalinin zamanla değişimi.

Şekil 5.16’da bölüm 3’te elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak amacıyla başlangıç şartlarını $x(0)=[-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ alınarak belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi verilmiştir. Simülasyonda (5.48)’deki P_R ve (5.49)’daki P_L kullanılmıştır. Şekillerden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t=7\text{ s}$ civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Bölüm 3’te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde gözleyicili sistemin simülasyon sonuçlarında sistem yörüngesindeki salınımın ve kontrol sinyalindeki genliğin biraz arttığı görülmektedir.



Şekil 5.16: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)’deki P_R , (5.49)’daki P_L , $x(0)=[-2,1,-1]^T$ ve $\hat{x}(0)=[0,0,0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.17’de kontrol parametrelerinin ayarı yapılarak (5.49)’teki P_L yerine (5.48)’deki P_R kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekil 5.16’da elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde kontrol parametrelerinin ayarlanmasıyla gözleyicili sistemin simülasyon sonuçlarında belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi, nominal sistem değerlerindeki yörüngeye daha çok yaklaşmıştır.



Şekil 5.17: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)’deki $P_R=P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

(b) Minimum Mertebeli Gözleyici Tasarımı:

Minimum mertebeli gözleyici tasarımı için durum değişkenlerinden x_1 ve x_3 ölçüme uygun olduğundan, sadece x_2 durum değişkeni için $q = n - m = 1$ mertebeli duyarlı minimum mertebeli gözleyici tasarımı yapılacaktır. Denklem (5.10)'da verilen gözleyici şartlarını sağlamak için, D minimum mertebeli gözleyicinin özdeğeri olmak üzere, D , T , L , S_1 ve S_2 matrisleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$D = -2, \quad T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklem (5.3)'te verilen gözleyici denklemi,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D\xi + Ly + TBu \\ &= -2\xi + \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= -2\xi - 4y_1 + y_2 + 0 \\ &= -2(\xi + 2x_1) + x_3 \end{aligned} \quad (5.62)$$

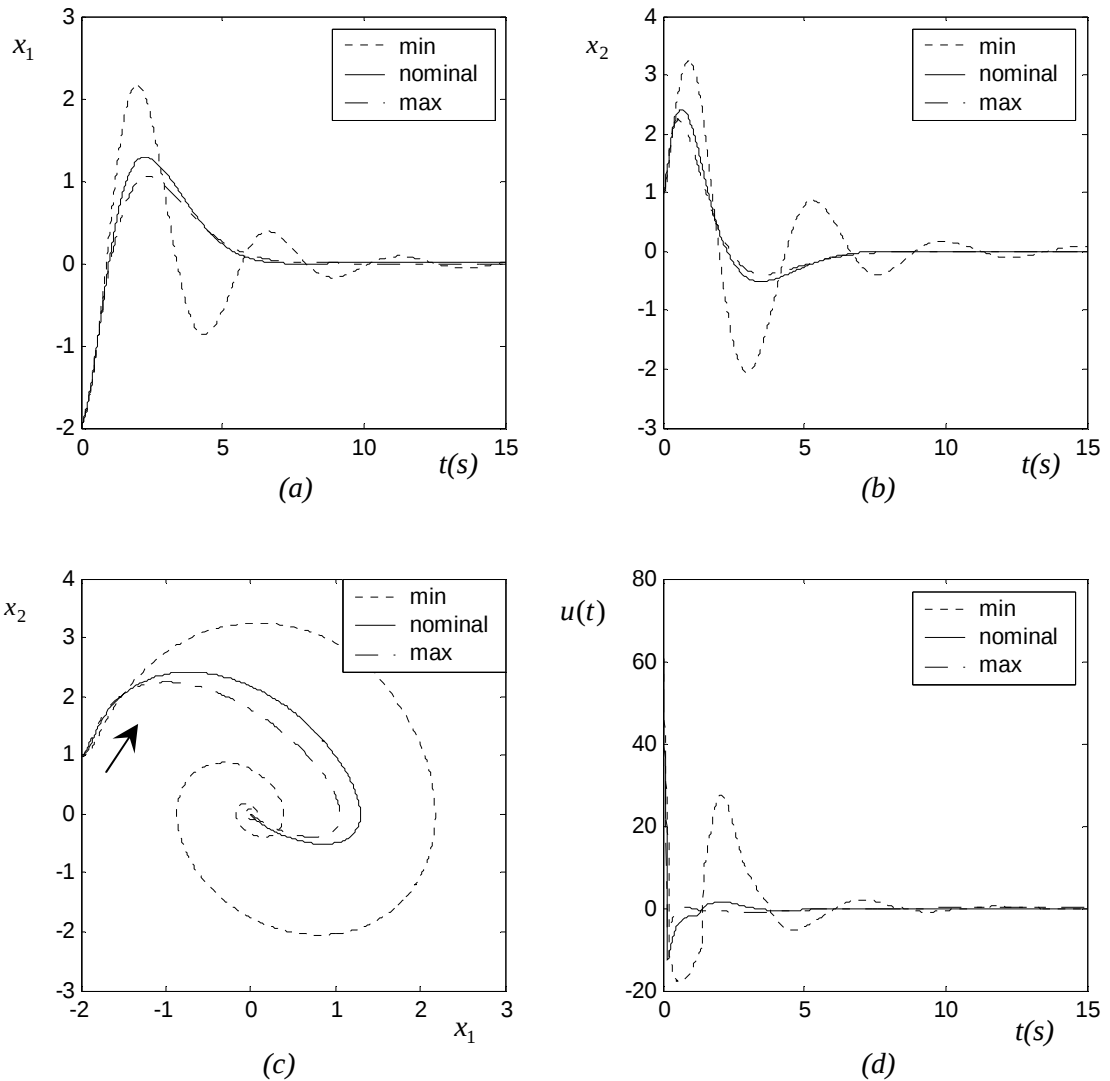
olur. Denklem (5.7)'de verilen gözleyici durum değişkenleri,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= S_1\xi + S_2y \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \xi + 2y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi + 2x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.63)$$

olur.

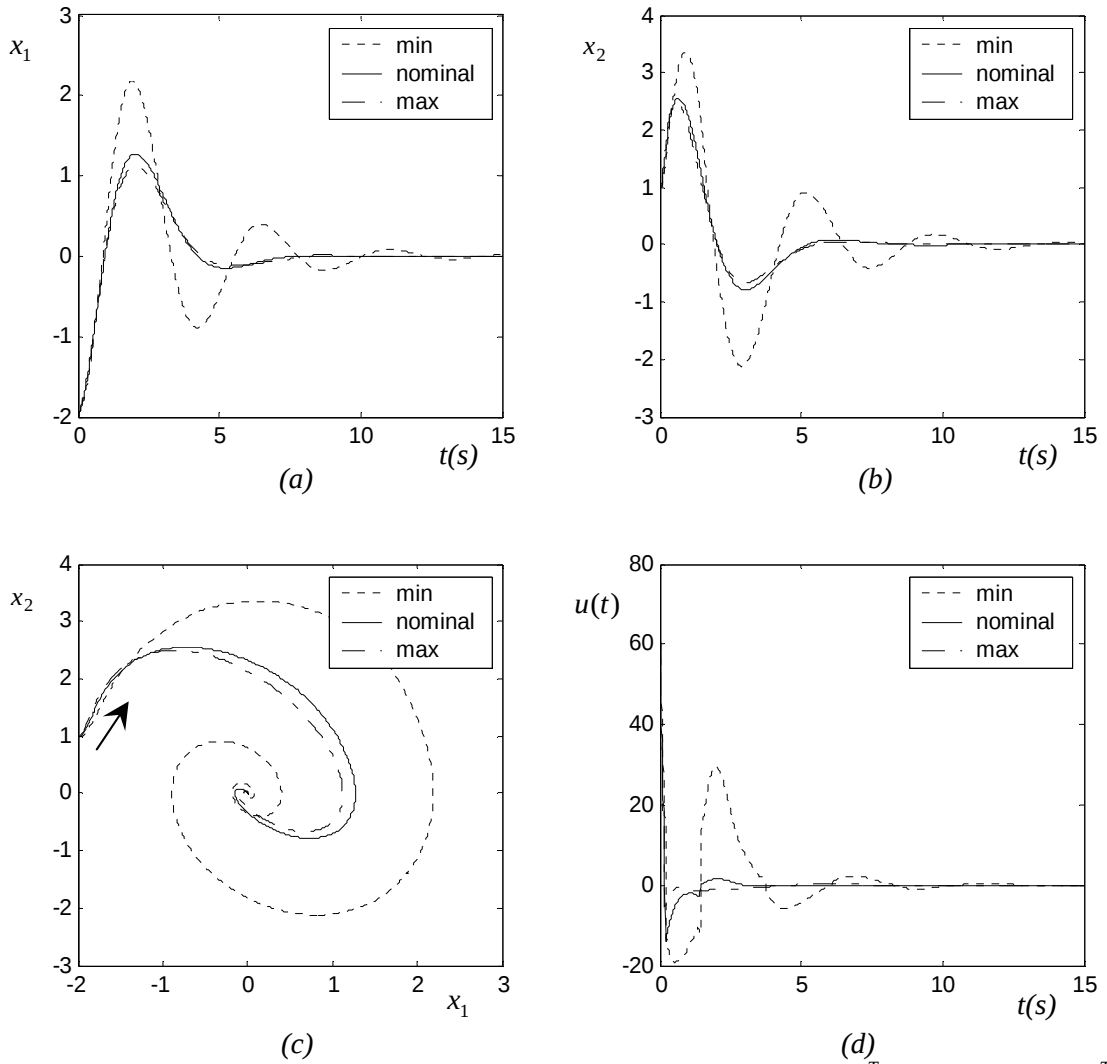
Simülasyon Sonuçları: Belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin, daha önceki bölümlerde verilen simülasyon sonuçlarıyla karşılaştırma yapmak amacıyla durum değişkenlerinin başlangıç şartları $x(0) = [-2, 1, -1]^T$, minimum mertebeli gözleyicinin başlangıç şartı $\hat{x}_2(0) = [0]$ ve doğrusal olmayan kontrolördeki tasarımcı tarafından seçilen $\varepsilon = 0.1$ pozitif sabitesi için, Matlab/SIMULINK ortamında modellenerek simülasyonu yapıldı ve sonuçları verildi. Gözleyici özdeğeri $D = -2$ olarak seçilmiştir. Şekil 5.18 ve 5.19'da verilen simülasyon sonuçlarında durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi verilmiştir.

Şekil 5.18’de daha önceki sonuçlarla karşılaştırma yapmak amacıyla başlangıç şartlarını $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ alınarak belirsizlik içeren doğrusal olmayan sistemin durum değişkenlerinin sıfır giriş yanıtı ve kontrol sinyalinin zamanla değişimi verilmiştir. Simülasyonda (5.48)’deki P_R ve (5.49)’daki P_L kullanılmıştır. Şekillerden de görüldüğü gibi sistem yörüngesi $t = 7$ s civarında sürekli duruma asimptotik olarak erişmektedir. Bölüm 3’te elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde minimum mertebeli gözleyicili sistemin simülasyon sonuçlarında sistem yörüngesindeki salınımın ve kontrol sinyalindeki genliğin biraz arttığı görülmektedir. Ancak, tüm durum gözleyici tasarım sonuçlarına göre çok büyük bir değişiklik görülmemektedir.



Şekil 5.18: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)’deki P_R , (5.49)’daki P_L , $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

Şekil 5.19’da kontrol parametrelerinin ayarı yapılarak (5.49)’teki P_L yerine (5.48)’deki P_R ’nin kullanılmasıyla elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Şekil 5.18’de elde edilen sonuçlara göre, bu bölümde kontrol parametrelerinin ayarlanmasıyla gözleyicili sistemin simülasyon sonuçlarında belirsizliklerin maksimum ve minimum değerlerinde sistem yörüngesi, nominal sistem değerlerine daha çok yaklaşmıştır.



Şekil 5.19: Doğrusal olmayan sistemin (5.48)’deki $P_R=P_L$, $x(0) = [-2, 1, -1]^T$ ve $\hat{x}(0) = [0, 0, 0]^T$ başlangıç şartları, belirsizliklerin maksimum ve minimum değerleri ile nominal sistem değerleri için; (a) x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (b) x_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi, (c) Durum uzay diyagramı, (d) $u(t)$ kontrol sinyali.

5.5. Sonuçlar

Bu bölümde yapısal belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü yapıldı. Doğrusal sistemlere örnek olarak bir maglev aracın süspansiyon kontrolü [6] yapıldı. Doğrusal olmayan sistemlere örnek olarak da doğrusal olmayan kaotik bir sistemin [19] gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü yapıldı.

Gözleyici durum değişkenlerinin hızlı bir şekilde sistem durum değişkenlerine yaklaşması için gözleyici özdeğerleri sistem özdeğerlerinden çok daha negatif seçilmelidir.

Bu bölümde tasarlanan gözleyici sistemin içerdiği belirsizliklerden bağımsızdır. Böyle gözleyici kullanılarak, belirsizlikler olması durumunda bile kapalı çevrimli sistemin kararlılığının garanti altına alınabileceği görüldü.

Tasarlanan kontrolörlerle nominal modeli karasız doğrusal olmayan sistemlerin, tüm başlangıç şartları, belirsizlikler ve doğrusal olmayan terimlere rağmen asimptotik kararlılığı sağlanmışır. Tasarlanan gözleyici belirsizliklere duyarsız bir gözleyici olup, doğrusal olmayan sistemlerin ölçülemeyen durum değişkenlerini ölçülebilen durum değişkenlerinden elde ederek, geribeslemeli kontrolde kullanabilmemize olanak sağlamaktadır. Böylece tasarlanan kontrolör pratikte kullanılabilmektedir.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, yapısal belirsizlikler içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin dayanıklı (robust) durum geribeslemeli ve gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü yapıldı. Çoğu mühendislik sistemleri parametre belirsizliği ve modellenmesi sorun olan doğrusal olmayan dinamikler içerir. Burada belirsizliklerin değişim aralığı verildiğinden, bu değişim aralığını karşılayan ve hedeflenen kapalı çevrimli sistem performansını da sağlayan kontrolör tasarlandı. Bu kontrolör, doğrusal ve doğrusal olmayan iki kontrolden oluşmaktadır. Doğrusal kontrolör, nominal sistemin kararlılığını ve hedeflenen geçici durum davranışını, doğrusal olmayan kontrolör ise belirsiz parametrelerin ve doğrusal olmayan elemanların etkisini karşılar ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlar.

Sistemlerin, pozisyon, hız ve ivme gibi, tüm durum değişkenlerini ölçmek her zaman mümkün olmayabilir. Bunun sebepleri teknik olabileceği gibi, ölçümün pahalı olmasından da kaynaklanabilir. Bu durumda, sistemin ölçülebilen durum değişkenlerinden, ölçülemeyen durum değişkenlerini elde etmek için gözleyici kullanılır. Gözleyici tasarımı ile ölçülemeyen durum değişkenleri elde edilerek sistemin durum geribeslemeli kontrolü yapılabilir. Bu çalışmada tasarlanan gözleyici tüm belirsizliklere duyarsız olup, önerilen kontrolörün pratikte kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Tasarlanan gözleyici belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulandı. Ayrıca sistem performansının iyileşmesi için kontrol parametrelerinin ayarı yapılarak kapalı çevrimli sistemin kararlılığı ve sistemin belirsizliklere karşı dayanıklılığı daha da artırıldı.

Bu tez çalışmasında, yapısal belirsizlikleri içeren sistemlerin literatürde “matching conditions” olarak bilinen denkleştirme şartlarını sağladığı varsayılmıştır. Bu şartları sağlayan birçok sistem olmasına rağmen belirsizlikler her zaman kontrol matrisi içine alınamayabilir. Bir diğer konu, sistemlerin belirsizlik içermesi durumunda tasarlanan gözleyicinin bağımsızlık prensibini sağlamasıdır. Bağımsızlık prensibini belirsizlik içeren her sistemin sağlaması mümkün değildir. Başlıca bu iki konu çalışmamızı sınırlayan problemlerdir. Bu problemlerin giderilmesi veya azaltılması düşünülerek bu tez çalışması geliştirilebilir.

Tez çalışmamızda, [6]’da verilen doğrusal sistemler için geliştirilen kontrolör ve gözleyici genişletilerek belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlere uygulandı. Yapısal belirsizliklerin “matching conditions” olarak bilinen denkleştirme şartlarını sağladığı durum için kontrolör ve gözleyici tasarlandı. Tasarlanan kontrolörler ile doğrusal olmayan elemanlar, parametrik belirsizlikler ve başlangıç şartlarına rağmen; sistem yörüngesinin sifıra yakın bir bölgeye girmesi ve orada kalması sağlandı. Başka bir deyişle tasarlanan kontrolörler ile nominal modeli karasız, belirsizlik içeren doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin asimptotik kararlılığı garantilendi.

KAYNAKLAR

- [1] Ogata, K., 2002, *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey, Fourth Edition.
- [2] Brogan, W. L., 1991, *Modern Control Theory*. Prentice-Hall International, New Jersey, Third Edition.
- [3] Dorf, R. C., 2005, *Modern Control Systems*. Pearson / Prentice-Hall, New Jersey, 10th Edition.
- [4] Franklin, G. F., Powell, J. D. and Emami-Naeini, A., 2002, *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Fourth Edition.
- [5] Friedland, B., 1987, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. McGraw-Hill International, Singapore.
- [6] Breinl, W. and Leitmann, G., 1987, State Feedback for Uncertain Dynamical Systems, *Applied Mathematics and Computation*, 22:65-87.
- [7] Leitmann, G., 1981, On the Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102:95-102.
- [8] Slotine, J.J.E. and Li, W., 1991, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [9] Gutman, P.-O. and Hagander, P., 1985, A new design of constrained controllers for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 1, 22-33
- [10] Corless, M., 1993, Control of Uncertain Nonlinear Systems, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, 362–372.
- [11] Gutman, S. and Palmor Z., 1982, Properties of min-max controller in uncertain dynamical systems, *SIAM J. Control Optimization*, Vol. 20, No. 6, 850-861.
- [12] Bayır, İ., 2003, Belirsizlik İçeren Dinamik Sistemlerin Lyapunov Metoduyla Kontrolü, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [13] Khalil, H. K., 2002, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall International, Third Edition.
- [14] Payandeh, S., 1995, On the Effect of Compliance in Robotic Contact Tasks Problem, *Proceedings of American Control Conference*, 387-391.
- [15] Edwards, C. and Spurgeon, S. K., 1998, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor&Francis Ltd.
- [16] Bayır, İ. ve Uçar, A., 2004, Belirsizlik İçeren Sistemlerin Gutman-Hagander Metoduyla Kontrolü, *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu*, 281-285.
- [17] Ablay, G., 2005, Belirsizlik İçeren Dinamik Sistemlerin Durum Geribeslemeli Kontrolü, Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

- [18] Luenberger, D. G., 1971, An Introduction to Observers, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, 596-602.
- [19] Uçar, A., 2004, Kaos, Kaotik Davranış ve Uygulama Alanları, Seminer, Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elazığ.
- [20] Burk, F., 1998, *Lebesgue Measure and Integration: An Introduction*. John Wiley&Sons, Canada.
- [21] Kolman, B. and Hill, D. R., 2000, *Elementary Linear Algebra*. Prentice-Hall International, Seventh Edition.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Tuzluca / Iğdır doğumludur. İlk ve orta öğrenimini Iğdır’da, lise öğrenimini Ankara Abidinpaşa Sağlık Meslek Lisesi’nde dereceyle tamamladı. 2000 yılında Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü’nü kazandı ve Temmuz 2004’te Elektrik-Elektronik Mühendisi olarak birincilikle mezun oldu. Eylül 2004’te Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Bekâr ve yabancı dili İngilizcedir.

Bölüm 5 İçin Matlab/SIMULINK Programları

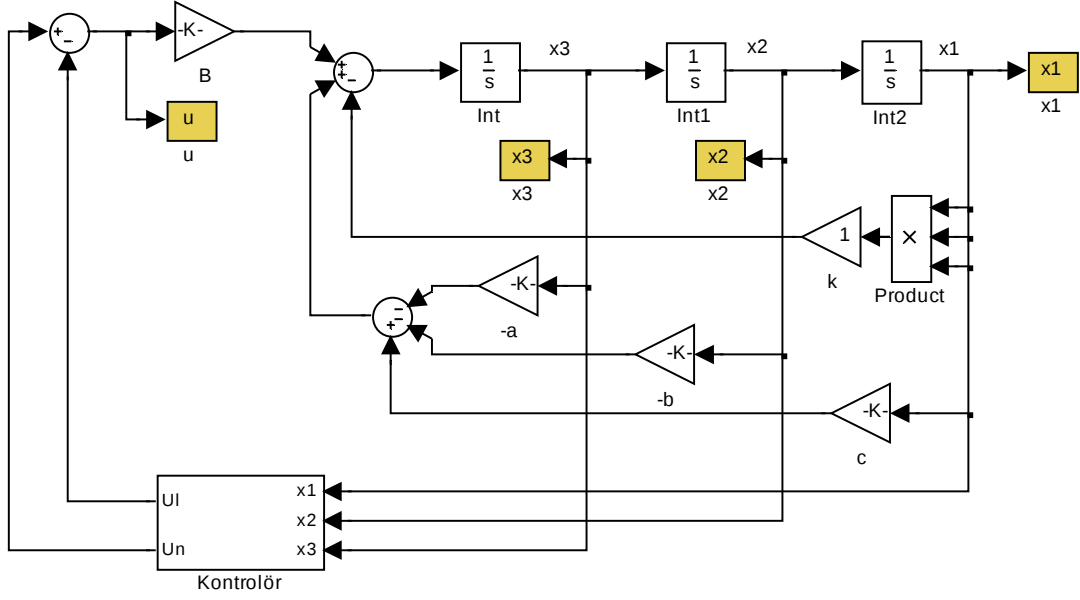
1. Bölüm 5.3.1’de verilen bir maglev aracın süspansiyonunun gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü için hazırlanan Matlab / SIMULINK 6.5 programları:

- 1) Doğrusal kontrol kazançlarının hesaplanması için matlab programı:
%Sistem matrisleri
 $A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 57000 \ 1938 \ -16];$ $B = [0; 0; -14.25];$
%Ağırlık matrisleri
 $QR = [1e5 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1];$ $R = [6];$
% Riccati matris denkleminin çözümü
 $[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, QR, R)$ % K kontrol kazancı, $P = P_R$ ve E kapalı çevrim özdeğerleridir.
- 2) Doğrusal olmayan kontrol kazançlarının hesaplanması için matlab programı:
%Sistem matrisleri
 $A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 57000 \ 1938 \ -16];$ $B = [0; 0; -14.25];$
%Optimal kontrol kazanç matrisi
 $K = [-8012.480 \ -438.638 \ -6.866];$
%Ağırlık matrisi
 $QL = [1e6 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1];$
% Lyapunov matris denkleminin çözümü
 $PL = \text{lyap}((A - B * K)', QL)$
 $BTPL = B' * PL$

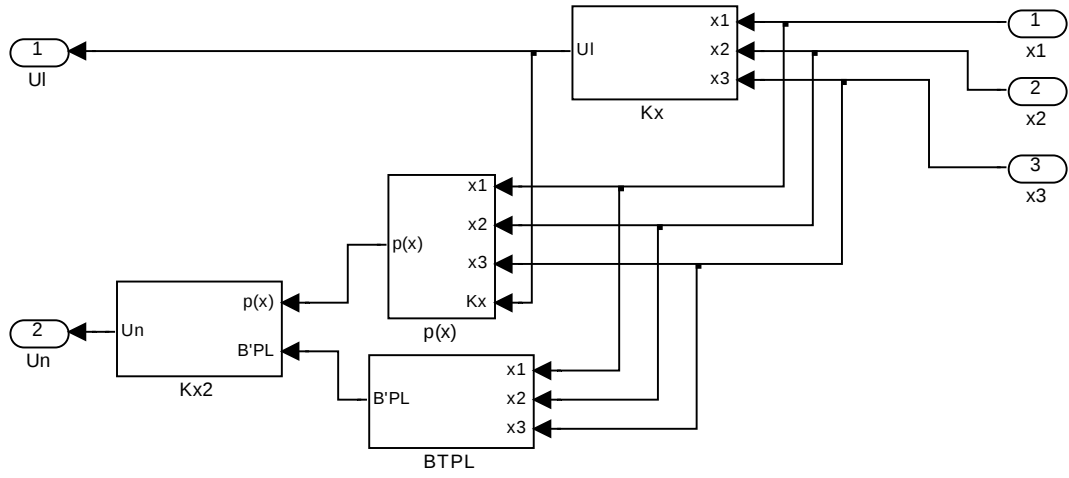
2. Bölüm 5.4.1’de verilen doğrusal olmayan bir sistemin gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrolü için hazırlanan Matlab / SIMULINK 6.5 programları:

- 1) Doğrusal kontrol kazançlarının hesaplanması için matlab programı:
%Sistem matrisleri
 $A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 1 \ -1 \ -0.7];$
 $B = [0; 0; 1];$
%Ağırlık matrisleri
 $QR = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1];$ $R = [6];$
% Riccati matris denkleminin çözümü
 $[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, QR, R)$ % K kontrol kazancı, $P = P_R$ ve E kapalı çevrim özdeğerleridir.
- 2) Doğrusal olmayan kontrol kazançlarının hesaplanması için matlab programı:
%Sistem matrisleri
 $A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 1 \ -1 \ -0.7];$
 $B = [0; 0; 1];$
 $K = [2.4142 \ 2.2047 \ 1.7289];$
%Ağırlık matrisi
 $QL = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1];$
% Lyapunov matris denkleminin çözümü
 $PL = \text{lyap}((A - B * K)', QL)$
 $BTPL = B' * PL$

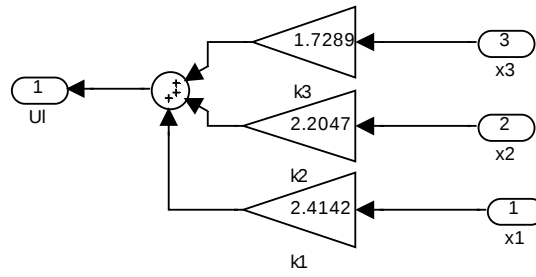
3) Doğrusal olmayan sistemin durum geribeslemeli kontrolü için SIMULINK programı:



(a)

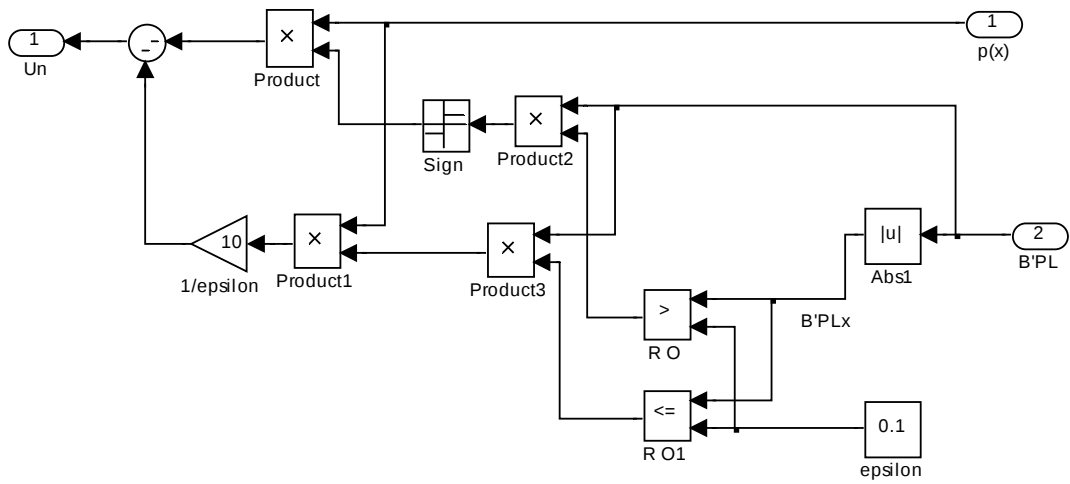


(b)

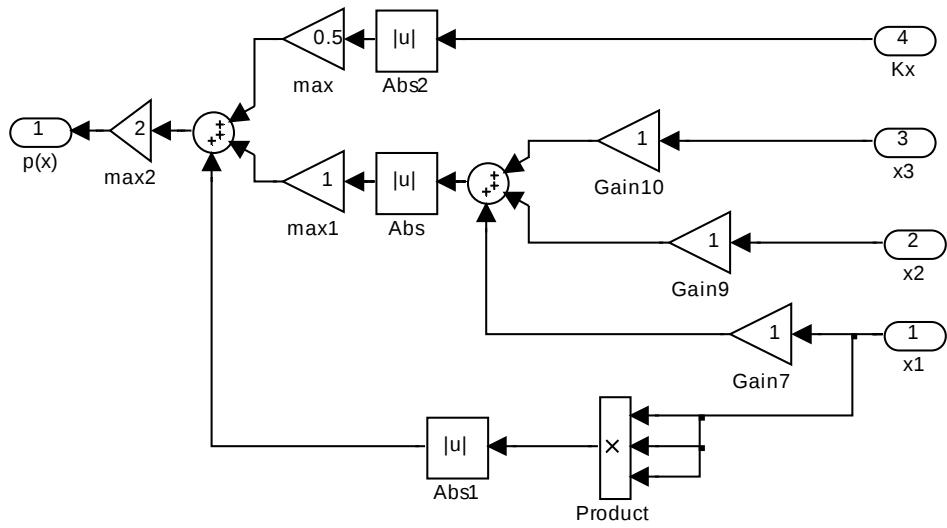


(c)

(a) Matlab/SIMULINK programı, (b) Kontrolör alt sisteminin içyapısı ve (c) Kx alt sisteminin içyapısı.



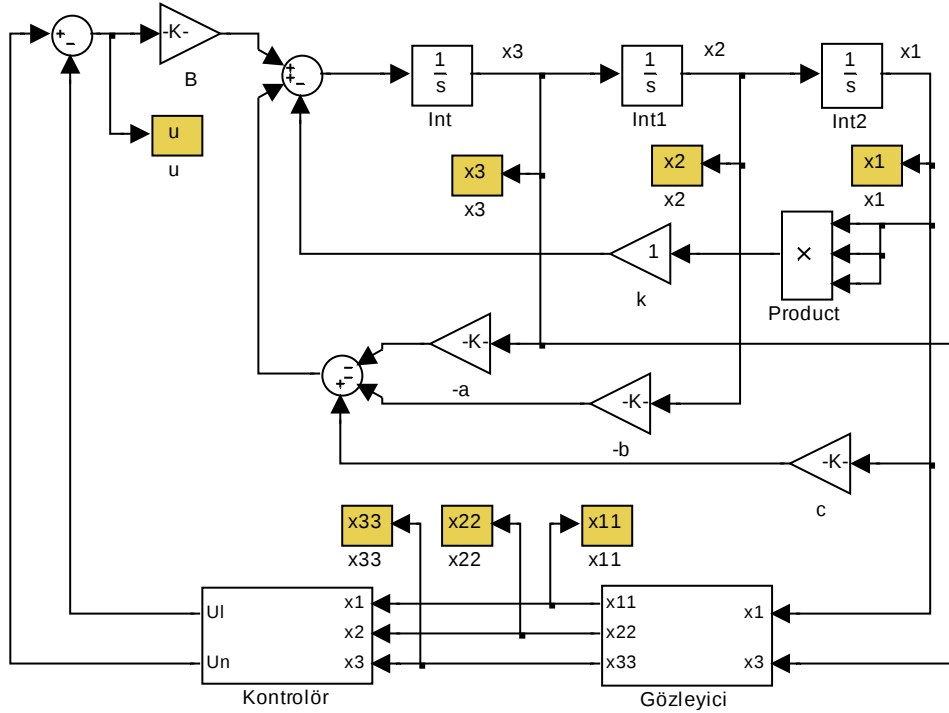
(d)



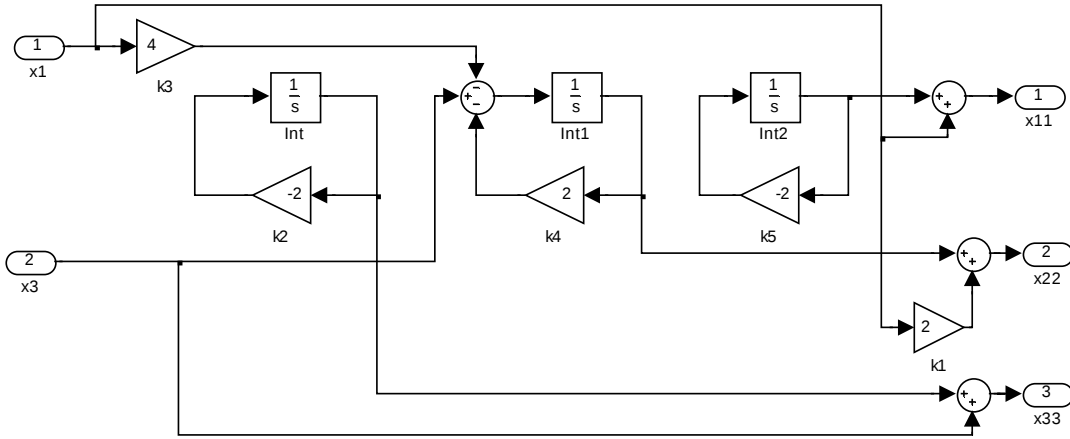
(e)

(d) $p(x)$ alt sisteminin içyapısı, (e) $Kx2$ alt sisteminin içyapısı.

- 4) Gözleyici temelli durum geribeslemeli kontrollü doğrusal olmayan sistem için SIMULINK programı:



(a)



(b)

(a) Matlab/SIMULINK programı, (b) Gözleyici alt sisteminin içyapısı.

