

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ İÇİN STURM-LİOUVILLE
PROBLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN
(121121116)
Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Uygulamalı Matematik
Danışman: Doç. Dr. Erdal BAŞ
ARALIK-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ İÇİN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN
SPEKTRAL TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN
(121121116)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03.12.2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 22.12.2014

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Erdal BAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

: Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR

ARALIK-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Erdal BAŞ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yanında çalışmaktan dolayı onur duyduğumu belirtmek ister, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgöründen dolayı ise özellikle teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocamıza da teşekkür ederim.

Bu zorlu süreçte beni yalnız bırakmayan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen eşime, aileme ve tüm dostlarıma teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
2.2. Sabit Katsayılı Fark Denklemleri	11
2.3. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	15
2.4. İkinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri	16
2.5. Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemlerindeki Karşılığı	18
3. SINIR DEĞER PROBLEMİ	20
3.1. Temel Kavramlar	20
3.2. Lineer Sınır Değer Problemleri	33
4. FARK DENKLEMLERİ İÇİN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	40
4.1. Fark Denklemlerinin Spektral Analizi	40
4.2. Özdeğerlerin Matris Yardımıyla Bulunması	56
4.3. Regüler Sturm-Liouville Problemi	60
4.4. Özfonksiyon Açılımı ve Spektral Fonksiyon	67
4.5. Fark Denklemleri İçin Parametrelerin Değişimi Metodu	70
4.6. Sturm-Liouville Probleminin Çözümünün Görüntüsü	72
Sonuç	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	83

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde fark denklemlerinin ortaya çıkışı, gelişimi, tarihçesi ve uygulama alanları hakkında genel bilgi verilmiş olup ikinci bölümde temel tanım ve teoremler, fark denklemleri için çözüm yöntemleri ve diferansiyel denklemlerle fark denklemleri arasındaki bağlantı verilmiştir. Üçüncü bölümde, sınır değer problemi, diskonjugelik kavramı, Green fonksiyonu, genelleştirilmiş ve basit sıfırlar verilmiş ve çözümün tekliği incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise Sturm-Liouville problemi, özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir. Ayrıca parametrelerin değişimi metodu yardımıyla Sturm-Liouville probleminin çözümünün görüntüsü elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemleri, Sturm-Liouville, Özdeğer, Özfonksiyon, Casoratyan.

SUMMARY

Spectral Theory Of Sturm-Liouville Problem For Difference Equations

This study consists of four chapters. In the first chapter, the appearance, development, history and application fields of difference equations are given.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems, solution methods for difference equations and relation between differential equations and difference equations are given.

In the third chapter, boundary value problem, disconjugacy concept, Green function, generalized and simple zeros are given and the uniqueness of solution is analyzed.

In the last chapter of this thesis, Sturm-Liouville problem, its eigenvalues and eigenfunctions are analyzed. Furthermore, the map of solution is obtained for Sturm-Liouville problem by means of variation of parameters method.

Key Words: Difference Equations, Sturm-Liouville, Eigenvalue, Eigenfunction, Casoratyan.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı singeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Δ	:	Fark operatörü
Δ^{-1}	:	Ters fark operatörü
I	:	Birim operatör
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
D	:	Türev operatörü
$!$	:	Faktöriyel
$\langle, \rangle$	:	İç çarpım
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\binom{k}{j}$	:	Kombinasyon
W	:	Casoratyan
$\det$	:	Determinant
π	:	Pi
$\sum$	:	Toplam sembolü
λ	:	Özdeğer
α	:	Alfa
β	:	Beta
$\int$	:	İntegral operatörü
∇	:	Geri fark operatörü
$\frac{d}{d\lambda}$	:	Türev operatörü
γ	:	Gamma
δ	:	Delta
$\prod$	:	Çarpım sembolü

ŞEKİLLER LİSTESİ

Tablo 2.1.	1
-----------------	---

1. GİRİŞ

Reküransla hesaplama fikri M.Ö. 200'lerde Babiller tarafından köklü sayıların yaklaşık değerini bulmak için ilkel formda oluşturuldu.

Fark denklemleri ve rekürans bağıntıları ve özellikleri daha aşikar olarak M.Ö. 450'lerde Pisagor, Arşimed ve Öklid gibi antik Yunan matematikçiler tarafından çalışıldı.

Pisagor'un en büyük katkılarından birisi üçgen sayıları fikridir. Modern gösterimle ifade edildiğinde

$$t_n = t_{n-1} + n$$

fark denkleminin karşılık geldiği görülmüştür. Ayrıca Pisagor

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

denkleminin çözümünü elde etmek için

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1},$$

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1},$$

fark denklem sistemini geliştirdi ve bununla $\sqrt{2}$ 'nin yaklaşık değerini bulmaya çalıştılar.

M.Ö. 250'lerde Arşimed Pi sayısını hesaplamak için yok etme metodunu kullanmıştır. Bu metod bir çokgenin içine yarıçapı 1 olan bir çember çizilmesiyle ilgilidir. Çokgenin kenar sayısı arttıkça çevresi çemberin çevresine yaklaşacaktır. Yani,

$$\begin{aligned} S_6 &= 1, \\ S_{2n} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\underbrace{\dots}_{(n-1) \text{ defa}}} + \sqrt{3}}}}, \\ \pi &\cong 48S_{96} \sim 3.14103. \end{aligned}$$

Öklid daha sonraki yıllarda Öklid algoritmasıyla P-problemini çalışmıştır,

$$a = bq + r,$$

olmak üzere öyle bir u sayısı bulalım ki a ve b 'yi bölsün. Bu halde u , r 'yi de böler.

Tekrarlı kesirlerin temeli Öklid algoritmasına dayanır.

M.S. 400'lerde Heron kendi adıyla adlandırılan Heron formülünü pozitif bir a sayısı-

nın kökünün yaklaşık değerini bulmak için geliştirdi,

$$x_{n+1} = \frac{\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}{2}.$$

Aslında bu formül Newton formülünün özel bir durumudur.

Theon da köşe ve köşegen sayılarıyla iki dizi oluşturarak $\sqrt{2}$ 'nin yaklaşık değerini bulmaya çalıştı.

$$\begin{array}{ll} x_2 = x_1 + y_1 & y_2 = 2x_1 + y_1 \\ x_3 = x_2 + y_2 & y_3 = 2x_2 + y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n = x_{n-1} + y_{n-1} & y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \end{array}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = 1, \frac{y_2}{x_2} = \frac{3}{2}, \frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{5}, \dots$$

Diaphontus Diaphone denklemlerini çözmek için rekürans bağıntılarını kullanmıştır.

400-1200 arasında fark denklemlerinin ortaya çıkışını gözlemliyoruz. İlk büyük Hind matematikçilerden Brahmagupta kendi adıyla adlandırılan Brahmagupta polinomlarını rekürans bağıntısıyla verdi,

$$\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & xx_n + ty_n, \\ y_{n+1} & = & xy_n + yx_n. \end{array}$$

El-Karaji ve Ömer Hayyam gibi matematikçiler sonsuz terimli polinomsal cebir üzerine çalıştı ve Karaji Pascal üçgenini ilk inşa eden kişi oldu.

Hind matematikçi Bhaskara ve Brouchner $\frac{a}{b}$ 'nin $\sqrt{n}$ 'e yaklaşımını

$$a^2 - n - b^2 = \pm 1$$

ile ifade ettiler.

$$\begin{array}{lcl} a_i & = & a_{i-1} + b_{i-1}n, \\ b_i & = & a_{i-1} + b_{i-1}, \\ a_1 & = & b_1 = 1, \end{array}$$

rekürans bağıntısı ile $n = 2$ için $\sqrt{2}$ 'nin yaklaşık değerini buldular.

Matematikçi Al-Samawal kitabında tümevarımın ilk formunu kullanmıştır. Bu da bir rekürans bağıntısıdır ve benzer metodu El-Karaji de kullanmıştır.

1202’de Fibonacci ünlü tavşan problemi için biyolojide ilk matematiksel modeli tanıtmış ancak modern anlamda formülleştirilmesi 1634’te Albert Girard tarafından yapılmıştır.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$$F_1 = F_2 = 1,$$

1265’te Nasır El-Tusi rekürans bağıntılarına çalışmıştır. Ayrıca binom katsayılarını belirlemiştir.

El-Benna kareköklerin yaklaşık değerini hesaplamak için tekrarlı kesirleri kullandı,

$$r = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}}.$$

Ayrıca binom katsayıları için rekürans bağıntısını ortaya çıkardı,

$${}_p C_k = {}_p C_{k-1} \frac{(p - k + 1)}{k}.$$

El-Farisi ise çokgenlerin kenar sayıları ile binom katsayıları arasında bir bağlantı kurdu. Ayrıca üçgen sayılarıyla üçgen sayılarının toplamaları arasında bağlantı kurarak kombinasyonu elde etti.

Rekürans metodu tümevarımın icadıyla 16. yy.’da Francesco Maurolico tarafından geliştirildi ve 17. yy.’da Fermat ve Pascal’la gelişimi devam etti.

1600’lerde Jacob Bernoulli, Bernoulli sayılarını rekürans bağıntısıyla ifade etti. Ayrıca Bernoulli metodunda polinom denkleminin köklerini bulmak için fark denklemini kullandı,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

$$a_0 y(t + n) + a_1 y(t + n - 1) + \dots + a_n y(t) = 0.$$

Abraham De Moivre bazı aritmetik diziler elde etti,

$$a_k = a_{k-1} + d = a_{k-2} + 2d = \dots = a_1 + d(k - 1).$$

Sir Isaac Newton genel binom formülüne katkı sağladı ve birinci türevi mevcut olan sıfırların yaklaşık değerini elde etmek için bir metod geliştirdi. 1676’da $(a + b)^x$ ’in

açılımına dair bazı örnekler tanımladı. Burada x negatif yada kesirli bir sayıdır.

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= \alpha, \\ (\alpha b) \left[\frac{m}{n} \right] &= \beta, \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(a + b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + (\alpha b) \left[\frac{m}{n} \right] + (\beta b) \left[\frac{(m - n)}{2n} \right] + (\gamma b) \left[\frac{(m - 2n)}{3n} \right] + \dots$$

eşitliği elde edilir. Böylece kesirli yada negatif tamsayılı kuvvetlerin binom açılımı sonsuz serilerin toplamı şeklindedir ve bu serinin terimleri bir rekürans bağıntısıdır.

Newton metodunda ise diferansiyellenebilir fonksiyonun reel köklerinin yaklaşık değerleri için tanjant eğrisi kullanılır.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

Buradan hareketle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Sir Thomas Harriet sonlu farklar kalkülüsünü geliştirdi ve Henry Briggs logaritma hesaplamalarına uyguladı.

1572'de Bombelli $\sqrt{2}$ 'nin yaklaşık değerini bulmak için

$$y_n = 2 + \frac{1}{y_{n-1}}$$

fark denklemiyle ilgilendi. Aynı zamanda bu denklem Fibonacci sayılarının oranına karşılık gelir.

Blaise Pascal, Pascal üçgeni olarak bilinen binom katsayılarıyla ilgilendi.

$$\begin{aligned} a_k^n &= a_{k-1}^{n-1} + a_k^{n-1}, \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

1700-1750 arasında Riccati kendi adıyla anılan

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

Riccati fark denklemini çalıştı.

1771’de Gaspard Monge sonlu fark denklemleri üzerine geometrik açıdan birçok makale yayınladı. Bunun ardından Stirling’le büyük gelişme kaydetti.

1782-1812 arasında Laplace "rete fonksiyonlar metodu"nın geliştirilmesini içeren interpolasyon metodunu ortaya çıkardı.

1821’de Babbage fark metodunu kullanarak aritmetik hesaplamalar için Fark Motorunu geliştirdi.

Benjamin Gompertz aktüeryal sorulara fark hesabını uyguladı. Gombertz’in ölüm yasaı bunlardan biridir,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= r(t) V(t), V(0) = V_0, \\ \frac{dr}{dt} &= \alpha r(t), r(0) = \beta,\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\ln \left(\frac{V_{n+1}}{\theta} \right) = \ln \left(\frac{FV_n}{\theta} \right) e^{-\alpha t},$$

fark denklemi elde edilir.

Lineer fark denklemlerinin temel teorisi De Moivre, Euler, Lagrange, Laplace ve diğerkleri tarafından geliştirildi. Lineer fark denklemlerinin çözümlerinin asimtotik davranışları 1880’lerde Poincare tarafından verildi ve 1909’larda Perron bu sonucun önemli bir aılımmını verdi. 1930’larda ise Birkhoff ve öğrencileri tarafından belli bir seviyeye getirildi.

1769’da diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için fark denklemlerini kullanma fikri Euler’in çokgensel metoduyla ortaya çıktı. 19. yy.’da Lipschitz, Runge ve Kutta yöntemleri geliştirildi.

Özel fonksiyonların hesaplanması için lineer fark denklemlerinin etkili uygulaması Bessel fonksiyonları için 1952’de Miller algoritmasıyla ortaya ıktı. Lineer fark denklemleri teorisinin gelişimi Hartman, Ahlbrandt ve Peterson tarafından lineer diferansiyel denklemlerle karşılaştırılabilmesiyle geldi.

1826’dan sonra simplektik fark sistemlerinin osilasyon ve dönüşüm teorisi ortaya çıkmıştır. Simplektik fark sistemleri 1. mertebeden rekürans sistemlerdir,

$$z_{n+1} = S_k z_k.$$

Simplektik fark sistemleri fark denklemleri ve sistemlerinin içinde büyük bir yere sahiptir ve özel bir durumu ise 2. mertebeden Sturm-Liouville fark denklemdir,

$$\Delta (r_k \Delta x_k) - p_k x_{k+1} = 0.$$

Liouville'in bir başka çalışması ise tekrarlı kesirlerle transandantal sayıları inşa etmesidir.

1851'den sonra Felice Casorati fark ve diferansiyel denklemlerin benzer birçok özelliğini keşfetti. Casoratyan diferansiyel denklemdeki Wronskian'a benzer bir fark denklemdir. Ayrıca lineer fark denklemleri için Casorati formülünü geliştirdi.

1876'dan sonra Hermite kendi adıyla anılan diferansiyel denklemin çözümü için rekürans bağıntısını kullandı.

Elwin Christoffel da tekrarlı kesirlere katkılarıyla bilinir,

$$r = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

r rasyonel ise bu açılım sonludur, r irrasyonel ise sonsuzdur.

1901'den sonra fraktallar ve eğrileri dolduran düzlemler fark denklemlerinin birçok uygulamasından ikisidir. En önemlilerinden birkaçı ise Runge-Kutta ve Picard metodudur.

1926'dan sonra Fatou ve Julia tarafından kompleks tanımlı rasyonel fonksiyonlar üzerine fark denklemleri ve rekürans bağıntılarıyla çalışıldı. 1970'lerin sonlarında Benoit Mandelbrot tarafından fraktalların keşfine kadar gereken ilgiyi göremediler.

Fizik, matematik ve mühendisliğin birçok problemi sınır değer problemleri ve fark denklemleriyle bağlantılıdır. Sınır değer problemleri ve fark denklemleriyle alakalı çok sayıda kitap ve makale bulunmaktadır. Ayrık ve sürekli sınır denklemleriyle ilgili Atkinson (1964), fark denklemleriyle ilgili Elaydi (2004), Akhiezer (1965), sınır değer problemleriyle ilgili Akhiezer ve Glazman (1963), Kuzhel (1996), Stone (1932) çalışmıştır [3].

Ülkemizde Çağal (1989), Rafatov (1998), Aminali (2002), Akın (1998)'ın kitaplarında fark denklemleriyle ilgili çalışmalar görülmektedir [3].

Bağımsız değişkeni ayrık yada onu bir ayrık değişken gibi görmek matematiksel bakımdan uygun olduğu zaman fark denklem modelleri ortaya çıkar. Örneğin, genetik alanda genetik özellikler kuşaktan kuşağa değişim gösterirler. Dolayısıyla, bir kuşağı

gösteren bir ayrık değişkendir. Ekonomide fiyat değişimleri yıldan yıla veya aydan aya veya haftadan haftaya veya günden güne hesaplanır ve böyle bir durumda zaman değişkeni ayrıktır. Ayrıca popülasyon dinamiklerinde, yaş grupları arasındaki nüfus değişimi ele alınırken, yaş gruplarını gösteren değişken yine ayrık bir değişkendir.

Fark denklemleri son 30 yıl içerisinde pek çok bilim adamının ilgisini çekmiştir ve bu durum zengin bir literatürün ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bununla ilgili olarak Miller (1968), Goldberg (1986), Lakshmikantham ve Trigiante (1988), Mickens (1990), Akın ve Bulgak (1998), Elaydi (1999), Agarwal (2000), Kelley ve Peterson (2001) kitaplarından söz edilebilir [3].

Fark denklemleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, tıpta hücre hareketlerinin takibinde, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespitinde ve daha birçok alanda fark denklemleriyle karşılaşılmaktadır.

Önemli fark denklem modellerine ilişkin bazı örnekler şunlardır:

i) **Nüfus artış modeli,**

$$x(n+1) - x(n) := bx(n) - dx(n) \text{ yada } x(n+1) = ax(n)$$

ii) **Lojistik artış modeli,**

$$x(n+1) - x(n) = ax(n) - bx^2(n)$$

iii) **Av-avcı modeli,**

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = -ax(n) + bx(n)y(n), a > 0, b > 0, \\ y(n+1) - y(n) = cx(n) - dx(n)y(n), c > 0, d > 0. \end{cases}$$

iv) **Rekabet modeli,**

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = ax(n) - bx(n)y(n), a > 0, b > 0, \\ y(n+1) - y(n) = cx(n) - dx(n)y(n), c > 0, d > 0. \end{cases}$$

v) **Bulaşıcı hastalık modeli,**

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = -\beta x(n)y(n), \beta > 0, \\ y(n+1) - y(n) = \beta x(n)y(n). \end{cases}$$

Diferansiyel denklemler 200 yılı aşkın bir sürede incelendiği halde fark denklemleri 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir. Bir bakımdan, fark denklemleri daha ziyade sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Günümüzde diferansiyel

denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırmak istenmiştir [3, 10, 12, 25].

Sonuç olarak, gerek fark denklemleri ile ilgili gerekse Sturm-Liouville problemleri ve uygulama alanları ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapılmıştır [4, 7, 11, 13 – 24, 26 – 28].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1. X ve Y vektör uzayları ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren dönüşüme D 'den Y 'ye bir operatör denir [8].

Tanım 2.1.2. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere, $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x 'in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır [1, 3].

Teorem 2.1.1. Δ fark operatörü lineerdir, yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n), \quad (a, b \text{ sabit})$$

eşitliği sağlanır [1, 3].

Tanım 2.1.3. E öteleme operatörü

$$Ex(n) = x(n+1)$$

şeklinde tanımlanır [1, 3].

Tanım 2.1.4. (Ters Fark Operatörü) $n \geq n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için, c keyfi sabit olmak üzere

$$\Delta^{-1}f(n) = F(n) + c$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ 'in ters farkı denir [1, 3].

Lemma 2.1.1. Δ fark operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [1, 3],

$$\text{i) } \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0) \tag{2.1.1}$$

$$\text{ii) } \Delta_n \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \right) = x(n) \tag{2.1.2}$$

Teorem 2.1.2. Bir $f(n)$ fonksiyonu $n \geq 0$ için tanımlı ise bu durumda,

$$\Delta^{-1}f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c, \quad (c \text{ sabit}) \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlıdır [1, 3].

$f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için tanımlı ise o zaman $f(n)$ 'in ters farkı

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}f(n) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + c, \\ \Delta^{-2}f(n) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1n + c_2, \\ \Delta^{-3}f(n) &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1n^2 + c_2n + c_3, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [1, 3].

Teorem 2.1.3. Diferansiyel analizde kısmi integrasyona benzer bir ifade

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{n-1} y(i) \Delta x(i) = x(n) y(n) - \sum_{i=0}^{n-1} x(i+1) \Delta y(i) + c$$

$$\text{b) } \sum_{i=0}^{n-1} y(i+1) \Delta x(i) = x(n) y(n) - \sum_{i=0}^{n-1} x(i) \Delta y(i) + c$$

şeklindedir [1, 3].

Teorem 2.1.4. $\Delta F(n) = f(n)$ ve a, b ($b \geq a$) tamsayılar olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=a}^b f(i) = F(b+1) - F(a)$$

eşitliği sağlanır [1, 3].

Fark Analiziyle Diferansiyel Analizin Karşılaştırılması

Fark Analizi	Diferansiyel Analiz
$\Delta x(n) = x(n + \varepsilon) - x(n)$	$Dx(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\varepsilon}$
$\Delta cx = c\Delta x$	$Dcx = cDx$
$\Delta^k x = \Delta(\Delta^{k-1}x)$	$D^k x = D(D^{k-1}x)$
$\Delta x^{(k)} = k\varepsilon x^{(k-1)}$	$Dx^k = kx^{k-1}$
$\Delta(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\Delta x_1 + c_2\Delta x_2$	$D(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Dx_1 + c_2Dx_2$
$x(n)$, k .dereceden bir polinom ise, $\Delta^k x = \text{sabit}$, $l \geq k + 1$ için $\Delta^l x = 0$.	$x(t)$, k .dereceden bir polinom ise, $D^k x = \text{sabit}$, $l \geq k + 1$ için $D^l x = 0$.
$\Delta(xy) = y\Delta x + (Ex)\Delta y$	$D(xy) = yDx + xDy$
$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yEy}$	$D\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yDx - xDy}{y^2}$
$\Delta F = f$ ise $\Delta^{-1}f = F + c$	$DF = f$ ise $\int f = F + c$

Tablo 2.1. [3]

2.2. Sabit Katsayılı Fark Denklemleri

2.2.1. Temel Tanım ve Sonuçlar

Tanım 2.2.1. $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (2.2.1)$$

eşitliğine fark denklemi denir [1, 3].

Tanım 2.2.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin basamağı denir [1, 3].

Tanım 2.2.3. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için (2.2.1) denklemini sağlıyorsa $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde (2.2.1) denkleminin bir çözümü denir. k . basamaktan bir fark denkleminin

$$\psi(n, x, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \text{ veya}$$

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümlüne genel çözüm ve bunlardan elde edilen çözümlere de özel çözüm adı verilir [1, 3].

Tanım 2.2.4. (Başlangıç Değer Problemi) k . basamaktan bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ilişkin

$$x(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1 \quad (2.2.2)$$

veya

$$\Delta^i x(n) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k - 1 \quad (2.2.3)$$

biçiminde ilk k tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir, burada $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ reel sabitlerdir. (2.2.2) veya (2.2.3) koşullarına başlangıç koşulları adı verilir. k . basamaktan bir fark denklemi ve (2.2.2) yada (2.2.3) başlangıç koşullarından oluşan probleme başlangıç değer problemi denir [1 – 3].

Tanım 2.2.5. $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + \dots + a_k(n)x(n) = g(n) \quad (2.2.4)$$

biçimindeki bir denkleme k . basamaktan lineer fark denklemi denir. Bu denklem $g(n) \equiv 0$ olduğunda homojen denklem, aksi durumda homojen olmayan denklem olarak adlandırılır. Buna göre k . basamaktan bir lineer homojen fark denklemi

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + \dots + a_k(n)x(n) = 0 \quad (2.2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse (2.2.5) denkleminde sabit katsayılı, aksi halde değişken katsayılı fark denklemi denir [1, 3].

Teorem 2.2.1. (Varlık-Teklik Teoremi) $a_1(n), a_2(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + \dots + a_k(n)x(n) = g(n) \quad (2.2.6)$$

$$x(n_0) = \alpha_0, x(n_0 + 1) = \alpha_1, \dots, x(n_0 + k - 1) = \alpha_{k-1} \quad (2.2.7)$$

başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tanımlı olan bir tek $x(n)$ çözümüne sahiptir [3].

Tanım 2.2.6. $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar. Her $n \geq n_0$ için

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_r f_r(n) = 0 \quad (2.2.8)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_r$ sabitleri var ise bu durumda

$$\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$$

cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir. (2.2.8) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa $\{f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir [1, 3].

Tanım 2.2.7. (2.2.5)'nin k tane lineer bağımsız çözümünün cümlesine bir temel cümle denir [1, 3].

Tanım 2.2.8. $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ fonksiyonlarının $W(n)$ ile gösterilen Casoratyanı

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır [1, 3].

Lemma 2.2.1. (Abel Lemması) $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ fonksiyonları (2.2.5) homojen denkleminin çözümleri ve $W(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i) \right) W(n_0)$$

eşitliği sağlanır [1, 3].

Sonuç 2.2.1. $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ fonksiyonları (2.2.5)'nin çözümleri ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ sayısına karşılık $W(n) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır [1, 3].

Teorem 2.2.2. (2.2.5) homojen denkleminin $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ çözümlerinin bir temel cümle oluşturmaları için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır [1, 3].

Teorem 2.2.3. Her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ ise bu durumda (2.2.5) lineer homojen fark denkleminin $[n_0, \infty)$ üzerinde bir temel cümleye sahiptir [1, 3].

Teorem 2.2.4. (2.2.5) homojen denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü

$$x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n),$$

olsun. Bu durumda (2.2.5)'nin genel çözümü $c_1, c_2, \dots, c_k$ keyfi sabitler olmak üzere

$$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \dots + c_k x_k(n),$$

eşitliği vardır [1, 3].

Tanım 2.2.9. V , k . basamaktan (2.2.5) homojen denkleminin bütün çözümlerinin cümlesi olmak üzere $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleri

i) $x, y \in V$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n),$$

ii) $x \in V$ ve a bir sabit olmak üzere

$$(ax)(n) = ax(n),$$

şeklinde tanımlanırsa $(V, +, \cdot)$ k boyutlu lineer vektör uzayıdır [1, 3].

Teorem 2.2.5. (2.2.5) homojen denkleminin genel çözümü $x_h(n)$ ve homojen olmayan (2.2.4) denkleminin bir özel çözümü $x_p(n)$ ise bu durumda (2.2.4) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = x_h(n) + x_p(n)$$

olur [1, 3].

2.3. Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Bu bölümde birinci basamaktan lineer homojen olmayan

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (2.3.1)$$

fark denklemi ve

$$x(n_0) = x_0, \quad (2.3.2)$$

başlangıç koşulundan meydana gelen başlangıç değer problemi ele alınacaktır; $a(n)$ ve $g(n)$ $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ 'dır $[1, 3]$.

(2.3.1) denklemine ilişkin

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (2.3.3)$$

homojen denklemini ele alalım. Ayrıca $\prod_{i=n_0}^k a(i) = 1$ ve $\sum_{i=n_0}^k a(i) = 0$ olsunlar.

Teorem 2.3.1. (2.3.3) homojen fark denklemi ve (2.3.2) başlangıç koşullarından oluşan problemin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0, \quad (2.3.4)$$

olup (2.3.1) – (2.3.2) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right) g(r) \quad (2.3.5)$$

şeklindedir $[1, 3]$.

Açıklama 2.3.1. 1. basamaktan sabit katsayılı

$$x(n+1) = ax(n) + g(n), \quad (2.3.6)$$

denklemi ve

$$x(0) = x_0, \quad (2.3.7)$$

koşulu için (2.3.5) çözüm formülü

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r), \quad (2.3.8)$$

olur.

Ayrıca g bir sabit olmak üzere $g(n) = g$ olduğu zaman (2.3.8)'den

$$x(n) = \begin{cases} a^n x_0 + \left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) g, & a \neq 1 \\ x_0 + g(n), & a = 1 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

şeklinde yazılabilir [1, 3].

2.4. İkinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

a_1, a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere 2. basamaktan sabit katsayılı lineer homojen

$$x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0, \quad (2.4.1)$$

fark denklemleri için çözüm aranırsa,

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (2.4.2)$$

bulunur. Bu denkleme (2.4.1) fark denkleminin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin λ_1, λ_2 köklerine karakteristik kökler adı verilir.

(2.4.1) homojen fark denkleminin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır [1, 3].

Durum 2.4.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve reel ise $(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$ cümlesi (2.4.1) denkleminin bir temel cümlesidir. Buradan (2.4.1)'in genel çözümü

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad (2.4.3)$$

biçimindedir.

Durum 2.4.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu durumda (2.4.1)'in temel cümlesi $\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ olup genel çözüm aşağıdaki biçimdedir,

$$x(n) = (c_1 + c_2 n) \lambda^n, \quad (2.4.4)$$

Durum 2.4.3. $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ 'dır. Bu durumda (2.4.1)'in temel cümlesi $\{r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta\}$ 'dir, burada

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right),$$

Buradan (2.4.1)'in genel çözümü

$$x(n) = r^n (c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta) \quad (2.4.5)$$

veya

$$x(n) = Ar^n \cos(n\theta - \beta),$$

biçimindedir.

Tanım 2.4.1. $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $a_0(n) \neq 0$, $a_2(n) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(n)x(n+2) + a_1(n)x(n+1) + a_2(n)x(n) = 0, \quad n \geq n_0 \quad (2.4.6)$$

fark denkleminin ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen fark denklemi denir [1, 3].

Teorem 2.4.1. (Basamağın İndirgenmesi) $x_1(n)$, (2.4.6) denkleminin her $n \geq n_0$ için sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $a_0(n)$ ve $a_2(n)$ katsayıları $[n_0, \infty)$ üzerinde sıfırdan farklı ise o zaman

$$x_2(n) = x_1(n) \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{W(i)}{x_1(i)x_1(i+1)},$$

ifadesi (2.4.6) denkleminin ikinci bağımsız çözümüdür, burada $W(n)$,

$$W(n+1) = \frac{a_2(n)}{a_0(n)} W(n)$$

eşitliğinin aşıkâr olmayan bir çözümüdür [1, 3].

Tanım 2.4.2. k . basamaktan değişken katsayılı lineer homojen olmayan

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = g(n), \quad (2.4.7)$$

fark denklemi ele alınmaktadır. $a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayıları $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ 'dır [1, 3].

2.5. Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemlerindeki Karşılığı

Aşağıdaki 2. mertebeden lineer self-adjoint diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$(P(x) z'(x))' + Q(x) z(x) = 0, \quad (2.5.1)$$

$[c, d]$ içinde $P(x) > 0$ ve $[c, d]$ üzerinde $P(x)$, $Q(x)$ 'in sürekli olduğunu varsayalım. (2.5.1) denkleminin self-adjoint bir fark denklemi olduğunu gösterelim [1]. Şimdi, küçük $h = \frac{d-c}{t}$ için

$$z'(x) \approx \frac{z(x) - z(x-h)}{h}$$

alnabilir ve buradan

$$(P(x) z'(x))' \approx \frac{1}{h} \left\{ \frac{P(x+h) [z(x+h) - z(x)]}{h} - \frac{P(x) [z(x) - z(x-h)]}{h} \right\},$$

elde edilir. Böylece

$$(P(x) z'(x))' \approx \frac{1}{h^2} \{ P(x+h) z(x+h) - [P(x+h) + P(x)] z(x) + P(x) z(x-h) \}$$

olur.

$$x = c + nh,$$

n , $0 \leq n \leq t$ tamsayı değerleri üzerinde alınan ayırık bir değişken olmak üzere

$$y(n) = z(c + nh),$$

olsun, burada $z(x)$, $[c, d]$ üzerindeki (2.5.1) denkleminin bir çözümüdür. O zaman

$$\begin{aligned} P(c + (n+1)h) z(c + (n+1)h) - [P(c + (n+1)h) + P(c + nh)] z(c + nh) \\ + P(c + nh) z(c + (n-1)h) + h^2 Q(c + nh) z(c + nh) \approx 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned} p(n-1) &= P(c + nh), \\ q(n) &= h^2 Q(c + nh) \end{aligned}$$

olacak şekilde alırsak sırasıyla $1 \leq n \leq t$ ve $1 \leq n \leq t-1$ için,

$$p(n) y(n+1) - (p(n) + p(n-1)) y(n) + p(n-1) y(n-1) + q(n) y(n) \approx 0,$$

bulunur. Son olarak bu ifadeyi aşağıdaki biçimde yazabiliriz,

$$\Delta(p(n-1) \Delta y(n-1)) + q(n) y(n) \approx 0,$$

$1 \leq n \leq t-1$ olmak üzere $y(n)$, $0 \leq n \leq t$ için tanımlıdır.

2. mertebeden lineer self-adjoint fark denklemi

$$\Delta(p(n-1)\Delta y(n-1)) + q(n)y(n) = 0, \quad (2.5.2)$$

şeklinde tanımlıdır, $p(t)$ 'nin $[a, b+1] = \{a, a+1, \dots, b+1\}$ tamsayı kümesi üzerinde tanımlı ve pozitif olduğunu, $q(t)$ 'nin $[a+1, b+1]$ tamsayı kümesi üzerinde tanımlı olduğunu varsayalım. (2.5.2) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$p(n)y(n+1) + c(n)y(n) + p(n-1)y(n-1) = 0, \quad (2.5.3)$$

$n \in [a+1, b+1]$ olmak üzere

$$c(n) = q(n) - p(n) - p(n-1) \quad (2.5.4)$$

eşitliği mevcuttur.

(2.5.3) denklemi $y(n+1)$ ve $y(n-1)$ için tek bir şekilde çözülebildiğinden (2.5.3) başlangıç değer problemi,

$$\begin{aligned} y(n_0) &= A, \\ y(n_0+1) &= B, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir, $n_0 \in [a, b+1]$ içindedir, A, B sabit, ve bu başlangıç değer problemi $[a, b+2] (\equiv \{a, a+1, \dots, b+2\})$ 'nin tümünde tanımlı tek bir çözüme sahiptir. Ayrıca benzer bir durum karşılık gelen homojen olmayan denklem için de doğrudur.

(2.5.3) denklemi şeklinde yazılabilen herhangi bir denklem için, $[a, b+1]$ üzerinde $p(t) > 0$,

$$q(n) = c(n) + p(n) + p(n-1), \quad (2.5.5)$$

olarak (2.5.2) denkleminin self-adjoint formunda yazılabilir.

3. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde, esas itibarıyla ikinci basamaktan lineer self-adjoint fark denklemlerini kapsayan sınır değer problemleri ele alınacak, çözümlerin hangi koşullar altında tek olduğu incelenecek ve çözümleri bulmak için Green fonksiyonu inşa edilecektir [1 – 3].

3.1. Temel Kavramlar

İkinci basamaktan lineer self-adjoint

$$\Delta (p(n-1) \Delta x(n-1)) + q(n) x(n) = 0 \quad (3.1.1)$$

fark denklemini ele alalım, burada $p(n)$ fonksiyonu $[a, b+1] \equiv \{a, a+1, \dots, b+1\}$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerli, $q(n)$ fonksiyonu $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlıdır.

$$\begin{aligned} \Delta (p(n-1) \Delta x(n-1)) &= p(n) \Delta x(n) - p(n-1) \Delta x(n-1) \\ &= p(n) (x(n+1) - x(n)) - p(n-1) (x(n) - x(n-1)) \\ &= p(n) x(n+1) - p(n) x(n) - p(n-1) x(n) \\ &\quad + p(n-1) x(n-1) \\ &= p(n) x(n+1) + (-p(n-1) - p(n)) x(n) \\ &\quad + p(n-1) x(n-1) \end{aligned}$$

olduğundan bu denklem açık olarak

$$p(n) x(n+1) + c(n) x(n) + p(n-1) x(n-1) = 0, \quad n \in [a+1, b+1] \quad (3.1.2)$$

biçimindedir ve $c(n)$

$$c(n) = q(n) - p(n) - p(n-1) \quad (3.1.3)$$

şeklindedir.

Tersine $p(n)$ fonksiyonu $[a, b+1]$ üzerinde pozitif olduğu sürece (3.1.2) denklemini

$$q(n) = c(n) + p(n) + p(n-1) \quad (3.1.4)$$

olmak üzere (3.1.1) şeklinde yazılabilir.

Genel olarak

$$\alpha(n) x(n+1) + \beta(n) x(n) + \gamma(n) x(n-1) = 0, \quad (3.1.5)$$

denklemini $n \in [a, b+1]$ için $\alpha(n) > 0$ ve $n \in [a+1, b+1]$ için $\gamma(n) > 0$ olmak koşuluyla (3.1.1) self-adjoint formunda gösterilebilir. (3.1.5) denkleminin her iki yanı pozitif bir $\delta(n)$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\delta(n) \alpha(n) x(n+1) + \delta(n) \beta(n) x(n) + \delta(n) \gamma(n) x(n-1) = 0,$$

bulunur. Bu denklemin (3.1.2) self-adjoint formunda olması için

$$\delta(n) \alpha(n) = p(n) \text{ ve } \delta(n) \gamma(n) = p(n-1)$$

sağlanmalıdır. Buradan birinci basamaktan

$$\delta(n+1) \gamma(n+1) = p(n) = \delta(n) \alpha(n)$$

$$\delta(n+1) = \frac{\alpha(n)}{\gamma(n+1)} \delta(n), \quad n \in [a, b]$$

fark denklemini ortaya çıkar. Bu ise

$$\delta(n) = \mu \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

çözümüne sahiptir, burada μ herhangi bir pozitif sabit veya sade olması açısından $\mu = 1$ alınabilir. Böylece

$$p(n) = \alpha(n) \delta(n)$$

$$p(n) = \alpha(n) \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

ve (3.1.4)'ten,

$$q(n) = \delta(n) \beta(n) + p(n) + p(n-1)$$

olduğundan (3.1.5) denklemini (3.1.1) denklemine eşdeğerdir.

Öte yandan, (3.1.2) denklemini $x(n+1)$ ve $x(n-1)$ 'e göre tek olarak çözülebildiğinden, bu denklemin $n_0 \in [a, b+1]$, A ve B sabit olmak üzere

$$x(n_0) = A, \quad x(n_0+1) = B, \tag{3.1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $[a, b+2]$ aralığında ardışık tamsayılar üzerinde tanımlıdır.

Benzer durum (3.1.2) denklemine karşılık gelen homojen olmayan denklem için de doğrudur. Bununla beraber,

$$\Delta^2 x(n-1) + 2x(n) = 0,$$

$$x(0) = A, \quad x(2) = B,$$

sınır değer problemi

$$\Delta^2 x(n-1) + 2x(n) = 0,$$

$$x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) + 2x(n) = 0,$$

$$x(n+1) + x(n-1) = 0,$$

olduğundan karakteristik denklem ve kökleri

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 0 \text{ ise } \lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i,$$

şeklinde olup buradan

$$r = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

bulunur. Böylece

$$x(n) = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} \text{ çözümü elde edilir. Sınır şartlarıyla birlikte}$$

$$x(0) = c_1 = A, \quad x(2) = -c_1 = B \text{ olur.}$$

Bu problem $A = B = 0$ için sonsuz sayıda çözüme sahip iken $A = 0, B \neq 0$ halinde hiçbir çözüme sahip değildir.

Öncelikle,

$$\{S = [a, b+2] \text{ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar}\}$$

cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$Lx(n) = \Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) + q(n)x(n), \quad n \in [a+1, b+1] \quad (3.1.7)$$

operatörünü gözönüne alalım. Buna göre (3.1.1) denklemini $Lx(n) = 0$ şeklinde olup aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.1.1. (Lagrange Özdeşliği) $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı ise, $W(n) = W(y(n), x(n))$ fonksiyonu $y(n)$ ve $x(n)$ 'in Casoratyanı olmak üzere $n \in [a+1, b+1]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır [1-3],

$$y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n) = \Delta(p(n-1)W(y(n-1), x(n-1)))$$

İspat. $n \in [a+1, b+1]$ için

$$\begin{aligned}
y(n) Lx(n) &= y(n) \Delta(p(n-1) \Delta x(n-1)) + y(n) q(n) x(n) \\
&= y(n) (p(n) \Delta x(n) - p(n-1) \Delta x(n-1)) + y(n) q(n) x(n) \\
&\quad - y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1) + y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1) \\
&= \underbrace{y(n) p(n) \Delta x(n)}_{(1)} - \underbrace{y(n) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(3)} + y(n) q(n) x(n) \\
&\quad - \underbrace{y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(2)} + \underbrace{y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(4)} \\
&= \underbrace{y(n) p(n) \Delta x(n) - y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(1)-(2)} \\
&\quad - \underbrace{y(n) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(3)} + \underbrace{y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(4)} \\
&\quad + y(n) q(n) x(n) \\
&= \underbrace{\Delta(y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1))}_{(1)-(2)} - \underbrace{\Delta y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)}_{(3)-(4)} \\
&\quad + y(n) q(n) x(n) - x(n) p(n) \Delta y(n) + x(n) p(n) \Delta y(n) \\
&= \Delta(y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)) \\
&\quad - \Delta y(n-1) p(n-1) (x(n) - x(n-1)) \\
&\quad + y(n) q(n) x(n) - \underbrace{x(n) p(n) \Delta y(n)}_{(5)} + \underbrace{x(n) p(n) \Delta y(n)}_{(6)} \\
&= \Delta(y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)) - \underbrace{\Delta y(n-1) p(n-1) x(n)}_{(7)} \\
&\quad + \underbrace{\Delta y(n-1) p(n-1) x(n-1)}_{(8)} + y(n) q(n) x(n) - x(n) p(n) \Delta y(n) \\
&\quad + x(n) p(n) \Delta y(n) \\
&= \Delta(y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)) \\
&\quad - \underbrace{x(n) p(n) \Delta y(n) + x(n-1) p(n-1) \Delta y(n-1)}_{(5)-(8)} \\
&\quad + \underbrace{x(n) p(n) \Delta y(n) - x(n) p(n-1) \Delta y(n-1)}_{(6)-(7)} + x(n) q(n) y(n) \\
&= \Delta(y(n-1) p(n-1) \Delta x(n-1)) - \Delta(x(n-1) p(n-1) \Delta y(n-1)) \\
&\quad + x(n) \Delta(p(n-1) \Delta y(n-1)) + x(n) q(n) y(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta(y(n-1)p(n-1)\Delta x(n-1) - x(n-1)p(n-1)\Delta y(n-1)) \\
&\quad + x(n)\Delta p(n-1)\Delta^2 y(n-1) + x(n)q(n)y(n) \\
&= \Delta(p(n-1)(y(n-1)\Delta x(n-1) - x(n-1)\Delta y(n-1))) \\
&\quad + x(n)\Delta(p(n-1)\Delta y(n-1)) + x(n)q(n)y(n) \\
&= \underbrace{\Delta(p(n-1)(y(n-1)\Delta x(n-1) - x(n-1)\Delta y(n-1)))}_{\Delta(p(n-1)\Delta y(n-1)) + q(n)y(n)} \\
&\quad + x(n)\underbrace{(\Delta(p(n-1)\Delta y(n-1)) + q(n)y(n))}_{\Delta(p(n-1)W(y(n-1), x(n-1)))} \\
&= \Delta(p(n-1)W(y(n-1), x(n-1))) + x(n)Ly(n)
\end{aligned}$$

Sonuç 3.1.1. (Green Formülü) $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı ise bu durumda

$$\sum_{n=a+1}^{b+1} [y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n)] = p(n)W(y(n), x(n)) \Big|_a^{b+1},$$

eşitliği sağlanır [1 – 3].

İspat. Lagrange özdeşliğinden

$$\sum_{n=a+1}^{b+1} [y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n)] = \sum_{n=a+1}^{b+1} \Delta(p(n-1)W(y(n-1), x(n-1))),$$

$(n-1) = m$ alınırsa

$$= \sum_{m=a}^b \Delta(p(m)W(y(m), x(m)))$$

ve Lemma 2.1.1 (i)’den

$$= p(b+1)W(y(b+1), x(b+1)) - p(a)W(y(a), x(a)).$$

Sonuç 3.1.2. (Liouville Formülü) $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları (3.1.1) denkleminin çözümleri ise c sabit olmak üzere $n \in [a, b+1]$ için

$$W(x(n), y(n)) = \frac{c}{p(n)},$$

eşitliği sağlanır [1 – 3].

İspat. Lagrange özdeşliğinden, $n \in [a, b+1]$ için $x(n)$ ve $y(n)$ fonksiyonları (3.1.1) denkleminin çözümleri olduklarından

$$Lx(n) = 0,$$

$$Ly(n) = 0,$$

olur.

$$\Delta(p(n-1)W(x(n-1), y(n-1))) = y(n)Lx(n) - x(n)Ly(n)$$

olduğundan

$$\Delta(p(n-1)W(x(n-1), y(n-1))) = 0$$

elde edilir. O halde bu denkleme Δ^{-1} uygulanırsa $n \in [a+1, b+2]$ için

$$p(n-1)W(x(n-1), y(n-1)) = c$$

yada

$$W(x(n), y(n)) = \frac{c}{p(n)}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.2'den görüldüğü üzere $x(n)$ ve $y(n)$, (3.1.1) denkleminin çözümleri oldukları zaman ya her $n \in [a, b+1]$ için $W(x(n), y(n)) = 0$ 'dır yada $W(x(n), y(n))$ tek işaretlidir. Teorem 2.2.2'den birinci durumda $x(n)$ ve $y(n)$ çözümleri $[a, b+2]$ boyunca lineer bağımlı iken ikinci durumda lineer bağımsızdırlar.

Tanım 3.1.1. $x(n, s)$, $a \leq n \leq b+2$, $a+1 \leq s \leq b+1$, fonksiyonu her bir sabit $s \in [a+1, b+1]$ için

$$Lx(n, s) = 0, \tag{3.1.8}$$

$$x(s, s) = 0, \quad x(s+1, s) = \frac{1}{p(s)}, \tag{3.1.9}$$

başlangıç değer problemini sağlıyorsa o zaman $x(n, s)$ fonksiyonuna (3.1.1) denkleminin Cauchy fonksiyonu denir [1 – 3].

Uygulama 3.1.1.

$$\Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) = 0$$

fark denkleminin $x(n, s)$, $n \geq s$, Cauchy fonksiyonunu bulalım. (3.1.8) – (3.1.9)'dan

$$\Delta(p(n-1)\Delta x(n-1, s)) = 0, \quad n \in [a+1, b+1],$$

yazılır. Buradan bu ifadeye Δ^{-1} uygulanırsa $n \in [a+1, b+2]$ için

$$p(n-1)\Delta x(n-1, s) = \eta(s),$$

şeklinde bir $\eta(s)$ sabiti var demektir. Bu sabit $n = s + 1$ için

$$\begin{aligned}\Delta(p(s) \Delta x(s, s)) &= 0, \\ \Delta^{-1}(\Delta(p(s) \Delta x(s, s))) &= \Delta^{-1}0 = \eta(s), \\ p(s) \Delta x(s, s) &= p(s)(x(s+1) - x(s, s)) = \eta(s), \\ &= p(s) \frac{1}{p(s)} = \eta(s) = 1,\end{aligned}$$

olmak üzere $\eta(s) = 1$ 'dir.

Şimdi n yerine $n + 1$ alınırsa,

$$p(n) \Delta x(n, s) = 1 \text{ ise}$$

$$\Delta x(n, s) = \frac{1}{p(n)}$$

bulunur. İki taraf $n \geq s$ olmak üzere s 'den $n - 1$ 'e kadar toplanırsa Lemma 2.1.1 (i)'den

$$\begin{aligned}\sum_{i=s}^{n-1} \Delta x(n, s) &= \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)}, \\ x(n, s) - x(s, s) &= \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)},\end{aligned}$$

çıkar. (3.1.9)'dan $x(s, s) = 0$ olduğundan Cauchy fonksiyonu $n \geq s$ için

$$x(n, s) = \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)}$$

biçiminde elde edilir. Özel olarak $\Delta^2 x(n-1) = 0$ fark denklemi için Cauchy fonksiyonu $x(n, s) = n - s$ 'dir [1 - 3].

Teorem 3.1.2. Lineer bağımsız çözümleri $u_1(n)$ ve $u_2(n)$ olan (3.1.1) fark denkleminin Cauchy fonksiyonu

$$x(n, s) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(n) & u_2(n) \end{vmatrix}}{p(s) \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{vmatrix}}, \quad a \leq n \leq b+2, \quad a+1 \leq s \leq b+1, \quad (3.1.10)$$

şeklinde ifade edilebilir [1 - 3].

İspat. $u_1(n)$ ve $u_2(n)$ lineer bağımsız çözüm olduklarından her $n \in [a, b+1]$ için $W(u_1(n), u_2(n)) \neq 0$ 'dır. Buradan (3.1.10) iyi tanımlıdır. Öte yandan, paydaki determinant hesaplanırsa (3.1.10)'daki $x(n, s)$ fonksiyonunun her bir sabit $s \in [a+1, b+1]$ için $u_1(n)$ ve $u_2(n)$ 'in bir lineer kombinasyonu olduğu görülür. Dolayısıyla $x(n, s)$ fonksiyonu (3.1.1)'in bir çözümüdür. Ayrıca açık olarak $x(s, s) = 0$ 'dır,

$$\begin{aligned} x(s, s) &= \frac{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s) & u_2(s) \end{vmatrix}}{p(s) \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{u_1(s)u_2(s) - u_2(s)u_1(s)}{p(s)(u_1(s)u_2(s+1) - u_2(s)u_1(s+1))} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

ve

$$x(s+1, s) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{vmatrix}}{p(s) \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{vmatrix}} = \frac{1}{p(s)}, \quad (3.1.12)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3. (Sabitlerin Değişimi Formülü)

$x(n, s)$, $Lx(n) = 0$ için Cauchy fonksiyonu olmak üzere

$$Lx(n) = f(n), \quad n \in [a+1, b+1],$$

$$x(a) = 0, \quad x(a+1) = 0,$$

şeklinde tanımlı başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(n) = \sum_{s=a+1}^n x(n, s) f(s), \quad n \in [a, b+2]. \quad (3.1.13)$$

şeklindedir [1 – 3].

İspat. $x(n)$, (3.1.13) ile verilmiş olsun. Varsayımdan dolayı,

$$x(a) = \sum_{s=a+1}^a x(n, s) f(s) = 0.$$

Öte yandan, (3.1.9)'dan

$$x(a+1) = x(a+1, a+1) f(a+1) = 0,$$

ve

$$x(a+2, a+1) = \frac{1}{p(a+1)},$$

böylece

$$\begin{aligned} x(a+2) &= x(a+2, a+1) f(a+1) + x(a+2, a+2) f(a+2) \\ &= \frac{f(a+1)}{p(a+1)}, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x(n)$ fonksiyonu $n = a+1$ için $Lx(n) = f(n)$ denklemini sağlar.

$$\begin{aligned} Lx(a+1) &= f(a+1), \\ p(a+1)x(a+2) + c(a+1)x(a+1) + p(a)x(a) &= f(a+1), \\ p(a+1)\frac{f(a+1)}{p(a+1)} &= f(a+1). \end{aligned}$$

Şimdi $a+2 \leq n \leq b+1$ olsun. Bu durumda (3.1.13)'ten

$$\begin{aligned} Lx(n) &= p(n-1)\underbrace{x(n-1)}_{(1)} + c(n)\underbrace{x(n)}_{(2)} + p(n)\underbrace{x(n+1)}_{(3)}, \\ &= \sum_{s=a+1}^{n-1} p(n-1)\underbrace{x(n-1, s)}_{(1)} f(s) + \sum_{s=a+1}^n c(n)\underbrace{x(n, s)}_{(2)} f(s) \\ &\quad + \sum_{s=a+1}^{n+1} p(n)\underbrace{x(n+1, s)}_{(3)} f(s), \end{aligned}$$

Tanım 3.1.1'den yararlanarak,

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=a+1}^{n-1} \underbrace{Lx(n, s)}_0 f(s) + c(n)\underbrace{x(n, n)}_0 f(n) + p(n)\underbrace{x(n+1, n)}_{\frac{1}{p(n)}} f(n) \\ &\quad + p(n)\underbrace{x(n+1, n+1)}_0 f(n+1), \\ &= f(n), \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $n = b + 2$ için

$$\begin{aligned}
Lx(b+2) &= f(b+2), \\
&= p(b+2)x(b+3) + c(b+2)x(b+2) + p(b+1)x(b+1), \\
&= p(b+2) \sum_{s=a+1}^{b+3} x(b+3, s) f(s) + c(b+2) \sum_{s=a+1}^{b+2} x(b+2, s) f(s) \\
&\quad + p(b+1) \sum_{s=a+1}^{b+1} x(b+1, s) f(s), \\
&= \sum_{s=a+1}^{b+1} [p(b+2)x(b+3, s) f(s) + c(b+2)x(b+2, s) f(s) \\
&\quad + p(b+1)x(b+1, s) f(s)] \\
&\quad + p(b+2) \underbrace{[x(b+3, b+2) f(b+2)]}_{\frac{1}{p(b+2)}} + \underbrace{x(b+3, b+3) f(b+3)}_0 \\
&\quad + c(b+2) \underbrace{x(b+2, b+2) f(b+2)}_0, \\
&= \sum_{s=a+1}^{b+1} \underbrace{Lx(b+2, s) f(s)}_0 + f(b+2), \\
&= f(b+2).
\end{aligned}$$

$x(b+2, b+2) f(b+2) = 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. (3.1.1) denkleminin bir $x(n)$ çözümünü ele alalım.

i) $n_0 = a$ iken $x(n_0) = 0$ veya

ii) $n_0 > a$ iken $x(n_0) = 0$ yada $x(n_0 - 1)x(n_0) < 0$

koşulları sağlanıyorsa n_0 noktasında bir genelleştirilmiş sifra sahiptir denir [1, 3].

Teorem 3.1.4. (Sturm Ayırma Teoremi) (3.1.1) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü ortak bir sifra sahip olamaz. (3.1.1) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü n_1 noktasında bir sifra sahip ve $n_2 > n_1$ noktasında bir genelleştirilmiş sifra sahip ise o zaman (3.1.1) denkleminin her ikinci bağımsız çözümü $(n_1, n_2]$ üzerinde bir genelleştirilmiş sifra sahiptir [1 – 3].

Sturm ayırma teoremi bütün ikinci basamaktan lineer homojen fark denklemlerine uygulanabilir. Örneğin,

$$x(n+1) - x(n) - x(n-1) = 0,$$

bu tür denklemler Fibonacci fark denklemleridir. Gerçekten, bu denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ ve } x_2(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

dir. Birinci çözüm her tamsayı noktasında bir genelleştirilmiş sıfıra sahip iken ikinci çözüm her n için pozitiftir. Bu durum Teorem 3.1.4 ile çelişmez. Zira bu denklemin self-adjoint formda yazılamayacağı açıktır.

Öte yandan Sturm ayırma teoremindeki iki lineer bağımsız çözümün ortak bir sıfıra sahip olup olmaması durumu genelleştirilmiş sıfırlar için doğru değildir. Öyle ki self-adjoint formda yazılabilen

$$x(n+1) + 2x(n) + 2x(n-1) = 0,$$

fark denklemi

$$\begin{aligned} \lambda + 2 + \frac{2}{\lambda} &= 0, \\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= -1 \pm i, \\ r = \sqrt{2}, \theta &= \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

şeklinde karakteristik köklere sahip olduğundan

$$x_1(n) = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{3\pi n}{4} \text{ ve } x_2(n) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{3\pi n}{4},$$

şeklinde lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Yani,

$W(x_1, x_2) \neq 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \det \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{3\pi n}{4} & 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{3\pi n}{4} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} \sin \frac{3\pi(n+1)}{4} & 2^{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{3\pi(n+1)}{4} \end{pmatrix}, \\ &= 2^{\frac{2n+1}{2}} \left(\sin \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi(n+1)}{4} - \cos \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi(n+1)}{4} \right), \\ &= 2^{\frac{2n+1}{2}} \left[\sin \frac{3\pi n}{4} \left(\cos \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{3\pi n}{4} \left(\sin \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right], \\ &= 2^{\frac{2n+1}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi n}{4} - \sin \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi n}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi n}{4} - \cos \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi n}{4} \right) \right), \\ &= 2^n \left(-\sin \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi n}{4} + \sin^2 \frac{3\pi n}{4} - \cos \frac{3\pi n}{4} \sin \frac{3\pi n}{4} + \cos^2 \frac{3\pi n}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2^n \left(2 \sin \frac{3\pi n}{4} \cos \frac{3\pi n}{4} \right), \\
&= -2^n \sin \frac{3\pi n}{2} \neq 0,
\end{aligned}$$

ve bu çözümlerin ikisi de $n = 2$ noktasında bir genelleştirilmiş sifra sahiptir. Yani,

$$\begin{aligned}
x_1(1) &= \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \\
x_1(2) &= 1(-1) = -1
\end{aligned}$$

ise

$$x_1(1)x_1(2) = -1 < 0 \text{ ve } x_2(2) = 0$$

olur. Şimdi, çalışmamızda önemli bir parametre olan diskonjuge kavramını açıklayalım.

Tanım 3.1.3. Bir fark denkleminin aşıkâr olmayan çözümleri $[a, b + 2]$ üzerinde iki yada daha çok genelleştirilmiş sifra sahip değilse, bu fark denkleminde $[a, b + 2]$ üzerinde diskonjuge denir [1 – 3].

Bu tanıma göre (3.1.1)'in $[a, b + 2]$ üzerinde bir tek genelleştirilmiş sifra sahip olan aşıkâr olmayan çözümleri mevcut olabilir.

Sınır değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği, aynı zamanda Green fonksiyonunun varlık ve tekliği diskonjugelik kavramına dayanmaktadır. Bu yüzden bu kavramın daha iyi anlaşılması ve test edilmesini sağlamak için aşağıdaki kriteri göz önüne alalım.

Teorem 3.1.5. $Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b + 2]$ üzerinde diskonjuge olması için gerek ve yeter koşul $Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b + 2]$ üzerinde bir pozitif çözüme sahip olmasıdır [1 – 3].

İspat. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b + 2]$ üzerinde diskonjuge olsun. $u(n)$ ve $v(n)$ $Lx(n) = 0$ denkleminin sırasıyla

$$\begin{aligned}
u(a) &= 0, & u(a + 1) &= 1 \\
v(b + 1) &= 1, & v(b + 2) &= 0
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Diskonjugelik nedeniyle $[a + 1, b + 2]$ üzerinde $u(n) > 0$ ve $[a, b + 1]$ üzerinde $v(n) > 0$ 'dır.

Dolayısıyla $x(n) = u(n) + v(n)$, $Lx(n) = 0$ denkleminin bir pozitif çözümüdür.

Tersine olarak $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde bir pozitif çözüme sahip olsun. Sturm ayırma teoreminden dolayı $Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b+2]$ üzerinde iki genelleştirilmiş sifra sahip olan aşikar olmayan çözümleri yoktur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6. $[a+1, b+1]$ ($[a+1, \infty)$) üzerinde $q(n) \leq 0$ ise o zaman $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ ($[a, \infty)$) üzerinde diskonjugedir [1 – 3].

Teorem 3.1.7. $n \in [a+1, b+1]$ için

$$p(n)r^2 + c(n)r + p(n-1) \leq 0$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa o zaman $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjugedir [1 – 3].

Sonuç 3.1.3. $[a+1, b+1]$ üzerinde $\gamma(n) > 0$ olmak üzere

$$x(n+1) + \beta(n)x(n) + \gamma(n)x(n-1) = 0, \quad (3.1.14)$$

denklemi verilsin. $n \in [a+1, b+1]$ için

$$r^2 + \beta(n)r + \gamma(n) \leq 0$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa o zaman (3.1.14) denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjugedir [1 – 3].

Teorem 3.1.8. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ve $n \in [a+1, b+1]$ için $k(n) \leq 0$ ise o zaman

$$Lx(n) + k(n)x(n) = 0$$

denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjugedir [1 – 3].

Teorem 3.1.9. (Sturm Karşılaştırma Teoremi)

$Lx(n) + q_1(n)x(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ve $n \in [a+1, b+1]$ için $q_2(n) \leq q_1(n)$ ise bu durumda $Lx(n) + q_2(n)x(n) = 0$ denklemi de $[a, b+2]$ üzerinde diskonjugedir [1 – 3].

İspat. $Lx(n) + q_2(n)x(n) = 0$ denklemi

$$L_1x(n) + k(n)x(n) = 0$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$L_1 x(n) \equiv Lx(n) + q_1(n)x(n) = 0$$

denklemini $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olup

$$k(n) \equiv q_2(n) - q_1(n) \leq 0, \quad n \in [a+1, b+1]$$

dir. O halde Teorem 3.1.6'dan $Lx(n) + q_2(n)x(n) = 0$ denklemini $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge'dir.

3.2. Lineer Sınır Değer Problemleri

$$Lx(n) = f(n), \quad n \in [a+1, b+1], \quad (3.2.1)$$

$$x(n_1) = A, \quad x(n_2) = B \quad (3.2.2)$$

sınır değer problemini ele alalım, burada L operatörü (3.1.7)'deki gibi olup $f(n)$, $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon, $a \leq n_1 < n_2 \leq b+2$, A ve B reel sabitlerdir [1, 3].

Teorem 3.2.1. $Lx(n) = 0$ denklemini $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman (3.2.1)–(3.2.2) sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir [1, 3].

İspat. $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ $Lx(n) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $x_p(n)$, $Lx(n) = f(n)$ denkleminin bir özel çözümü olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + x_p(n),$$

dir. (3.2.2) sınır koşulu uygulanırsa,

$$c_1 x_1(n_1) + c_2 x_2(n_1) = A - x_p(n_1),$$

$$c_1 x_1(n_2) + c_2 x_2(n_2) = B - x_p(n_2),$$

sistemi bulunur. Bu sistemin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} x_1(n_1) & x_2(n_1) \\ x_1(n_2) & x_2(n_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

dır. Bu determinantın sıfır, yani

$$x_1(n_1)x_2(n_2) - x_1(n_2)x_2(n_1) = 0,$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda homojen

$$Lx(n) = 0, \quad x(n_1) = 0, \quad x(n_2) = 0,$$

sınır değer probleminin

$$x(n) = d_1x_1(n) + d_2x_2(n),$$

şeklinde aşıkâr olmayan bir çözümü var demektir, burada d_1 ve d_2 sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu ise $Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olması kabulüyle çelişir ve dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise

$$Lx(n) = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0 \quad (3.2.3)$$

sınır değer probleminin tek çözümü $x(n) = 0$ 'dır [1, 3].

Sonuç 3.2.2. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise

$$Lx(n) = f(n), \quad x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0 \quad (3.2.4)$$

sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir [1, 3].

Şimdi (3.2.4) sınır değer probleminin çözümünü bulmak için karşılık gelen (3.2.3) homojen problemine ilişkin Green fonksiyonunu oluşturalım.

Tanım 3.2.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan $G(n, s)$ fonksiyonuna

$$Lx(n) = 0, \quad (3.2.5)$$

$$x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0$$

homojen sınır değer problemi için Green fonksiyonu denir [1, 3]:

a) $G(n, s)$, $a \leq n \leq b+2$, $a+1 \leq s \leq b+1$ üzerinde tanımlıdır,

b) $LG(n, s) = \delta_{ns}$, $a+1 \leq n \leq b+1$, $a+1 \leq s \leq b+1$ 'dir, burada δ_{ns} Kronecker deltasıdır, yani, $n \neq s$ için $\delta_{ns} = 0$ ve $n = s$ için $\delta_{ns} = 1$ 'dir.

c) $G(a, s) = G(b+2, s) = 0, a+1 \leq s \leq b+1$.

Teorem 3.2.2. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman (3.2.5) homojen sınır değer problemi için (a) – (c) koşullarını sağlayan bir tek $G(n, s)$ Green fonksiyonu vardır [1, 3].

İspat. $x_1(n),$

$$Lx(n) = 0, x(a) = 0, x(a+1) = 0 \quad (3.2.6)$$

başlangıç değer probleminin çözümü ve $x(n, s), Lx(n) = 0$ için Cauchy fonksiyonu olsun.

Şimdi $a \leq n \leq b+2, a+1 \leq s \leq b+1$ üzerinde tanımlı

$$G(n, s) = \begin{cases} -\frac{x(b+2, s)x_1(n)}{x_1(b+2)}, & n \leq s \\ -\frac{x(b+2, s)x_1(n)}{x_1(b+2)} + x(n, s), & s \leq n \end{cases} \quad (3.2.7)$$

fonksiyonunu ele alalım.

$Lx(n) = 0, [a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olduğundan $x_1(b+2) > 0$ 'dır. Dolayısıyla $G(n, s)$ iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} G(a, s) &= -\frac{x(b+2, s)x_1(a)}{x_1(b+2)} = 0, \\ G(b+2, s) &= -\frac{x(b+2, s)x_1(b+2)}{x_1(b+2)} + x(b+2, s) = 0 \text{ 'dır.} \end{aligned}$$

Böylece $G(n, s)$ fonksiyonu (a) ve (c) koşullarını sağlamaktadır. Öte yandan $n \geq s+1$ için

$$\begin{aligned} LG(n, s) &= -\frac{x(b+2, s)}{x_1(b+2)}Lx_1(n) + Lx(n, s) \\ &= 0 = \delta_{ns}, \end{aligned}$$

$n \leq s-1$ için

$$\begin{aligned} LG(n, s) &= -\frac{x(b+2, s)}{x_1(b+2)}Lx_1(n) \\ &= 0 = \delta_{ns}, \end{aligned}$$

$n = s$ için

$$\begin{aligned} LG(s, s) &= p(s)G(s+1, s) + c(s)G(s, s) + p(s-1)G(s-1, s) \\ &= p(s)x(s+1, s) - \frac{x(b+2, s)}{x_1(b+2)}Lx_1(s) \\ &= 1 = \delta_{ns}, \end{aligned}$$

olur.

Böylece (b) koşulu sağlanmış oldu. Geriye $G(n, s)$ fonksiyonunun tek olduğunu göstermek kaldı. Bunun için (a) – (c) koşullarını sağlayan başka bir $H(n, s)$ fonksiyonu mevcut olsun. Sabit bir $s \in [a + 1, b + 1]$ için

$$x(n, s) = G(n, s) - H(n, s),$$

fonksiyonunu ele alalım. (b)'den, $x(n)$ fonksiyonu $[a, b + 2]$ üzerinde $Lx(n) = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

(c)'den $x(a) = 0$, $x(b + 2) = 0$ 'dır. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b + 2]$ üzerinde diskonjuge olduğundan $[a, b + 2]$ üzerinde $x(n) \equiv 0$ olur. $s \in [a + 1, b + 1]$ keyfi seçildiğinden

$$G(n, s) \equiv H(n, s), \quad n \in [a, b + 2], \quad s \in [a + 1, b + 1],$$

bulunur.

Açıklama 3.2.1. Özel olarak homojen

$$\Delta^2 x(n - 1) = 0,$$

$$x(a) = 0, \quad x(b + 2) = 0,$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonu, $p(i) = 1$ olmak üzere

$$G(n, s) = \begin{cases} -\frac{(n-a)(b+2-s)}{b+2-a}, & n \leq s \\ -\frac{(s-a)(b+2-n)}{b+2-a}, & s \leq n \end{cases},$$

dir. Bu fonksiyon $a \leq n \leq b + 2$, $a + 1 \leq s \leq b + 1$ üzerinde

$$-\frac{b + 2 - a}{4} \leq G(n, s) \leq 0,$$

ve $n \in [a, b + 2]$ için

$$\sum_{s=a+1}^{b+1} |G(n, s)| \leq \frac{(b + 2 - a)^2}{8},$$

eşitsizliklerini sağlar [1, 3].

Teorem 3.2.3. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b + 2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman (3.2.4)

homojen olmayan sınır değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(n, s) f(s),$$

dir. Burada $G(n, s)$ (3.2.3) homojen olmayan sınır değer probleminin Green fonksiyonu olup (3.2.7) ile tanımlanır [1, 3].

İspat. (c)'den

$$x(a) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(a, s) f(s) = 0,$$

ve

$$x(b+2) = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(b+2, s) f(s) = 0,$$

dir. Ayrıca (b)'den

$$\begin{aligned} Lx(n) &= \sum_{s=a+1}^{b+1} LG(n, s) f(s), \\ &= \sum_{s=a+1}^{b+1} \delta_{ns} f(s), \\ &= f(n), a+1 \leq n \leq b+1, \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Problem 3.2.1. Green fonksiyonu yardımıyla

$$\Delta^2 x(n-1) = 16,$$

$$x(0) = 0, \quad x(8) = 0,$$

sınır değer problemini çözelim [1, 3].

Çözüm.

Homojen

$$\Delta^2 x(n-1) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(8) = 0,$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu Açıklama 3.2.1'den

$$G(n, s) = \begin{cases} -\frac{n(8-s)}{8}, & n \leq s \\ -\frac{s(8-n)}{8}, & s \leq n \end{cases},$$

dir. Verilen problemin çözümü Teorem 3.2.3'ten

$$\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{s=1}^7 G(n, s) 16 = 16 \sum_{s=1}^7 G(n, s), \\
&= 16 \sum_{s=1}^n G(n, s) + 16 \sum_{s=n+1}^7 G(n, s), \\
&= -2 \sum_{s=1}^n s(8-n) - 2 \sum_{s=n+1}^7 n(8-s), \\
&= 2(n-8) \sum_{s=1}^n s + 2n \sum_{s=n+1}^7 (s-8), \\
&= (n^3 - 7n^2 - 8n) + (-n^3 + 15n^2 - 56n), \\
&= 8n^2 - 64n,
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.3. $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olsun. Bu durumda homojen olmayan

$$Lx(n) = f(n), \quad x(a) = A, \quad x(b+2) = B, \quad (3.2.8)$$

sınır değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = u(n) + \sum_{s=a+1}^{b+1} G(n, s) f(s),$$

dir. Burada $G(n, s)$ Green fonksiyonu (3.2.7)'deki gibi olup $u(n)$ fonksiyonu

$$Lu(n) = 0, \quad u(a) = A, \quad u(b) = B, \quad (3.2.9)$$

sınır değer probleminin çözümüdür [1, 3].

Problem 3.2.2.

$$\Delta^2 x(n-1) = 16, \quad x(0) = 2, \quad x(8) = 10,$$

sınır değer probleminin çözümü Sonuç 3.2.3 ve Açıklama 3.2.1'den

$$x(n) = u(n) + 8n^2 - 64n,$$

dir. Burada $u(n)$

$$\Delta^2 u(n-1) = 0, \quad u(0) = 2, \quad u(8) = 10,$$

sınır değeri probleminin çözümü olup $u(n) = n + 2$ şeklinde hesaplanır. Böylece verilen problemin çözümü

$$x(n) = 8n^2 - 63n + 2,$$

olarak bulunur [3].

4. FARK DENKLEMLERİ İÇİN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

4.1. Fark Denklemlerinin Spektral Analizi

Bazı fark denklemlerinde veya denklemlerin sınır koşullarındaki katsayılar bir parametreye bağlı olur ve böyle bir durumda aşikar olmayan çözümler parametrenin sadece bazı değerleri için ortaya çıkabilir. Parametrenin bu özel değerlerine özdeğer ve karşılık gelen aşikar olmayan çözümlere de özfonksiyon denir. Diferansiyel denklemlerle bağlantılı bu ifadeler matematiksel fizik, mühendislik ve ileri matematiğin geniş bölümünde temel rol oynar [1 – 3].

$$\Delta [p(n-1) \Delta x(n-1)] + [q(n) + \lambda r(n)] x(n) = 0, \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlı Sturm-Liouville fark denklemini ele alalım. Burada $p(n)$ 'nin tanımlı ve $[a, b+1] = \{a, a+1, \dots, b+1\}$ tamsayılar kümesi üzerinde pozitif, $r(n)$ 'nin tanımlı ve $[a+1, b+1]$ üzerinde pozitif, $q(n)$ 'nin tanımlı ve $[a+1, b+1]$ üzerinde reel değerli ve λ 'nın bir parametre olduğunu varsayalım. Başlangıçta aşağıdaki genel lineer homojen sınır şartlarını ele alalım [1]:

$$P_x \equiv a_{11}x(a) + a_{12}\Delta x(a) - b_{11}x(b+1) - b_{12}\Delta x(b+1) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$Q_x \equiv a_{21}x(a) + a_{22}\Delta x(a) - b_{21}x(b+1) - b_{22}\Delta x(b+1) = 0,$$

burada a 'lar ve b 'ler reel sabitlerdir. $P_x = 0$, $Q_x = 0$ sınır şartlarının denk olmadığı varsayalım. $([a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}], [a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}])$ vektörleri lineer bağımsızdır.)

Eğer $b_{11} = b_{12} = 0 = a_{21} = a_{22}$ ve $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ olmak üzere ayrık sınır şartları

$$\alpha x(a) + \beta \Delta x(a) = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\gamma x(b+1) + \delta \Delta x(b+1) = 0, \quad (4.1.4)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.1. (4.1.1) – (4.1.2) sınır değer problemine fark denklemi için Sturm-Liouville problemi denir [1 – 3].

$P_x = 0$, $Q_x = 0$ sınır şartlarının başka bir özel durumu ise

$$x(a) = x(b+1), \quad (4.1.5)$$

$$\Delta x(a) = \Delta x(b+1). \quad (4.1.6)$$

şeklinde tanımlı periyodik sınır şartlarıdır.

Tanım 4.1.2. (4.1.1), (4.1.5), (4.1.6) sınır değer problemi, $p(a) = p(b+1)$ olduğunu varsayıyoruz, periyodik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır [1 – 3].

Tanım 4.1.3. Eğer $\lambda = \lambda_0$ için (4.1.1)sınır değer problemi aşıkak olmayan $y_0(n)$ çözümüne sahipse, $\lambda = \lambda_0$ bu sınır değer problemi için bir özdeğerdir, $P_x = 0$, $Q_x = 0$. Bu durumda $x_0(n)$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur ve $(\lambda_0, x_0(n))$ (4.1.1) sınır değer problemi için bir özçifttir, $P_x = 0$, $Q_x = 0$. λ_0 'a karşılık gelen tek bir lineer bağımsız özfonksiyon varsa λ_0 özdeğeri basittir. Eğer bir özdeğer basit değilse katlı özdeğerdir [1, 3].

Problem 4.1.1.

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0, \quad (4.1.7)$$

$$x(0) = x(4),$$

$$\Delta x(0) = \Delta x(4),$$

$\lambda = 2$ 'nin periyodik Sturm-Liouville problemi için katlı özdeğer olduğunu gösterelim [1].

$\lambda = 2$ için (4.1.7)'nin genel çözümü

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0,$$

$$x(n+1) + (\lambda - 2)x(n) + x(n-1) = 0,$$

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2}$$

$0 < \lambda < 4$ için özdeğerler mevcuttur.

$$\lambda_m = 2 - 2 \cos \frac{m\pi}{4},$$

ise

$$\phi_m(n) = c_1 \cos \frac{m\pi n}{4} + c_2 \sin \frac{m\pi n}{4},$$

bulunur. $\lambda = 2$ için (4.1.7)'nin genel çözümü

$$m_{1,2} = \frac{2 - 2 \pm \sqrt{2(2-4)}}{2} = \pm i,$$

ise

$$r = 1, \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$x(n) = A \cos \frac{\pi}{2}n + B \sin \frac{\pi}{2}n$$

bulunur. $\lambda_m = 2$ olması için

$$\lambda_m = 2 - 2 \cos \frac{m\pi}{4} = 2,$$

$$2 - 2 \cos \frac{m\pi}{4} = 2,$$

$$\cos \frac{m\pi}{4} = 0,$$

buradan $m_1 = 2, m_2 = 6$ olmalıdır. Öyleyse

$$\phi_1(n) = c_1 \cos \frac{\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{\pi}{2}n,$$

$$\phi_2(n) = c_1 \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}n,$$

Bütün bu çözümler sınır şartlarını sağlar. Buradan

$$x(0) = x(4),$$

$$A \cos 0 + B \sin 0 = A \cos 2\pi + B \sin 2\pi = A,$$

$$\Delta x(0) = \Delta x(4),$$

$$x(1) - x(0) = x(5) - x(4),$$

$$A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} - A = A \cos \frac{5\pi}{2} + B \sin \frac{5\pi}{2} - A = B - A,$$

$$\phi_2(0) = \phi_2(4),$$

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 \cos 6\pi + c_2 \sin 6\pi = c_1,$$

$$\Delta \phi_2(0) = \Delta \phi_2(4),$$

$$\phi_2(1) - \phi_2(0) = \phi_2(5) - \phi_2(4),$$

$$c_1 \cos \frac{3\pi}{2} + c_2 \sin \frac{3\pi}{2} - c_1 = c_1 \cos \frac{15\pi}{2} + c_2 \sin \frac{15\pi}{2} - c_1 = -c_2 - c_1,$$

olduğu net bir şekilde görülür. Böylece $\lambda = 2$ 'ye karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyon vardır.

$$\begin{aligned}
W(\phi_1(n), \phi_2(n)) &= \det \begin{pmatrix} \phi_1(n) & \phi_2(n) \\ \phi_1(n+1) & \phi_2(n+1) \end{pmatrix}, \\
&= \det \begin{pmatrix} c_1 \cos \frac{\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{\pi}{2}n & c_1 \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}n \\ c_1 \cos \frac{\pi}{2}(n+1) + c_2 \sin \frac{\pi}{2}(n+1) & c_1 \cos \frac{3\pi}{2}(n+1) + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}(n+1) \end{pmatrix}, \\
&= [c_1 \cos \frac{\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{\pi}{2}n] [c_1 \cos \frac{3\pi}{2}(n+1) + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}(n+1)] \\
&\quad - [c_1 \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}n] [c_1 \cos \frac{\pi}{2}(n+1) + c_2 \sin \frac{\pi}{2}(n+1)], \\
&= [c_1 \cos \frac{\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{\pi}{2}n] [c_1 (\cos \frac{3\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2}) \\
&\quad + c_2 (\sin \frac{3\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2})] \\
&\quad - [c_1 \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}n] [c_1 (\cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}n \sin \frac{\pi}{2}) \\
&\quad + c_2 (\sin \frac{\pi}{2}n \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}n \sin \frac{\pi}{2})], \\
&= [c_1 \cos \frac{\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{\pi}{2}n] [c_1 \sin \frac{3\pi}{2}n - c_2 \cos \frac{3\pi}{2}n] \\
&\quad - [c_1 \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 \sin \frac{3\pi}{2}n] [-c_1 \sin \frac{\pi}{2}n + c_2 \cos \frac{\pi}{2}n], \\
&= c_1^2 \cos \frac{\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2}n - c_1 c_2 \cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n + c_2 c_1 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2}n}_{-} - c_2^2 \sin \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n \\
&\quad + c_1^2 \cos \frac{3\pi}{2}n \sin \frac{\pi}{2}n - c_1 c_2 \cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n - c_1 c_2 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2}n}_{-} \\
&\quad + c_2^2 \sin \frac{3\pi}{2}n \cos \frac{\pi}{2}n, \\
&= c_1^2 [\cos \frac{\pi}{2}n \sin \frac{3\pi}{2}n + \cos \frac{3\pi}{2}n \sin \frac{\pi}{2}n] + c_2^2 [\sin \frac{3\pi}{2}n \cos \frac{\pi}{2}n - \sin \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n] \\
&\quad - 2c_1 c_2 \cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n, \\
&= c_1^2 \sin 2\pi n + c_2^2 \sin \pi n - 2c_1 c_2 \cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n, \\
&= -2c_1 c_2 \cos \frac{\pi}{2}n \cos \frac{3\pi}{2}n, \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \\
&= -2c_1 c_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Böylece $\lambda = 2$ katlı özdeğerdir.

Problem 4.1.2.

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0, \quad (4.1.8)$$

$$x(0) = 0, \quad x(8) = 0, \quad (4.1.9)$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım [3].

Çözüm.

$$x(n+1) + (\lambda - 2)x(n) + x(n-1) = 0,$$

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

ve karakteristik kökler

$$m_{1,2} = \frac{-(\lambda - 2) \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}$$

dir. Buradan $\lambda < 0$, $\lambda > 4$, $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ ve $0 < \lambda < 4$ durumları incelenebilir.

İlk iki duruma göre m_1 ve m_2 kökleri reel ve farklı olacağından (4.1.8) denkleminin genel çözümü

$$x(n) = c_1 m_1^n + c_2 m_2^n$$

dir. (4.1.9) sınır koşulları uygulanırsa

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0$$

ise $c_1 = -c_2$,

$$x(8) = c_1 m_1^8 + c_2 m_2^8$$

ise

$$c_1 m_1^8 - c_1 m_2^8 = c_1 (m_1^8 - m_2^8) = 0$$

ise $c_1 = c_2 = 0$ bulunur ve dolayısıyla $x(n) \equiv 0$ aşıkâr çözümü bulunur.

O halde $\lambda < 0$ ve $\lambda > 4$ gibi sayılar ve $\lambda = 0$ ve $\lambda = 4$ değerleri özdeğer olamaz.

Çünkü

$$\lambda = 0 \text{ için } m_{1,2} = 1 \text{ ise}$$

$$x(n) = c_1 + c_2 n,$$

$$x(0) = c_1 = 0,$$

$$x(8) = 8c_2 = 0 \text{ ise}$$

$$x(n) \equiv 0 \text{ olur.}$$

$$\lambda = 4 \text{ için } m_{1,2} = -1 \text{ ise}$$

$$x(n) = (-1)^n (c_1 + c_2 n)$$

$$x(0) = c_1 = 0$$

$$x(8) = 8c_2 = 0 \text{ ise}$$

$$x(n) \equiv 0 \text{ olur.}$$

$0 < \lambda < 4$ olduğundan $|\lambda - 2| < 2$ için

$$-1 < -\cos \theta < 1,$$

$$0 < 1 - \cos \theta < 2,$$

$$0 < 2 - 2 \cos \theta < 4,$$

olduğundan

$$\lambda = 2 - 2 \cos \theta$$

seçilebilir ve dolayısıyla karakteristik kökler

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{(2 - 2 \cos \theta)(-2 - 2 \cos \theta)}}{2}, \\ &= \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4(\cos^2 \theta - 1)}}{2}, \\ &= \cos \theta \pm i \sin \theta, \\ &= e^{\pm i\theta}, \end{aligned}$$

şeklini alır. Buradan genel çözüm

$$x(n) = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta \quad (4.1.10)$$

olur. (4.1.9) sınır koşulları uygulanırsa

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$$

$$= c_1 = 0$$

$$x(8) = c_2 \sin 8\theta = 0$$

ve dolayısıyla

$$c_2 \neq 0 \text{ ve } \theta = \frac{l\pi}{8}, \quad l = 1, 2, \dots, 7$$

alınabilir. Böylece (4.1.8) – (4.1.9) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_l = 2 - 2 \cos \frac{l\pi}{8}, \quad l = 1, 2, \dots, 7$$

ve özfonksiyonları

$$x_l(n) = \sin \frac{l\pi n}{8}, \quad l = 1, 2, \dots, 7, \quad n = 0, 1, \dots, 8$$

olur.

Bu uygulamadan özdeğerlerin basit oldukları ve ayrıca özdeğerlerin sayısı ile $[1, 7] = \{1, 2, \dots, 7\}$ cümlesindeki eleman sayısının aynı olduğunu ifade edebiliriz. Şimdi, bu özelliklerin ve daha fazlasının (4.1.1)–(4.1.3) Sturm-Liouville problemi için sağlandığını gösterelim.

Tanım 4.1.4. Herbiri $[a + 1, b + 1]$ üzerinde tanımlı olan $\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots\}$ fonksiyonlar cümlesine

$$\sum_{i=a+1}^{b+1} r(i) \phi_\mu(i) \phi_\nu(i) = 0, \quad \mu \neq \nu$$

ise $[a + 1, b + 1]$ üzerinde $r(n)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir [1 – 4].

Teorem 4.1.1. $\lambda_m, m = 1, 2, \dots$ (4.1.1) – (4.1.3) Sturm Liouville probleminin özdeğerleri ve $\phi_m(n), m = 1, 2, \dots$ karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

Bu durumda $\{\phi_m(n), m = 1, 2, \dots\}$ cümlesi $[a + 1, b + 1]$ üzerinde $r(n)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir [1 – 4].

İspat. λ_μ ve λ_ν (4.1.1) – (4.1.3) Sturm Liouville probleminin iki farklı özdeğeri ve karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $\phi_\mu(n)$ ve $\phi_\nu(n)$ olsun. Buradan $n \in [a + 1, b + 1]$ için

$$\Delta(p(n-1) \Delta \phi_\mu(n-1)) + q(n) \phi_\mu(n) + \lambda_\mu r(n) \phi_\mu(n) = 0, \quad (4.1.11)$$

ve

$$\Delta(p(n-1) \Delta \phi_\nu(n-1)) + q(n) \phi_\nu(n) + \lambda_\nu r(n) \phi_\nu(n) = 0, \quad (4.1.12)$$

denklemleri $\phi_\nu(n)$ ve (4.1.11) denklemleri $\phi_\mu(n)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \phi_\nu(n) [\Delta(p(n-1) \Delta \phi_\mu(n-1)) + q(n) \phi_\mu(n) + \lambda_\mu r(n) \phi_\mu(n)] &= 0 \\ -\phi_\mu(n) [\Delta(p(n-1) \Delta \phi_\nu(n-1)) + q(n) \phi_\nu(n) + \lambda_\nu r(n) \phi_\nu(n)] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_\mu - \lambda_\nu) r(n) \phi_\mu(n) \phi_\nu(n) &= \phi_\mu(n) \Delta(p(n-1) \Delta \phi_\nu(n-1)) \\ &\quad - \phi_\nu(n) \Delta(p(n-1) \Delta \phi_\mu(n-1)) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Her iki tarafın toplamı alınırsa Teorem 2.1.4'ten

$$\begin{aligned} (\lambda_\mu - \lambda_\nu) \sum_{i=a+1}^{b+1} r(i) \phi_\mu(i) \phi_\nu(i) &= [\phi_\mu(i) p(i-1) \Delta \phi_\nu(i-1)]_{i=a+1}^{b+2} \\ &\quad - \sum_{i=a+1}^{b+1} \Delta \phi_\mu(i) \cdot p(i) \cdot \Delta \phi_\nu(i) - [\phi_\nu(i) p(i-1) \Delta \phi_\mu(i-1)]_{i=a+1}^{b+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=a+1}^{b+1} \Delta \phi_\nu(i) \cdot p(i) \cdot \Delta \phi_\mu(i) = [\phi_\mu(i) p(i-1) [\phi_\nu(i) - \phi_\nu(i-1)]]_{i=a+1}^{b+2} \\
& \quad - [\phi_\nu(i) p(i-1) [\phi_\mu(i) - \phi_\mu(i-1)]]_{i=a+1}^{b+2}, \\
& = [\phi_\mu(i) p(i-1) \phi_\nu(i) - \phi_\mu(i) p(i-1) \phi_\nu(i-1) \\
& \quad - \phi_\nu(i) p(i-1) \phi_\mu(i) + \phi_\nu(i) p(i-1) \phi_\mu(i-1)]_{i=a+1}^{b+2}, \\
& = \underbrace{[\phi_\mu(i) p(i-1) \phi_\nu(i) - \phi_\nu(i) p(i-1) \phi_\mu(i)]}_0 \\
& \quad - \phi_\mu(i) p(i-1) \phi_\nu(i-1) + \phi_\nu(i) p(i-1) \phi_\mu(i-1)]_{i=a+1}^{b+2}, \\
& = p(i-1) (\phi_\nu(i) \phi_\mu(i-1) - \phi_\mu(i) \phi_\nu(i-1))_{i=a+1}^{b+2}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1.3) sınır koşullarından

$$\begin{aligned}
& [p(i-1) (\phi_\nu(i) \phi_\mu(i-1) - \phi_\mu(i) \phi_\nu(i-1))]_{i=a+1}^{b+2} \\
& = [p(i-1) (\phi_\nu(i) \alpha \phi_\mu(i) - \phi_\mu(i) \alpha \phi_\nu(i))]_{i=a+1}^{b+2} = 0
\end{aligned}$$

(4.1.13)'ün ikinci tarafı sıfırdır. Dolayısıyla

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \sum_{i=a+1}^{b+1} r(i) \phi_\mu(i) \phi_\nu(i) = 0 \quad (4.1.14)$$

ve $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. λ_1 ve λ_2 (4.1.1) – (4.1.3) Sturm-Liouville probleminin iki özdeğeri ve karşılık gelen özfonksiyonlar $\phi_1(n)$ ve $\phi_2(n)$ olsun. Bu durumda $\phi_1(n)$ ve $\phi_2(n)$, $[a, b+2]$ üzerinde ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2$ halinde lineer bağımlıdır [1, 3].

İspat. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ halinde $\phi_1(n)$ ve $\phi_2(n)$ lineer bağımlı olsun. Buna göre,

$$c_1 \phi_1(n) + c_2 \phi_2(n) \equiv 0, \quad n \in [a, b+2] \quad (4.1.15)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı c_1 ve c_2 sabitleri var demektir. Eşitlik $r(n) \phi_1(n)$ ile çarpılır ve sonra $\sum_{i=a+1}^{b+1}$ toplamı alınır (4.1.3)'ten

$$c_1 \sum_{i=a+1}^{b+1} r(i) \phi_1^2(i) + c_2 \sum_{i=a+1}^{b+1} r(i) \phi_1(i) \phi_2(i) = 0$$

veya farklı özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$c_1 \delta_{11} + c_2 0 = 0$$

bulunur. δ_{11} pozitif reel sayıdır. Böylece $c_1 = 0$ ve (4.1.15)'ten $c_2 = 0$ çıkar. Bu ise çelişkidir. Burada ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. (4.1.1) – (4.1.3) Sturm Liouville probleminin bütün özdeğerleri reeldir [1 – 4].

İspat. İspatı olmayana ergi metoduyla yapalım. $\lambda = \alpha + i\beta$, (4.1.1) – (4.1.3) Sturm-Liouville probleminin bir kompleks özdeğeri ve $\phi(n) = u(n) + iv(n)$ karşılık gelen özfonksiyon olsun. $n \in [a+1, b+1]$ için

$$\begin{aligned} \Delta(p(n-1)\Delta\phi(n-1)) + q(n)\phi(n) + \lambda r(n)\phi(n) &= 0, \\ \Delta(p(n-1)\Delta(u(n-1) + iv(n-1))) + q(n)(u(n) + iv(n)) \\ &\quad + (\alpha + i\beta)r(n)(u(n) + iv(n)) = 0, \\ p(n)(u(n+1) + iv(n+1)) - (p(n) + p(n-1))(u(n) + iv(n)) \\ &\quad + (q(n) + (\alpha + i\beta)r(n))(u(n) + iv(n)) \\ &\quad + p(n-1)(u(n-1) + iv(n-1)) = 0, \\ p(n)u(n+1) - (p(n) + p(n-1))u(n) + q(n)u(n) \\ &\quad + (\alpha u(n) - \beta v(n))r(n) + p(n-1)u(n-1) \\ &\quad + i[p(n)v(n+1) - (p(n) + p(n-1))v(n) \\ &\quad + q(n)v(n) + (\beta u(n) + \alpha v(n))r(n) + p(n-1)v(n-1)] = 0, \end{aligned}$$

ise buradan

$$\Delta(p(n-1)\Delta u(n-1)) + q(n)u(n) + (\alpha u(n) - \beta v(n))r(n) = 0,$$

ve

$$\Delta(p(n-1)\Delta v(n-1)) + q(n)v(n) + (\beta u(n) + \alpha v(n))r(n) = 0,$$

bulunur. Ayrıca sınır şartları

$$\begin{aligned} u(a) &= \alpha u(a+1), \quad v(a) = \alpha v(a+1), \\ u(b+2) &= \beta u(b+1), \quad v(b+2) = \beta v(b+1), \end{aligned}$$

şeklindedir. Teorem 4.1.1 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} v(n)[\Delta(p(n-1)\Delta u(n-1)) + q(n)u(n) + (\alpha u(n) - \beta v(n))r(n)] &= 0 \\ -u(n)[\Delta(p(n-1)\Delta v(n-1)) + q(n)v(n) + (\beta u(n) + \alpha v(n))r(n)] &= 0 \\ \hline \sum_{i=a+1}^{b+1} \beta(u^2(i) + v^2(i))r(i) &= \sum_{i=a+1}^{b+1} [v(i)\Delta(p(i-1)\Delta u(i-1)) \\ &\quad - u(i)\Delta(p(i-1)\Delta v(i-1))]. \end{aligned}$$

Her iki tarafın toplamı alınırsa Teorem 2.1.3'ten,

$$\sum_{i=a+1}^{b+1} \beta(u^2(i) + v^2(i))r(i) = [v(i)p(i-1)\Delta u(i-1)]_{i=a+1}^{b+2}$$

$$- [u(i) p(i-1) \Delta v(i-1)]_{i=a+1}^{b+2},$$

bulunur. Sınır koşullarından

$$\begin{aligned} \sum_{i=a+1}^{b+1} \beta (u^2(i) + v^2(i)) r(i) &= [p(i-1) (v(i) \beta u(i) - u(i) \beta v(i))]_{i=a+1}^{b+2} \\ &\quad - [p(i-1) (v(i) \alpha u(i) - u(i) \alpha v(i))]_{i=a+1}^{b+2}, \\ \sum_{i=a+1}^{b+1} \beta (u^2(i) + v^2(i)) r(i) &= 0 \text{ ise } \beta \sum_{i=a+1}^{b+1} (v^2(i) + u^2(i)) r(i) = 0, \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\beta = 0$ 'dır. Bu ise çelişkidir. Öyleyse λ özdeğeri reeldir.

Problem 4.1.3.

$$\Delta^2 x(n-1) + 2\lambda x(n) = 0, \quad n \in [1, b+1],$$

$$x(0) = x(b+2) = 0,$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulalım [3].

Çözüm.

$$\Delta^2 x(n-1) + 2\lambda x(n) = 0,$$

$$x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) + 2\lambda x(n) = 0,$$

$$x(n+1) + (2\lambda - 2)x(n) + x(n-1) = 0,$$

olduğundan karakteristik denklem ve kökleri

$$m^2 + (2\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = 1 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 2)},$$

şeklinde bulunur. Öyleyse $\lambda < 0$, $\lambda > 2$, $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ ve $0 < \lambda < 2$ durumlarını ele alalım. Özfonksiyon

$$\phi(n) = c_1 m_1^n + c_2 m_2^n,$$

şeklindedir. $\lambda < 0$ ve $\lambda > 2$ için kökler reel ve farklı olur, $\lambda = 0$ ve $\lambda = 2$ özdeğer olamaz.

$0 < \lambda < 2$ için

$$-1 < \sin \frac{l\pi}{2(b+2)} < 1,$$

$$0 < \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} < 1,$$

$$0 < 2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} < 2,$$

olduğundan

$$\lambda_l = 2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)}, l = 1, 2, \dots, b+1,$$

alnabilir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= 1 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}, \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} \pm \sqrt{2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} \left(2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} - 2 \right)}, \\ &= \cos \frac{l\pi}{b+2} \pm \sqrt{2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} \left(-2 \cos^2 \frac{l\pi}{2(b+2)} \right)}, \\ &= \cos \frac{l\pi}{b+2} \pm 2i \sin \frac{l\pi}{2(b+2)} \cos \frac{l\pi}{2(b+2)}, \\ &= \cos \frac{l\pi}{b+2} \pm i \sin \frac{l\pi}{b+2}, \end{aligned}$$

ve karşılık gelen özfonksiyonları,

$$\begin{aligned} \phi_l(n) &= c_1 \cos \frac{l\pi n}{b+2} + c_2 \sin \frac{l\pi n}{b+2}, \\ \phi_l(0) &= c_1 = 0, \\ \phi_l(b+2) &= c_2 \sin l\pi = 0, \end{aligned}$$

ise $c_2 \neq 0$ olur ve böylece

$$\phi_l(n) = \sin \frac{l\pi n}{b+2}, \quad l = 1, 2, \dots, b+1,$$

elde edilir.

Problem 4.1.4.

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0, \quad n \in [1, b+1],$$

$$x(0) = x(1), \quad x(b+2) = x(b+1),$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım [1].

Çözüm.

$$x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) + \lambda x(n) = 0,$$

denkleminin karakteristik denklemi ve kökleri

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2},$$

şeklindedir. $0 < \lambda < 4$ aralığını ele alırsak

$$\begin{aligned} 0 &< \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} < 1, \\ 0 &< 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} < 4, \end{aligned}$$

olduğundan özdeğerler

$$\lambda_l = 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)}, \quad 0 \leq l \leq b,$$

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2}, \\ &= \frac{2 - 4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} \pm \sqrt{4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} \left(4 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} - 4 \right)}}{2}, \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{l\pi}{2(b+1)} \pm 2i \cos \frac{l\pi}{2(b+1)} \sin \frac{l\pi}{2(b+1)}, \\ &= \cos \frac{l\pi}{b+1} \pm i \sin \frac{l\pi}{b+1}, \end{aligned}$$

şeklindedir ve karşılık gelen özfonksiyonları

$$\phi_l(n) = c_1 \cos \frac{l\pi n}{b+1} + \frac{c_2}{2} \sin \frac{l\pi n}{b+1},$$

$$\begin{aligned} \phi_l(0) &= c_1, \\ \phi_l(1) &= c_1 \cos \frac{l\pi}{b+1} + c_2 \sin \frac{l\pi}{b+1}, \\ \phi_l(0) &= \phi_l(1), \\ c_1 &= c_1 \cos \frac{l\pi}{b+1} + c_2 \sin \frac{l\pi}{b+1}, \\ c_1 \left(1 - \cos \frac{l\pi}{b+1} \right) &= \frac{c_2}{2} \sin \frac{l\pi}{b+1}, \\ \phi_l(b+2) &= c_1 \cos \frac{l\pi(b+2)}{b+1} + c_2 \sin \frac{l\pi(b+2)}{b+1}, \\ &= c_1 \cos \left(l\pi + \frac{l\pi}{b+1} \right) + c_2 \sin \left(l\pi + \frac{l\pi}{b+1} \right), \\ &= c_1 \left(\cos l\pi \cos \frac{l\pi}{b+1} - \sin l\pi \sin \frac{l\pi}{b+1} \right), \\ &\quad + c_2 \left(\sin l\pi \cos \frac{l\pi}{b+1} + \cos l\pi \sin \frac{l\pi}{b+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 (-1)^l \cos \frac{l\pi}{b+1} + c_2 (-1)^l \sin \frac{l\pi}{b+1}, \\
\phi_l(b+2) &= \phi_l(b+1), \\
\phi_l(b+1) &= c_1 \cos l\pi + c_2 \sin l\pi = c_1 (-1)^l, \\
c_1 (-1)^l &= (-1)^l \left(c_1 \cos \frac{l\pi}{b+1} + c_2 \sin \frac{l\pi}{b+1} \right), \\
c_1 &= c_1 \cos \frac{l\pi}{b+1} + c_2 \sin \frac{l\pi}{b+1}, \\
\phi_l(n) &= \cos \frac{l\pi(2n-1)}{2(b+1)}, \quad 0 \leq l \leq b
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplamış oluruz.

Problem 4.1.5.

$$\Delta^2 x(n-1) + (2-s)x(n) + \lambda x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}(1, K), \quad s > 0 \text{ reel sayı}$$

$$x(0) = x(K+1) = 0,$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım [2].

Çözüm.

$$\begin{aligned}
x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) + (2-s)x(n) + \lambda x(n) &= 0, \\
x(n+1) + (\lambda-s)x(n) + x(n-1) &= 0,
\end{aligned}$$

denkleminin karakteristik denklemi ve kökleri

$$\begin{aligned}
m^2 + (\lambda-s)m + 1 &= 0, \\
m_{1,2} &= \frac{s-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda s + s^2 - 4}}{2}, \\
m_{1,2} &= \frac{s-\lambda \pm \sqrt{(\lambda-s+2)(\lambda-s-2)}}{2},
\end{aligned}$$

şeklindedir. $s-2 < \lambda < s+2$ için özdeğerleri mevcuttur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
-1 &< \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) < 1, \\
-2 &< -2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) < 2, \\
s-2 &< s - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) < s+2, \\
\lambda_m &= s - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq m \leq K,
\end{aligned}$$

almabilir ve özfonksiyonlar

$$\begin{aligned}
m_{1,2} &= \frac{s - \left(s - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right)\right) \pm \sqrt{\left(s - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) - s + 2\right)\left(s - 2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) - s - 2\right)}}{2}, \\
&= \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \pm \sqrt{\left(-2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) + 2\right)\left(-2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) - 2\right)}}{2}, \\
&= \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \pm \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) - 4}}{2}, \\
&= \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \pm i \sin\left(\frac{m\pi}{K+1}\right),
\end{aligned}$$

$$\phi_m(n) = c_1 \cos\left(\frac{mn\pi}{K+1}\right) + c_2 \sin\left(\frac{mn\pi}{K+1}\right),$$

$$\phi_m(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0,$$

$$\phi_m(0) = \phi_m(K+1) = 0,$$

$$\phi_m(K+1) = c_1 \cos(n\pi) + c_2 \sin(n\pi),$$

$$= c_1 (-1)^n = 0,$$

$$\phi_m(n) = \sin\left(\frac{mn\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq m \leq K,$$

biçimindedir. Özellikle $s = 2$ ve $0 < \lambda < 4$ için özdeğerler

$$x(n+1) + (\lambda - 2)x(n) + x(n-1) = 0,$$

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4}}{2},$$

$$m_{1,2} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2},$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$0 < \sin^2\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) < 1,$$

$$0 < 4 \sin^2\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) < 4,$$

$$\lambda = 4 \sin^2\left(\frac{m\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq m \leq K.$$

Problem 4.1.6.

$$cx(n+1) - ax(n) + bx(n-1) + \lambda x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}(1, K), \quad bc > 0,$$

denklemini için özdeğerler

$$\begin{aligned} cm^2 + (\lambda - a)m + b &= 0, \\ m^2 + \frac{(\lambda - a)}{c}m + \frac{b}{c} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{\frac{a-\lambda}{c} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 - 2a\lambda + a^2}{c^2} - \frac{4b}{c}}}{2}, \\ &= \frac{a - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - a)^2 - 4bc}}{2c}, \end{aligned}$$

$a - 2\sqrt{bc} < \lambda < a + 2\sqrt{bc}$ için özdeğerler mevcuttur.

$$\lambda_m = a - 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq m \leq K,$$

ve özfonksiyonlar

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{a - a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) \pm \sqrt{\left(a - 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{m\pi}{K+1}\right) - a\right)^2 - 4bc}}{2c}, \\ m_{1,2} &= \pm i \sqrt{\frac{b}{c}} \sin\left(\frac{m\pi}{K+1}\right), \end{aligned}$$

$$\phi_m(k) = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{k}{2}} \sin\left(\frac{mk\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq m \leq K,$$

olarak bulunur [2].

Problem 4.1.7. Aşağıdaki özdeğer problemi için

$$\Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) + \lambda x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}(1, K),$$

$$u(0) = 0,$$

burada $p(n) = 1, n \in \mathbb{N}(0, K-1), p(K) = 0$, özdeğerler

$$p(n)x(n+1) + (\lambda - p(n) - p(n-1))x(n) + p(n-1)x(n-1) = 0,$$

$$\lambda_m = 4 \sin^2\left(\frac{2m-1}{2(2K+1)}\pi\right), \quad 1 \leq m \leq K,$$

ve karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\phi_m(n) = \sin\left(\frac{2m-1}{2K+1}n\pi\right), \quad 1 \leq m \leq K,$$

biçimindedir [2].

Problem 4.1.8.

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(4) = 0,$$

problemini göz önüne alalım. Buna göre karakteristik denklem

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

$$m_{1,2} = \frac{(2 - \lambda) \pm \sqrt{(\lambda - 2)^2 - 4}}{2},$$

$|\lambda - 2| > 2$ için özdeğerler mevcuttur.

$$|\lambda - 2| > 2 \Rightarrow 2 - \lambda = 2 \cos \theta \text{ ve } m_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}.$$

Böylece problemin genel çözümü

$$x(n) = A \cos \theta n + B \sin \theta n.$$

Sınır şartlarından

$$x(0) = A = 0,$$

$$x(4) = B \sin 4\theta = 0,$$

elde edilir. $\theta_n = \frac{m\pi}{4}$, $(n = 1, 2, 3)$ alırsak

$$0 < 2 - 2 \cos \frac{m\pi}{4} < 4,$$

$$\lambda_m = 2 - 2 \cos \frac{m\pi}{4}, \quad (m = 1, 2, 3),$$

olur. Böylece, $m = 1, 2, 3$ değerleri yerine konularak özfonksiyonlar bulunabilir veya

$$\phi_m = \sin \frac{m\pi n}{4}$$

bulunur. Dolayısıyla Sturm-Liouville problemi için

$$\left(2 - \sqrt{2}, \sin \frac{\pi}{4}n\right), \quad \left(2, \sin \frac{\pi}{2}n\right), \quad \left(2 + \sqrt{2}, \sin \frac{3\pi}{4}n\right)$$

özçiftleri buluruz [1, 3].

Burada her özdeğer basittir ve özdeğerlerin sayısı $[a + 1, b + 1]$ aralığındaki tam sayıların sayısı ile aynıdır.

4.2. Özdeğerlerin Matris Yardımıyla Hesaplanması

$\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$ durumundaki (4.1.1) – (4.1.3) Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini bulmak için başka bir metod aşağıda yer almaktadır [1]. Öncelikle (4.1.1) denklemini

$$p(n)x(n+1) + c(n)x(n) + p(n-1)x(n-1) = -\lambda r(n)x(n), \quad (4.2.1)$$

şeklinde ele alalım, burada

$$c(n) = q(n) - p(n) - p(n-1).$$

(4.1.1) denkleminde sırasıyla $n = a + 1, a + 2, \dots, b + 1$ alır ve (4.1.2), (4.1.3) sınır şartlarını kullanırsak $N \equiv b - a + 1$ tane denklem elde ederiz,

$$\begin{aligned} \alpha x(a) + \beta \Delta x(a) &= 0, \\ \alpha x(a) + \beta [x(a+1) - x(a)] &= 0, \\ \alpha x(a) + \beta x(a+1) - \beta x(a) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta x(a+1) &= (\beta - \alpha)x(a), \\ x(a) &= \frac{\beta}{\beta - \alpha}x(a+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma x(b+1) + \delta \Delta x(b+1) &= 0, \\ \gamma x(b+1) + \delta [x(b+2) - x(b+1)] &= 0, \\ \gamma x(b+1) + \delta x(b+2) - \delta x(b+1) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x(b+2) &= (\delta - \gamma)x(b+1), \\ x(b+2) &= \frac{\delta - \gamma}{\delta}x(b+1), \end{aligned}$$

$$p(n)x(n+1) + c(n)x(n) + p(n-1)x(n-1) = -\lambda r(n)y(n),$$

$n = a + 1$ için,

$$\begin{aligned}
p(a+1)x(a+2) + c(a+1)x(a+1) + p(a)x(a) &= -\lambda r(a+1)x(a+1), \\
p(a+1)x(a+2) + c(a+1)x(a+1) + p(a)\frac{\beta}{\beta-\alpha}x(a+1) &= -\lambda r(a+1)x(a+1), \\
p(a+1)x(a+2) + \left[c(a+1) + p(a)\frac{\beta}{\beta-\alpha} \right] x(a+1) &= -\lambda r(a+1)x(a+1), \\
\tilde{c}(a+1)x(a+1) + p(a+1)x(a+2) &= -\lambda r(a+1)x(a+1),
\end{aligned}$$

$n = a + 2$ için,

$$p(a+1)x(a+1) + c(a+2)x(a+2) + p(a+2)x(a+3) = -\lambda r(a+2)x(a+2),$$

$\vdots$

$n = b + 1$ için,

$$\begin{aligned}
p(b+1)x(b+2) + c(b+1)x(b+1) + p(b)x(b) &= -\lambda r(b+1)x(b+1), \\
p(b+1)\frac{\delta-\gamma}{\delta}x(b+1) + c(b+1)x(b+1) + p(b)x(b) &= -\lambda r(b+1)x(b+1), \\
p(b)x(b) + \left[c(b+1) + p(b+1)\frac{\delta-\gamma}{\delta} \right] x(b+1) &= -\lambda r(b+1)x(b+1), \\
p(b)x(b) + \tilde{c}(b+1)x(b+1) &= -\lambda r(b+1)x(b+1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(a+1)x(a+1) + p(a+1)x(a+2) &= -\lambda r(a+1)x(a+1), \\
p(a+1)x(a+1) + c(a+2)x(a+2) + p(a+2)x(a+3) &= -\lambda r(a+2)x(a+2), \\
&\vdots \\
p(b)x(b) + \tilde{c}(b+1)x(b+1) &= -\lambda r(b+1)x(b+1),
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(a+1) &= c(a+1) + p(a)\frac{\beta}{\beta-\alpha}, \\
\tilde{c}(b+1) &= c(b+1) + p(b+1)\frac{\delta-\gamma}{\delta}.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$\delta = 0$ ise $\tilde{c}(b+1) = c(b+1)$ ve $\beta = 0$ ise $\tilde{c}(a+1) = c(a+1)$ 'dir.

Bu $N \equiv b - a + 1$ denklemi vektör matris denklemi olarak yazarsak,

$$Su = -\lambda Ru, \tag{4.2.3}$$

burada u , N sütun vektörüdür,

$$u = \left[x(a+1), x(a+2), \dots, x(b+1) \right]^T,$$

S , $N \times N$ tridiagonal matristir,

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{c}(a+1) & p(a+1) & 0 & \dots & 0 \\ p(a+1) & c(a+2) & p(a+2) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & p(b-1) & c(b) & p(b) \\ 0 & \dots & 0 & p(b) & \tilde{c}(b+1) \end{bmatrix},$$

ve R , $N \times N$ diagonal matristir,

$$R = \text{diag}\{r(a+1), r(a+2), \dots, r(b+1)\}.$$

$$\begin{aligned} Su &= -\lambda Ru, \\ \begin{bmatrix} \tilde{c}(a+1) & p(a+1) & 0 & \dots & 0 \\ p(a+1) & c(a+2) & p(a+2) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & p(b-1) & c(b) & p(b) \\ 0 & \dots & 0 & p(b) & \tilde{c}(b+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(a+1) \\ x(a+2) \\ \vdots \\ x(b) \\ x(b+1) \end{bmatrix} &= \\ -\lambda \begin{bmatrix} r(a+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r(a+2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r(b) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r(b+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(a+1) \\ x(a+2) \\ \vdots \\ x(b) \\ x(b+1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

(4.2.3) problemi ile (4.2.1) – (4.2.2) probleminin denkliğinden ve matris teorisinden dolayı (4.2.1) – (4.2.2) Sturm-Liouville problemi tüm özdeğerleri reel olan N lineer bağımsız özfonksiyonuna sahiptir.

$\mu = -\lambda$ olsun, o zaman (4.2.3) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$R^{-1}Su = \mu u.$$

(4.2.1) – (4.2.2) problemi için (λ, x) özçifttir ancak ve ancak $(-\lambda, u)$ aşağıdaki matris için özçifttir,

$$u = \left[x(a+1), x(a+2), \dots, x(b+1) \right]^T,$$

$$R^{-1}S = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{c}(a+1)}{r(a+1)} & \frac{p(a+1)}{r(a+1)} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{p(a+1)}{r(a+1)} & \frac{c(a+2)}{r(a+1)} & \frac{p(a+2)}{r(a+1)} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \frac{p(b-1)}{r(b)} & \frac{c(b)}{r(b)} & \frac{p(b)}{r(b)} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{p(b)}{r(b+1)} & \frac{\tilde{c}(b+1)}{r(b+1)} \end{bmatrix},$$

Problem 4.2.1. $R^{-1}S$ matrisini aşağıdaki Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini bulmak için kullanalım [1],

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0 = x(4).$$

Burada $p(n-1) = 1$, $r(n) = 1$, $c(n) = -2$ ve $N = 3$ 'tür. Böylece

$$R^{-1}S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$R^{-1}S$ 'nin karakteristik denklemi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -2 - \mu & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \mu & 1 \\ 0 & 1 & -2 - \mu \end{bmatrix} = 0,$$

$$(-2 - \mu) [(-2 - \mu)^2 - 1] - (-2 - \mu) = 0,$$

$$(-2 - \mu) [(-2 - \mu)^2 - 2] = 0,$$

$$(-2 - \mu) (\mu^2 + 4\mu + 2) = 0,$$

Böylece,

$$\mu_1 = -2, \mu_{2,3} = -2 \pm \sqrt{2},$$

ve sonuç olarak

$$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2},$$

özdeğerleri bulunur. Karşılık gelen özvektörler

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1 \end{bmatrix}^T, \\ & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & 1, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T, \\ & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -1, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.3. Regüler Sturm-Liouville Problemi

$$\nabla (p(n) \Delta x(n)) + q(n) x(n) = \lambda w(n) x(n), \quad (4.3.1)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha x(a) - \sin \alpha (p(a) \nabla x(a)) = 0, \\ \cos \beta x(b) + \sin \beta (p(b) \nabla x(b)) = 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım [5]. $\alpha > 0, \beta < \pi$ olmak üzere yukarıdaki ifade aşağıdakine denktir,

$$\begin{cases} x(a-1) + \left(\frac{\cot \alpha}{p(a)} - 1 \right) x(a) = 0, \\ x(b-1) + \left(\frac{\cot \beta}{p(b)} - 1 \right) x(b) = 0, \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x(a-1) + hx(a) = 0, \\ x(b+1) + kx(b) = 0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

h ve k reel sayılar.

Ayrıca (4.3.2)'yle birlikte (4.3.1)'in aşıkâr olmayan çözüme sahip olması için $x(a-1) \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi $l^2(a, b; w)$ içinde, $x(a), \dots, x(b)$ kompleks sayı dizisinin Hilbert uzayı ile iç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=a}^b w(n) x(n) \overline{y(n)},$$

olacak şekilde tanımlanır ve L fark operatörü olmak üzere (4.3.1) denklemi

$$(Lx)(n) = \frac{\nabla [p(n) \Delta x(n)] + q(n) x(n)}{w(n)}, \quad n = a, \dots, b,$$

olur. Her $y \in D_L$ için

$D_L = \{x \in l^2(a, b; w) : Lx \in l^2(a, b; w), x(a-1) + hx(a) = 0 \text{ ve } x(b+1) + kx(b) = 0\}$ tanımlayalım.

Tanım 4.3.1. Regüler Sturm-Liouville problemi, $[a, b]$ sonlu uzunlukta, $w(n)$ ve $p(n-1)$, $a-1$ ve b 'de sonlu, ve $p(n)$, $a-1$ ve b 'de sıfırdan farklı, L self adjoint, L 'nin spektrumunu sınıflandırırız (yani L 'nin özdeğerlerinin kümesi, λ değerleri,

$$Lx = \lambda x, \quad (4.3.3)$$

olacak şekilde özfonksiyonlar olarak adlandırılan aşikar olmayan çözümlere sahiptir.) ve L 'nin spektral çözümünü verir [5].

Açıklama 4.3.1. $x(a-1) = \alpha \neq 0$ olsun, yani $x(a) = -\frac{\alpha}{h}$, ve (4.2.1)'i kullanalım. $x(n)$ 'in λ içinde $(n-a)$ dereceden bir polinom olduğu gösterilebilir. O zaman L 'nin özdeğerleri $x(b+1) + kx(b) = 0$ 'ın çözümleri olarak alınabilir [5].

Lemma 4.3.1. Herhangi x ve $y \in l^2(a, b; w)$ için,

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle - \langle x, Ly \rangle &= p(a-1)[x(a-1)\bar{y}(a) - x(a)\bar{y}(a-1)] \\ &\quad - p(b)[x(b)\bar{y}(b+1) - x(b+1)\bar{y}(b)] \\ &= -(\bar{y}(a), p(a-1)\bar{y}(a-1)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(a) \\ p(a-1)x(a-1) \end{pmatrix} \\ &\quad + (\bar{y}(b+1), p(b)\bar{y}(b)) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(b+1) \\ p(b)x(b) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

eşitliği sağlanır [5].

İspat: $l^2(a, b; w)$ 'daki x ve y için

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= \sum_{n=a}^b w(n) (Lx)(n) \bar{y}(n), \\ &= \sum_{n=a}^b \{\nabla[p(n) \Delta x(n)] + q(n)x(n)\} \bar{y}(n), \\ &= \sum_{n=a}^b \{p(n)x(n+1) - [p(n) + p(n-1) - q(n)]x(n) \\ &\quad + p(n-1)x(n-1)\} \bar{y}(n), \\ &= \sum_{n=a}^b p(n)x(n+1)\bar{y}(n) - \sum_{n=a}^b [p(n) + p(n-1) - q(n)]x(n)\bar{y}(n) \\ &\quad + \sum_{n=a}^b p(n-1)x(n-1)\bar{y}(n). \end{aligned}$$

İlk toplamı aşağıdaki ile değiştirir

$$\sum_{n=a}^b p(n-1) x(n) \bar{y}(n-1) - p(a-1) x(a) \bar{y}(a-1) + p(b) x(b+1) \bar{y}(b),$$

ve son toplamı aşağıdaki ile değiştirirsek

$$\sum_{n=a}^b p(n) x(n) \bar{y}(n+1) + p(a-1) x(a-1) \bar{y}(a) - p(b) x(b) \bar{y}(b+1),$$

elde edilir, böylece

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= \sum_{n=a}^b p(n) x(n) \bar{y}(n+1) - \sum_{n=a}^b [p(n) + p(n-1) - q(n)] x(n) \bar{y}(n) \\ &\quad + \sum_{n=a}^b p(n-1) x(n) \bar{y}(n-1) + p(a-1) [x(a-1) \bar{y}(a) - x(a) \bar{y}(a-1)] \\ &\quad - p(b) [x(b) \bar{y}(b+1) - x(b+1) \bar{y}(b)], \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle &= \langle x, Ly \rangle + p(a-1) [x(a-1) \bar{y}(a) - x(a) \bar{y}(a-1)] \\ &\quad - p(b) [x(b) \bar{y}(b+1) - x(b+1) \bar{y}(b)], \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.1. L operatörü self adjointtir [5].

İspat: Aşağıdaki ifadeyi ele alalım,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2 + \left(\frac{1}{p(a-1)}\right)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{p(a-1)} & h \\ h & \frac{1}{p(a-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & \frac{1}{p(a-1)} \\ \frac{1}{p(a-1)} & -h \end{pmatrix},$$

ve

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{p(b)}\right)^2} \begin{pmatrix} -\frac{k}{p(b)} & 1 \\ 1 & \frac{k}{p(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{p(b)} \\ \frac{k}{p(b)} & -1 \end{pmatrix}.$$

Böylece (4.3.1), $\langle Lx, y \rangle - \langle x, Ly \rangle$ eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{h^2 + \left(\frac{1}{p(a-1)}\right)^2} (\bar{y}(a), p(a-1) \bar{y}(a-1)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{p(a-1)} & h \\ h & \frac{1}{p(a-1)} \end{pmatrix} \times \\ &\begin{pmatrix} h & \frac{1}{p(a-1)} \\ \frac{1}{p(a-1)} & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(a) \\ p(a-1) x(a-1) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{p(b)}\right)^2} (\bar{y}(b+1), p(b) \bar{y}(b)) \begin{pmatrix} -\frac{k}{p(b)} & 1 \\ 1 & \frac{1}{p(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{p(b)} \\ \frac{k}{p(b)} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(b+1) \\ p(b) x(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Yani,

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{h^2 + \left(\frac{1}{p(a-1)}\right)^2} \left(-\frac{1}{p(a-1)} \overline{y}(a) + hp(a-1) \overline{y}(a-1), hz(a) + \overline{y}(a-1) \right) \\ & \times \left(\begin{array}{c} hx(a) + x(a-1) \\ \frac{1}{p(a-1)}x(a) - hp(a-1)x(a-1) \end{array} \right) \\ & + \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{p(b)}\right)^2} \left(-\frac{k}{p(b)} \overline{y}(b+1) + p(b) \overline{y}(b), \overline{y}(b+1) + k\overline{y}(b) \right) \\ & \left(\begin{array}{c} x(b+1) + kx(b) \\ \frac{k}{p(b)}x(b+1) - p(b)x(b) \end{array} \right), \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sade olarak,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{h^2 + \left(\frac{1}{p(a-1)}\right)^2}, \quad \beta = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{p(b)}\right)^2}, \\ M_1(u) &= hu(a) + u(a-1), \quad M_2(u) = \frac{1}{p(a-1)}u(a) - hp(a-1)u(a-1), \\ N_1(u) &= u(b+1) + ku(b), \quad N_2(u) = \frac{k}{p(b)}u(b+1) - p(b)u(b). \end{aligned}$$

O zaman

$$\begin{aligned} \langle Lx, y \rangle - \langle x, Ly \rangle &= \alpha \left(-\overline{M_2(y)}, \overline{M_1(y)} \right) \begin{pmatrix} M_1(x) \\ M_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \beta \left(-\overline{N_2(y)}, \overline{N_1(y)} \right) \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \left(\overline{M_1(y)} M_2(x) - \overline{M_2(y)} M_1(x) \right) \\ &+ \beta \left(\overline{N_1(y)} N_2(x) - \overline{N_2(y)} N_1(x) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ayrıca, D_L içindeki x şu anlama gelir,

$$M_1(x) = N_1(x) = 0.$$

Şimdi, y , D_{L^*} içinde olsun, burada L^* , L 'nin self adjoint operatörüdür. D_L içindeki x 'i ele alalım öyle ki x , a ve b 'de sıfırlansın,

$$\langle x, L^*y \rangle = \langle Lx, y \rangle.$$

Böylece $L^*y = Ly$ 'dir, çünkü x keyfidir. Öte yandan D_L içindeki keyfi x için Green formülünden $M_1(y) = N_1(y) = 0$ 'dır. Böylece,

$$D_{L^*} = \{y \in l^2(a, b; w) : Ly \in l^2(a, b; w) : y(a-1) + hy(a) = 0, y(b+1) + ky(b) = 0\},$$

D_L içindeki tüm y 'ler için $L^*y = Ly$ 'dir. Başka bir ifadeyle L self adjointtir.

Teorem 4.3.2. $x, Lu = \lambda u$ 'nun bir çözümü ve $y, Lu = \mu u$ 'nun bir çözümü olsun, her ikisi de $u(a-1) + hu(a) = 0$ 'ı sağlar. O zaman $a \leq n \leq b$ için

$$(\lambda - \mu) \sum_{j=a}^n w(j) x(j) y(j) = p(n) [x(n+1) y(n) - x(n) y(n+1)], \quad (4.3.5)$$

eşitliği sağlanır [5].

İspat. (4.3.1)'den

$$\nabla [p(j) \Delta x(j)] = [\lambda w(j) - q(j)] x(j),$$

ve

$$\nabla [p(j) \Delta y(j)] = [\mu w(j) - q(j)] y(j).$$

Bu eşitlikleri sırasıyla $y(j)$ ve $-x(j)$ ile çarpıp ve toplarsak

$$\nabla [p(j) \Delta x(j)] y(j) - \nabla [p(j) \Delta y(j)] x(j) = (\lambda - \mu) w(j) x(j) y(j),$$

veya yukarıdaki eşitliğe denk olarak

$$p(j) [x(j+1) y(j) - x(j) y(j+1)] = (\lambda - \mu) w(j) x(j) y(j) \quad (4.3.6)$$

$$+ p(j-1) [x(j) y(j-1) - x(j-1) y(j)],$$

yazılabilir. Öyleyse

$$\begin{aligned} & \sum_{j=a}^n \{p(j) [x(j+1) y(j) - x(j) y(j+1)] - p(j-1) [x(j) y(j-1) - x(j-1) y(j)]\} \\ &= (\lambda - \mu) \sum_{j=a}^n w(j) x(j) y(j), \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} & p(n) [x(n+1) y(n) - x(n) y(n+1)] - p(a-1) [x(a) y(a-1) - x(a-1) y(a)] \\ &= (\lambda - \mu) \sum_{j=a}^n w(j) x(j) y(j), \end{aligned}$$

a 'daki sınır şartlarından dolayı denklem

$$p(n) [x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1)] = (\lambda - \mu) \sum_{j=a}^n w(j) x(j) y(j),$$

olur.

Sonuç 4.3.1. $x(a-1) + hx(a) = 0$ 'ı sağlayan x , $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ olmak üzere $Lu = \lambda u$ 'nun bir çözümü olsun. O zaman $a \leq n \leq b$ için

$$\sum_{j=a}^n w(j) |x(j)|^2 = p(n) \frac{\text{Im}(x(n+1)\bar{x}(n))}{\text{Im}(\lambda)} \quad (4.3.7)$$

dir.

İspat. λ kompleks ve x , $Lu = \lambda u$ 'nun bir çözümü ise o zaman $\bar{x}$, $Lu = \bar{\lambda}u$ 'nun bir çözümüdür. (4.3.7)'nin sonucu (4.3.5)'te $y = \bar{x}$ ve $\mu = \bar{\lambda}$ alarak hemen görülebilir.

Sonuç 4.3.2. $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ olmak üzere x_λ , $Lu = \lambda u$ 'nun bir çözümü olsun ve x_λ , $x_\lambda(a-1) + hx_\lambda(a) = 0$ 'ı sağlasın. Bu takdirde $a \leq n \leq b$ için

$$\sum_{j=a}^n w(j) \{x(j)\}^2 = p(n) \left[\left(\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(n+1) \right) x_\lambda(n) - x_\lambda(n+1) \left(\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(n) \right) \right]. \quad (4.3.8)$$

Özellikle reel λ için

$$\left(\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(n+1) \right) x_\lambda(n) - x_\lambda(n+1) \left(\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(n) \right) > 0, \quad (4.3.9)$$

sağlanır.

Teorem 4.3.3. Eğer $x_\lambda(a-1) + hx_\lambda(a) = 0$ 'ı sağlayan x_λ , $Lu = \lambda u$ 'nun bir çözümü ise

$$x_\lambda(n) + kx_\lambda(n-1), \quad (4.3.10)$$

polinomu $(n-a)$ reel ve basit sifra sahiptir [5].

İspat. (4.3.10)'un kompleks bir λ sifra sahip olduğunu varsayalım. O zaman $\bar{\lambda}$, (4.3.10)'un bir sıfırır.

$$x_\lambda(n) + kx_\lambda(n-1) = 0, \quad (4.3.11)$$

(4.3.11) eşitliğini $x_{\bar{\lambda}}(n-1)$ ile çarpar,

$$x_{\bar{\lambda}}(n) + kx_{\bar{\lambda}}(n-1) = 0, \quad (4.3.12)$$

(4.3.12) eşitliğini de $-x_\lambda(n-1)$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak

$$x_\lambda(n) x_{\bar{\lambda}}(n-1) - x_{\bar{\lambda}}(n) x_\lambda(n-1) = 0,$$

elde ederiz veya denk olarak

$$x_\lambda(n) \overline{x_\lambda(n-1)} - \overline{x_\lambda(n)} x_\lambda(n-1) = 0,$$

eşitliğini buluruz. Bu takdirde $\text{Im}[x_\lambda(n) x_\lambda(n-1)] = 0$ 'dır. Ancak, Açıklama 4.3.1'e göre $\sum_{j=a}^{n-1} w(j) \{x(j)\}^2 \geq |x(a)|^2 = \left(\frac{a}{h}\right)^2 > 0$ 'dır. Bu da açıkça (4.3.7) ile çelişir. Bundan dolayı (4.3.10)'un sıfırları reel olmalıdır.

Benzer şekilde (4.3.10)'un katlı bir λ sifıra sahip olduğunu varsayalım. O zaman $x_\lambda(n) + kx_\lambda(n-1) = 0$ ve $\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(n) + k\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(n-1) = 0$ 'dır. Bu eşitlikleri sırasıyla $\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(n-1)$ ve $-x_\lambda(n-1)$ ile çarpar taraf tarafa toplarsak

$$x_\lambda(n) \left(\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(n-1) \right) - \left(\frac{d}{d\lambda}x_\lambda(n) \right) x_\lambda(n-1) = 0,$$

elde ederiz. Bu durum (4.3.9) ile çelişir. Bu takdirde (4.3.9)'un sıfırları basit olmalıdır.

Sonuç olarak λ 'da (4.3.10) polinomunun $(n-a)$ dereceden olması onun $(n-a)$ sifıra sahip olmasını garanti eder.

Teorem 4.3.4. (Wronskian-Tipi Özdeşlik) x ve y , $Lu = \lambda u$ 'nun çözümleri olsun.

Bu takdirde $a \leq n \leq b$ için

$$\begin{aligned} W[x, y](n) &= p(n-1) [x(n) \Delta y(n-1) - y(n) \Delta x(n-1)], \\ &= -p(n-1) [x(n) y(n-1) - x(n-1) y(n)], \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

sabittir ve $W[x, y](a)$ 'ya eşittir [5].

İspat. (4.3.6)'da $\lambda = \mu$ alırsak

$$\Delta \{p(n-1) [x(n) \Delta y(n-1) - y(n) \Delta x(n-1)]\} = 0.$$

Böylece her $n = a, \dots, b$ için,

$$\begin{aligned} p(n-1) [x(n) \Delta y(n-1) - y(n) \Delta x(n-1)] \\ = p(a-1) [x(a) \Delta y(a-1) - y(a) \Delta x(a-1)], \end{aligned}$$

ve böylece $W[x, y](n) = W[x, y](a)$ 'dır.

4.4. Özfonksiyon Açılımı ve Spektral Fonksiyon

Teorem 4.4.1. (Özfonksiyon Açılımı) Eğer $u(a), \dots, u(b), l^2(a, b; w)$ 'da herhangi bir dizi ise bu takdirde

$$\begin{aligned} v_i &= \langle u(n), x_{i-a}(n) \rangle, \\ &= \sum_{n=a}^b w(n) u(n) x_{i-a}(n), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

olmak üzere

$$u(n) = \sum_{i=a}^b v_i x_{i-a}(n) \rho_{i-a}^{-1}, \quad n = a, \dots, b, \quad (4.4.2)$$

dir. Buradan Parseval eşitliği

$$\|u\|^2 = \sum_{i=a}^b |v_i|_{\rho_{i-a}}^2. \quad (4.4.3)$$

sağlanır [5].

İspat. Özfonksiyonlar lineer bağımsız olduğundan keyfi bir $u(a), \dots, u(b)$ vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$u(i) = \sum_{r=a}^b v_r x_{r-a}(i) \rho_{r-a}^{-1}, \quad i = a, \dots, b,$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^b w(i) u(i) \bar{x}_{s-a}(i) &= \sum_{i=a}^b w(i) \bar{x}_{s-a}(i) \sum_{r=a}^b v_r x_{r-a}(i) \rho_{r-a}^{-1}, \\ &= \sum_{r=a}^b v_r \rho_{r-a}^{-1} \sum_{i=a}^b w(i) \bar{x}_{s-a}(i) x_{r-a}(i), \\ &= \sum_{r=a}^b v_r \rho_{r-a}^{-1} \rho_{r-a} \delta_{rs}, \end{aligned}$$

yani,

$$\sum_{i=a}^b w(i) u(i) \bar{x}_{s-a}(i) = v_s.$$

Şimdi Parseval eşitliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \sum_{n=a}^b w(n) |u(n)|^2, \\
&= \sum_{n=a}^b w(n) \left\{ \sum_{i=a}^b v_i x_{i-a}(n) \rho_{i-a}^{-1} \right\} \overline{\left\{ \sum_{j=a}^b v_j x_{j-a}(n) \rho_{j-a}^{-1} \right\}}, \\
&= \sum_{i=a}^b \sum_{j=a}^b v_i \overline{v_j} \rho_{i-a}^{-1} \rho_{j-a}^{-1} \left\{ \sum_{n=a}^b w(n) x_{i-a}(n) x_{j-a}(n) \right\}, \\
&= \sum_{i=a}^b \sum_{j=a}^b v_i \overline{v_j} \rho_{i-a}^{-1} \rho_{j-a}^{-1} \rho_{i-a} \delta_{ij}, \quad (2.3.1) \text{ 'den}, \\
&= \sum_{i=a}^b |v(i)|^2 \rho_{i-a}^{-1},
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.4.1. Reel λ 'lar için tanımlı, λ_{i-a} ($i = a, \dots, b$)'da ρ_{i-a}^{-1} ötelenen reel değerli, azalmayan ve sağdan sürekli adım fonksiyonuna spektral fonksiyon denir [5].

Örneğin,

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 < \lambda_{i-a} \leq \lambda} \rho_{i-a}^{-1}, & \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{i-a} \leq 0} \rho_{i-a}^{-1}, & \lambda < 0 \end{cases},$$

şeklinde tanımlı bir spektral fonksiyondur.

Açıklama 4.4.1.

1) Spektral fonksiyon bir Stieltjes ölçümü $d\rho(\lambda)$ tanımlar, burada sıfır ölçümlü λ_{i-a} 'ların hiçbirini içerilmez. Öyleyse (4.3.1), (4.3.3) eşitlikleri sırasıyla aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir [5],

$$u(n) = \int_{-\infty}^{\infty} v(n) x_{\lambda}(n) d\rho(\lambda), \quad (4.4.4)$$

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |v(\lambda)|^2 d\rho(\lambda). \quad (4.4.5)$$

2) Sonraki kullanımda uygunluk için $x_0, \dots, x_{b-a}$ çözümlerini normalleştirmeyi isteyebiliriz, yani $x_{i-a}(n) \rho_{i-a}^{-\frac{1}{2}}$ ifadesini $x_{i-a}(n)$ ile, $i = a, \dots, b$, değiştirebiliriz. Bu durumda

sırasıyla (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) aşağıdaki şekilde yazabiliriz [5].

$$u(n) = \sum_{i=a}^b v_i x_{i-a}(n), \quad n = 1, \dots, b, \quad (4.4.6)$$

burada

$$\begin{aligned} v_i &= \langle u(n), x_{i-a}(n) \rangle, \\ &= \sum_{n=a}^b w(n) u(n) x_{i-a}(n), \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=a}^b |v_i|^2, \quad (4.4.8)$$

ve

$$\sum_{r=a}^b x_{r-a}(i) \bar{x}_{r-a}(j) = w(j)^{-1} \delta_{ij}, \quad a \leq i, j \leq b. \quad (4.4.9)$$

Ayrıca spektral fonksiyon λ_{i-a} 'da

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 < \lambda_{i-a} \leq \lambda} H(\lambda - \lambda_{i-a}), & \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{i-a} \leq 0} H(-\lambda + \lambda_{i-a}), & \lambda < 0 \end{cases},$$

şeklinde tanımlanabilir, burada H , standart Heaviside fonksiyonudur.

Problem 4.4.1.

$$\Delta^2 x(n-1) + \lambda x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(4) = 0,$$

Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarını gösterelim [1].

Çözüm.

Problem 4.1.7'den özdeğerler

$$\lambda_t = 2 - 2 \cos \frac{t\pi}{4}, \quad (n = 1, 2, 3)$$

olur ve üç lineer bağımsız fonksiyon

$$\phi_t = \sin \frac{t\pi n}{4},$$

bulunur. Dolayısıyla $r(n) = 1$ için,

$$\left(2 - \sqrt{2}, \sin \frac{\pi}{4}n\right), \left(2, \sin \frac{\pi}{2}n\right), \left(2 + \sqrt{2}, \sin \frac{3\pi}{4}n\right),$$

Sturm-Liouville problemi için özçiftlerdir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} < x_1, x_2 >_r &= \sum_{t=1}^3 x_1(t) x_2(t), \\ < x_1, x_2 >_r &= x_1(1) x_2(1) + x_1(2) x_2(2) + x_1(3) x_2(3), \\ < x_1, x_2 >_r &= \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \pi + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{2}, \\ < x_1, x_2 >_r &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

özfonsiyonların ortogonal olduğunu verir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} < x_1, x_3 >_r &= \sum_{t=1}^3 x_1(t) x_3(t), \\ &= x_1(1) x_3(1) + x_1(2) x_3(2) + x_1(3) x_3(3), \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{9\pi}{4}, \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0, \\ < x_2, x_3 >_r &= \sum_{t=1}^3 x_2(t) x_3(t), \\ &= x_2(1) x_3(1) + x_2(2) x_3(2) + x_2(3) x_3(3), \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{4}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

4.5. Fark Denklemleri İçin Parametrelerin Değişimi Metodu

Parametrelerin değişimi metodu k . basamaktan sabit katsayılı veya değişken katsayılı lineer homojen olmayan denklemlerin bir özel çözümünü bulabilmek için $g(n)$ 'in belirli türden olup olmadığına bakılmaksızın uygulanabilen bir yöntemdir [1 – 3, 9].

Bu nedenle parametrelerin değişimi metodu en genel yöntem olarak bilinir. Bu yöntem ikinci basamaktan lineer değişken katsayılı homojen olmayan

$$x(n+2) + a_1(n) x(n+1) + a_2(n) x(n) = g(n), \quad (4.5.1)$$

denklemini için açıklanmaktadır, burada $a_1(n)$, $a_2(n)$ katsayıları ve $g(n)$, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olup her $n \geq 0$ için $a_2(n) \neq 0$ 'dır. Önce (4.5.1) bağıntısına göre

$$x(n+2) + a_1(n)x(n+1) + a_2(n)x(n) = 0, \quad (4.5.2)$$

homojen denkleminin genel çözümü

$$x_h(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n), \quad (4.5.3)$$

şeklinde bulunur, burada $x_1(n)$ ve $x_2(n)$, (4.5.2)'nin lineer bağımsız çözümleridir. Buradan (4.5.1)'in bir özel çözümü

$$x_p(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n), \quad (4.5.4)$$

şeklindedir. Burada $c_1(n)$ ve $c_2(n)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\Delta c_1(n)x_1(n+1) + \Delta c_2(n)x_2(n+1) = 0, \quad (4.5.5)$$

$$\Delta c_1(n)x_1(n+2) + \Delta c_2(n)x_2(n+2) = g(n), \quad (4.5.6)$$

(4.5.5) ve (4.5.6)'dan

$$\Delta c_1(n) = \frac{-g(n)x_2(n+1)}{W(n+1)},$$

ve

$$\Delta c_2(n) = \frac{g(n)x_1(n+1)}{W(n+1)},$$

burada $W(n)$, $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ 'in Casoratyanıdır. Buradan

$$c_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)x_2(i+1)}{W(i+1)},$$

$$c_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)x_1(i+1)}{W(i+1)},$$

son bağıntılar (4.5.4) eşitliğinde yerlerine konursa (4.5.1)'in bir özel çözümü

$$x_p(n) = x_1(n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)x_2(i+1)}{W(i+1)} + x_2(n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)x_1(i+1)}{W(i+1)},$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, bu yöntemi k . basamaktan lineer değişken katsayılı homojen olmayan

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = g(n), \quad (4.5.7)$$

denklemini için ele alalım. Buradan

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = 0,$$

homojen denkleminin genel çözümü

$$x_h(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \dots + c_kx_k(n),$$

şeklinde bulunur, burada $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ homojen denklemin lineer bağımsız çözümleridir. Buradan (4.5.7)'nin bir özel çözümü

$$x_p(n) = c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n) + \dots + c_k(n)x_k(n),$$

Burada $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$ bilinmeyenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta c_1(n)x_1(n+1) + \Delta c_2(n)x_2(n+1) + \dots + \Delta c_k(n)x_k(n+1) = 0, \\ \Delta c_1(n)x_1(n+2) + \Delta c_2(n)x_2(n+2) + \dots + \Delta c_k(n)x_k(n+2) = 0, \\ \vdots \\ \Delta c_1(n)x_1(n+k-1) + \Delta c_2(n)x_2(n+k-1) + \dots + \Delta c_k(n)x_k(n+k-1) = 0, \\ \Delta c_1(n)x_1(n+k) + \Delta c_2(n)x_2(n+k) + \dots + \Delta c_k(n)x_k(n+k) = g(n), \end{array} \right. ,$$

sisteminden $\Delta c_1(n), \Delta c_2(n), \dots, \Delta c_k(n)$ bulunur ve daha sonra sırasıyla ters farkları alınarak $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$ elde edilir.

4.6. Sturm-Liouville Probleminin Çözümünün Görüntüsü

Genelde literatürde fark denklemleri için Sturm-Liouville problemleri incelenirken uygulamada q potansiyeli sıfır alınarak çözümler elde edilmiştir. Bu kısımda, q potansiyel fonksiyonu alınarak, yani Sturm-Liouville denklemini değişken katsayılı bir durumda iken parametrelerin değişimi metodu yardımıyla çözüm fonksiyonunun görüntüsü elde edildi.

$$\Delta^2 x(n-1) + q(n)x(n) + \lambda x(n) = 0, \quad (4.6.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(a-1) + hx(a) = 0 \\ x(b-1) + kx(b) = 0 \end{array} \right. , \quad (4.6.2)$$

(4.6.1) – (4.6.2) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (4.6.1) denklemini için (4.6.2) sınır koşullarından birincisini ele alalım. Burada $a = 1$ alınırsa

$$x(0) = -h, \quad x(1) = 1,$$

şeklinde başlangıç koşullarına ulaşırız. (4.6.1) denkleminin bu başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $x(n, \lambda)$ olmak üzere homojen kısmı çözelim,

$$\Delta^2 x_h(n-1) + \lambda x_h(n) = 0,$$

için karakteristik denklem

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0,$$

olur ve kökleri

$$m_{1,2} = \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2},$$

olarak bulunur. Buradan

$$x_h(n) = c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n, \quad (4.6.3)$$

homojen çözümü elde edilir. Daha sade olarak

$$x_h(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n),$$

alalım. Buradan

$$x_p(n-1) = c_1(n-1) x_1(n-1) + c_2(n-1) x_2(n-1), \quad (4.6.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_p(n-1) &= \Delta(c_1(n-1) x_1(n-1)) + \Delta(c_2(n-1) x_2(n-1)), \\ &= c_1(n-1) \Delta x_1(n-1) + x_1(n) \Delta c_1(n-1) \\ &\quad + c_2(n-1) \Delta x_2(n-1) + x_2(n) \Delta c_2(n-1), \\ &= \Delta c_1(n-1) x_1(n) + \Delta c_2(n-1) x_2(n) + c_1(n-1) \Delta x_1(n-1) \\ &\quad + c_2(n-1) \Delta x_2(n-1), \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki denklem gözönüne alınırsa,

$$\Delta c_1(n-1) x_1(n) + \Delta c_2(n-1) x_2(n) = 0, \quad (4.6.5)$$

$$\Delta x_p(n-1) = c_1(n-1) \Delta x_1(n-1) + c_2(n-1) \Delta x_2(n-1), \quad (4.6.6)$$

$$\Delta^2 x_p(n-1) = \Delta(c_1(n-1) \Delta x_1(n-1)) + \Delta(c_2(n-1) \Delta x_2(n-1)) \quad (4.6.7)$$

$$\begin{aligned} &= c_1(n-1) \Delta^2 x_1(n-1) + \Delta x_1(n) \Delta c_1(n-1) \\ &\quad + c_2(n-1) \Delta^2 x_2(n-1) + \Delta x_2(n) \Delta c_2(n-1) \end{aligned}$$

(4.6.4)'te n yerine $n + 1$ alınırsa

$$x_p(n) = c_1(n) x_1(n) + c_2(n) x_2(n), \quad (4.6.8)$$

elde edilir. Buradan (4.6.7) ve (4.6.8), (4.6.1)'de yerine yazılırsa

$$c_1(n-1) \Delta^2 x_1(n-1) + \Delta x_1(n) \Delta c_1(n-1) + c_2(n-1) \Delta^2 x_2(n-1) \quad (4.6.9)$$

$$+ \Delta x_2(n) \Delta c_2(n-1) + \lambda \left[\underbrace{c_1(n) x_1(n) + c_2(n) x_2(n)}_{(*)} \right] = -q(n) x(n),$$

(4.6.5) açılırsa (*) ifadesi

$$[c_1(n) - c_1(n-1)] x_1(n) + [c_2(n) - c_2(n-1)] x_2(n) = 0,$$

$$c_1(n) x_1(n) - c_1(n-1) x_1(n) + c_2(n) x_2(n) - c_2(n-1) x_2(n) = 0,$$

$$c_1(n) x_1(n) + c_2(n) x_2(n) = c_1(n-1) x_1(n) + c_2(n-1) x_2(n),$$

olur. (4.6.9) tekrar düzenlenirse

$$c_1(n-1) \Delta^2 x_1(n-1) + \lambda c_1(n-1) x_1(n) + c_2(n-1) \Delta^2 x_2(n-1) + \lambda c_2(n-1) x_2(n)$$

$$+ \Delta c_1(n-1) \Delta x_1(n) + \Delta c_2(n-1) \Delta x_2(n) = -q(n) x(n),$$

$$c_1(n-1) [\Delta^2 x_1(n-1) + \lambda x_1(n)] + c_2(n-1) [\Delta^2 x_2(n-1) + \lambda x_2(n)]$$

$$+ \Delta c_1(n-1) \Delta x_1(n) + \Delta c_2(n-1) \Delta x_2(n) = -q(n) x(n),$$

eşitliği elde edilir.

$x_1(n)$ ve $x_2(n)$ homojen denklemi sağladıklarından eşitliğin sol tarafındaki ilk iki kısım sıfır olur. Böylece

$$\Delta c_1(n-1) \Delta x_1(n) + \Delta c_2(n-1) \Delta x_2(n) = -q(n) x(n),$$

elde edilir. Bu ifadeyi (4.6.5) ile karşılaştıracak olursak

$$\Delta c_1(n-1) x_1(n) + \Delta c_2(n-1) x_2(n) = 0,$$

$$\Delta c_1(n-1) \Delta x_1(n) + \Delta c_2(n-1) \Delta x_2(n) = -q(n) x(n),$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$\Delta c_1(n-1) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(n) \\ -q(n) x(n) & \Delta x_2(n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ \Delta x_1(n) & \Delta x_2(n) \end{vmatrix}} = \frac{q(n) x(n) x_2(n)}{W(x_1(n), x_2(n))},$$

$$\Delta c_2(n-1) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(n) & 0 \\ \Delta x_1(n) & -q(n)x(n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ \Delta x_1(n) & \Delta x_2(n) \end{vmatrix}} = \frac{-q(n)x(n)x_1(n)}{W(x_1(n), x_2(n))},$$

$$\begin{aligned} c_1(n-1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q(i)x(i)x_2(i)}{W(x_1(i), x_2(i))}, \\ c_2(n-1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-q(i)x(i)x_1(i)}{W(x_1(i), x_2(i))}, \end{aligned}$$

bulunur. n yerine $n+1$ alınırsa

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \sum_{i=0}^n \frac{q(i)x(i)x_2(i)}{W(x_1(i), x_2(i))}, \\ c_2(n) &= \sum_{i=0}^n \frac{-q(i)x(i)x_1(i)}{W(x_1(i), x_2(i))}, \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + c_1(n)x_1(n) + c_2(n)x_2(n),$$

sonucuna ulaşılır. Bulunan değerleri yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x(n, \lambda) &= c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n \\ &+ \sum_{i=0}^n \frac{q(i)x(i) \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^i}{W(x_1(i), x_2(i))} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n \\ &+ \sum_{i=0}^n \frac{-q(i)x(i) \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^i}{W(x_1(i), x_2(i))} \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Şimdi $W(x_1(i), x_2(i))$ Casoratyanını bulalım,

$$\begin{aligned}
\det \begin{vmatrix} x_1(i) & x_2(i) \\ x_1(i+1) & x_2(i+1) \end{vmatrix} &= \det \begin{vmatrix} \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i & \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i \\ \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^{i+1} & \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^{i+1} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^{i+1} \\
&\quad - \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i \\
&= \left[\left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \right]^i \\
&\quad \times \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \\
&\quad - \left[\left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \right]^i \\
&\quad \times \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right), \\
&= 1^i \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) - 1^i \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) - \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right), \\
&= -\sqrt{\lambda(\lambda-4)},
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece denklemin genel çözümünün görüntüsü

$$\begin{aligned}
x(n) &= c_1 \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^n \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \frac{-q(i)x(i) \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^n \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \frac{q(i)x(i) \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Son eşitlikte başlangıç şartlarını yerine koyarsak

$$x(0) = c_1 + c_2 = -h,$$

$$\begin{aligned}
x(1) &= c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^1 \frac{-q(i) x(i) \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^1 \frac{q(i) x(i) \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right), \\
&= c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&- \frac{q(0) x(0)}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&- \frac{q(1) x(1)}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&+ \frac{q(0) x(0)}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&+ \frac{q(1) x(1)}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&= c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\
&+ \frac{q(0) h}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) - \frac{q(0) h}{\sqrt{\lambda(\lambda - 4)}} \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right), \\
&= c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + q(0) h = 1
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
c_1 \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) &= 1 - q(0) h, \\
c_1 + c_2 &= -h,
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Öyleyse

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - q(0) h & \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\ -h & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{2 - \lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) & \left(\frac{2 - \lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \right) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) & 1-q(0)h \\ 1 & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) & \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2}\right) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

$$c_1 = \frac{2-h\left(2q(0)-2+\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}, \quad c_2 = \frac{-2+h\left(2q(0)-2+\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}$$

olarak bulunur. Böylece denklemin genel çözümünün görüntüsü

$$\begin{aligned} x(n, \lambda) = & \left(\frac{2-h\left(2q(0)-2+\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \right) \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^n \\ & + \left(\frac{-2+h\left(2q(0)-2+\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \right) \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^n \\ & + \sum_{i=0}^n \frac{-q(i)x(i) \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^n \\ & + \sum_{i=0}^n \frac{q(i)x(i) \left(\frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^i}{\sqrt{\lambda(\lambda-4)}} \left(\frac{2-\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

SONUÇ: Bu çalışmada genel olarak fark denklemlerinin teorisi detaylı olarak incelenmiştir ve diferansiyel denklemlerle bağlantıları araştırılmıştır. Asıl amaç fark denklemlerinin Sturm-Liouville problemlerindeki işleyişini incelemektir. Bu doğrultuda dördüncü bölümde çok kapsamlı bir şekilde çalışma yapılmış ve fark denklemlerinde Sturm-Liouville problemlerine dair bazı sonuçlar elde edilmiştir. Böylece daha sonraki çalışmalarda, fark denklemlerinin spektral teorisiyle ilgili yeni sonuçlar alınması için temel altyapı kurulmuştur.

KAYNAKLAR

1. **W. G., Kelley and A. C., Peterson**, 1991. Difference Equations An Introduction with Applications, Academic Press, 403, Newyork.
2. **R. P., Agarwal**, 2000. Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, 970 Newyork.
3. **H., Bereketoglu, V., Kutay**, 2012. Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara.
4. **F. V., Atkinson**, 1964. Discrete and Continuous Boundary Value Problems, Academic Press, Newyork.
5. **A., Jirari**, 1995. "Second Order Sturm-Liouville Difference Equations and Orthogonal Polynomials, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 113, Number 542.
6. **B. M., Levitan, I. S., Sargsjan**, 1975. Introduction to Spectral Theory: Self-adjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society Providence Rhode Island.
7. **G. Sh., Guseinov**, 1987. " On the Spectral Theory of Multiparameter Difference Equations of Second Order", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 51, 785-811.
8. **B., Musayev, M., Alp**, 2000. Fonksiyonel Analiz, Balci Yayınları, Ankara.
9. **C., M., Bender, S., A., Orszag**, 1999. Advanced Mathematical Methods for Scirntists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory, Springer-Verlag Newyork.
10. **S., Kalabusic, M. R. S., Kulenovic**, 2000. Projects for the History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island.
11. **S., Çatal**. 2004. Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü, DEÜ Müh. Fak. Fen ve Müh. Dergisi, Cilt:6, Sayı:1, 129-138.
12. **V., Kutay**, 2010. Fark Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, A.Ü. Fen Bil. Enst.

13. **M., Çetinkaya**, 2011. Fark Denklemlerinde Sınır Değer Problemi için Eliminasyon Metodu, Kararlılığı ve Maksimum Prensibi, Yüksek Lisans Tezi, Y.Y.Ü. Fen Bil. Enst.
14. **Ö., Korkmaz**, 2010. Sınır Değer Problemleri ve Fark Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, S.D.Ü. Fen Bil. Enst.
15. **G., Shi, H., Wu**, 2009. Spectral Theory of Sturm-Liouville Difference Operators, Linear Algebra and Its Applications, 430, 830-846.
16. **H., Sun, J., Qi, H., Jing**, 2011. Classification of Nonselfadjoint Singular Sturm-Liouville Difference Equations, Applied Mathematics and Computation, 217, 8020-8030.
17. **D., B., Hinton, R., T., Lewis**, 1978. Spectral Theory of Second-Order Difference Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 63, 421-438.
18. **H., Sun, Y., Shi**, 2006. Limit Point and Limit Circle Criteria for Singular Second Order Linear Difference Equations with Complex Coefficients, Computers and Mathematics with Applications, 52, 539-554.
19. **Y., Shi, H., Sun**, 2011. Self-adjoint extensions for second-order symmetric linear difference equations, Linear Algebra and its Applications, 434, 903-930.
20. **E., Baş**, 2004. Sturm-Liouville Operatörü için Parseval Eşitliği ve Weyl Daire, Weyl Nokta Durumları, Doktora Semineri, F.Ü. Fen Bil. Enst.
21. **Y., Wang, Y., Shi**, 2005. Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 309, 56-69.
22. **R., Rafatov, M., Ergüt, M., Bektaş**, 1998. Laplace Dönüşümlerinin Esasları, Diferansiyel Ve Fark Denklemlerinin Çözümü, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
23. **S., Goldberg**, 1986. Introduction to Difference equations with Illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology. Dover, 260, Newyork.
24. **M. R. S., Kulenovic, O., Merino**, 2002. Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica, Chapman&Hall, 344.

25. **V., Lakshmikantham, D., Trigiante, A. C., Peterson,** 1988. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Academic, 242, Newyork.
26. **R., Mickens,** 1990. Difference Equations, Van Nostrand, 448, Newyork.
27. **E., Baş, E. S., Panakhov** 2012, 'A New Approximation For Singular Inverse Sturm-Liouville Problem' Thai Journal Of Mathematics, Vol. 10 (3), 685-692.
28. **E., Bas,** 2013. "Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator" Journal of Function Spaces and Applications Article ID 915830, 7 pages.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Burdur’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Burdur’da tamamladım. 2008 yılında Harran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandım ve 2012 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak göreve ve tezli yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesi Matematik bölümünde görev yapmaktayım.