

**İKİ SPEKTRUMA GÖRE STURM-LIOUVILLE
OPERATÖRÜNÜN TANIMLANMASI**

Ahu ERCAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI**

OCAK - 2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ SPEKTRUMA GÖRE STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
TANIMLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahu ERCAN

(121121118)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Aralık 2013

OCAK - 2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ SPEKTRUMA GÖRE STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN
TANIMLANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahu ERCAN

(121121118)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Ocak 2014

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Necdet Çatalbaş (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İç (F.Ü)

OCAK - 2014

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ahu ERCAN

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ.....	8
3.1. Sturm-Liouville Operatörü İçin Sınır-Değer Problemi.....	10
3.2. Klasik Fourier İntegrali.....	13
4. FOURIER – BESSEL SERİSİNE AÇILIM.....	15
4.1. Fourier-Hankel İntegraline Açılım.....	23
5. LEGENDRE POLİNOMLARI VE BAĞLAYICI LEGENDRE FONKSİYONLARINA GÖRE AÇILIM.....	30
5.1. Legendre Denklemi, Polinomları ve Özellikleri.....	30
6. DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN İZ HESABI.....	39
6.1. Sturm-Liouville Operatörü İçin İz Hesabı.....	39
6.2. Lineer Sönümlü Dalga Denklemi İçin İz Formülü.....	46
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	60

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür taraması yapılmış ve çalıştığımız konuların başlangıcı ve tarihsel gelişimi incelenmiştir.

İkinci bölümde diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan temel tanım ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde klasik Sturm-Liouville denklemi ve bu denklemin özfonksiyonlara göre seriye açılımı verilmiş, ayrıca klasik Fourier integrali incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Fourier-Bessel seri açılımı ve Fourier-Hankel integral açılımı verilmiştir.

Beşinci bölümde Legendre polinomları tanımlanmıştır. Bu polinom fonksiyonların ortogonalliği gösterilip özdeğer ve normalleştirici özfonksiyonları incelenmiştir.

Altıncı bölümde Sturm-Liouville operatörü ve lineer sönümlü dalga denklemi (difüzyon operatörü) için iz formülü hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville problemi, özdeğer, özfonksiyon, Legendre fonksiyonları, Bessel fonksiyonları, iz formülleri.

SUMMARY

ACCORDING TO THE TWO SPECTRA IDENTIFICATION OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, historical development and literature review of subjects are examined.

In the second chapter; some fundamental definitions and theorems often used in theory of spectral of differential operators are given.

In the third chapter; classic Sturm-Liouville equation , this equation of serial expansion respect to eigenfunctions are gived , and classical Fourier Integral is studied.

In the fourth chapter; Fourier-Bessel serial expansions, Fourier-Hankel Integral expansions are given.

In the fifth chapter; Legendre Polynomials are defined, the ortogonality of them are showed, eigenvalue and normalization eigenfunction of them are found.

In the six chapter; Trace formulas are obtained for Sturm-Liouville operators and for linear damped wave equation.

Key words: Sturm-Liouville problem, eigenvalue, eigenfunction, Legendre functions, Bessel functions, trace formulas.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
Γ	: Gamma fonksiyonu
∂	: Kısmi türev
∇	: Nabla
α	: Alfa
μ	: Mü
π	: Pi
θ, ϑ	: Teta
λ	: Lambda
χ	: Chi
β	: Beta
Φ, ϕ, φ	: Phi
ω	: Omega
η	: Eta
ρ	: Ro
γ	: Gamma
ψ, Ψ	: Psi
v	: Nü
γ	: Euler sabiti
$J_v(x)$	: v. basamaktan birinci çeşit Bessel fonksiyonu
$I_v(x)$	: v. basamaktan birinci çeşit değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
$Y_v(x)$	: v. basamaktan ikinci çeşit Bessel fonksiyonu (Weber Fonksiyonu)

$H_\nu(x)$	: ν . basamaktan üçüncü çeşit Bessel fonksiyonu (Hankel Fonksiyonu)
$P_n(x)$	: Legendre polinom fonksiyonu
$P_{n,h}(x)$	: h . mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonları
$P_{n,1}(x)$	: Birinci mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonları
$W\{\phi, \chi\}$	: ϕ ile χ 'nin wronskiye
$m(\lambda)$	: Meromorfik fonksiyon
$O(1)$	: Sınırlı değerler
$o(1)$	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Fiziğin ve mekaniğin pek çok problemi adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemi ile bağlantılıdır. Bu problemler genellikle kısmi türevli denklemlerde değişkenlere ayrılması yöntemi (Fourier yöntemi) kullanıldıktan sonra adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemine dönüşmektedir. Bu problemlerin singüler (tekil) diferensiyel denklemler için daha da önemli olduğu son yıllarda ortaya çıkmıştır. Tanım kümesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatörlere regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) integrallenebilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferensiyel operatörlere ise singüler denir.

Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H.Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F.Riesz, J. Von Neumann, K.O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi yapılandırılmıştır. İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisinde yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E.C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan ve artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılım formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denilmektedir. Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiği ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular; T. Carleman, M.S. Birman, V.P. Maslov gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferensiyel operatörler teorisinde singüler operatörler için spektral teoremin düz problemlerinin incelenmesi önemli yere sahiptir. Bessel, Legendre ve diğer singüler diferensiyel denklemlerin spektral teorisinin, yani özdeğerlerin, normlaştırıcı sayıların, özfonksiyonların ve tüm bunların özelliklerinin incelenmesi, özel olarak Fourier - Bessel, Fourier – Hankel integral açılımlarının ve Legendre polinomlarının göz önüne alınarak açılımlarının araştırılmasıyla spektral analiz, kompleks değişkenli fonksiyonlar, adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemler teorilerinde ve fonksiyonel analizde kullanılan

teoremler ve onların ispat yöntemleriyle spektral açılım teoremlerinin ispatlanması sağlanmıştır. Bessel denklemleri ile matematiğin birçok dallarında matematiksel fizik, temel bilimler ve mühendislik bilimlerinin uğraşlarına giren pek çok problemin çözümünde karşılaşılır. Bessel fonksiyonlarına göre seri açılımı hem diferensiyel denklemler teorisi hem de fonksiyonlar ve seriler teorisi gibi dallarda sıkça kullanılmaktadır. Bessel fonksiyonları üzerindeki çalışmalar 19. yüzyılda Alman matematikçi Freidrich Wilhelm Bessel (1784-1846) tarafından yapılmıştır. Astronomik bir problem olan yer kürenin güneş etrafında dönme yörüngesinin bulunması ile uğraşırken Bessel denklemini ortaya çıkarmıştır. Zaman geçtikçe telin ve zarın titreşimleri gibi fiziksel olaylarda Bessel denklemine getirilmiştir. 20.yüzyılda ise bu denklem, kuantum mekanik ve kuantum fizik problemlerinde de sık sık kullanılmıştır.

Adi diferensiyel denklemler için düzenlenmiş iz çalışmasının uzun bir geçmişi vardır. Bu konuda ilk olarak Gelfand ve Levitan [9] self adjoint Sturm-Liouville diferensiyel denklemi için iz formülü elde etmişlerdir. Daha sonra Gelfand [10] Sturm-Liouville operatörü için yüksek mertebeden (k . mertebeden) izler elde etmişlerdir. Bu çalışmalardan sonra matematikçiler farklı diferensiyel operatörler için iz formülleri geliştirmeye çalıştılar. Sürekli spektruma sahip self-adjoint operatörlerin iz formüllerinin özeti ilk olarak Krein tarafından araştırıldı. [14] Bu çalışmasında Krein kuantum statikinde ve kristal teoride fiziksel teoremler vasıtasıyla önceden elde edilen teoremleri matematiksel olarak ispatladı. İz formülleri diferensiyel denklemlerin spektral analizinin ters problemlerinde kullanıldı. Sunulan bu tezde Legendre polinomları ve Fourier-Bessel operatörleri için açılım teoremleri ispatlanmış ve regüler Sturm-Liouville operatörü için iz formülleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları bir $x - x_0 \leq a$ aralığında birinci türevlere sahip olsunlar. Bu durumda $W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$ ifadesine $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir. [22]

Tanım 2.2. (Hilbert uzayı) x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir cümle H olsun ve aşağıdaki aksiyomları sağlasın.

1. H lineer kompleks uzay olsun.

2. H nin her x, y ikili elemanına karşılık gelen $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ ($x_1, x_2 \in H$)

c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ (Her λ kompleks sayısı için)

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu durumda, 1- 4 şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert Uzayı, 1- 3 şartlarını sağlayan uzaya ise Üniter Hilbert uzayı denir. [20]

Tanım 2.3. (Lineer Operatör) H Hilbert uzayının herhangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir A operatörü için,

$$A: D \subseteq H \rightarrow H$$

dönüşümü verilsin. Eğer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümüne lineer operatör, D ye ise A operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(A)$ ile gösterilir. A operatörünün değer kümesi de $\text{Im}(A)$ veya $R(A)$ ile gösterilir. [23]

Tanım 2.4. H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için, her $x \in H$ olmak üzere;

$$\|Ax\| \leq C \|x\|$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir C sayısı varsa A ya sınırlı operatör denir. Bu C sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

eşitliği yardımı ile de normu hesaplayabiliriz. [23]

Tanım 2.5. (Eşlenik Operatör) H hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer bir operatör olmak üzere, A nın tanım kümesi $D(A)$, H kompleks Hilbert uzayında yoğun olsun. $f, g \in D(A)$ için,

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A nın adjoint (eşlenik) operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* in tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir.[23]

Eşlenik operatörü aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

(iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(iv) $(BA)^* = B^* A^*$

(v) $\|A^*\| = \|A\|$ (A sınırlı ise) [23]

Tanım 2.6. (Self-adjoint Operatör) Eğer $A^* = A$ ise, A ya self-adjoint (kendine eş) operatör denir. [23]

Tanım 2.7. $(L_2(a,b)$ uzayı) (a,b) aralığında karesi integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayına $L_2(a,b)$ uzayı denir.

$$L_2(a,b) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

Bu uzay reel ise iç çarpım:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ reel fonksiyonlarıdır. [23]

Tanım 2.8. (Özdeğer, özfonksiyon) L lineer bir operatör olsun. Bu durumda A operatörünün tanım kümesinde

$$Ay = \lambda y$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ vektörü varsa λ sayısına A operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir.

Tanım 2.9. (Rodrigues Formülü) Legendre polinomları için Rodrigues Formülü

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$$

şeklindedir.

Tanım 2.10. (Transandantal Denklem) Cebirsel işlemlerin yanı sıra değişkenlerinin logaritmik yada trigonometrik fonksiyonlarını da içeren denklemlere transandantal denklem adı verilir.

Tanım 2.11. $x \rightarrow \infty$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve $x \rightarrow \infty$ iken eğer

$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.12. (Matrisin İzi) Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki elemanların toplamıdır.

Teorem 2.1. (Rolle Teoremi) $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türetilebilir $y = f(x)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = 0$ koşulunu sağlasın. O halde (a,b) aralığında $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir x_0 noktası mevcuttur.

Teorem 2.2. (Weistrass M-Testi) x değerlerinin bir E cümlesi için tanımlanan tüm fonksiyonların serisi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $|u_n(x)| \leq M_n$ olacak şekilde

yakınsak bir $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ serisi varsa o halde $\forall x \in E$ için , E 'de mutlak ve düzgün yakınsak $u_n(x)$ serisi vardır.

Teorem 2.3. (Leibnitz Formülü) Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu

$\{(x, t): a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq x \leq d$ için

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

eşitliği geçerlidir.

Bu teoremin sonucu olarak; $a(t)$ ve $b(t)$; (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t)$$

olur.

Teorem 2.4. (Rouche Teoremi) Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları kapalı bir C eğrisi üzerinde ve içinde analitik ve $|g(x)| < |f(x)|$ ise $f(x) + g(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonları C üzerinde aynı sayıda köke sahiptir. [6]

Teorem 2.5. (Hadamard Teoremi) $f(z)$ sonlu ρ mertebeli tam fonksiyon , a_n 'ler $f(z)$ 'in sıfırdan farklı kökleri , $P(z)$ derecesi ρ 'yu aşmayan q dereceli polinom , $P \leq \rho$ ve m orjinde sıfırın katları olmak üzere;

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; \rho\right)$$

şeklinde gösterilir.[16]

Teorem 2.7. (Açılım Teoremi) $f(x)$ sürekli bir fonksiyon $v_n(x)$ Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları olmak üzere;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x) \quad \left(a_n = \int_0^b f(x) v_n(x) dx \right)$$

serisi $[0, b]$ aralığında düzgün yakınsaksa $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)$$

şeklinde açılıma sahiptir.

Teorem 2.8. (Parseval Eşitliği) $[0, \pi]$ aralığında karesi integrallenebilen her $f(x)$ fonksiyonu için

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

olmak üzere

$$\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

Parseval eşitliği geçerlidir.

3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

L , $y = y(x)$ fonksiyonu üzerinde işleyen bir lineer operatör olsun. λ bir sayı olmak üzere;

$$Ly = \lambda y \quad (3.1)$$

denklemini inceleyelim. Bu denklemi ve belirli sınır şartlarını sağlayan yani $x = a$ ve $x = b$ 'de sıfırlanan fonksiyon özfonksiyon olarak adlandırılır. λ 'ya karşılık gelen değer özdeğer olarak adlandırılır. Böylece $\Psi_n(x)$, λ_n özdeğerine karşılık bir özfonksiyon ise

$$L\Psi_n(x) = \lambda_n \Psi_n(x) \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanır. Bu bölümde amacımız;

$$L \equiv q(x) - \frac{d^2}{dx^2} \quad (3.3)$$

Sturm-Liouville operatörünü incelemektir. Burada $q(x)$, (a, b) aralığı üzerinde tanımlanmış x 'in bir fonksiyonudur. Bu durumda y

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \quad (3.4)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemini sağlar ve $\Psi_n(x)$;

$$\Psi_n''(x) + \{\lambda - q(x)\} \Psi_n(x) = 0 \quad (3.5)$$

denklemini sağlar. Eğer burada n yerine m 'yi denklemde yazarsak ve sırasıyla denklemleri $\Psi_m(x)$ ve $\Psi_n(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \Psi_m(x) \Psi_n(x) &= \Psi_m(x) \Psi_n''(x) - \Psi_n(x) \Psi_m''(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \Psi_m(x) \Psi_n'(x) - \Psi_n(x) \Psi_m'(x) \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $\Psi_m(x)$ ve $\Psi_n(x)$ $x=a$ ve $x=b$ 'de sıfırlanırsa, böylece her iki tarafı a 'dan b 'ye integralleyerek,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \left[\Psi_m(x) \Psi_n'(x) - \Psi_n(x) \Psi_m'(x) \right]_a^b$$

elde ederiz.

Eğer $\lambda_n \neq \lambda_m$ ise,

$$\int_a^b \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = 0 \quad (3.6)$$

elde ederiz. Gerekirse bir sabitle çarparak ve düzenleyerek;

$$\int_a^b \Psi_n^2(x) dx = 1 \quad (3.7)$$

elde ederiz. O halde $\Psi_n(x)$ fonksiyonları ortonormal cümle oluşturur.

Esas problemimiz keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunun hangi şartlar altında adi Fourier serisi tarzında fonksiyonlara genişletebilmeyi belirlemektir. Eğer bu mümkünse açılım:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(x) \quad (3.8)$$

şeklindedir. $\Psi_m(x)$ ile çarparak ve (a, b) aralığında integralleyerek;

$$c_m = \int_a^b f(x) \Psi_m(x) dx \quad (3.9)$$

elde ederiz. Bazı durumlarda özdeğerler ayırık noktalar değildir fakat sürekli bir aralık oluştururlar, buna $(0, \infty)$ aralığını örnek verebiliriz. O halde açılım:

$$f(x) = \int_0^{\infty} c(\lambda) \Psi(\lambda) d\lambda \quad (3.10)$$

şeklini alır. Bunların hepsi adi Fourier serisinin en basit gösterimidir. $q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim ve $(0, \pi)$ aralığını inceleyelim. $x=0$ 'da sıfırlanan (3.4)'ün çözümü $y = \sin(x\sqrt{\lambda})$ olur. Bu çözüm $x=\pi$ 'de sıfırlanır ancak ve ancak n bir tamsayı olmak üzere $\lambda = n^2$ şeklindedir. O halde bunlar özdeğerlerdir ve karşılık gelen özfonksiyonlar $\sin nx$ ' lerdir. Keyfi bir fonksiyonun bu fonksiyonlar cinsinden Fourier sinüs serisi açılımı yapılabilir.

3.1. Sturm-Liouville Operatörü İçin Sınır-Değer Problemi

x 'in reel fonksiyonu olan $q(x)$ 'in incelenen (a,b) aralığının tüm iç noktalarında sürekli olduğunu kabul edelim. Klasik Sturm-Liouville durumunda (a,b) sonlu aralıktır ve $q(x)$, $x \rightarrow a$ ve $x \rightarrow b$ iken sonlu limite sahiptir.

(3.4)'ün çözümünün varlığı hakkındaki genel teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1. $q(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\phi(a) = \sin \alpha, \quad \phi'(a) = -\cos \alpha \quad (a \leq x \leq b)$$

başlangıç şartları sağlanırsa o halde (3.4) denkleminin $(a \leq x \leq b)$ aralığında her α için bir tek $\phi(x)$ çözümü vardır. Her $x \in [a,b]$ için $\phi(x)$, λ 'nın tam fonksiyonudur.

İspat: $\phi_0(x) = \sin \alpha - (x-a)\cos \alpha$ olsun ve $n=1,2,\dots$ için

$$\phi_n(x) = \phi_0(x) + \int_0^x \{q(t) - \lambda\} \phi_{n-1}(t)(x-t) dt$$

olsun. $a \leq x \leq b$ için, $q(x)$ sürekli olduğundan $|q(x)| \leq M$ olur. $a \leq x \leq b$ için

$|\phi_0(x)| \leq K$ olur ve $|\lambda| \leq N$ olsun. O halde $n=1$ için,

$$\begin{aligned} \phi_1(x) - \phi_0(x) &\leq \int_a^x (q(t) - \lambda) \phi_0(t)(x-t) dt \\ |\phi_1(x) - \phi_0(x)| &\leq \int_a^x (M + N) K (x-t) dt = \frac{1}{2} (M + N) K (x-a)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. $n=2$ için,

$$\begin{aligned} \phi_2(x) - \phi_0(x) &\leq \int_a^x (q(t) - \lambda) \phi_1(t)(x-t) dt \\ \phi_1(x) - \phi_0(x) &\leq \int_a^x (q(t) - \lambda) \phi_0(t)(x-t) dt \end{aligned}$$

taraf tarafa çıkarırsak,

$$\phi_2(x) - \phi_1(x) \leq \int_a^x (q(t) - \lambda) (\phi_1(t) - \phi_0(t))(x-t) dt$$

$$\begin{aligned} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| &\leq \frac{(M+N)^2 K(b-a)}{2} \int_a^x (t-a)^2 dt \\ &= \frac{(M+N)^2 K(b-a)(x-a)^3}{3!} \end{aligned}$$

ve formülü genelleştirirsek, $n \geq 2$ için,

$$\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)\} (x-t) dt$$

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq (M+N)(b-a) \int_a^x |\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)| dt$$

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{(M+N)^n K(b-a)^{n-1} (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)\}$$

serisi $a \leq x \leq b$ aralığında x 'e göre düzgün ve $|\lambda| \leq N$ ise λ 'ya göre düzgün yakınsaktır.

$n \geq 2$ için,

$$\phi'_n(x) - \phi'_{n-1}(x) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)\} dt$$

$$\phi''_n(x) - \phi''_{n-1}(x) = \{q(x) - \lambda\} \{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)\}$$

elde ederiz. $\phi(x)$ serisini iki kez diferensiyelleyelim. Bu serinin birinci ve ikinci mertebeden diferensiyelleri de x 'e göre düzgün yakınsaktır. Böylece,

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\phi''_n(x) - \phi''_{n-1}(x)\} \\ &= \phi''_1(x) - \phi''_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)\} \\ &= \{q(x) - \lambda\} \left[\phi_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)\} \right] \\ &= \{q(x) - \lambda\} \phi(x) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da $\phi(x)$ 'in (3.4)'ü sağlaması demektir. Açık şekilde sınır şartlarını da sağlar.

$\phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonları;

$$\begin{aligned}\phi(a, \lambda) &= \sin \alpha & \phi'(a, \lambda) &= -\cos \alpha \\ \chi(b, \lambda) &= \sin \beta & \chi'(b, \lambda) &= -\cos \beta\end{aligned}\quad (3.11)$$

sınır koşullarını sağlayacak şekilde (3.4) denkleminin çözümleri olsunlar. O halde;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} W\{\phi, \chi\} &= \frac{d}{dx} \{\phi\chi' - \chi\phi'\} \\ &= \phi(x)\chi''(x) - \chi(x)\phi''(x) \\ &= \{q(x) - \lambda\}\phi(x)\chi(x) - \{q(x) - \lambda\}\chi(x)\phi(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde ederiz ki; bu $W\{\phi, \chi\}$ Wronskiye'nin x 'ten bağımsız olup sadece λ 'nın bir fonksiyonu olduğunu söyler. Böylece $W\{\phi, \chi\}$ 'i $\omega(\lambda)$ ile gösterelim. Yukarıdaki teoremden $\omega(\lambda)$ 'nın, λ 'nın bir integral fonksiyonu olduğu açıktır. Şimdi

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\chi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_a^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \frac{\phi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^b \chi(y, \lambda) f(y) dy \quad (3.12)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f(x)$ sürekli ise (3.12) denklemini bir defa diferensiyelleyerek $\Phi(x, \lambda)$

$$\Phi''(x) + \{\lambda - q(x)\}\Phi(x) = f(x) \quad (3.13)$$

denklemini sağlar. Ayrıca $\Phi(x, \lambda)$ tüm λ değerleri için,

$$\begin{aligned}\Phi(a, \lambda) \cos \alpha + \Phi'(a, \lambda) \sin \alpha &= 0 \\ \Phi(b, \lambda) \cos \beta + \Phi'(b, \lambda) \sin \beta &= 0\end{aligned}\quad (3.14)$$

sınır şartlarını da sağlar.

Reel eksen üzerinde $\omega(\lambda)$ 'nın $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ sıfırlarının sadece reel sıfırlar olduğunu kabul edelim. O halde $\chi(x, \lambda_n)$, $\phi(x, \lambda_n)$ 'nin bir sabitle çarpımı olduğundan $\chi(x, \lambda_n)$ ile $\phi(x, \lambda_n)$ 'nin Wronskiye'nin sıfırdır. Yani;

$$\chi(x, \lambda_n) = k_n \phi(x, \lambda_n) \quad (3.15)$$

şeklindedir. Buradan k_n 'nin sıfır veya sonsuz olmadığı sınır şartlarından anlaşılır. Böylece $\lambda = \lambda_n$ noktasında $\Phi(x, \lambda_n)$

$$\frac{k_n}{\omega'(\lambda_n)} \phi(x, \lambda_n) \int_a^b \phi(y, \lambda_n) f(y) dy$$

rezidüsüne sahiptir. Böylece yukarıdaki formülden faydalananarak; $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{\omega'(\lambda_n)} \phi(x, \lambda_n) \int_a^b \phi(y, \lambda_n) f(y) dy \quad (3.16)$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Bu bir Sturm-Liouville açılımıdır.

3.2. Klasik Fourier İntegrali

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (3.17)$$

Sturm- Liouville problemi için en basit örnek $q(x) \equiv 0$ 'a karşılık gelen klasik Fourier integrali durumudur. Eğer incelediğimiz aralık $[0, \infty)$ reel yarı eksense ve sıfırdaki sınır şartları

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \sin \alpha & \varphi'(0) &= -\cos \alpha \\ \theta(0) &= \cos \alpha & \theta'(0) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

ile verilirse, bu durumda özfonksiyonlar:

$$\begin{aligned} \theta(x, \lambda) &= \cos \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \\ \varphi(x, \lambda) &= \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\text{Im } \lambda > 0$ için, $e^{-i\sqrt{\lambda}x}, L^2(0, \infty)$ 'a ait olmadığından $\Psi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)$

fonksiyonu sadece sabit bir çarpan ile $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ 'ten farklıdır. Sonuç olarak,

$$m(\lambda) = \frac{\sin \alpha - i\sqrt{\lambda} \cos \alpha}{\cos \alpha + i\sqrt{\lambda} \sin \alpha} = \frac{1 - i\sqrt{\lambda} \text{ctg} \alpha}{\text{ctg} \alpha + i\sqrt{\lambda}}$$

şeklindedir. Eğer $\text{ctg} \alpha \leq 0$ ise $\lambda < 0$ için bu fonksiyonun paydası sıfır olmaz. Bu nedenle

$$-\text{Im } m(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha} & , \lambda > 0 \\ 0 & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (\text{ctg} \alpha < 0)$$

yazılır ve negatif bir spektrum olmadığından ters formüller

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_0^{\infty} f(x) \left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \right\} dx \\
f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \right\} \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklindedir. Eğer $\cot \alpha = h > 0$ ise $\lambda = -h^2$ için $m(\lambda)$ fonksiyonunun paydası sıfır olur.

Sonuçta bu durumda bir $\lambda = -h^2$ negatif özdeğeri vardır ve karşılık gelen

normalleştirilmiş özfonksiyon $\frac{e^{-hx}}{\sqrt{2h}}$ 'tır. Böylece (3.18) açılımının sağ tarafına

$$\frac{e^{-hx}}{2h} \int_0^{\infty} f(t) e^{-ht} dt$$

terimi eklenir ve açılım:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2h} e^{-hx} \int_0^{\infty} f(t) e^{-ht} dt + \\
&\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \left\{ \sin \alpha \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda^{-\frac{1}{2}} \cos \alpha \sin \sqrt{\lambda} x \right\} \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{\cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.18) ve (3.19) açılımları integrantın doğru bir incelenmesiyle fourier integralleri için genel varsayımlar altında sağlanır.

$q(x) \equiv 0$ durumu için, (3.19) eşitliği $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$ formülünden de

elde edilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda) &= \sin \alpha & \nu(\lambda) &= -\cos \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \\
\rho'(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda} (\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda))} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi (\cos^2 \alpha + \lambda \sin^2 \alpha)}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4. FOURIER – BESSEL SERİSİNE AÇILIM

$[0, b]$ aralığında λ, x ve p reel sayılar olmak üzere,

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + \left(\lambda x - \frac{p^2}{x} \right) z = 0 \quad (4.1)$$

Bessel denklemini göz önüne alalım. $y = \sqrt{x}z$ dönüşümüyle (4.1) denklemini

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\lambda - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) y = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde yazalım. $J_p(t)$ birinci çeşit Bessel fonksiyonu ve

$Y_p(t) = \frac{J_p(t) \cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin p\pi}$ ikinci çeşit Bessel fonksiyonu olmak üzere, bu denklemin

lineer bağımsız çözümleri:

$$y_1(x, \lambda) = \sqrt{x} J_p(sx), \quad y_2(x, \lambda) = \sqrt{x} Y_p(sx) \quad \{\sqrt{\lambda} = s\}$$

şeklindedir. Bessel fonksiyonlarının kuvvet serilerine bilinen açılımlarından $x \rightarrow 0$ iken çözümler

$$y_1 = O\left(x^{p+\frac{1}{2}}\right); \quad y_2 = O\left(x^{-p+\frac{1}{2}}\right)$$

şeklindedir. [29]

$p \geq 1$ için, bu değerlerden sadece y_1 'in sıfırın bir komşuluğunda karesi integrallenebilir olduğu elde edilir. Diğer taraftan eğer $0 \leq p < 1$ ise her iki çözüm karesi integrallenebilirdir.

α ve β keyfi reel sayılar ve $0 < a < b$ olsun. (4.2) denklemini

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0 \quad (4.3)$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0 \quad (4.4)$$

sınır koşulları ile ele alalım. $[a, b]$ aralığında (4.2) denkleminin tekil noktaları olmadığı için (4.3) ve (4.4) sınır koşulları ile birlikte regüler bir Sturm-Liouville problemini tanımlar. Bu sebeple klasik Sturm-Liouville teorisi uygulanabilir.

(4.2),(4.3),(4.4) probleminin özdeğerlerini $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ile; bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları ise $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots (\varphi_i(x) = \varphi(x, \lambda_i))$ ile gösterelim. Kökleri λ_n sayıları olan transandantal denklemi elde etmek için, (4.4) sınır koşullarını sağlayan (4.2) denkleminin çözümünü bulalım. Bu çözümün görüntüsü

$$C = -\frac{y_2(b, \lambda) \operatorname{ctg} \beta + y_2'(b, \lambda)}{y_1(b, \lambda) \operatorname{ctg} \beta + y_1'(b, \lambda)} \quad (4.5)$$

olmak üzere

$$y(x, \lambda) = Cy_1(x, \lambda) + y_2(x, \lambda)$$

fonksiyonudur. Böylece λ_n özdeğerleri

$$y(a, \lambda) \cos \alpha + y'(a, \lambda) \sin \alpha = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemi

$$C \{y_1(a, \lambda) \operatorname{ctg} \alpha + y_1'(a, \lambda)\} + \{y_2(a, \lambda) \operatorname{ctg} \alpha + y_2'(a, \lambda)\} = 0 \quad (4.6)$$

şeklinde yazmak mümkündür. $x \rightarrow 0$ iken, $y_2(x, \lambda) \rightarrow \infty$ ve $y_1(x, \lambda) \rightarrow 0$ olduğundan, her sabit λ için $a \rightarrow 0$ iken $[a, b]$ aralığında $y(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı sınırlı sayıda olur.

Buradan (4.2) denkleminin ve (4.4) sınır koşulunun $(0, b]$ aralığında sonsuzlukta sadece bir tek limit noktası olan özdeğerlerinden oluşan diskret spektrumu tanımladığı elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların karesi integrallenebilir olmalıdır. Bu durumda sadece $y_1(x, \lambda) = \sqrt{x} J_p(\sqrt{\lambda} x)$ karesi integrallenebilir olduğundan, $p \geq 1$ durumunda $[0, b]$ aralığındaki özdeğerleri belirlemek için (4.4) sınır koşulunda $y(x, \lambda)$ yerine $\sqrt{x} J_p(\sqrt{\lambda} x)$ fonksiyonunu ele almak gerekiyor, dolayısıyla

$$J_p(sb) \left\{ \sqrt{b} \cos \beta + \frac{1}{2\sqrt{b}} \sin \beta \right\} + \sqrt{b} J_p'(sb) \sin \beta = 0 \quad (4.7)$$

transandantal denklemi elde ederiz.

Eğer $\sin \beta = 0$ ise,

$$J_p(sb) = 0 \quad (4.8)$$

daha basit transandantal denklemi elde ederiz. Şimdi en son durumda s_n ile özdeğerleri gösterelim. Yani (4.8) denkleminin kökleri s_n olsun. Şimdi $y(x, \lambda)$ $[0, b]$ aralığında karesi integrallenebilir olduğundan [29]

$$\int_0^b x J_p^2(sx) dx = \frac{b^2}{2} \left\{ \left[J_p'(sb) \right]^2 + \left(1 - \frac{p^2}{s^2 b^2} \right) \left[J_p(sb) \right]^2 \right\}$$

yazılır. Burada $s = s_n$ olarak

$$\int_0^b x J_p^2(s_n x) dx = \frac{b^2}{2} \left[J_p'(s_n b) \right]^2$$

elde ederiz. Böylece normalleştirilmiş özfonksiyonların görüntüsü

$$\frac{\sqrt{2x} J_p(s_n x)}{b J_p'(s_n b)}$$

şeklindedir ve bir Fourier –Bessel serisine açılımın görüntüsü ise;

$$f(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} J_p(s_n x)}{J_p'^2(s_n b)} \int_0^b t^{\frac{1}{2}} J_p(s_n t) f(t) dt \quad (4.9)$$

şeklindedir.

$p < 1$ için, (4.2) denkleminin çözümlerinin tamamının karesi integrallenebilirdir. Bu durumda karesi integrallenebilirlik şartı (4.3) sınır şartı ile yer değiştiremez. (4.3)'te a ile α 'nın uygun bir değişimi ile gerekli sınır şartını elde etmek mümkündür.

(4.2) denklemi birinci mertebeden türev içermediğinden $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ 'nin Wronski determinantı sabittir; yani

$$\begin{aligned} W\{y_1, y_2\} &= y_1(x, \lambda) y_2'(x, \lambda) - y_2(x, \lambda) y_1'(x, \lambda) \\ &= \sqrt{x} J_p(sx) \left\{ \sqrt{x} Y_p(sx) \right\}' - \sqrt{x} Y_p(sx) \left\{ \sqrt{x} J_p(sx) \right\}' \\ &= sx \left\{ J_p(sx) Y_p'(sx) - Y_p(sx) J_p'(sx) \right\} \end{aligned}$$

Sonuç olarak $W\{y_1, y_2\}$ 'i tam olarak hesaplamak için büyük argüman durumunda Bessel fonksiyonları için bilinen asimptotik formüllerden faydalanalım [29-7.21]:

$$J_p(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(t - \frac{1}{2}p\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right] \quad (4.10)$$

$$Y_p(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(t - \frac{1}{2}p\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

$$J_p'(t) = -\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(t - \frac{1}{2}p\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right] \quad (4.10')$$

$$Y_p'(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(t - \frac{1}{2}p\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

Bu ifadeleri $W\{y_1, y_2\}$ formülünde yerine yazarsak ve daha sonra $x \rightarrow \infty$ iken limit olarak, $W\{y_1, y_2\} = \frac{2}{\pi}$ elde ederiz. $\beta = \frac{\pi}{2}$ yani $y'(b) = 0$ olsun. Genelliği bozmadan $y(b) = 1$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \frac{1}{W\{y_1, y_2\}} \left\{ y_1(x, \lambda) y_2'(b, \lambda) - y_2(x, \lambda) y_1'(b, \lambda) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} s \sqrt{bx} \left\{ J_p(sx) Y_p'(sb) - Y_p(sx) J_p'(sb) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Böylece λ_n özdeğerleri $y(a, \lambda) \operatorname{ctg} \alpha + y'(a, \lambda) = 0$ denkleminde belirlenir. İlk olarak $0 < p < 1$ durumunu göz önüne alalım.

$$Y_p(t) = \left\{ J_p(t) \cos p\pi - J_{-p}(t) \right\} \operatorname{cosec} p\pi$$

olduğundan (4.11)'den

$$y(x, \lambda) = -\frac{\pi s x^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{2 \sin p\pi} \left\{ J_p(xs) J_{-p}'(bs) - J_{-p}(xs) J_p'(bs) \right\} \quad (4.11')$$

olur. Sabit s için, $x \rightarrow 0$ iken

$$J_p(xs) = \frac{(xs)^p}{2^p \Gamma(1+p)} + O(x^{p+2}) \quad J_p'(xs) = \frac{p x^{p-1} s^p}{2^p \Gamma(1+p)} + O(x^{p+1})$$

şeklindedir.

Böylece,

$$\begin{aligned}
y(a, \lambda) \operatorname{ctg} \alpha + y'(a, \lambda) = & \\
& -\frac{\pi b^{\frac{1}{2}} s}{2 \sin p \pi} \left\{ \frac{s^p J'_{-p}(bs)}{2^p \Gamma(1+p)} \left[a^{\frac{1}{2}+p} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{2} + p \right) a^{\frac{-1}{2}+p} \right] \right. \\
& - \frac{s^{-p} J'_p(bs)}{2^{-p} \Gamma(1-p)} \left[a^{\frac{1}{2}-p} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{2} - p \right) a^{\frac{-1}{2}-p} \right] \\
& \left. + O\left(a^{\frac{5}{2}-p} |\operatorname{ctg} \alpha| \right) + O\left(a^{\frac{3}{2}-p} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. Şimdi (4.12)'yi düzenleyelim. c keyfi bir sabit ve α denklemi sağlamak üzere,

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-p} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{2} - p \right) a^{\frac{-1}{2}-p}}{2^{-p} \Gamma(1-p)} = c \frac{a^{\frac{1}{2}+p} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{2} + p \right) a^{\frac{-1}{2}+p}}{2^p \Gamma(1+p)} \tag{4.13}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2^p \Gamma(1+p) \left(\frac{1}{2} - p \right) a^{\frac{1}{2}-p} - c 2^{-p} \Gamma(1-p) \left(\frac{1}{2} + p \right) a^{\frac{-1}{2}+p}}{c 2^{-p} \Gamma(1-p) a^{\frac{1}{2}+p} - 2^p \Gamma(1+p) a^{\frac{1}{2}-p}} = O\left(\frac{1}{a} \right)$$

elde edilir. Böylece,

$$a^{\frac{1}{2}+p} \operatorname{ctg} \alpha + \left(\frac{1}{2} + p \right) a^{\frac{-1}{2}+p} = \frac{-2^{p+1} p \Gamma(1+p)}{c 2^{-p} \Gamma(1-p) a^{\frac{1}{2}+p} - 2^p \Gamma(1+p) a^{\frac{1}{2}-p}} \approx a^{p-\frac{1}{2}}$$

yazabiliriz ve sonuç olarak eğer $\frac{3}{2} - p > p - \frac{1}{2}$ ise; yani $p < 1$ ise (4.12)'deki O 'lu terimi

ihmal edebiliriz. (4.12) ve (4.13) denklemlerinden (4.3) sınır şartının yerini alacak şekilde bir denklem

$$s^p J'_{-p}(bs) - c s^{-p} J'_p(bs) = 0$$

veya

$$\lambda^p J'_{-p}(bs) - c J'_p(bs) = 0 \tag{4.14}$$

bulunur.

s_n ile (4.14) denkleminin köklerini gösterelim. s_n sayıları (4.4) ve (4.14) sınır şartlarıyla

$\beta = \frac{\pi}{2}$ için verilen (4.2) denkleminin özdeğerleridir. (4.11') 'de s yerine s_n alarak bunlara

karşılık gelen $y_n(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{2 \sin p\pi} \left\{ J_p(xs_n) J_{-p}'(bs_n) - J_{-p}(xs_n) J_p'(bs_n) \right\} \\ &= \frac{\pi x^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} s_n}{2 \sin p\pi} J_p'(bs_n) \left\{ c \lambda_n^{-p} J_p(xs_n) - J_{-p}(xs_n) \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Eğer $c = \infty$ ise p . mertebeden adi Fourier-Bessel seri açılımını, eğer $c=0$ olacak biçimde ise $-p$. mertebeden adi Fourier-Bessel seri açılımını elde ederiz.

$p=0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Y_0(xs) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{1}{2} xs \right) \left\{ 1 + O(x^2) \right\} \\ Y_0'(xs) &= \frac{2}{\pi xs} + O(x |\ln x|) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada γ Euler sabitidir. Böylece,

$$y(a, \lambda) \operatorname{ctg} \alpha + y'(a, \lambda) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi b^{\frac{1}{2}} s}{2} \left\{ \left[Y_0'(bs) - J_0'(bs) \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{as}{2} \right) \right] \times \left(a^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{2a^{\frac{1}{2}}} J_0'(bs) + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\operatorname{ctg} \alpha| \right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a| \right) \right\} \\ &= \frac{\pi b^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}}{2} \left\{ \left[J_0'(bs) - \frac{2}{\pi} J_0'(bs) \ln s \right] \left(a^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ & \quad \left. - J_0'(bs) \left[\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{\pi a^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} \\ & \quad + O\left(a^{\frac{5}{2}} |\ln a| |\operatorname{ctg} \alpha| \right) + O\left(a^{\frac{3}{2}} |\ln a| \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{a}{2} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{2}{\pi a^{\frac{1}{2}}} = c \left(a^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \right)$$

olarak ve takip eden benzer hesaplamaları yaparak özdeğerlerin belirlenmesi için aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$cJ_0'(bs) - \left\{ Y_0'(bs) - J_0'(bs) \frac{2}{\pi} \ln s \right\} = 0$$

$c = \infty$ için adi Fourier-Bessel seri açılımını elde ederiz. $\beta = 0$ için açılım benzer şekilde incelenir ve özdeğerlerin belirlenmesi için aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$c\lambda^{-p} J_p(bs) - J_{-p}(bs) = 0 \quad (p > 0)$$

$$cJ_0(bs) - \left\{ Y_0(bs) - J_0(bs) \frac{2}{\pi} \ln s \right\} = 0$$

Bilinen metodları kullanarak farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olduğu gösterilebilir. Dahası $[0, b]$ aralığında karesi integrallenebilir her $f(x)$ fonksiyonu için Parseval eşitliği sağlanır. Gerçekten $x=0$ için (4.9) serisinin terimleri sıfıra eşit olurlar. Eğer $f(0) \neq 0$ ise, $x=0$ için (4.3) serisinin toplamı sıfır olduğu için $f(0)$ 'a eşit olamaz. Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel serisi düzgün yakınsaksa, o halde $x>0$ için onun toplamının $f(x)$ 'e eşit olması Parseval eşitliğinden elde edilir.[16] Fourier-Bessel serilerinde düzgün mutlak yakınsaklık için bir teorem verelim. Bunun için adi Fourier-Bessel seri açılımını inceleyelim.

Teorem 4.1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, $f(x)$ 'in Fourier-Bessel serisi mutlak ve düzgün şekilde yakınsar:

- (1) $f(x)$ fonksiyonu $[0, b]$ aralığında sürekli ikinci mertebeden türeve sahiptir.
- (2) $f(b) = 0$
- (3) $f(0) = f'(0) = 0$

İspat

$$\alpha_n^2 = \int_0^b t J_p^2(ts_n) dt$$

olmak üzere;

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1}{2}} J_p(xs_n) \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^b t^{\frac{1}{2}} J_p(ts_n) f(t) dt \quad (4.16)$$

olsun. (4.10) asimptotik formülünden,

$$\alpha_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^b \cos^2 \left(s_n t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) = O(1)$$

elde ederiz. (4.2) eşitliği ile verilen Bessel denkleminde faydalanarak

$$\sqrt{t} J_p(ts_n) = -\frac{1}{\lambda_n} \left[\left[\sqrt{t} J_p(ts_n) \right]'' - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \left[\sqrt{t} J_p(ts_n) \right] \right]$$

yazılır. Şimdi (4.16)'da integral terimini inceleyerek

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^b \sqrt{t} J_p(ts_n) f(t) dt \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^b \left\{ \left[\sqrt{t} J_p(ts_n) \right]'' - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \left[\sqrt{t} J_p(ts_n) \right] \right\} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^b \left[\sqrt{t} J_p(ts_n) \right] \left\{ f''(t) - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{t^2} f(t) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Teoremde (2) ve (3) şartlarından integral terimleri yok olur. Ayrıca (3)

şartından $\frac{f(t)}{t^2}$ fonksiyonunun sınırlılığı da elde edilir. Bu nedenle (4.17)'den

$$a_n = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \quad (4.18)$$

bulunur. (4.10) asimptotik formüllerinden $n \rightarrow \infty$ iken, $\lambda_n = O(n^2)$ şeklinde yazabiliriz.

Böylece (4.18)'den (4.16) Fourier-Bessel serisinin mutlak ve düzgün yakınsadığı anlaşılır, teorem ispatlanır.

(4.10) asimptotik formüllerini kullanarak, klasik Sturm-Liouville problemi için Fourier-Bessel serisinin adi Fourier kosinüs serisinde olduğu gibi tüm $x > 0$ 'lar için aynı şartlar altında mutlak ve düzgün yakınsadığını görülür.

4.1. Fourier-Hankel İntegraline Açılım

Bu kısımda $(0, \infty)$ aralığında (4.2) denkleminin özfonksiyonlarına göre seriye açılımını inceleyeceğiz. $(0, \infty)$ aralığındaki bir özfonksiyon açılımı $b \rightarrow \infty$ iken sınırlı $[0, b]$ aralığındaki bir açılımdan elde edilebilir. İlk olarak $p \geq 1$ durumunu inceleyelim. (4.4) sınır koşulunda $\beta = \frac{\pi}{2}$ olsun. $J_p(x)$ ve $J_p'(x)$ Bessel fonksiyonları için asimptotik formülleri kullanarak s_n , $J_p(bs) = 0$ denkleminin n. kökü olmak üzere (4.10) ve (4.10') asimptotik formüllerinden,

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right)$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty s F(s) \sqrt{x} J_p(sx) ds \\ F(s) &= \int_0^\infty f(x) \sqrt{x} J_p(sx) dx \end{aligned} \quad (4.19)$$

Fourier –Hankel dönüşüm formüllerini ve

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_0^\infty s F^2(s) ds \quad (4.20)$$

Parseval formülünü elde edebiliriz.[19]

$0 < p < 1$ durumunu inceleyelim. Önceki bölümde gösterildiği gibi bu durumda $[0, b]$ sonlu aralığı için özdeğerler, c keyfi reel sabit olmak üzere;

$$\lambda^p J_{-p}'(bs) - c J_p'(bs) = 0 \quad (4.21)$$

denkleminden belirlenir. λ_1 ve λ_2 (4.21) denkleminin ardışık iki pozitif kökü olsun. (4.10) ve (4.10') asimptotik formüllerinden $b \rightarrow \infty$ için,

$$\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right) \quad (4.22)$$

şeklindedir. (4.15)'ten ve sınır değer probleminin homojenliğinden,

$$\Psi_n(x) = cJ_p(s_n x) - \lambda_n^p J_{-p}(s_n x) = 0$$

fonksiyonlarının da özfonksiyonlar olduğu görülür. $[0, \infty)$ aralığında ele alınan sınır değer probleminin spektrumunu belirlemek için

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \Psi_n^2(x) dx$$

limitini hesaplamak gerekiyor. (4.10) asimptotik formülünden, her sabit $\lambda > 0$ ve büyük x 'ler için,

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ c \cos\left(s_n x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi\right) - \lambda_n^p \cos\left(s_n x + \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ c \cos\left(s_n x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi\right) - \lambda_n^p \cos\left(s_n x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi + p\pi\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ (c - \lambda_n^p \cos p\pi) \cos\left(s_n x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi\right) - \lambda_n^p \sin\left(s_n x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{1}{4} \pi\right) \sin p\pi + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b \Psi_n^2(x) dx &= \frac{1}{\pi} s_n^{-1} \left\{ (c - \lambda_n^p \cos p\pi)^2 + \lambda_n^{2p} \sin^2 p\pi \right\} \\ &= \frac{1}{\pi s_n} (c^2 - 2c\lambda_n^p \cos p\pi + \lambda_n^{2p}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu için formülü benzer olan bu durum için de yazabiliriz. Yani

$$\Delta \rho_b(\lambda) = \sum_{s < s_n < s+1} \frac{1}{\int_0^b \Psi_n^2(x) dx}$$

koyarak (4.22)'den

$$\begin{aligned}
\Delta\rho_b(\lambda) &= \sum_{s < s_n < s+\Delta} \frac{s_{n+1} - s_n}{\left\{ \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right) \right\} \int_0^b \Psi_n^2(x) dx} \\
&= \sum_{s < s_n < s+\Delta} \left\{ \frac{s_n}{c^2 - 2c\lambda_n^p \cos p\pi + \lambda_n^{2p}} + O(1) \right\} (s_{n+1} - s_n) \\
&\rightarrow \int_s^{s+\Delta} \frac{s ds}{c^2 - 2cs^{2p} \cos p\pi + s^{4p}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\lambda > 0$ için spektrum süreklidir. Eğer negatif spektrum yoksa açılım formülü

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \{cJ_p(xs) - s^{2p}J_{-p}(xs)\}}{c^2 - 2cs^{2p} \cos p\pi - s^{4p}} \quad (4.23)$$

şeklindedir. Şimdi c 'nin hangi değerleri için negatif bir spektrumun mevcut olduğunu inceleyelim. $\lambda < 0$, $\sqrt{\lambda} = i\sigma$ ($\sigma > 0$) olsun. (4.21) denkleminde,

$$(-1)^p \sigma^{2p} J_{-p}'(bi\sigma) - cJ_p'(bi\sigma) = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir. Bilindiği gibi

$$I_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}$$

olmak üzere;

$$J_p(iz) = e^{\frac{1}{2}p\pi i} I_p(z) \quad (4.25)$$

şeklindedir. [29] (4.25)'i diferensiyelleyerek,

$$J_p'(iz) = e^{\frac{1}{2}(p\pi-1)i} I_p'(z)$$

elde ederiz. Böylece (4.24) denkleminde,

$$e^{p\pi i} \sigma^{2p} e^{\frac{1}{2}(-p\pi-1)i} I_{-p}'(b\sigma) - c e^{\frac{1}{2}(p\pi-1)i} I_p'(b\sigma) = 0$$

veya

$$\sigma^{2p} I_{-p}'(b\sigma) - c I_p'(b\sigma) = 0$$

elde edilir. Yani

$$\frac{I_p'(b\sigma)}{I_{-p}'(b\sigma)} = \frac{\sigma^{2p}}{c} \quad (4.26)$$

sonucuna ulaşırız.

Sadece imajiner argümanlı Bessel fonksiyonu için asimptotik formülleri göz önüne alırsak, $b \rightarrow \infty$ iken (4.26)'nın sol tarafının 1'e gittiği anlaşılır.[29] Böylece $c < 0$ ise o halde yeterince büyük b'ler için (4.26) denkleminin çözümü yoktur. Dolayısıyla bu durumda negatif spektrum yoktur ve açılım formülü (4.23) şeklinde yazılır.

$c > 0$ için $\sigma = c^{\frac{1}{2p}}$ şeklinde sadece bir negatif özdeğer elde ettik. Buna karşılık gelen özfonksiyonu belirleyelim. $\sqrt{\lambda} = ic^{\frac{1}{2p}}$ olduğundan (4.11)'den

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) &= \sqrt{x} \left\{ J_p \left(xic^{\frac{1}{2p}} \right) - i^{2p} c J_{-p} \left(xic^{\frac{1}{2p}} \right) \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \sin p\pi \sqrt{x} K_p \left(xc^{\frac{1}{2p}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olduğu anlaşılır. $-\frac{2c}{\pi} \sin p\pi$ çarpanı atılabilir ve $\sqrt{x} K_p \left(xc^{\frac{1}{2p}} \right)$ özfonksiyonunu

elde ederiz. Bu fonksiyonu normalleştirmek için Bessel fonksiyonlar teorisinde iyi bilinen aşağıdaki formülünü kullanacağız [28]:

$$\int_0^\infty x K_p^2 \left(xc^{\frac{1}{2p}} \right) dx = \frac{1}{c^p} \int_0^\infty t K_p^2(t) dt = \frac{p}{2c^p} \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Böylece $c > 0$ durumu için (4.23)'ün sağ tarafına

$$\frac{2c^p \sin p\pi}{p\pi} \sqrt{x} K_p \left(xc^{\frac{1}{2p}} \right) \int_0^\infty \sqrt{t} K_p \left(tc^{\frac{1}{2p}} \right) f(t) dt$$

terimini eklemek gereklidir. Benzer hesaplamalar $p = 0$ durumu için yapılabilir.

Böylece,

$$\begin{aligned}
f(x) = & \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \left\{ cJ_0(xs) - Y_0(xs) + \frac{2}{\pi} J_0(xs) \ln s \right\}}{\left\{ c + \frac{2}{\pi} \ln s \right\}^2 + 1} s ds \\
& \times \int_0^{\infty} \sqrt{t} \left\{ cJ_0(ts) - Y_0(ts) + \frac{2}{\pi} J_0(ts) \ln s \right\} f(t) dt \\
& + 2\sqrt{x} K_0 \left(x e^{-\frac{1}{2}\pi c} \right) \int_0^{\infty} \sqrt{t} K_0 \left(t e^{-\frac{1}{2}\pi c} \right) f(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda spektrum herhangi $c < \infty$ için negatif bir değer içerir. $c = \infty$ için integrale eklenen terim çıkarılır ve sıfıncı mertebeden Bessel fonksiyonuna göre Fourier-Hankel integraline adi açılım elde edilir. (4.20)'den genelleştirilmiş Parseval eşitliği kolayca elde edilir.

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_0^{\infty} s F(s) G(s) ds \quad (4.27)$$

Burada $F(s)$ 'in $f(x)$ ile tanımlanmasına benzer şekilde $G(s)$ 'de $g(x)$ ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem (4.27) genelleştirilmiş Parseval eşitliğinden elde edilebilir. [19]

Teorem 4.2. Eğer tüm $x > 0$ 'lar için , $f(x)$ sürekli ise ve

$$\int_0^{\infty} s F(s) \sqrt{x} J_p(sx) ds \quad (4.28)$$

integrali her sonlu aralıkta düzgün yakınsaksa o halde;

$$f(x) = \int_0^{\infty} s F(s) \sqrt{x} J_p(sx) ds \quad (4.29)$$

şeklindedir. Teorem 4.1'in ispatlandığı benzer yolla aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.3. Tüm $x > 0$ 'lar için eğer,

- (1) $f(x)$ fonksiyonu sürekli ikinci mertebeden türeve sahip,
- (2) $f(0) = f'(0) = 0$
- (3) $f(\infty) = 0$ ve $f(x), f'(x), f''(x) \in L(0, \infty)$

ise, (4.28) integrali tüm $x > 0$ 'lar için düzgün ve mutlak yakınsar. Böylece (4.29) açılımı geçerlidir.

Bilindiği gibi pek çok diferensiyel denklem uygun değişkenlerin değişimi ile Bessel denklemine indirgenebilir.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (4.30)$$

denklemini inceleyelim. Bu denklem ilk olarak Euler tarafından incelenmiştir. Eğer $z = x^{p+\frac{1}{2}} y$ şeklinde alırsak;

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\lambda - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) z = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri; $\sqrt{x} J_p(\sqrt{\lambda x}), \sqrt{x} Y_p(\sqrt{\lambda x})$ fonksiyonlarıdır. Bu nedenle (4.30) denklemi;

$$\frac{J_p(\sqrt{\lambda x})}{(\sqrt{\lambda x})^p}, \frac{Y_p(\sqrt{\lambda x})}{(\sqrt{\lambda x})^p}$$

çözümlerine sahiptir. Şimdi

$$\begin{aligned} j_p(\sqrt{\lambda x}) &= \frac{2^p \Gamma(p+1) J_p(\sqrt{\lambda x})}{(\sqrt{\lambda x})^p} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+k)!} \lambda^k \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \end{aligned}$$

şeklinde alalım. $j_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonunun $j_p(0)=1$ $j_p'(0)=0$ başlangıç şartlarını sağlar. $j_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonuna göre Fourier –Hankel integral açılım formüllerini yazalım. Bu amaçla öncelikle adi Fourier-Hankel dönüşüm formüllerini yazalım.

$$f(x) = \int_0^{\infty} sF(s) \sqrt{x} J_p(sx) ds$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \sqrt{x} J_p(sx) dx$$

şeklindedir. $f(x) = x^{p+\frac{1}{2}} g(x)$ olsun. O halde,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \sqrt{x} J_p(sx) dx$$

$$= \frac{s^p}{2^p \Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} g(x) x^{2p+1} j_p(sx) dx$$

$$= \frac{s^p}{2^p \Gamma(p+1)} I(s)$$

elde ederiz. Böylece,

$$g(x) x^{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} sF(s) \sqrt{x} (sx)^p j_p(sx) ds$$

$$= \frac{1}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)} \int_0^{\infty} I(s) s^{2p+1} x^{p+\frac{1}{2}} j_p(sx) ds$$

$$= \frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)} \int_0^{\infty} I(s) s^{2p+1} j_p(sx) ds$$

olur ve $j_p(sx)$ fonksiyonlarına göre açılım,

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} g(x) x^{2p+1} j_p(sx) dx$$

$$g(x) = \frac{1}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)} \int_0^{\infty} \Phi(s) s^{2p+1} j_p(sx) ds$$

şeklindedir.

5. LEGENDRE POLİNOMLARI VE BAĞLAYICI LEGENDRE FONKSİYONLARINA GÖRE AÇILIM

5.1. Legendre Denklemi, Polinomları ve Özellikleri

Legendre polinomları aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$P_n(x)$ fonksiyonları n . mertebeden polinomlardır. $P_n(x)$ polinomlarının $[-1, 1]$

aralığında ortogonal bir sistem oluşturduğunu ispatlayalım. Gerçekten $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$

olarak, negatif olmayan her tam $m < n$ sayısı için

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 U_n^{(n)}(x) x^m dx = 0$$

olur. $(n-1)$. mertebeye kadar $U_n(x)$ 'in türevlerinin tamamının integralleme aralığının uç noktalarında sıfırlandığını göz önünde bulundurarak, kısmi integrasyon işlemini tekrarlırsak eşitliği kolayca elde ederiz. Böylece,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (m < n)$$

bulunur. Yani iki farklı Legendre polinomları ortogondur. Şimdi normalleştirici sayıları hesaplayalım.

$$\alpha_n^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 [U_n^{(n)}(x)]^2 dx$$

Buradan $\int_{-1}^1 U_n^{(n)}(x) U_n^{(n)}(x) dx$ integraline çok sayıda kısmi integrasyon uygulayarak

$$U_n^{(n)}(x) = u \text{ ise } U_n^{(n+1)}(x) dx = du$$

$$U_n^{(n)}(x) dx = dv \text{ ise } v = U_n^{(n-1)}(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 U_n^{(n)}(x) U_n^{(n)}(x) dx &= - \int_{-1}^1 U_n^{(n-1)}(x) U_n^{(n+1)}(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 U_n^{(n-2)}(x) U_n^{(n+2)}(x) dx = \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 U_n^{(2n)}(x) dx \\
&= (2n)! \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx
\end{aligned}$$

elde ederiz. Daha sonra $\int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx$ integraline kısmi integrasyon uygulayarak,

$$(1-x)^n = u \text{ ise } -n(1-x)^{n-1} dx = du ;$$

$$(1+x)^n dx = dv \text{ ise } \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = v \text{ olmak üzere;}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx$$

elde edilir. İşlemi tekrarlayarak,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{n.(n-1)...2.1}{(n+1).(n+2)...2n} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} 2^{2n+1}$$

elde ederiz. Bu sonuçtan faydalanarak,

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \{U_n^{(n)}(x)\}^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

elde ederiz. Böylece normalleştirilmiş polinomlar:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=0,1,..) \quad (5.1)$$

şeklindedir. $P_n(x)$ Legendre polinomları herhangi n için

$$P_n(1) = 1 \quad (5.2)$$

özelliğine sahiptir. Bu $(x-1)^n (x+1)^n$ ifadesinin n . türevine Leibnitz kuralı uygulayarak ve $x=1$ alarak kolayca görülür.

Legendre polinomları üretici fonksiyon olarak adlandırılan açılımın katsayılarını oluşturarak potansiyel teoride önemli rol oynamaktadır. Aslında potansiyel teoride üretici fonksiyon iki nokta arasındaki uzaklığı karşılıklı olarak tanımlanır; bu noktalardan biri orjinden birim uzaklıkta olan, diğeri ise orjinden $u < 1$ olmak üzere u birim uzaklıkta olan noktadır. Bunların yarıçap vektörleri arasındaki açı $\arccos x$ 'tir . Yani;

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$$

olur. Şimdi

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n + \dots$$

açılımında $t = -2xu + u^2$ koyarak ve u 'nun derecelerine göre gruplaştırarak,

$$\begin{aligned} \Psi(x, u) &= 1 - \frac{1}{2}(u^2 - 2xu) + \frac{3}{8}(u^2 - 2xu)^2 - \frac{5}{16}(u^2 - 2xu)^3 + \dots \\ &= 1 + xu + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)u^2 + \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)u^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) u^n \quad (5.3)$$

üretici fonksiyonun (5.3) şeklinde açılımı elde edilir.

$Q_n(x)$ fonksiyonlarının önceden tanımladığımız Legendre polinomlarıyla özdeş olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için önce $Q_n(x)$ 'in $[-1, 1]$ aralığında ortogonal bir sistem oluşturduğunu ispatlayalım. (5.3)'ten

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} Q_n(x) Q_m(x) u^n v^m \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.4)'ün sol tarafını x 'e göre -1'den 1'e integralleyerek,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2xu+u^2)(1-2xv+v^2)}} = \frac{1}{\sqrt{uv}} \ln \frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2t \left(1 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 + \dots + \frac{1}{2n+1}t^{2n} + \dots \right)$$

açılımından dolayı,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2xu+u^2)(1-2xv+v^2)}} = \frac{1}{\sqrt{uv}} 2\sqrt{uv} \left(1 + \frac{1}{3}uv + \frac{1}{5}u^2v^2 + \dots + \frac{1}{2n+1}u^n v^n + \dots \right)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2xu+u^2)(1-2xv+v^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} u^n v^n \quad (5.5)$$

bağıntısı sağlanır. Şimdi (5.4)'ün sağ tarafını x 'e göre -1 'den 1 'e integralleyelim.

$$\int_{-1}^1 \sum_{n,m=0}^{\infty} Q_n(x) Q_m(x) u^n u^m dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} u^n u^m \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) dx$$

Bu sonucu (5.5) açılımının sonucu ile kıyaslayarak,

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) Q_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \text{ için} \end{cases}$$

elde ederiz. Yani $Q_n(x)$ fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında ortogonal bir sistem oluştururlar.

$Q_n(x)$ 'in oluşumundan polinom oldukları anlaşılır. Yani tıpkı $P_n(x)$ Legendre polinomları gibi $Q_n(x)$ polinomlarını da $1, x, x^2, \dots$ sistemini ortogonalleştirerek elde edilen bir sistem olarak kabul edilebilir. Ortogonalleştirme süreci, sabit çarpanlar dikkate alınmadığında, tüm mertebeden polinomları içeren tek bir ortogonal sistemin varlığını gösterir. Bu nedenle her n için $Q_n(x) = P_n(x)$ olduğunu göstermek için $P_n(x)$ polinomlarında olduğu gibi $Q_n(x)$ polinomlarının da (5.2) şartını sağladığını göstermek yeterlidir. Yani; $Q_n(1) = 1$ olmalıdır. Aslında (5.3)'te $x=1$ alarak,

$$\Psi(1, u) = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(1) u^n$$

$$Q_n(1) = 1$$

elde ederiz ki buda iddiamızın ispatıdır.

Legendre polinomları için rekürans bir formül ve bir diferensiyel denklem elde edelim.

(5.3)'ü u 'ya göre diferensiyelleyerek ve $Q_n(x)$ yerine $P_n(x)$ koyarak,

$$\frac{\partial \Psi(x, u)}{\partial u} = \frac{x-u}{\sqrt{1-2xu+u^2}(1-2xu+u^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) u^{n-1}$$

$$(x-u) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n = (1-2xu+u^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) u^{n-1}$$

elde ederiz. Burada u^n 'lerin katsayılarını eşitleyerek ardışık üç Legendre polinomu için aşağıdaki formülü elde ettik.

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

Legendre polinomlarının ilk birkaçı

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

şeklindedir.

$$y(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad \text{Legendre polinomları ikinci mertebeden lineer homojen}$$

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \quad (5.6)$$

diferensiyel denklemini veya

$$\left[(x^2-1)y' \right]' - n(n+1)y = 0 \quad (5.6')$$

denklemini sağlar. Bu $u = (x^2-1)^n$ olmak üzere; $(x^2-1)u' = 2nxu$ eşitliğini $n+1$ defa diferensiyelleyerek açık şekilde ispatlanır. Ayrıca $2^n n! y$, $u^{(n)}(x)$ ifadesinin yerine yazılır. $P_n(x)$ polinomu ikinci mertebeden bir denklemin çözümü olduğundan $P_n(x)$ polinomunun bütün köklerinin farklı olduğu (5.6) denkleminde anlaşılır. Dahası $P_n(x)$ polinomunun tanımından Rolle'nin temel teoremine dayanarak, onun bütün köklerinin reel ve $[-1,1]$ aralığında olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki şekilde verilen Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left\{ \lambda + \left(\frac{1}{4} t g^2 t + \frac{1}{2} \right) \right\} u &= 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ u\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Burada $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ iken $q(t) = -\left(\frac{1}{4} t g^2 t + \frac{1}{2}\right) \rightarrow -\infty$ olduğundan singüler durum söz konusudur. Şimdi (5.7) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım.

$$x = \sin t \quad y = \frac{u}{\sqrt{\cos t}} \quad (5.8)$$

değişkenlerin değişimi ile (5.7) problemi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (5.9)$$

problemine, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığı ise $[-1, 1]$ aralığına dönüşür ve (5.9) denkleminin her iki singüler noktasında, yani ± 1 noktalarında sınır şartları sağlanacak biçimde $y(x)$ sonlu kalır. Ayrıca $\lambda_n = n(n+1)$ sayıları bu problemin özdeğerleri, $P_n(x)$ Legendre polinomları ise özfonksiyonlarıdır.

Şimdi $[-1, 1]$ aralığında sınırlı olan Legendre polinomlarının bu özdeğer probleminin tek çözümü olduklarını gösterelim. Eğer $u = f(x)$, (5.9) diferensiyel denklemini sağlarsa, $f(-x)$ fonksiyonu da sağlar ve sonuç olarak $f(x) + f(-x)$ ve $f(x) - f(-x)$ fonksiyonları da sağlarlar. Bunlardan birincisi çift, ikincisi tek fonksiyondur. $u = f(x)$ fonksiyonu hipotezden sıfıra eşit olmadığından bu fonksiyonlardan en az biri aynı şekilde sıfıra eşit olamaz. Böylece $-1 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli olan (5.9) denkleminin her çift ve her tek u çözümünün bir Legendre polinomu ve λ 'nın $n(n+1)$ şeklinde bir sayı olduğunu göstermek yeterlidir. u çözüm fonksiyonunu $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde bir kuvvet serisi olarak alırsak, (5.9)'dan a_n katsayılar için aşağıdaki rekürans formülünü elde ederiz.

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (5.10)$$

Gerçekten,

$$\lambda u = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lambda (a_0 + a_1 x) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda a_n x^n$$

$$2xu' = 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 2a_1 x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\begin{aligned} (1-x^2)u'' &= (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \end{aligned}$$

Birinci seride n yerine $n+2$ koyarak;

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n] x^n$$

elde ederiz. Bu terimleri (5.9) denkleminde yerine koyup düzenleyerek,

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n] x^n - 2a_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 2n a_n x^n + \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

sonucuna ulaşırız. Buradan

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0, \quad 6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0$$

ve $n \geq 2$ için,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda]a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

indis denklemini elde ederiz ki, gerçekten $\lambda = n(n+1)$ şeklinde bir sayı olduğunu gösterdik. Eğer $u(x)$ çift fonksiyonsa, n tek iken tüm a_n katsayıları sıfıra eşittir; eğer $u(x)$ tek fonksiyonsa o halde n çift iken tüm a_n katsayıları sıfıra eşittir. $n-2h > 0$ durumu için (5.10) eşitliğinden

$$a_n = \frac{1}{n} \left[1 - \frac{\lambda}{(n-1)(n-2)} \right] \left[1 - \frac{\lambda}{(n-3)(n-4)} \right] \dots \left[1 - \frac{\lambda}{(n-2h+1)(n-2h)} \right] k a_k \quad (5.11)$$

bulunur. O halde $k = n - 2h$ şeklindedir.

Eğer λ sadece $n(n+1)$ şeklinde bir sayı ise $u(x)$ serisi sınırlıdır. Bu durumda $u(x)$ 'in n . dereceden Legendre polinomu olacağı aşıkardır. λ 'ların diğer tüm değerleri için seri yakınsaklık testlerine göre $|x| < 1$ için yakınsaktır.

(5.11) çarpımındaki bütün çarpanlar büyük k sabitinin pozitif olduğunu verir. (a_k pozitif farzedilebilir.) Bilinen teoremlere göre, (5.11)'de n arttığında köşeli parantez içi alanın çarpımı pozitif bir limit değerine yakınsar. Bu takdirde $n > k$ için, c pozitif bir sabit olmak üzere, $a_n > \frac{c}{n}$ olur. Böylece $x=1$ noktasının komşuluğunda $u = \sum_{v=k}^{\infty} a_v x^v$ serisi sınırlı olamaz. Buradan $\lambda \neq n(n+1)$ sayısının özdeğer olamayacağı elde edilir. (5.1) ve (5.8)'den (5.7) probleminin özdeğerlerinin $\lambda_n = n(n+1)$ sayıları ve normalleştirici özfonksiyonlarının ise

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} P_n(\sin t) \sqrt{\cos t} = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} \frac{\sqrt{\cos t}}{2^n n!} \frac{d^n (-\cos^2 t)^n}{d \sin^n t} \quad (5.12)$$

olduğunu elde ederiz. (5.1) sisteminin $L^2(-1,1)$ 'de tamlığı Weierstrass yakınsaklık teoreminden elde edilir. Legendre polinomları için (5.9) diferensiyel denkleminde diğer ortogonal sistemleri türetmek mümkündür. (5.9)'u x 'e göre diferensiyelleyerek u' fonksiyonu için bir diferensiyel denklem buluruz. Bu sadece $\lambda = n(n+1)$ için $[-1,1]$ 'in her iki uç noktasında regüler bir çözümün varlığını gösterir. Bu çözümü $P_n'(x)$ ile gösterelim. Böylece $P_n'(x)$ için elde edilen denklem self-adjoint değildir, fakat $z_n(x) = P_n'(x) \sqrt{1-x^2}$ bilinmeyen fonksiyonu ile tanımlayarak denklem self-adjointe dönüştürülebilir. O halde yeni denklemimiz:

$$\left\{ (1-x^2) z' \right\}' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0$$

şeklinde olur. Denklemin özdeğerleri $\lambda_n = n(n+1)$ ($n=1, 2, \dots$) sayıları ve özfonksiyonları ise $z_n(x) = P_n'(x)\sqrt{1-x^2}$ 'lerdir.

$z_n(x) = P_{n,1}(x)$ fonksiyonlarına birinci mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonları denir. Bu bağtıda $P_n(x) = P_{n,0}(x)$ fonksiyonuna ise sıfırıncı mertebeden Legendre fonksiyonu denir.

$P_{n,1}(x)$ Legendre fonksiyonları $m \neq n$ için;

$$\int_{-1}^1 P_{m,1}(x)P_{n,1}(x)dx = 0$$

ortogonallik şartını sağlar. Aynı şekilde (5.9) denklemini h defa diferensiyelleyerek,

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)^h \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$$

fonsksiyonları için,

$$\left\{(1-x^2)z'\right\}' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0 \quad (5.12')$$

diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu denklem, $\lambda = n(n+1)$ ($n = h, h+1, \dots$) özdeğerlerine ve bunlara karşılık gelen $[-1,1]$ aralığında ortogonal olan $P_{n,h}(x)$ özfonksiyonlarına sahiptir. $P_{n,h}(x)$ 'lere h. mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonları denir. Onların normalleştirilmesi durumunda

$$\int_{-1}^1 P_{n,h}^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+h)!}{(n-h)!}$$

olur. (5.12') diferensiyel denkleminin tüm özdeğer ve özfonksiyonları sıfırıncı mertebeden Legendre fonksiyonları için kullanılan aynı yöntemle elde edilir.

6. DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN İZ HESABI

Diferensiyel operatörler için iz formülleri ilk olarak Gelfand ve Levitan tarafından bulundu [9]. Elde edilen formüller iz formüllerinin özel operatörlere uygulanmasına sebep oldu ve bunlar önemli ve büyük bir teoremin gelişimine sebep oldu. Bu bölümde Sturm-Liouville ve lineer dalga denklemi için iz formüllerini vereceğiz.

6.1. Sturm-Liouville Operatörü İçin İz Hesabı

$q(x) \in C^2[0, \pi]$; h ve H sonlu reel sayılar olmak üzere;

$$y'' + \{\lambda + q(x)\}y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (6.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (6.2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (6.3)$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin özdeğerlerini $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ile gösterelim. Bu özdeğerler için, n 'ler yeterince büyük olduğunda [16]

$$c = \frac{2}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx \right) \quad (6.4)$$

olmak üzere;

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (6.5)$$

asimptotik formülü sağlanır. (6.5)'de her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n^2 + \frac{c^2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) + 2n \frac{c}{n} + 2n O\left(\frac{1}{n^3}\right) + 2 \frac{c}{2n} O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \lambda_n &= n^2 + c + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (6.5')$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) = \sum_{n=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right) < +\infty \quad (6.6)$$

yakınsak serisi elde edilir. (6.6) serisi incelenen Sturm-Liouville operatörünün düzenlenmiş izi olarak adlandırılır. Bu kısımdaki amacımız bu toplamı bulmaktır.

(6.1) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 1$ $\varphi'_x(0, \lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $\varphi(x, \lambda)$ ile gösterelim. O halde λ_n özdeğerleri $f(x, \lambda) = \varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)$ tam analitik fonksiyonunun kökleridir. Böylece;

$$f(x, \lambda) = \varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = A\Phi(\lambda) \quad (6.7)$$

açılımına sahiptir ki burada A daha sonra belirlenecek bir sabit ve $\Phi(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$ şeklindedir.[16]

Eğer $\lambda_j = 0$ ise, $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$ çarpanı $(-\lambda)$ ile yer değiştirebilir. $\lambda = -\mu$ negatif büyük değeri için (6.7)'nin her iki tarafının asimptotik davranışını inceleyeceğiz. Sağ ve sol taraflarda μ 'nün aynı dereceden olan katsayılarını karşılaştırarak, özel olarak (6.6) toplamının değerini elde ederiz.

$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ olmak üzere, $\frac{\sin iz}{i} = \sinh z$ ve $\sinh z = \frac{iz}{i} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} \Phi(-\mu) &= \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_n}\right) = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_0}\right) \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{n^2}\right)} \frac{\sinh \pi \sqrt{\mu}}{\pi \sqrt{\mu}} \\ &= (\lambda_0 + \mu) \frac{1}{\lambda_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n + \mu}{\lambda_n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + \mu}\right) \frac{\sinh \pi \sqrt{\mu}}{\pi \sqrt{\mu}} \\ &= (\lambda_0 + \mu) \frac{1}{\lambda_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{\lambda_n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n + \mu}{n^2 + \mu}\right) \frac{\sinh \pi \sqrt{\mu}}{\pi \sqrt{\mu}} \\ &= (\lambda_0 + \mu) C_1 \psi(\mu) \frac{\sinh \pi \sqrt{\mu}}{\pi \sqrt{\mu}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

elde edilir.

Burada

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{\lambda_n} \right) ; \psi(\mu) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right) \quad (6.9)$$

olur. μ 'nün pozitif büyük değeri için $\psi(\mu)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyelim. Bunu sonuçlandırmak için $\ln \psi(\mu)$ 'yü göz önüne alalım.

$$\ln(\psi(\mu)) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)$$

$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ açılımından faydalananarak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)^k \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)^k \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi işlemlerde kullanacağımız bir lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 6.1. Eğer $|n^2 - \lambda_n| \leq a$ ise o halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^k}{(\mu + n^2)^k} \leq \frac{\pi}{2} \frac{a^k}{\mu^{\frac{k-1}{2}}} \quad (6.10)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $|n^2 - \lambda_n| \leq a$ ise,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^k}{(\mu + n^2)^k} &\leq a^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu + n^2)^k} \leq a^k \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\mu + x^2)^k} \\ &= a^k \int_0^{\infty} \frac{dx}{\mu^k \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{\mu}} \right)^2 \right)^k} \quad \frac{x}{\sqrt{\mu}} = t ; dx = \sqrt{\mu} dt \\ &= \frac{a^k}{\mu^{\frac{k-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^k} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^k}$ integralini hesaplayalım.

$$\int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^k} = \frac{t}{(2k-2)(1+t^2)^{k-1}} \Big|_0^a + \frac{2k-3}{2k-2} \int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}}$$

olmak üzere

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^k} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{(2k-2)(1+a^2)^{k-1}} + \frac{a}{(2k-2)(1+a^2)^{k-2}} + \dots + \int_0^a \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

Buradan $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\arctan t \Big|_0^a \right) = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Denklemden yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^k}{(\mu + n^2)^k} \leq \frac{a^k}{\mu^{\frac{k-1}{2}}} \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur. Şimdi $\ln \psi(\mu)$ toplamına dönersek

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)^k = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^k}{(\mu + n^2)^k}$$

şeklinde yazılabilir. Öncelikle

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^k}{(\mu + n^2)^k} &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{\mu^{\frac{k-1}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+2}}{\mu^{\frac{k+3}{2}}} = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\mu} \right)^k = O \left(\mu^{-\frac{3}{2}} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

bulunur. Burada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\mu} \right)^k$ serisi geometrik bir seri olduğundan sonlu limite sahiptir.

Dahası

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2 - c}{\mu + n^2} + c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) \frac{n^2}{\mu + n^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

bulunur. $\sup \left| (\lambda_n - n^2 - c) n^2 \right| < \infty$ olduğundan

$$\frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - n^2 - c) n^2}{(\mu + n^2)} = O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (6.13)$$

yazılır. Böylece (6.11) ve (6.13)'ten

$$\ln(\psi(\mu)) = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (6.14)$$

elde edilir. Şimdi (6.14)'teki ilk seriyi inceleyelim.

$$\coth \pi \sqrt{\mu} = \frac{e^{\pi \sqrt{\mu}} + e^{-\pi \sqrt{\mu}}}{e^{\pi \sqrt{\mu}} - e^{-\pi \sqrt{\mu}}} = \frac{1 + e^{-2\pi \sqrt{\mu}}}{1 - e^{-2\pi \sqrt{\mu}}} = O\left(e^{-2\pi \sqrt{\mu}}\right)$$

olmak üzere; bilindiği gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} = \frac{\pi \coth \pi \sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu} + O\left(e^{-2\pi \sqrt{\mu}}\right)$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned} \ln(\psi(\mu)) &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} - \frac{c}{2\mu} + \frac{s_{\lambda}}{\mu} + O\left(e^{-2\pi \sqrt{\mu}}\right) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left\{ s_{\lambda} + \frac{c}{2} - \lambda_0 \right\} + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$s_{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c) \quad (6.15)$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\psi(\mu) &= \exp \left\{ \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left\{ s_\lambda - \lambda_0 + \frac{c}{2} \right\} + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \right\} \\ &= 1 + \frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left\{ s_\lambda - \lambda_0 + \frac{c}{2} + \frac{c^2\pi^2}{8} \right\} + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right)\end{aligned}\quad (6.16)$$

elde ederiz. Böylece (6.15), (6.16) ve (6.8)'den,

$$\Phi(-\mu) = \frac{1}{2\pi} C_1 e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + \frac{1}{2}c\pi + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(s_\lambda + \frac{1}{2}c + \frac{c^2\pi^2}{8} \right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \quad (6.17)$$

elde edilir.

Şimdi büyük negatif $\lambda = -\mu$ için, Liouville integral denklemini kullanarak, $\varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyeceğiz. Hesaplamayı kolaylaştırmak için (6.2) sınır koşullarının görüntüsü $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = -Hy(\pi)$

şeklinde olsun. Ayrıca $\int_0^\pi q(x)dx = 0$ olacak şekilde $q(x)$ seçelim. Genel durum [17]'de ele

alınmıştır. Şimdi $\lambda = s^2$ için bildiğimiz,[19]

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

formülünü kullanarak,

$$\varphi(x, -\mu) = \cosh \sqrt{\mu}x + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^x \sinh\{\sqrt{\mu}(x-t)\} q(t) \varphi(t, -\mu) dt$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{l|x|})$$

asimptotik formülünden,[19]

$$\varphi(t, -\mu) = \cosh \sqrt{\mu}t + O\left(|\sqrt{\mu}|^{-1} e^{|\tau|t}\right)$$

şeklindedir.

$x = \pi$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(\pi, -\mu) &= \cosh \sqrt{\mu} \pi + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\pi} \sinh \left\{ \sqrt{\mu} (\pi - t) \right\} q(t) \cosh \sqrt{\mu} t dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2} e^{\pi \sqrt{\mu}} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\pi} \sinh \left\{ \sqrt{\mu} (\pi - t) \right\} q(t) \cosh \sqrt{\mu} t dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^{\pi \sqrt{\mu}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

elde edilir. Şimdi $\varphi(x, \lambda)$ 'nin x 'e göre türevi alınır,

$$\varphi'_x(x, -\mu) = \sqrt{\mu} \sinh \sqrt{\mu} x + \int_0^x \cosh \left\{ \sqrt{\mu} (x - t) \right\} q(t) \varphi(t, -\mu) dt$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(\pi, -\mu) &= \sqrt{\mu} \sinh \sqrt{\mu} \pi + \\
&+ \int_0^{\pi} \cosh \left\{ \sqrt{\mu} (\pi - t) \right\} q(t) \left[\cosh \sqrt{\mu} t + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\pi} \sinh \left\{ \sqrt{\mu} (t - s) \right\} q(s) \cosh \sqrt{\mu} s ds \right] dt \\
&+ O\left(\frac{e^{\pi \sqrt{\mu}}}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2} e^{\pi \sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + \frac{1}{4\sqrt{\mu}} [q(0) + q(\pi)] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.18) ve (6.19)'dan,

$$\varphi'_x(\pi, -\mu) + H\varphi(\pi, -\mu) = \frac{1}{2} e^{\pi \sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + H + \frac{1}{4\sqrt{\mu}} [q(0) + q(\pi)] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \tag{6.20}$$

olur. (6.7) , (6.17) ve (6.20)'den $AC_1 = \pi$ yani; $A = \frac{\pi}{C_1}$ olduğu anlaşılır. Böylece

(6.17)'den ve (6.20)'den

$$H + \frac{1}{4\sqrt{\mu}} [q(0) + q(\pi)] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{c\pi}{2} + \frac{1}{\mu} \left(s_{\lambda} + \frac{c}{2} + \frac{\pi^2 c^2}{8} \right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

elde ederiz.

$\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ 'nün katsayılarını eşitleyerek ve (6.4)'ü göz önüne alarak,

$$s_\lambda = \frac{1}{4}[q(0) + q(\pi)] - \frac{H}{\pi} - \frac{H^2}{2}$$

elde edilir. Böylece istediğimiz seri toplamını hesapladık.

6.2. Lineer Sönümlü Dalga Denklemi İçin İz Formülü

$(0,1)$ aralığında bir boyutlu lineer sönümlü dalga denklemini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} w_{tt} + 2p(x)w_t &= w_{xx} + q(x)w & x \in (0,1), t > 0 \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0 & t > 0 \\ w(x,0) &= w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), & x \in (0,1) \end{aligned} \quad (6.21)$$

(6.21) problemi ile ilişkili özdeğer problemi,

$$u_{xx} - (\lambda^2 + 2\lambda p - q)u = 0 \quad x \in (0,1) \quad (6.22)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (6.23)$$

şeklindedir. λ , (6.22)- (6.23) probleminin özdeğeridir. O halde $\bar{\lambda}$ 'de bu problemin bir özdeğeridir. Bu sebeple $n \neq 0$ iken λ_n ile bu problemin özdeğerlerini gösterelim ve $\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n$ kabul edelim. Bunlar için aşağıdaki sıralama söz konusudur.

$$\dots \leq \text{Im}\lambda_{-2} \leq \text{Im}\lambda_{-1} \leq \text{Im}\lambda_1 \leq \text{Im}\lambda_2 \leq \dots$$

Aynı zamanda $\lambda_{\pm 1} = \lambda_{\pm 2} = \dots = \lambda_{\pm p} = 0$ şeklinde olsun. Eğer $p = 0$ ise (6.22)- (6.23) probleminin özdeğerleri sıfıra eşit olamaz.

Şimdi $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \rightarrow \infty$ iken (6.22) denkleminin temel çözüm sistemi için asimptotik açılımı inceleyelim. Çözüm fonksiyonlarını [7-8] çalışmalarında tanımlanan yöntemle bulalım:

$$\phi_{\pm}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_i^{(\pm)}(x) \lambda^{-i} + O(\lambda^{-m-1}) \quad , m \geq 1 \quad (6.24)$$

olmak üzere;

$$u_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm \lambda x \pm \int_0^x \phi_{\pm}(t, \lambda) dt} \quad (6.25)$$

asimptotik formül söz konusudur. $p \in C^{m+1}[0,1]$, $q \in C^m[0,1]$ olsun. Şimdi (6.24) ve (6.25)'i (6.22)'de yerine koyalım. λ 'nın aynı kuvvete sahip olan katsayılarını eşitleyelim. Buradan $\phi_i^{(\pm)}$ 'yi belirleyen denklem sistemini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} \phi_0^{(\pm)} &= p(x) \\ \phi_1^{(\pm)} &= -\frac{1}{2}(\pm p'(x) + p^2(x) + q(x)) \\ \phi_i^{(\pm)} &= -\frac{1}{2}\left(\pm \phi_{i-1}^{(\pm)'} + \sum_{j=0}^{i-1} \phi_j^{(\pm)} \phi_{i-j-1}^{(\pm)}\right) \quad , i \geq 2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Şimdi (6.22)- (6.23) probleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışını içeren teoremi ifade edelim.

Teorem 6.2. $m \geq 1$ için, $p \in C^{m+1}[0,1]$, $q \in C^m[0,1]$ olsun. $n \rightarrow \pm\infty$ iken (6.22)- (6.23) probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir.

$$\lambda_n = \pi n i + \sum_{j=0}^{m-1} c_j n^{-j} + O(n^{-m}) \quad (6.27)$$

Burada c_j 'ler açıkça belirlenebilecek sayılardır. Bilhassa,

$$c_0 = -\int_0^1 p(x) dx \quad c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 (p^2(x) + q(x)) dx \quad (6.28)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi^2} \left[\int_0^1 p(x)(p^2(x) + q(x)) dx - \int_0^1 p(x) dx \int_0^1 (p^2(x) + q(x)) dx + \frac{p'(1) - p'(0)}{2} \right] \quad (6.29)$$

şeklindedir.

Teorem 6.3. $p \in C^3[0,1]$, $q \in C^2[0,1]$ olsun. O halde

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (\lambda_n - c_0) = \frac{p(0) + p(1)}{2} - \int_0^1 p(x) dx$$

bağıntısı sağlanır.

Şimdi bu teoremlerin ispatına geçmeden önce bu teoremlerin ispatlarında kullanacağımız yardımcı lemmaları aşağıda ifade edelim.

Lemma 6.4. $p \in C^{m+1}[0,1]$, $q \in C^m[0,1]$ olmak üzere $\phi_{\pm}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \phi_i^{(\pm)}(x) \lambda^{-i} + O(\lambda^{-m})$

olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \rightarrow \infty$ iken $C^2[0,1]$ uzayında norm anlamında (6.25) asimptotik açılımına sahip olan ve $u_{\pm}(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayan (6.22) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü mevcuttur.[4]

Lemma 6.5. Yeterince büyük n 'ler için,

$$Q = \left\{ \lambda : |\operatorname{Re} \lambda| < \pi n + \frac{\pi}{2} , |\operatorname{Im} \lambda| < \pi n + \frac{\pi}{2} \right\}$$

cümlesi (6.25),(6.26) probleminin tam olarak $2n$ tane özdeğerini içerir.[4]

Şimdi (6.22)- (6.23) probleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışını içeren Teorem 6.2'nin ispatını verelim.

İspat. (Teorem 6.2) $m=1$ için $p \in C^2[0,1]$, $q \in C^1[0,1]$ olsun. $\gamma_0(\lambda) = u(1, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırları (6.22)-(6.23) probleminin özdeğerleridir. Lemma 6.5'ten $n \rightarrow \infty$ iken bu özdeğerlerin sonsuz olduğu anlaşılır. Lemma 6.4'te $m=1$ için, $\gamma_0(\lambda)$ fonksiyonuna karşılık gelen $u_{\pm}$ çözümünü göz önüne alalım. Yeterince büyük λ 'lar için, $\gamma_0(\lambda) = 0$ denklemi

$$u_+(1, \lambda) = u_-(1, \lambda)$$

olur ve (6.25)'ten

$$e^{2\lambda + \int_0^1 (\phi_+(., \lambda) + \phi_-(., \lambda)) dx} = 0$$

şeklindedir.

O halde bu denklem

$$2\lambda + \int_0^1 (\phi_+ (., \lambda) + \phi_- (., \lambda)) dx = 2\pi ni, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.30)$$

şeklinde yeniden yazılır. Şimdi $\phi_{\pm}$ yerine kendilerinin asimptotik açılımına yol açan terimleri yazarak,

$$\begin{aligned} 2\lambda + 2 \int_0^1 p(x) dx + O(\lambda^{-1}) &= 2\pi ni \\ \lambda &= \pi ni - \int_0^1 p(x) dx + o(1), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.31)$$

elde edilir. Böylece özdeğerler büyük n 'ler için $\lambda \sim \pi ni - \int_0^1 p(x) dx$ şeklindedir. Aslında

Lemma 6.5'ten λ_n özdeğerleri tam olarak

$$\lambda_n = \pi ni - \int_0^1 p(x) dx + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

şeklindedir. Bu özdeşlikten ve (6.31)'den

$$\lambda_n = \pi ni - \int_0^1 p(x) dx + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir ve $m=1$ durumu için ispat tamamlanır. Eğer $m=2$ alırsak, (6.25)'i (6.30)'da yerine koyarak,

$$\begin{aligned} \lambda_n + \int_0^1 p(x) dx + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 (\phi_1^{(+)}(x) + \phi_1^{(-)}(x)) dx + O(\lambda_n^{-2}) &= \pi ni \\ \lambda_n &= \pi ni - \int_0^1 p(x) dx - \frac{1}{\pi ni} \int_0^1 (\phi_1^{(+)}(x) + \phi_1^{(-)}(x)) dx + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Son formülden ve (6.26) özdeşliğinden c_0 ve c_1 için (6.28) formülleri oluşur. İşlemleri tekrarlayarak (6.28) ve (6.29) formüllerinin doğruluğu kontrol edilebilir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 6.6. $p \in C^3[0,1]$ olsun. λ_n 'ler (6.22)-(6.23) probleminin özdeğerleri ve $q \in C^2[0,1]$ belirli bir sabit fonksiyon olsun. Bu özdeğerler, (6.27) asimptotik formülü ile tanımlanır. O halde $p(x) = -c_0$ olmak üzere, $p(x)$ fonksiyonunun sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$c_0^2 = 2\pi i c_1 - \int_0^1 q(x) dx$$

olmasıdır.[4]

Sonuç 6.7. $p_0(1-x) = p_0(x)$, $p_i(1-x) = -p_i(x)$, $p_i, p_0 \in C^4[0,1]$ ve $p = p_i$ için (6.22)-(6.23) problemleri aynı spektrumlara sahip olacak şekilde $q \equiv 0$ ve $p_i(x) = p_0(x) + p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ olsun. O halde

$$\int_0^1 p_1^2(x) dx = \int_0^1 p_2^2(x) dx, \quad \int_0^1 (p_0(x) p_1^2(x)) dx = \int_0^1 (p_0(x) p_2^2(x)) dx$$

eşitlikleri sağlanır.[4]

Özdeğerlerin asimptotiğiyle ilgili olarak ayrıca Teorem 6.2, Sonuç 6.6 ve Sonuç 6.7'den faydalanalım. $m \geq 1$ olmak üzere $p \in C^{m+1}[0,1]$, $q \in C^m[0,1]$ olsun. $u = u(x, \lambda)$, (6.22) denkleminin $u(0, \lambda) = 0$, $u'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarına karşılık çözümü olsun. $\gamma_0(\lambda) = u(1, \lambda)$ ile gösterelim. γ_0 fonksiyonu tam fonksiyondur. γ_0 fonksiyonunun sıfırları (6.22)-(6.23) probleminin özdeğerleri ile çakışıkır. Lemma 6.4'ten yeterince büyük λ 'lar için $u(x, \lambda) = u_+$ cinsinden

$$u(x, \lambda) = \frac{u_+(x, \lambda) - u_-(x, \lambda)}{u'_+(0, \lambda) - u'_-(0, \lambda)}$$

şeklinde tanımlanır. (6.25)'ten dolayı payda sıfırlanmaz. Böylece büyük λ 'lar için,

$$\gamma(0, \lambda) = \frac{u_+(1, \lambda) - u_-(1, \lambda)}{u'_+(0, \lambda) - u'_-(0, \lambda)} \quad (6.32)$$

şeklindedir.

Teorem 6.2'den $\operatorname{Re}(\lambda_n - c_0)$ sayısı $n \rightarrow \infty$ iken $O(n^{-2})$ gibi hareket eder. Bunun anlamı;

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (\lambda_n - c_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\lambda_n - c_0)$$

serilerinin yakınsak olmasıdır. Teorem 6.3'de bu serilerin toplamını p fonksiyonu cinsinden ifade ediyoruz. Aslında bu düzenlemiş iz için bir formüldür.

İspat.(Teorem 6.3) Benzer bir iz formülü hesabı Sturm-Liouville operatörü için yapılmıştır.[19] Şimdi

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{2p} \prod_{n=p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}_n}\right)$$

tam fonksiyonu tanımlayarak başlayalım. Burada

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}_n}\right) = \frac{(\lambda_n - \lambda)(\bar{\lambda}_n - \lambda)}{|\lambda_n|^2} = 1 + \frac{\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2}$$

olduğundan yukarıda sonsuz çarpım yakınsak olur. Teorem 6.2'den $m=2$ için, $n \rightarrow \infty$ iken, (6.27) formülü

$$\lambda_n = \pi n i + \sum_{j=0}^1 c_j n^{-j} + O(n^{-2})$$

$$\lambda_n = \pi n i + c_0 + \frac{c_1}{n} + O(n^{-2})$$

şeklinde elde edilir, λ_n 'nin modülünü alarak

$$|\lambda_n| = \sqrt{\left(c_0 + O(n^{-2})\right)^2 + \left(\pi n - \frac{ic_1}{n}\right)^2}$$

$$|\lambda_n|^2 = c_0^2 + 2c_0 O(n^{-2}) + O(n^{-4}) + \pi^2 n^2 - 2\pi n i \frac{c_1}{n} + \frac{c_1^2}{n^2}$$

$$|\lambda_n|^2 = \pi^2 n^2 - 2\pi i c_1 + c_0^2 + O(n^{-2})$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) = c_0 + O(n^{-2}) \tag{6.33}$$

elde edilir. $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \lambda^{2p} \prod_{n=p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}_n}\right) \\ \Phi(\lambda) &= \lambda^{2p} \frac{\prod_{n=p+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2}\right) \cdot \frac{\sinh \lambda}{\lambda}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2 \pi^2}\right)} \\ \Phi(\lambda) &= \lambda^{2p} \prod_{n=p+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\sinh \lambda}{\lambda} \\ \Phi(\lambda) &= \lambda^{2p} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{|\lambda_n|^2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 - \lambda^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{n^2 \pi^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\sinh \lambda}{\lambda}\end{aligned}$$

olur. [19] Burada

$$C_0 = (\pi n)^{2p} \prod_{n=p+1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{|\lambda_n|^2} ; \Psi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2}\right)$$

olmak üzere, $\Phi(\lambda) = \frac{C_0 \Psi(\lambda) \sinh \lambda}{\lambda}$ şeklindedir. Şimdi λ 'nın reel, pozitif ve büyük olduğunu kabul ederek $\Psi(\lambda)$ 'nın asimptotik davranışını inceleyelim. Bunun için $\ln \Psi(\lambda)$ 'yı göz önüne alalım. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ eşitliği yardımıyla

$$\ln \Psi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2}\right)$$

elde edilir. $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ açılımından faydalanarak,

$$\ln \Psi(\lambda) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^k$$

şeklindedir. [19] Amacımız $\lambda \rightarrow \infty$ iken, $\ln \Psi(\lambda)$ 'nın asimptotik davranışını incelemektir. Şimdi

$$\begin{aligned} \ln \Psi(\lambda) = & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^2 \\ & - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^k \end{aligned} \quad (6.34)$$

şeklinde yazalım. (6.34)'teki her bir serinin asimptotik davranışını inceleyelim. Burada yardımcı bir lemmadan faydalanarak [19]

$$\left| \pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n \right| \leq c\lambda$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^k & \leq c^k \lambda^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^k} \\ & \leq c^k \lambda^k \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\pi^2 t^2 + \lambda^2)^k} \\ & = c^k \lambda^k \int_0^{\infty} \frac{dt}{\lambda^{2k} \left(\pi^2 \left(\frac{t}{\lambda} \right)^2 + 1 \right)^k} \\ & \leq \frac{c^k}{\lambda^{k-1}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(\pi^2 z^2 + 1)^k} \leq \frac{c^{k+1}}{\lambda^k} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t}{\lambda} = z$ dönüşümü yaparak $dt = \lambda dz$ elde edildi ve c ; k ve n 'den

bağımsız bir sabittir. O halde (6.34)'teki son seri için,

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^k = O(\lambda^{-3}) \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad (6.35)$$

elde edilir. Şimdi (6.34)'te ilk serinin asimptotik davranışını ele alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 - 2\pi i c_1 + c_0^2}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \\
&+ \left(2\pi i c_1 - c_0^2 + 2\lambda c_0 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \\
&+ 2\lambda^{-1} S - 2\lambda^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 (\operatorname{Re} \lambda_n - c_0)}{\pi^2 n^2 + \lambda^2}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Burada $S = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \lambda_n - c_0)$ şeklindedir. Şimdi (6.33)'ü göz önüne alarak, (6.36)

eşitliğindeki serileri inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 - 2\pi i c_1 + c_0^2}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right| &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\pi^2 n^2 + \lambda^2)} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{3 + \lambda^2 - 3 \coth \lambda}{\lambda^4} \leq C \cdot \lambda^{-2} \\
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} \lambda_n - c_0) \pi^2 n^2}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right| &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \leq C \cdot \lambda^{-1}
\end{aligned}$$

olur. Burada C , λ 'dan bağımsız bir sabittir, aynı zamanda $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} = \frac{\lambda \coth \lambda - 1}{2\lambda^2} = \frac{\lambda^{-1} - \lambda^{-2}}{2} + O(\lambda^{-1} e^{-2\lambda}) \tag{6.37}$$

elde edilir. O halde (6.36) eşitliği için $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} = c_0 + \left(2S - c_0 - \frac{c_0^2}{2} + i\pi c_1 \right) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \tag{6.38}$$

elde edilir. Şimdi (6.34)'teki ikinci seriyi ele alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2)^2}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n [\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2]}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^2 - 2\lambda \frac{(\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2) \operatorname{Re} \lambda_n}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \\
&\quad + 4\lambda^2 c_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} + 4\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} \lambda_n)^2 - c_0^2}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2}
\end{aligned} \tag{6.39}$$

elde edilir. (6.37) eşitliğinin her iki tarafını diferensiyelleyerek,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)} &= \frac{\lambda \coth \lambda - 1}{2\lambda^2} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\lambda}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} &= \frac{(\lambda \coth \lambda - 1)' 2\lambda^2 - 4\lambda (\lambda \coth \lambda - 1)}{4\lambda^4} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\lambda}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} &= \frac{\left(\coth \lambda + \left(\frac{-1}{\operatorname{sh} \lambda} \right) \lambda \right) 2\lambda^2 - 4\lambda (\lambda \coth \lambda - 1)}{4\lambda^4} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} &= \frac{\lambda \coth \lambda - 2 - \lambda^2 (1 - \coth^2 \lambda)}{4\lambda^4}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda \rightarrow \infty$ iken bu özdeşlikten ve (6.33)'ten aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2)^2}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \right| &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \leq C\lambda^{-3} \\
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2) \operatorname{Re} \lambda_n}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \right| &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \leq C\lambda^{-3} \\
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Re} \lambda_n)^2 - c_0^2}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \right| &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 n^2 + \lambda^2)^2} \leq C\lambda^{-3}
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler (6.39)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2 n^2 - |\lambda_n|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \lambda_n}{\pi^2 n^2 + \lambda^2} \right)^2 &\leq C \lambda^{-3} - 2\lambda \frac{C}{\lambda^3} + 4\lambda^2 c_0^2 \lambda^{-3} + 4\lambda^2 C \lambda^{-3} \\
&= C \lambda^{-3} - C \lambda^{-2} + c_0^2 \lambda^{-1} + C \lambda^{-1} \\
&= c_0^2 \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})
\end{aligned} \tag{6.40}$$

elde edilir. O halde (6.34), (6.35), (6.38), (6.40)'dan $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\begin{aligned}
\ln \Psi(\lambda) &= -c_0 - (2S - c_0 + i\pi c_1) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \\
\Psi(\lambda) &= e^{-c_0} e^{-(2S - c_0 + i\pi c_1) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})} \\
&= e^{-c_0} \left(1 - (2S - c_0 + i\pi c_1) \lambda^{-1} + \frac{(2S - c_0 + i\pi c_1)^2 \lambda^{-2}}{2!} + \dots + O(\lambda^{-2}) \right)
\end{aligned} \tag{6.41}$$

olur.(6.41)'den

$$\Phi(\lambda) = \frac{C_0 e^{-c_0} \sinh \lambda}{\lambda} \left[1 - (2S - c_0 + i\pi c_1) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right] \tag{6.42}$$

elde edilir. Yeterince büyük λ 'lar için (6.32)'den ve Lemma 6.4'ten,

$$|\gamma_0(\lambda)| \leq C |\lambda|^{-1} e^{|\lambda|}$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan $\gamma_0(\lambda)$ tam fonksiyonunun mertebesi birdir. Teorem 6.2'nin

bakış açısıyla $\sum_{n=p+1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2}$ serisinin yakınsadığı ve böylece γ_0 ile alakalı kanonik

çarpımların sınıfının bir olduğu sonucuna ulaşılır. Hadamard teoremini uygulayarak α_0 ,

α_1 herhangi sayılar olmak üzere,

$$\gamma_0(\lambda) = e^{P(\lambda)} \Phi(\lambda)$$

$$P(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0 + 2 \sum_{n=p+1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2} \operatorname{Re} \lambda_n$$

elde edilir. [16] Böylece (6.42)'den dolayı $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\gamma_0(\lambda) = \frac{C_0 e^{P(\lambda)} \sinh \lambda}{\lambda} \left[1 - (2S - c_0 + i\pi c_1) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right]$$

şeklindedir.

Diğer taraftan Lemma 6.4 ve (6.32)'den $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$\gamma_0(\lambda) = \frac{e^{\lambda + \int_0^1 p(x) dx}}{2\lambda} \left[1 + \left(\int_0^1 \phi_1^{(+)}(x) dx - p(0) \right) \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right] + O(\lambda^{-1} e^{-\lambda})$$

şeklindedir. Son iki eşitliği kıyaslayarak

$$\alpha_1 = 0 ,$$

$$C_0 e^{\alpha_0 - c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2} \operatorname{Re} \lambda_n} = e^{\int_0^1 p(x) dx}$$

ve

$$-(2S - c_0 + i\pi c_1) = \int_0^1 \phi_1^{(+)}(x) dx - p(0)$$

olur. (6.26) ve (6.28)'den,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (\lambda_n - c_0) &= c_0 + p(0) - \int_0^1 \phi_1^{(+)}(x) dx - i\pi c_1 \\ &= \frac{p(0) + p(1)}{2} - \int_0^1 p(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 6.3'ün ispatı tamamlanır.

KAYNAKLAR

- [1]. Aydın, M., vd, 1995 ,“Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları”, 3. Baskı, Fakülteler Kitapevi, Barış Yayınları.
- [2]. Baş, E., 2006, Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters Problemleri, Doktora Tezi, Fırat Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [3]. Başkan, T., 2010, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 6. Baskı , Dora Yayınları , Uludağ Üniv. ,Bursa
- [4]. Borisov, D., Freitas , P. 2009, Eigenvalue Asymptotics , Inverse Problems and a Trace Formula for the Linear Damped Wave Equation, J. Differential Equations 247 3028–3039
- [5]. Churchill, R.V. ,1963. Fourier Series and Boundary Value Problems. 2d. ed. Mc Graw-Hill
- [6]. Churchill, R.V., Brown , J.W. ,1976 , Complex Variables and Applications. Michigan.
- [7]. Erdélyi, A. , 1956, Asymptotic Expansions, Dover Publications Inc., New York.
- [8]. Fedoryuk, M.V., 1993, Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.
- [9]. Gelfand, I. M., Levitan, B. M. , 1953 , “On a Simple Identity for the Characteristic Values of a Differential Operator of the Second Order,” Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 88, pp. 593–59 .
- [10]. Gelfand, I.M., 1956, Usp. Mat. Nauk. II 1 ,191–198.
- [11]. Hochstadt, H., 1978, The Functions of Mathematical Physics (A Series of Pure and Applied Mathematics), Brooklyn, New-York.
- [12]. Koyunbakan, H. , 2002, " Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi". Doktora Tezi, Elazığ.
- [13]. Krein, M.G. , 1951, Solution of Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 76, 21-24.
- [14]. Krein, M.G. , 1953, Matem. Sb. 33 (75) , 597–626.
- [15]. Kreyszing, E. ,1978, Introductory Functional Analysis with Applications, New York.
- [16]. Levin, B.J. , 1964, Distribution of Zeros of Entire Functions, Amer. Math.Soc.
- [17]. Levitan, B. M., 1964, Calculation of the Regularized Trace for Sturm-Liouville Operators, Uspehi Mat. Nauk 19, no. 1(115), 161-165, Russian MR 28,3195

- [18]. Levitan, B. M. And M. G. Gaysmov, 1964, Determination of a Differential Equations by Two of Its Spectra, Russian Math. Surveys,
- [19]. Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. , 1975, Introduction to Spectral Teory: Selfadjoint Ordinary Differantial Operators, Amer. Math. Soc. Transl. Math
- [20]. Liousternik, L. A. and Sobolev, V.J. , 1961 , Elements of Functional Analiysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York
- [21]. Marchenko, V.A. , 1950 , Some Problems in the Theory of Second-Order Differential Operators, Dqjl. Akad. Nauk SSSR.
- [22]. Marchenko, V.A. , 1977, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Kiev.
- [23]. Naimark, M.A., ,1969 ,Linear Differential Operators, Ungar, New-York .
- [24]. Olver, F. W. J. , 1974, Introduction to Asymptotics and Special Functions .
- [25]. Panakhov, E.S. ,1980, On the Determination the Differential Operator Pecularity in Zero. DEP VINITI AN SSSR, NO: 4407-80, 1-16.
- [26]. Panakhov, E.S. , Koyubakan H. ,2003 Inverse Problem For Singüler Sturm-Liouville Operator. Proc.of IMM of NASA vol.18. pp113-126.
- [27]. Titchmarsh, E.C. ,1958, Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations II, Oxford, Clarendon Pres.
- [28]. Titchmarsh, E.C. , 1964, Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations I, Oxford, Clarendon Pres.
- [29]. Watson, 1949, Theory of Bessel Functions, I.L.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Sivas'ta doğdu. 2002 yılında Dört Eylül İlköğretim Okulu'ndan ve 2006 yılında Cumhuriyet Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2006 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kayıt yaptırdı. 2011 yılında formasyon alarak buradan mezun olup, aynı yıl Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2012 yılında ise ÖYP programı ile Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve halen görevine devam etmektedir.