

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KOMPAKT RIEMAN MANİFOLDLARI

Mesut POLAT

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KOMPAKT RIEMAN MANİFOLDLARI

Mesut POLAT

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, 26/ 01 / 2007 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile başarılı/başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye : Prof.Dr. Mahmut ERGÜT

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması için fedakârca, her zaman için hiçbir yardımını benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a ve sağladığı olanaklardan dolayı sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Mesut POLAT

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
<u>İÇİNDEKİLER</u>	<u>III</u>
<u>SİMGELER LİSTESİ.....</u>	<u>III</u>
<u>ÖZET</u>	<u>IIV</u>
<u>ABSTRACT.....</u>	<u>IV</u>
<u>1. BÖLÜM</u>	<u>1</u>
TEMEL KAVRAMLAR	1
<u>2. BÖLÜM</u>	<u>9</u>
KOMPAKT MANİFOLDLARIN KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ.....	9
2.1. GİRİŞ	9
2.2. TEMEL KAVRAMLAR	10
<u>3. BÖLÜM</u>	<u>17</u>
3. S^{n+1} in MİNİMAL HİPERYÜZEYİNİN BİRİNCİ KARAKTERİSTİK	
DEĞERİ.....	17
3.1. KÜREDE MİNİMAL HİPERYÜZEY	17
<u>4. BÖLÜM</u>	<u>21</u>
4.1. HİPERYÜZEYLER İÇİN BİRİNCİ KARAKTERİSTİK DEĞER	
TAHMİNİ	21
KAYNAKLAR	24

SİMGELER LİSTESİ

M	: Manifold
IR	: Reel sayılar cümlesi
Eⁿ	: n-boyutlu Öklid uzayı
χ(M)	: M üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T_M(P)	: M nin bir P noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
Λ	: Dış çarpım
R	: Riemann eğrilik tensörü
Δ	: Laplace operatörü
∇	: Grad fonksiyonu
K	: Gauss eğriliği
Hessf	: Hessian tensörü
D	: Riemann konneksiyonu
$\overline{D}$	: Gauss anlamında türev operatörü
dV	: Hacim elementi
H	: Ortalama eğrilik

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIRLI KOMPAKT RIEMAN MANİFOLDLARI

Mesut POLAT

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa:25

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; kompakt manifoldların karakteristik değerleri araştırıldı.

Üçüncü bölümde; S^{n+1} küresinde minimal hiperyüzeyin karakteristik değeri incelendi.

Dördüncü bölüm; çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde; hiperyüzeyler için birinci karakteristik değer tahmini üzerine teoremler ifade ve ispat edildi.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı Riemann manifoldu, Karakteristik değer.

ABSTRACT

M.S.Thesis

COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH BOUNDARY

Mesut POLAT

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2007, Page:25

This thesis is arranged in four chapters.

In the first chapter, some basic concepts and theorems are given.

In the second chapter, characteristic values of compact manifolds are investigated.

In the third chapter, characteristic values of S^{n+1} are examined.

The fourth chapter is the original part of this study. In this section, theorems and proofs are given on the estimate of the first characteristic value for hypersurfaces.

Key words: Riemannian manifolds with boundary, characteristic value.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1. M , bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n -boyutlu bir topolojik manifold (veya kısaca topolojik n -manifold) denir.

(M1) M , bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M nin her açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık bir alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [1].

Tanım 1.1.2. Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir.

S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir, [1].

Tanım 1.1.3. M topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir, [1].

Tanım 1.1.4. M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada $\langle , \rangle$ işlemine M üzerinde bir iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği ve ya diferansiyellenebilir metrik denir, [1].

Tanım 1.1.5. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için;

$$1) D_{fX + gY} Z = f D_X Z + g D_Y Z, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$2) D_X(fY) = f D_X Y + (X f)Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon adı verilir (D_X 'e X 'e göre kovaryant türev operatörü denir), [1].

Tanım 1.1.6. M bir yarı Riemann manifoldu ve D , M üstünde bir afin konneksiyon olsun.

Eğer;

$$1) D, C^\infty \text{ sınıfındandır.}$$

$$2) M \text{ nin bir } A \text{ bölgesi üzerinde, } C^\infty \text{ olan } \forall X, Y \in \chi(M) \text{ için}$$

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.

$$3) M \text{ nin bir } A \text{ bölgesi üzerinde } C^\infty \text{ olan } \forall X, Y, Z \in \chi(M) \text{ ve } \forall p \in A \text{ için}$$

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle|_p + \langle Y, D_X Z \rangle|_p$$

özellikleri sağlanıyorsa, D konneksiyonuna, M üstünde bir Riemann konneksiyonu denir, [1].

Tanım 1.1.7.

$$R: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y, Z) = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z$$

$$= (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]})Z$$

$$= ([D_X, D_Y] - D_{[X, Y]})Z$$

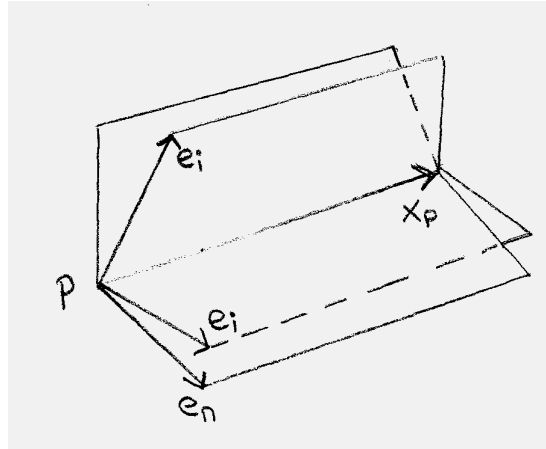
olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde üçüncü mertebeden bir kovaryant tensör alanına E^n in eğrilik tensör alanı ve bunun bir $p \in E^n$ noktasındaki değeri olan

$R(X_p, Y_p)Z_p$ tensörüne de E^n in bir p noktasındaki bir eğrilik tensörü veya kısaca E^n in p deki eğriliği denir, [1].

Tanım 1.1.8. M , n -boyutlu Riemann manifold olmak üzere $T_M(P)$ tanjant uzayındaki her P düzlemi için $K(P)$ kesit eğriliği; X_1 ve X_2 , P nin ortonormal bazı olmak üzere

$$K(P) = K(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2) X_1, X_2 \rangle$$

şeklinde tanımlanır, [2].

Tanım 1.1.9.

M bir Riemann n -manifold ve M nin bir p noktası ile bu noktadaki bir X_p tanjant vektörü verilmiş olsun.

$T_M(P)$ nin X_p yi ihtiva eden bütün 2-boyutlu alt uzaylara göre kesit eğriliklerinin toplamı, M nin P noktasında X_p doğrultusundaki Ricci eğriliği olarak adlandırılır, [3].

Tanım 1.1.10. M , n -boyutlu bir Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere

$$\text{Ric}: T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow \text{Ric}(u, v)$$

dönüşümü

$$\text{Ric}(u, v) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, u)v, e_i \rangle$$

şeklinde tanımlanırsa, M nin Ricci eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ricci eğrilik tensörünün $p \in M$ noktasındaki değerine M nin Ricci eğriliği denir, [4].

Tanım 1.1.11. M , bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör olanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu,

1) 2-lineer

2) Simetrik

3) $\forall x \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$

özelliklerini sağlıyor ise, M ye bir yarı-Riemann manifoldu denir, [1].

Tanım 1.1.12. Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldu için $\forall p \in M$ noktasında R eğrilik tensörü özdeş olarak sıfıra eşitse M ye flatt manifold denir, [3].

Tanım 1.1.13. E^n , in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ in bir bazı $\{N\}$ ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir. $\chi(M)^\perp$ in iki tane birim normal vektör alanı vardır. Bunlardan biri $\{N\}$ ise diğeri $\{-N\}$ dir, [1].

Tanım 1.1.14. E^n , n -boyutlu öklid uzayında bir M hiperyüzeyinde diferansiyellenebilir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir. E^3 deki her irtibatlı M yüzeyi için tam iki farklı yönlendirme vardır. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir, [1].

Tanım 1.1.15. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{İz}S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir, [1].

$$\textbf{Tanım 1.1.16. } S^n = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right. \right\} \subset E^{n+1} \text{ cümlesine}$$

n -boyutlu küre (veya n -küre) denir.

Bir n -küre topolojik n -manifolddur, [1].

Tanım 1.1.17. M^n , R^m de n -boyutlu Riemann manifoldunun hacmi

$$\text{Vol}(M^n) = \int_{M^n} dv$$

şeklinde tanımlanır. Burada dv , M^n nin hacim elementidir, [5] .

Tanım 1.1.18. M , n -boyutlu manifold ve M üzerinde C^∞ sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\Delta: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(f) \rightarrow \Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme M nin Laplace operatörü denir, [6].

Tanım 1.1.19. Verilen bir bölgenin sınırında belirli bir sürekli fonksiyona eşit olan harmonik fonksiyonun bulunması problemi, birinci sınır problemi olarak adlandırılır, [7].

Tanım 1.1.20. $n \geq k$ olmak üzere M bir k -manifold ve $\bar{M}$ de bir n -manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\bar{M}$ de bir $\bar{U}$ ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \left\{ m \in \bar{U} \mid \bar{x}_{k+1}(m) = \dots = \bar{x}_n(m) = 0 \right\}$$

ise M ye $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu denir, [1].

Tanım 1.1.21. E^n de sınırlı (veya sınırlı olmayan) ve yönlü bir k -manifold M , M nin bir yönü μ olsun. M nin bir noktası x olduğuna göre μ_x yönü ile T_x iç çarpımı bir $W(x) \in \Lambda^k(T_M(x))$ hacim elementini belirtir. Böylece M üzerinde sıfırdan farklı bir k -formdan W elde edilir. Bu k -forma M üzerinde μ tarafından belirtilen hacim elementi denir ve dV ile gösterilir, [8].

Tanım 1.1.22.

$$\text{div}: \chi(E^n) \rightarrow C(E^n, \mathbb{R})$$

$$X \rightarrow \text{div}(X)$$

öyleki

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{d}{dx_i}$$

olmak üzere

$$\text{div}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

bir gösterim olmak üzere

$$\text{div}(X) = \langle \nabla, X \rangle$$

şeklinde tanımlı div fonksiyonuna, E^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre divergens fonksiyonu denir, [1] .

Teorem 1.1.1. E^3 de kompakt ve sınırlı bir 2-manifold M ve ∂M üzerinde dış birim normal vektör alanı n olsun. M üzerinde bir diferansiyellenebilir vektör alanı F ise

$$\int_M \text{div} F dv = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle dA$$

dır. Burada dv ile E^3 deki hacim elementini ve dA ile de M deki alan elementini gösteriyoruz, [8].

Tanım 1.1.23. r bir pozitif reel sayı ve $P_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

a) $\{P: P \in \mathbb{R}^n \text{ ve } \|P - P_0\| < r\}$ cümlesine açık yuvar,

b) $\{P: P \in \mathbb{R}^n \text{ ve } \|P - P_0\| \leq r\}$ cümlesine kapalı yuvar,

c) $\{P: P \in \mathbb{R}^n \text{ ve } \|P - P_0\| = r\}$ cümlesine küre

denir. P_0 merkez ve r yarıçap olup $B_r(P_0)$ şeklinde gösterilir, [9] .

Teorem 1.1.2. M bir n -manifold ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. O zaman

$$d^2f = d(df) = 0$$

dır , [3] .

Tanım 1.1.24. Bir yüzeyin üzerinde ayrılmadan çizilen, kesişmeyen, basit kapalı eğrilerin en büyük sayısı olan yüzeyin topolojik invariantına genus adı verilir. Diğer bir ifadeyle yüzeyde bulunan deliklerin sayısıdır. Geometrik genus olarak da bilinir ve Euler karakteristiği ile arasında $\chi = 2 - 2g$ şeklinde bir ilişki vardır, [8].

2. BÖLÜM

2. KOMPAKT MANİFOLDLARIN KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ

$\overline{\Omega}$, $(n + 1)$ boyutlu, kompakt, negatif olmayan Ricci eğrilikli ve boş olmayan $M = \partial\overline{M}$ sınırlı bir Riemann manifoldu olsun. M nin karakteristik değerlerinin alttan bir c sabiti ile sınırlı olduğunu kabul edelim.

Bu bölümde, M nin Laplace operatörünün sıfırdan farklı birinci karakteristik değerinin $\lambda_1 \geq nc^2$ eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır.

2.1. GİRİŞ

Schroeder ve Strake [10], konveks, sınırlı ve pozitif Ricci eğrilikli manifoldlar için aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Temel teorem: $\overline{\Omega}$, konveks, sınırlı ve pozitif Ricci eğrilikli kompakt Riemann manifoldu olsun. $\partial\overline{\Omega}$ nin kesit eğriliğinin bir U komşuluğu üzerinde sıfır olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki şartlardan biri sağlanır.

a) $\partial\overline{\Omega}$ basit irtibatlıdır,

b) $\partial\overline{\Omega}$ nin boyutu çift ve $p \in \partial\overline{\Omega}$ noktasında basit konveks ise $\overline{\Omega}$ flatt'tır.

Bu teorem; Gromov'un [11] pozitif Ricci eğrilikli manifoldların kesit eğrilikli Rigidity sonuçlarından genelleştirilmiş olan teoremlerin benzeridir.

Schroeder ve Strake; metriğin tüm $\partial\overline{M}$ üzerinde flatt'lık şartının oldukça güçlü olması üzerinde durdular. Ayrıca, yalnızca sınır üzerinde kesit eğriliğinin sıfır olması kabulünün yeterli olup olmadığı sorusunun cevabının özel olarak bir metrik yuvar alınması durumunda da doğru olduğunu ispatladılar. Bunlara ilave olarak, Changyu Xia [12], pozitif Ricci eğrilikli konveks sınırlı kompakt manifoldların benzer Rigidity promlerini çalıştı ve farklı bir metod kullanarak aşağıdaki teoremleri ispatladı.

Teorem 2.1.1. $\overline{\Omega}$, $(n + 1)$ - boyutlu kompakt, pozitif Ricci eğrilikli ve üzerindeki indirgenmiş metriği $\overline{\Omega}$ ile aynı olan boştan farklı $M = \partial \overline{\Omega}$ sınırlı bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki iç birim normal vektörü de N olsun. Ayrıca M nin karakteristik eğrilikleri alttan pozitif c sabitiyle sınırlı olsun. (yani M nin N ye göre temsil edilen ikinci temel formunu σ ile gösterirsek o zaman matris anlamında $\sigma \geq cI$ olur). O zaman M üzerinde Laplace operatörünün sıfırdan farklı birinci karakteristik değerinin $\lambda_1(M) \geq n c^2$ eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $\overline{\Omega}$ nin $\frac{1}{c}$ yarıçaplı Öklid yuvarına izometrik olmasıdır.

Teorem 2.1.2. $\overline{\Omega}$, $(n + 1)$ - boyutlu kompakt, pozitif Ricci eğrilikli ve üzerindeki indirgenmiş metriği $\overline{\Omega}$ ile aynı olan boştan farklı $M = \partial \overline{\Omega}$ sınırlı bir Riemann manifoldu olsun. Kabul edelim ki $\overline{\Omega}$ nin $\overline{K}$ kesit eğriliği tüm 2-boyutlu düzlemler için $\overline{K}(\pi) = 0$ olsun. Eğer M , r yarıçaplı Öklid n -küreye izometrik ise $\overline{\Omega}$ de $(n+1)$ – boyutlu r -yarıçaplı Öklid yuvarına izometriktir.

Teorem 2.1.3. $\overline{\Omega}$, $(n + 1)$ - boyutlu, boştan farklı $M = \partial \overline{\Omega}$, sınırlı, pozitif Ricci eğrilikli Riemann manifoldu olsun. Kabul edelim ki M nin karakteristik eğrileri alttan bir c sabiti ile sınırlı ve M nin ortalama eğriliği de alttan $\frac{\lambda_1(M)}{nc}$ ile sınırlı olsun. O zaman $\overline{\Omega}$, $\frac{1}{c}$ yarıçaplı $(n + 1)$ - boyutlu Öklid yuvarına izometriktir.

2.2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yukarıda verilen teoremlerin ispatı için gerekli olan yardımcı teoremler ifade ve ispat edilecektir.

$\overline{\Omega}$, $M = \partial \overline{\Omega}$ sınırlı, $(n + 1)$ - boyutlu kompakt Riemann manifoldu olsun. $\overline{\Omega}$ ve M üzerindeki Riemann konneksiyonları, sırasıyla, $\overline{D}$ ve D olsun. dV ve dA sırasıyla $\overline{\Omega}$ ve M üzerindeki kanonik ölçümler, V , $\overline{\Omega}$ nin hacmi ve A ile M nin

alanı gösterilsin. Ayrıca $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ve $z = f|_M$ ve $u = \frac{\partial f}{\partial N}|_M$ olsun. Burada N , M üzerindeki iç birim normaldir. Diğer yandan Reilly integral formülü [12];

$$\int_{\bar{\Omega}} \left\{ (\bar{\Delta}f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2 - \text{Ric}(\bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f) \right\} dv = \int_M \left\{ -2(\Delta z)u + nHu^2 + \sigma(\nabla z, \nabla z) \right\} dA \quad (2.2.1)$$

dir. Burada $\bar{\nabla}f$, f nin $\bar{\Omega}$ üzerindeki gradiyent, $\bar{\Delta}f$, f nin $\bar{\Omega}$ üzerindeki Laplasyanı ve $\bar{\nabla}^2 f$, f nin $\bar{\Omega}$ üzerindeki Hessian'dır. Ric , $\bar{\Omega}$ nin Ricci eğriliği ∇z ve Δz de M deki z nin sırasıyla gradiyant ve Laplasyan'ıdır. σ , M nin N ile temsil edilen ikinci temel formu ve H da M nin N ile temsil edilen ortalama eğriliğidir. Yani $\forall u, v \in M$ için

$$\sigma(u, v) = \langle \bar{\nabla}_u v, N \rangle$$

ve $H = \frac{1}{n} \text{tr} \sigma$ dir. M nin karakteristik eğrileri σ nin karakteristik değerleriyle tanımlanır. Böylece, eğer M nin tüm karakteristik değerleri alttan bir c sabiti ile sınırlı ise matris anlamında $\sigma \geq c I$ dir ve bunun tersi de doğrudur.

Yardımcı Teorem 2.2.1. $\bar{\Omega}$, $M = \partial \bar{\Omega}$ sınırlı, pozitif Ricci eğrilikli, $(n + 1)$ - boyutlu kompakt Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin ortalama eğriliği

$$H \geq \frac{1}{n+1} \frac{A(M)}{V(\bar{\Omega})}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman $\bar{\Omega}$ bir Öklid yuvarına izometriktir. Burada $A(M)$, M alanını ve $V(\bar{\Omega})$ de, $\bar{\Omega}$ nin hacmini göstermektedir, [12] .

Teorem 2.1. 1'in ispatı M nin Laplasyanının sıfırdan farklı λ_1 karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik fonksiyon z , yani,

$$\Delta z + \lambda_1 z = 0 \quad (2.2.2)$$

olsun. Ayrıca Dirichlet probleminin $C^\infty(\bar{\Omega})$ daki çözümü f olmak üzere

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{\Omega} & \text{da} \quad \bar{\Delta}f = 0 \\ M & \text{üzerinde} \quad f = z \end{array} \right\}$$

bağıntılarını sağlasın. O zaman (2.2.1) ve $\overline{\Omega}$ nın pozitif Ricci eğrilikli olmasından

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\overline{\Omega}} \left\{ (\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{\nabla}^2 f|^2 - \text{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \right\} dv \\ &= \int_M \left\{ -2(\Delta z)u + nHu^2 + \sigma(\nabla z, \nabla z) \right\} dA \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

bulunur. $\sigma \geq cI$ olduğu göz önüne alınırsa

$$H \geq c \text{ ve } \sigma(\nabla z, \nabla z) \geq c|\nabla z|^2 \quad (2.2.4)$$

elde edilir. (2.2.2) ve (2.2.4), (2.2.3) de yerine yazılırsa

$$\int_M |\nabla z|^2 dA = -\int_M (\Delta z)z dA = \lambda_1 \int_M z^2 dA \quad (2.2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left\{ -2(-\lambda_1 z)u + nc u^2 + c|\nabla z|^2 \right\} dA \\ &= \int_M \left\{ 2\lambda_1 z u + nc u^2 + c\lambda_1 z^2 \right\} dA \\ &= \int_M \left\{ nc \left(u + \frac{\lambda_1}{nc} z \right)^2 + \left(c\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{nc} \right) z^2 \right\} dA \\ &\geq \int_M \left\{ \left(c\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{nc} \right) z^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

bulunur. Bu son ifadeden

$$c\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{nc} \leq 0 \text{ ya da } \lambda_1 \geq nc^2$$

elde edilir. Bu ise teorem 2.1.1'in ilk kısmının ispatını tamamlar.

Eğer $\overline{\Omega}$, $\frac{1}{c}$ yarıçaplı $(n+1)$ - boyutlu Öklid yuvarına izometrik ise

$\lambda_1(M) = nc^2$ dir. Tersine, kabul edelim ki; $\lambda_1 = nc^2$ olsun. Bu durumda (2.2.3), (2.2.4) ve (2.2.6) eşitsizlikleri, eşitlik halini alır. Böylece

$$\bar{\nabla}^2 f = 0, H = c \text{ ve } u = -\frac{\lambda_1}{nc} z = -cz \quad (2.2.7)$$

elde edilir.

$\bar{\nabla}^2 f = 0$ olduğunda $|\bar{\nabla} f|^2$ sabit olur. Tersine f bir sabit olmadığından $|\bar{\nabla} f|^2$ sıfırdan farklıdır. Bu durumda genelliği bozmayacağı için $|\bar{\nabla} f|^2 = 1$ alınabilir. O zaman $p \in M$ noktası için

$$1 = |\bar{\nabla} f|^2(p) = |\nabla z|^2 + u^2(p) \quad (2.2.8)$$

yazılabilir. (2.2.8) den integral alınır ve $u = -cz$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_M \{|\nabla z|^2 + u^2\} dA = \int_M \{\lambda_1 z^2 + u^2\} dA \\ &= \int_M \{nc^2 z^2 + u^2\} dA = \int_M \{(n+1)u^2\} dA \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{2} \bar{\Delta}(f^2) = |\bar{\nabla} f|^2 + f \bar{\Delta} f = 1 \quad (2.2.10)$$

ve divergens teoreminden

$$V(\bar{\Omega}) = \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{2} \bar{\Delta}(f^2) dV = - \int_M z u dA = \int_M \frac{u^2}{c} dA \quad (2.2.11)$$

dir. (2.2.9) ve (2.2.11) birleştirilirse

$$H = c = \frac{1}{n+1} \frac{A(M)}{V(\bar{\Omega})} \quad (2.2.12)$$

elde edilir. (2.2.12) eşitliği ve yardımcı teorem 2.2.1 den $\bar{\Omega}$ nın Öklid yuvarına izometrik olduğu görülür. $\lambda_1(M) = nc^2$ olduğundan $\bar{\Omega}$ nın yarıçapı $\frac{1}{c}$ olmalıdır.

Bu da teorem 2.1.1'in ispatını tamamlar.

Sonuç 2.2.1. $\overline{\Omega}$, boştan farklı $M = \partial\overline{\Omega}$ sınırlı, pozitif Ricci eğrilikli $(n + 1)$ - boyutlu kompakt Riemann manifoldu olsun. M nin karakteristik eğriliğinin alttan $\sqrt{\frac{\lambda_1(M)}{n}}$ ile sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman $\overline{\Omega}$, $\sqrt{\frac{n}{\lambda_1 M}}$ yarıçaplı $(n + 1)$ - boyutlu Öklid yuvarına izometriktir.

İspat: $\lambda_1 = n \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{n}} \right)^2$ olduğundan teorem 2.1.1’den ispat açıktır.

Yang ve Yau [13]; eğer A alanlı ve g genuslu kompakt yönlendirilebilen bir yüzey (M, dS^2) ise $\lambda_1(M) \leq 8\pi(g+1)A^{-1}$ olduğunu ispatladılar. Böylece Yang ve Yau’nun teoremleriyle teorem 2.1.1 birlikte ifade edilirse aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.2. $\overline{\Omega}$, boştan farklı $M = \partial\overline{\Omega}$ sınırlı, pozitif Ricci eğrilikli 3-boyutlu kompakt Riemann manifoldu olsun. M nin genusunu g ile gösterelim ve kabul edelim ki M nin karakteristik eğriliği alttan $c > 0$ sabitiyle sınırlı olsun. O zaman M nin alanının $A(M) \leq 4\pi(g+1)c^{-2}$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $\overline{\Omega}$ nin $\frac{1}{c}$ yarıçaplı 3-boyutlu Öklid yuvarına izometrik olmasıdır.

Teorem 2.1.2’nin İspatı: $p \in M$ noktasında $\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots, \sigma_n(p)$ ile gösterilen karakteristik eğrileri birim ortogonal $e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)$ ye karşılık tutalım ve M nin kesit eğriliğini K ile gösterelim. M , r yarıçaplı n -küreye izometrik olduğu için kesit eğriliği $\frac{1}{r^2}$ dir. $\overline{\Omega}$, kesit eğriliğinin kabulünden ve Gauss denkleminde $1 \leq i \neq j \leq n$ için;

$$\frac{1}{r^2} = K(e_i(p) \wedge e_j(p)) = \overline{K}(e_i(p) \wedge e_j(p)) + \sigma_i(p) \cdot \sigma_j(p) = \sigma_i(p) \cdot \sigma_j(p) \quad (2.2.13)$$

yazılabilir. Burada $e_i(p) \wedge e_j(p)$, $e_i(p)$ ve $e_j(p)$ ile gerilen düzlemi göstermektedir.

P keyfi bir nokta ve karakteristik eğriler M üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan ya $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = \frac{1}{r}$ ya da $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = -\frac{1}{r}$ dir. Diğer bir ihtimal M nin ortalama eğriliğinin x noktasında pozitif tanımlı olmasıdır. Diğer taraftan M , r

yarıçaplı Öklid n-küreye izometrik olduğundan, $\lambda_1(M) = n \frac{1}{r^2}$ dir. Böylece teorem

2.1.1 den dolayı $\bar{\Omega}$, r yarıçaplı (n + 1) - boyutlu Öklid yuvarına izometriktir. Bu da teorem 2.1.2 'nin ispatını tamamlar.

Teorem 2.1.3'ün ispatı: Teorem 2.1.1 in ispatında olduğu gibi, M nin Laplasiyan'ının sıfırdan farklı λ_1 birinci karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik fonksiyon z ve Dirichlet probleminin $C^\infty(\bar{\Omega})$ da çözümü f olsun. Yani

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Omega} \text{ da } \quad \bar{\Delta} f = 0 \\ M \text{ üzerinde } f = z \end{array} \right\}$$

olsun. (2.2.1) den, $\bar{\Omega}$ nin Ricci eğriliği tanımından ve

$$\sigma(\nabla z, \nabla z) \geq c |\nabla z|^2, \quad H \geq \frac{\lambda_1}{nc} \quad (2.2.14)$$

dan

$$0 \geq \int_{\bar{\Omega}} \left\{ (\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2 - \text{Ric}(\bar{\nabla} f, \bar{\nabla} f) \right\} dV \quad (2.2.15)$$

$$= \int_M \left\{ -2(\Delta z)u + nHu^2 + \sigma(\nabla z, \nabla z) \right\} dA$$

$$\geq \int_M \left\{ 2\lambda_1 zu + \frac{\lambda_1}{c} u^2 + c\lambda_1 z^2 \right\} dA$$

$$= \int_M \frac{\lambda_1}{c} (u + cz)^2 dA$$

$$\geq 0$$

bulunur. Böylece elde edilen (2.2.14) ve (2.2.15) eşitliklerinin işaretleri aynı olmalıdır. Özellikle

$$\bar{\nabla}^2 f = 0, \quad H = \frac{\lambda_1}{nc} \quad \text{ve} \quad u = -cz$$

(2.2.16)

alınırsa, Teorem 2.1.1'in ikinci kısmındaki ispatta olduğu gibi $\bar{\nabla}^2 f = 0$ ve $1 = |\bar{\nabla} f|^2$ olur. $p \in M$ için $1 = |\nabla z|^2(p) + u^2(p)$ alınabilir. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_M \{|\nabla z|^2 + u^2\} dA = \int_M \{\lambda_1 z^2 + u^2\} dA \\ &= \int_M \left\{ \frac{\lambda_1}{c^2} + 1 \right\} u^2 dA = \left(\frac{\lambda_1}{c^2} + 1 \right) \int_M (-zu) dA \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{c^2} + 1 \right) \cdot c \int_{\bar{\Omega}} \frac{1}{2} \bar{\Delta}(f^2) dV = \left(\frac{\lambda_1}{c^2} + 1 \right) c V(\bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

elde edilir. $H = \frac{\lambda_1}{nc} \geq c$ ve (2.2.17) den

$$\frac{A(M)}{V(\bar{\Omega})} = \frac{\lambda_1}{c} + c \leq nH + H = (n+1)H \quad (2.2.18)$$

ya da

$$H \geq \frac{A(M)}{(n+1)V(\bar{\Omega})}$$

bulunur. Bu durumda yardımcı teorem 2.2.1'den $\bar{\Omega}$, $(n+1)$ - boyutlu Öklid yuvarına izometriktir. Eğer $\bar{\Omega}$ nın yarıçapını r ile gösterilirse o zaman M nin karakteristik eğrilerinin hepsi $\frac{1}{r}$ ye eşit olur. Yani $\sigma = \frac{1}{r}I$ dir. Böylece $\sigma(\nabla z, \nabla z)$

$= c|\nabla z|^2$ ve $r = \frac{1}{c}$ dir. Bu da teorem 2.1.3'ün ispatını tamamlar.

3. BÖLÜM

3. S^{n+1} in MINİMAL HİPERYÜZEYİNİN BİRİNCİ KARAKTERİSTİK DEĞERİ

Bu bölümde; S^{n+1} küresinde minimal hiperyüzeyler için Dirichlet probleminin bir f çözümü gözönüne alınarak f için Poincare tipi eşitsizlik ispatlanacaktır. Ayrıca, sınır üzerinde kapalı karakteristik değer için sıfırdan farklı birinci karakteristik değer tahmininde bulunulacaktır.

3.1. Kürede Minimal Hiperyüzey

M^n, S^{n+1} in kompakt minimal hiperyüzeyi olsun. Yau [14] çalışmasında M üzerinde $\nabla_M u + \lambda u = 0$ özelliğindeki λ_1 birinci karakteristik değerinin n olduğunu ispatladı.

M^n, S^{n+1} i Ω_1 ve Ω_2 gibi iki bağlantılı bölgeye bölsün. Öyleki $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = M$ olmak üzere Choi-Wang [15] de

$$\begin{cases} \bar{\Delta}f = 0 & \Omega_1 \text{ üzerinde} \\ f = \varphi & M \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Dirichlet probleminin çözümüne Reilly formülünü uyguladılar ve M üzerinde birinci karakteristik değer için

$$\lambda_1(M) > n/2$$

eşitsizliğini ispatladılar. Burada φ karakteristik değer fonksiyonudur. Böylece Choi-Wang (3.1.1) ile verilen probleminin f çözümünü tahmin ettiler .

Diğer taraftan Abdenago Barros ve G. Pacelli Bessa [16] aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem 3.1.1. Dirichlet probleminin çözümü f olsun. O zaman

$$P(t) = (2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla}f\|^2 . t^2 + 2\lambda_1(M) \|f\|^t . t + \frac{n}{n+1} \|f\|^2 \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.1.2)$$

dir.

Sonuç 3.1.1. M, S^{n+1} nin yönlendirilebilir minimal hiperyüzeyi ve λ_1 de M üzerinde Laplasyan fonksiyonunun sıfırdan farklı birinci karakteristik değeri olsun. (3.1.1) ile verilen probleminin çözümü f olsun. O zaman

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} p(f) \quad (3.1.3)$$

dir. Burada

$$\rho(f) = \frac{2\|\bar{\nabla}f\|^2 - (n+1)\|f\|^2 - 2\|\bar{\nabla}f\|^2 \sqrt{1 - (n+1) \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla}f\|^2}}}{(n+1)\|f\|^2}. \quad (3.1.4)$$

İlave olarak $0 < \rho(f) \leq 1$ ve $\rho(f) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\|\bar{\nabla}f\|^2 = (n+1)\|f\|^2$ dir. Ayrıca f fonksiyonu $H_0^1(\Omega_1)$ e dahil değilse aşağıdaki Poincare eşitsizlikleri geçerlidir:

Sonuç 3.1.2. f , Dirichlet probleminin çözümü olsun. O zaman f aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\|\bar{\nabla}f\|^2 \geq (n+1)\|f\|^2, \quad (3.1.5)$$

$$\|\bar{D}^2f\|^2 > \frac{n(n+1)}{4} \|f\|^2. \quad (3.1.6)$$

Burada $\bar{D}^2f$, f nin Hessian'ıdır.

Teorem 3.1.1.in ispatı

$\Omega, \partial\Omega$ de sınırlı, n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. f de Ω üzerinde tanımlı ve $\partial\Omega$ üzerinde C^∞ sınıfından olan bir fonksiyon olsun. $\varphi = f/\partial\Omega$ ve $u = \partial f/\partial\nu$, f nin dış birim normalinin türevi olsun. $\forall X, Y \in T\Omega$ için $(D^2f)(X, Y)$ Hessian tensörünü gösterebiliriz. $B(v, w)$, $\partial\Omega$ nin ikinci temel formu ve Ω nin Ricci eğriliği Ric şeklinde gösterilsin. O zaman Reilly formülü olarak bilinen (2.2.1) eşitliğinden

$$\int_{\Omega} (\bar{\Delta}f)^2 = \int_{\Omega} |D^2f|^2 + \int_{\Omega} Ric(\bar{\nabla}f, \bar{\nabla}f) + \int_{\partial\Omega} 2u\Delta\varphi + \int_{\partial\Omega} B(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + \int_{\partial\Omega} nHu^2 \quad (3.1.7)$$

yazılabilir.

Eğer $t = 0$ ise Teorem 3.1.1 in ispatı kolaylıkla yapılabilir. Şayet $t \neq 0$ ise o zaman

$$\begin{cases} \bar{\Delta}g = f, & \Omega_1 \text{ üzerinde} \\ g = t\varphi, & M \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

şeklinde verilen Dirichlet problemini gözönüne alalım. Buna Green formülü uygulanırsa

$$\begin{cases} \int_M \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu} = \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \\ t \int_M \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu} = \int_{\Omega_1} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle \\ \int_M \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu} = \int_{\Omega_1} f^2 + \int_{\Omega_1} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle \end{cases} \quad (3.1.9)$$

elde edilir. (3.2.9) dan

$$\int_{\Omega_1} \langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle = t \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (3.1.10)$$

ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} g|^2 \geq t^2 \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (3.1.11)$$

bulunur. (3.1.9) un 3'üncü eşitliği ve (3.1.10) dan

$$t \int_M \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu} = t \int_{\Omega_1} f^2 + t^2 \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (3.1.12)$$

olur.

$$|D^2 g|^2 \geq \frac{1}{n+1} (\bar{\Delta} g)^2$$

ve

$$\int_M B(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq 0$$

eşitlikleri göz önüne alınarak, (3.1.8) deki g fonksiyonuna Reilly formülü

$$\text{uygulanırsa } \frac{n}{n+1} \int_{\Omega_1} (\bar{\Delta} g)^2 \geq n \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} g|^2 + 2 \int_M \frac{\partial g}{\partial \nu} (\Delta t_\varphi) \quad (3.1.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1.11), (3.1.12) ve $\bar{\Delta} g = f$ alınarak (3.1.13) ten

$$\frac{n}{n+1} \int_{\Omega_1} f^2 \geq n t^2 \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 - 2\lambda_1(M) \left[t \int_{\Omega_1} f^2 + t^2 \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \right] \quad (3.1.14)$$

olur. Buradan da

$$p(t) = (2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 t^2 + 2\lambda_1(M) \|f\|^2 t + \frac{n}{n+1} \|f\|^2 \geq 0 \quad (3.1.15)$$

elde edilir. Bu da Teorem 3.1.1 in ispatını tamamlar.

p pozitif olsun. O zaman (3.1.15) den

$$(2\lambda_1(M) - n) \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1(M)^2 \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2} \quad (3.1.16)$$

yazılır. (3.2.16) ve (3.1.3) den f için Poincare eşitsizliğinden

$$\|\bar{\nabla} f\|^2 \geq (n+1) \|f\|^2 \quad (3.1.17)$$

şeklin de yazılabilir.

Teorem 3.1.1 in ispatında (3.1.13) ün sağ tarafındaki $\int_M B(\nabla t_\varphi, \nabla t_\varphi) \geq 0$ terim hesaba alınmayarak ispat yapıldı. Eğer bu terim ispatta göz önüne alınırsa $p(t) \geq \int_M B(\nabla_\varphi, \nabla_\varphi) t^2$ bulunur. Böylece

$$(2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 - \int_M B(\nabla_\varphi, \nabla_\varphi) \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1(M)^2 \frac{\|f\|^2}{\|\bar{\nabla} f\|^2}$$

yazılır. Diğer taraftan (2.2.1) Reilly formülünden

$$(2\lambda_1(M) - n) \|\bar{\nabla} f\|^2 = \|\bar{D}^2 f\|^2 + \int_M B(\nabla_\varphi, \nabla_\varphi)$$

bulunur. $\lambda_1(M) > n/2$ olduğundan

$$\|\bar{D}^2 f\|^2 \geq \frac{n+1}{n} \lambda_1(M)^2 \|f\|^2 > \frac{n(n+1)}{4} \|f\|^2 \quad (3.1.18)$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

4.1. HIPERYÜZEYLER İÇİN BİRİNCİ KARAKTERİSTİK DEĞER TAHMİNİ

Teorem 4.1.1. M , kompakt yönlendirilebilir Riemann manifoldu N nin kompakt hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki N nin Ricci eğriliği alttan bir pozitif k sabiti ile sınırlı ve ortalama eğriliği de $H \geq z$ şeklinde olsun. O zaman

$$\lambda_1 \geq \frac{k}{2} - \frac{nu}{2} \quad (4.1.1)$$

dır.

İspat: M ile N yönlendirilebilir ve N nin Ricci eğriliği pozitif olduğundan M, N yi Ω_1 ve Ω_2 gibi iki bölgeye ayırır. Öyle ki $\partial\Omega_1 = M = \partial\Omega_2$ dir. M nin birinci karakteristik fonksiyonu z olsun. Öyle ki

$$\Delta z + \lambda_1 z = 0 \quad (4.1.2)$$

şartını sağlasın. Ayrıca Dirichlet probleminin çözümü f olsun. Yani

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \Omega_1 \text{ üzerinde} \\ z = f|_{\partial\Omega_1} & \partial\Omega_1 \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

olsun. Cauchy Schwartz eşitsizliğinden

$$(\overline{\Delta f})^2 \leq n |\overline{\nabla}^2 f| \quad (4.1.4)$$

yazılabilir. (4.1.2) ve (4.1.4) eşitsizlikleri (2.2.1) eşitliğin de yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega_1} \frac{n-1}{n} (\overline{\Delta f})^2 dv \geq \int_{\Omega_1} k |\overline{\nabla} f|^2 dv + \int_{\partial\Omega_1} (-2\lambda_1 z u - n z u^2) dA + \int_{\Omega} \sigma(\nabla z, \nabla z) dA \quad (4.1.5)$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten

$$\int_{\partial\Omega_1} \sigma(\nabla z, \nabla z) dA \geq 0 \quad (4.1.6)$$

olur. Burada (4.1.3) kullanılırsa

$$0 \geq \int_{\Omega_1} k |\bar{\nabla} f|^2 dv + \int_{\partial\Omega_1} (-2\lambda_1 - nu) zu dA \quad (4.1.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{\partial\Omega_1} zu = \int_{\partial\Omega_1} f f_n = \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 + f \bar{\Delta} f = \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 \quad (4.1.8)$$

dir. Böylece (4.1.7) ve (4.1.8) den

$$0 \geq (k - 2\lambda_1 - nu) \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2$$

elde edilir. f sabit bir fonksiyon olmadığı için

$$k - 2\lambda_1 - nu \leq 0$$

veya

$$\lambda_1 \geq \frac{k}{2} - \frac{nu}{2}$$

bulunur.

Teorem 4.1.2. M , kompakt yönlendirilebilir Riemann manifoldu N nin kompakt hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki N nin Ricci eğriliği alttan bir k sabiti

ile sınırlı ve ortalama eğriliği $H \geq \frac{Z}{u}$ şartını sağlasın. O zaman

$$\lambda_1 \geq \frac{k}{2} - \frac{n}{2} \quad (4.1.9)$$

dir.

İspat: (4.1.2), (4.1.5), (4.1.6) ve hipotezdeki ifadeler gözönüne alınırsa

$$0 \geq \int_{\Omega_1} k |\bar{\nabla} f|^2 dv + \int_{\partial\Omega_1} \left(-2\lambda_1 zu - n \frac{Z}{u} u^2 \right) dA \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Diğer yandan (4.1.8) de gözönüne alınırsa

$$0 \geq \int_{\Omega_1} k |\bar{\nabla} f|^2 dv + \int_{\partial\Omega_1} (-2\lambda_1 zu - nzu) dA \quad (4.1.11)$$

bulunur. Buradan

$$0 \geq \int_{\Omega_1} k |\bar{\nabla} f|^2 dv + (-2\lambda_1 - n) \int_{\partial\Omega_1} z u dA$$

$$0 \geq \int_{\Omega_1} k |\bar{\nabla} f|^2 dv + (-2\lambda_1 - n) \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 dv$$

$$0 \geq (k - 2\lambda_1 - n) \int_{\Omega_1} |\bar{\nabla} f|^2 dv \quad (4.1.12)$$

elde edilir. f sabit bir fonksiyon olmadığı için integralin değeri pozitiftir. O halde

$$0 \geq (k - 2\lambda_1 - n)$$

$$\lambda_1 \geq \frac{k}{2} - \frac{n}{2}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H.H., 1983, **Diferansiyel Geometri**, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Malatya, No:2.
- [2] Yano, K., Kon, M., 1984, **Structers On Manifolds**, Oxford University Pres, Vol:3.
- [3] Hacısalihoğlu, H.H., Ekmekçi, N., 2003, **Tensör Geometri**, Ankara.
- [4] Bektaş, M., 1995, **n-boyutlu Lorentz uzayı L^n de Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilimler**, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] Bektaş, M., 1998, **Lorentz Uzayının İntegral Geometrisi**, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] Chern, S, Carmo, M.D and Kobayashi, S, 1970, Minimal Submanifolds of Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length, In Functional Analysis and Related Fields, (Springer-Verlag New-York) 60-75.
- [7] Hacısalihoğlu, H.H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Lawrence, M.B., İbikli, E. Ve MSC Sevim, B., 2000, Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu Türk Dil Kurumu Yayınları: 739.
- [8] Hacısalihoğlu, H.H., 2004, **Diferansiyel Geometri**, Ankara.
- [9] Sabuncuoğlu, A., 2001, **Diferansiyel Geometri**, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [10] Schoreder, V. and Strake, M, 1989, Rigidity of convex domains in manifolds with nonnegative ricci and sectional curvature, Comment . Math.Helvatica, 64,173-186.
- [11] Ballman, W, Gromov, M, and Schoreder, V, 1985, manifolds of nonpositive curvature, Birkhauser, bessel-Boston.
- [12] Xia, C, 1997, Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative ricci curvature, Proc. Ame:Math. Soc. , 125, 1801-1806.

- [13] Yang, P, and Yau, S.T., 1980, Eigenvalues of the laplacian of compact riemannian surfaces and minimal submanifolds, Ann. Scuola norm. Sup.Pisa 7, 55-63.
- [14] Yau, T, 1982, Seminar on differential geometry,Annals of Math. Studies, No: 102, Princeton Univ. Pres, Princeton, N.J.
- [15] Choi,H, and Wang,A. N, 1983, A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces, J. Dif. Geo. 559-562
- [16] Barros, A, and Bessa, G. P, 2004, Estimate of the first eigenvalue minimal hypersurfaces of S^{n+1} , arXiv:math.DG/0410493 v1 .

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Mardin'in Kızıltepe ilçesinde doğmuşum. İlköğrenimimi Manisa'nın Akhisar ilçesine bağlı Moralılar köyü İlkokulu'nda ortaöğrenimimi Akhisar Atatürk Ortaokulu'nda ve liseyi ise Akhisar Lisesi'nde tamamladım. 1997 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. Lisans öğrenimini 2001 yılında tamamladım. Yine 2001 yılında Mardin'in Kızıltepe ilçesine bağlı Şenyurt Lisesi'ne Matematik öğretmeni olarak atandım. 2006 yılında da Mardin Milli Piyango Lisesi'ne atanarak göreve başladım. Halen aynı okulda Matematik öğretmenliğine devam etmekteyim. Evli ve bir çocuk babasıyım.

Mesut POLAT