

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKONOMİK ALANLARDA DİFERANSİYEL
GEOMETRİNİN UYGULAMALARI

Doktora Tezi
Muhittin Evren AYDIN
Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Geometri
Danışman : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

EKİM-2014

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EKONOMİK ALANLARDA DİFERENSİYEL GEOMETRİNİN
UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Muhittin Evren AYDIN

(101121204)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23 Eylül 2014

EKİM-2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKONOMİK ALANLARDA DİFERENSİYEL GEOMETRİNİN
UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Muhittin Evren AYDIN

(101121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23.09.2014
Tezin Savunulduğu Tarih: 24.10.2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü.)
Prof. Dr. Bayram ŞAHİN (İ.Ü.)
Prof. Dr. Murat TOSUN (S.Ü.)
Assoc. Prof. Dr. Adela MIHAI (UTCB)

EKİM-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesi sürecinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Yurt dışı doktora araştırma burs desteğinden dolayı Yüksek Öğretim Kurumu (YÖK)' e teşekkürlerimi sunarım.

YÖK doktora araştırma bursu ile Technical University of Civil Engineering Bucharest' de bulunduğum süre içerisinde, faydalı tavsiyeleri için sayın Adela MIHAI' ye teşekkür ederim.

Yurt dışında bulunduğum zaman diliminde ve öncesinde, bilgisini ve tecrübesini benimle cömertçe paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Bayram ŞAHİN' e ayrıca doktora eğitimim boyunca mesaisini, bilgi ve tavsiyelerini paylaşmak için hiç düşünmeden harcayan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkürlerimi sunarım.

Öğrencilik hayatımın başından beri, insanüstü çabası ve desteği için çok kıymetli babacığım Memet Zeki AYDIN' a; hayatım boyunca yaşamış olduğum her zorlukta en az benim kadar stres yaşayan, geceleri uykular kaçırarak sınavlar öncesinde ben uyumadan uyumayan, ömrünü sadece evlatları için harcayan çok kıymetli anneciğim Sevgi AYDIN'a sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

Muhittin Evren AYDIN
ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
TABLOLAR LİSTESİ	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	13
2. ÜRETİM TEORİSİ VE ÜRETİM FONKSİYONLARI	26
2.1. ÜRETİM FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ	26
3. QUASI-TOPLAM ÜRETİM MODELLERİ VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	35
3.1. QUASI-TOPLAM ÜRETİM FONKSİYONLARI İÇİN GEOMETRİK SONUÇLAR.....	35
3.2. SABİT İKAME ESNEKLİK ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN QUASI-TOPLAM ÜRETİM FONKSİYONLARI	37
3.3. ALLEN DETERMİNANTLI QUASI-TOPLAM ÜRETİM FONKSİYONLARI	40
4. HOMOTETİK FONKSİYONLARIN ALLEN DETERMİNANTLARI.....	46
4.1. CES ÖZELLİĞİ VE HOMOJEN MONGE-AMPÈRE DENKLEMİNİ SAĞLAYAN HOMOTETİK FONKSİYONLAR	46
4.2. ALLEN DETERMİNANTLARI İLE HOMOTETİK FONKSİYONLARIN SINIFLANDIRILMASI	50
4.3. ALLEN DETERMİNANTLI HOMOTETİK FONKSİYONLARIN ÜRETİM MODELLERİNE UYGULAMALARI VE DİFERENSİYEL GEOMETRİK SONUÇLAR.....	55
5. BİLEŞKE FONKSİYONLAR İÇİN ALLEN DETERMİNANT FORMÜLÜ VE UYGULAMALARI	68
5.1. BİLEŞKE FONKSİYONLAR İÇİN HESSİYAN DETERMİNANT FORMÜLÜ	68

5.2. BİLEŞKE FONKSİYONLARIN ALLEN DETERMİNANT FORMÜLÜ İLE SINIFLANDIRILMASI	71
5.3. ALLEN DETERMİNANTLI BİLEŞKE FONKSİYONLARIN ÜRETİM MODELLERİNE UYGULAMALARI VE BAZI GEOMETRİK SONUÇLAR.....	80
5.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİLEŞKE FONKSİYONLAR.....	83
6. SONUÇ	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	92

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; üretim fonksiyonlarının tarihçesi ve bu fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. Tezde kullanılacak olan çeşitli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; üretim teorisi ve üretim fonksiyonlarının özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; quasi-toplam üretim fonksiyonları tanıtılmış, sabit ikame esnekliğini sağlayan quasi-toplam üretim fonksiyonları için bulunan sonuçlar ifade edilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümler tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde; homotetik üretim fonksiyonları, Allen determinantları kullanılarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaların üretim modellerine uygulamaları verilerek, Cobb-Douglas ve ACMS üretim fonksiyonlarının Allen matrislerinin singüler olamayacağı ispatlanmıştır. Üstelik homotetik üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim hiperyüzeylerine dair bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; $f(x) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ şeklindeki bileşke fonksiyonlar için bir Allen determinant formülü verilmiş ve bu tür bileşke fonksiyonların tümü sınıflandırılmıştır. Bileşke fonksiyonların grafiklerine dair çeşitli geometrik sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş bileşke fonksiyonları tanımlanmış ve bu tür fonksiyonlar için bir sınıflandırma teoremi elde edilmiştir.

Altıncı bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve bu konuda ön görülen bazı açık problemler ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Üretim fonksiyonu, Quasi-toplam üretim fonksiyonu, Homotetik üretim fonksiyonu, Bileşke fonksiyon, Homojen üretim fonksiyonu, Ölçeğe göre getiri, Mükemmel ikame, Hicks sabit ikame esnekliği, Allen ikame esnekliği, Allen matrisi, Allen determinantı, Gauss eliminasyon metodu, Üretim hiperyüzeyi, Öteleme hiperyüzeyi, Homotetiksel hiperyüzey, Gauss-Kronocker eğriliği, Ortalama eğrilik, Minimal uzay, Riemann eğrilik tensörü, Kesitsel eğrilik, Ricci tensörü, Flat uzay, Ricci-Flat uzay.

SUMMARY

Applications of Differential Geometry in Economic Fields

This study is constructed in six chapters.

In chapter one, it is expressed a historical analysis of production functions and works found on geometric properties of the production functions. Some fundamental definitions and theorems used in thesis are also given.

In chapter two, theory of production and the properties of production functions are investigated.

In chapter three, it is stated quasi-sum production functions. Besides, the results obtained for quasi-sum production functions satisfying the property CES are reconsidered.

Chapter four and chapter five form the original part of thesis.

In chapter four, the homothetic production functions are classified by using Allen determinants. It is proved that the Allen's matrices of Cobb-Douglas and ACMS production functions are always regular. Moreover, several results are derived regarding the graphs of homothetic production functions.

In chapter five, an Allen Determinant formula is obtained for the composite functions of the form $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ and the composite functions completely are classified according to the formula. Some geometric results are also derived about graphs of composite functions. Besides, the notion of generalized composite function is introduced and a classification theorem is given for these kind functions.

In chapter six, obtained results are evaluated and open problems proposed in this subject are presented.

Key Words: Production function, Quasi-sum production function, Homothetic production function, Composite function, Homogeneous production function, Return to scale, Perfect substitution, Hicks elasticity of substitution, Allen elasticity of substitution, Allen's matrix, Allen determinant, Gauss elimination method, Production hypersurface, Translation hypersurface, Homotetical hypersurface, Gauss-Kronocker curvature, Mean curvature, Minimal space, Riemannian curvature tensor, Sectional curvature, Ricci tensor, Flat space, Ricci-Flat space.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1.1. Eş-ürün eğrisi.....	30
----------------------------------	----

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1.1. Çıktı, ortalama ve marjinal verimlilikler.....	28
--	----

SEMBOLLER LİSTESİ

Y	: Total üretim
L	: İş gücü girdisi
K	: Sermaye girdisi
$\mathbb{R}_+^n$	: Pozitif reel sayıların sıralı n-liler cümlesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar cümlesi
H_{ij}	: i –yinci üretim girdisinin j –yinci üretim girdisine göre Hicks ikame esnekliği
A_{ij}	: i –yinci üretim girdisinin j –yinci üretim girdisine göre Allen ikame esnekliği
$M(f)$	: f üretim fonksiyonunun Allen matrisi
ε_s	: Faktörler arası ikame esneklik katsayısı
MRS_{ij}	: i –yinci üretim girdisinin j –yinci üretim girdisine göre Marjinal teknik ikame oranı
$H(f)$	: f üretim fonksiyonunun Hessiyan matrisi
J_f	: f fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\mathbb{E}^{n+1}$	: $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayı
S^n	: $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzayının birim hiperküresi
ν	: Gauss dönüşümü
S	: Şekil operatörü
g	: İndirgenmiş metrik tensör
G	: Gauss-Kronocker eğriliği
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$[,]$	: Lie parantez operatörü
R	: Riemann eğrilik tensörü
dV	: Hacim elementi
σ	: İkinci temel form
H	: Ortalama eğrilik
K_{ij}	: $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemin kesitsel eğriliği
$\eta(f, f_i, x_i)$	: n-boyutlu Monge-Ampère denklemi

1. GİRİŞ

Ekonomik alanlarda *üretim fonksiyonları*, bir işletmenin kullandığı girdilerle yarattığı çıktı arasındaki fiziki ilişkileri gösteren matematiksel ifadelerdir. Bu tür fonksiyonlar, işletmenin çeşitli üretim teknikleri içinde en etkin' inin seçilmiş olduğu varsayımına dayanır. Bir başka deyişle, üretim teknolojisi veridir. Buna göre üretimin artırılabilmesi, üretim faktörlerinden en az birinin artırılması ile mümkündür, (Bulmuş, 2008).

Üretim fonksiyonu kavramı, ilk olarak açık bir şekilde, Philip Wicksteed (1894) tarafından cebirsel olarak formüle edilmiştir. Ancak 1840 lı yıllarda, Johann Von Thünen' in üretim fonksiyonlarını formüleştiren ilk ekonomist olduğuna dair bazı deliller de vardır, (Mishra, 2010).

Üretim fonksiyonları arasında en ünlü olanı, 1928 de Cobb ve Douglas tarafından ortaya konulan,

$$Y = bL^kK^{1-k}$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Burada L iş gücü girdisi, K sermaye girdisi, b total verimlilik katsayısı ve Y ise total üretilmektedir, (Cobb ve Douglas, 1928). 1928 de başlayan bu araştırmalar, Douglas' ın sonraki çalışmaları (Douglas, 1976) ve başka yazarların konuyla ilgili çeşitli yazılarıyla, mikroiktisat perspektifi içinde önemli yer kazanmıştır.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu üzerindeki bazı kısıtlamalar, birçok iktisatçıyı daha genel özellikler taşıyan üretim fonksiyonu türleri aramaya yöneltmiştir. Bu nedenle 1961 yılında, Arrow, Chenery, Minhas ve Solow iki-girdili

$$Y = F(aK^r + (1 - a)L^r)^{\frac{1}{r}}$$

CES üretim fonksiyonunu tanımlamışlardır. Burada Y çıktı, F faktör verimliliği, a pay parametresi, K, L temel üretim faktörleri (sermaye ve iş gücü), $r = 1 - \frac{1}{s}$ olmak üzere $s = \frac{1}{1-r}$ ikame esnekliğidir, (Arrow, Chenery, Minhas ve Solow, 1961).

Ekonomik analiz perspektifi içinde, Leontief, Lu-Fletcher, Liu-Hildebrand, Kadiyala ve VES gibi üretim fonksiyonlarının önemli özellikleri Mishra tarafından verilmiştir, (Mishra, 2010).

Kabul edelim ki $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ olsun. Buna göre bir *üretim fonksiyonu*,

$$Q: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+, Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ile tanımlanan C^∞ sınıfından bir dönüşümdür. Burada Q çıktı miktarı, n girdi sayısı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ kullanılan girdilerdir (işgücü, sermaye, arazi, ham madde vb.), (Vilcu, 2011).

Her $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üretim fonksiyonu; $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayının

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_n, Q(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ile verilen, bir non-parametrik hiperyüzeyi ile tanımlanabilir ve bu hiperyüzeye bir *üretim hiperyüzeyi* denir, (Chen, 2011).

Bir $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üretim fonksiyonu için, eğer

$$Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^h Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

şartı sağlanıyorsa, $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna *h-homojen* ya da *h. ıncı dereceden homojendir* denir. Burada t pozitif ve h herhangi bir sabittir. Eğer $h > 1$ ise üretim fonksiyonu, *ölçeğe göre artan getiri* ve eğer $h < 1$ ise *ölçeğe göre azalan getiri* özelliği gösterir. Eğer üretim fonksiyonunun homojenlik derecesi 1 ise, *ölçeğe göre sabit getiri* özelliğine sahiptir denir, (Chen, 2011).

Üretim fonksiyonlarını genelleştiren ve uzayda diferensiyel geometri bakış açısı ile inceleyen ilk çalışmalar, 2005 yılında Zakhirov ve daha sonra 2007 yılında, Ioan tarafından verilmiştir, (Zakhirov, 2005 ve Ioan, 2007). Bu tarihlerden önce üretim fonksiyonları üzerine yapılan tüm çalışmalar düzleme izdüşürme metodunu kullandıklarından, sonuçlar istenilen ölçütte olmamıştır ama diferensiyel geometriye ait metodların kullanılması daha faydalı olmuştur.

Zakhirov, iki girdili ve sabit ölçek getirisine sahip Cobb-Douglas ve CES üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim yüzeylerinin parabolik tipten olduğunu ifade etmiştir, (Zakhirov, 2005).

Ioan; Cobb-Douglas, CES ve Sato üretim fonksiyonlarını tek bir formatta ifade etmiş ve bu formata karşılık gelen üretim yüzeylerinin temel elemanlarını hesaplamıştır. Ayrıca, sabit ölçekli Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu ifade etmiştir, (Ioan, 2007).

Zakhirov' un 2-girdili üretim fonksiyonları için verdiği sonuç, Vilcu tarafından $f(x_1, \dots, x_n) = bx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ile verilen n –girdili Cobb-Douglas üretim fonksiyonlarına aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir:

(a) *Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun sabit ölçek getiri özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen Cobb-Douglas üretim hiperyüzeyi açılabilir.*

(b) *Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun ölçeğe göre artan getiri (ölçeğe göre azalan getiri) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen Cobb–Douglas üretim hiperyüzeyi negatif (pozitif) Gauss-Kronocker eğriliklidir, (Vilcu, 2011).*

1907 yılında, Georghe Tzitzeica, 3-boyutlu Öklidyen uzayda bir oransal özelliğe sahip olan yüzeyleri sınıflandırmıştır. Bu tür yüzeylere, günümüzde *Tzitzeica yüzeyleri* denilmektedir. Bu oransal özellik; bir P noktasında yüzeyin Gauss eğriliğinin, bu P noktasında ki teğet düzlemin sabit bir noktaya olan uzaklığının dördüncü kuvvetine oranı olarak ifade edilmiştir. Yüzeylerin bu sınıfı hem matematikte hemde fizikte oldukça önemli özelliklere sahiptir. Tzitzeica yüzeyleri yüksek boyutlara aşağıdaki gibi genelleştirilir: $(n + 1)$ –boyutlu bir Öklid uzayında, bir *Tzitzeica hiperyüzeyi*

$$\frac{G(x)}{d^{n+2}(x)} = k$$

eşitliğini sağlayan bir hiperyüzeydir. Burada $G(x)$ hiperyüzeyin x noktasındaki Gauss-Kronocker eğriliği, $d(x)$ hiperyüzeyin x noktasındaki teğet hiperdüzlemi ile orijin arasındaki uzaklık ve k reel bir sabittir. $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayının bilinen en basit Tzitzeica hiperyüzeyi

$$\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}\right)$$

denklemleri ile ifade edilir (Constantinescu and Crasmareanu, 2011 ve Vilcu, 2011).

Vilcu, Cobb-Douglas üretim hiperyüzeyleri ve Tzitzeica hiperyüzeyler arasındaki ilişkiyi, aşağıdaki teorem ile ifade etmiştir: *Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun sabit ölçek getirisine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen Cobb-Douglas üretim hiperyüzeyi bir Tzitzeica hiperyüzeyidir*, (Vilcu, 2011).

Daha sonra A.D. Vilcu ve G.E. Vilcu, Zakhurov'un sonucunu, $f(x_1, \dots, x_n) = b(a_1^\rho x_1^\rho + \dots + a_n^\rho x_n^\rho)^{\frac{h}{\rho}}$ ile ifade edilen, genelleştirilmiş CES (ACMS) üretim fonksiyonları için aşağıdaki şekilde düzenlediler:

- (a) *Genelleştirilmiş CES üretim fonksiyonunun sabit ölçek getirisine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen CES hiperyüzeyi açılabilir.*
- (b) *Genelleştirilmiş CES üretim fonksiyonunun ölçeğe göre artan getiri (ölçeğe göre azalan getiri) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen CES üretim hiperyüzeyi negatif (pozitif) Gauss-Kronocker eğriliklidir*, (Vilcu ve Vilcu, 2011).

Genelleştirilmiş Cobb-Douglas ve genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonları homojen fonksiyonlardır ve bu nedenle Chen yukarıdaki bu tür üretim fonksiyonları için elde edilen sonuçları, aşağıdaki gibi genelleştirmiştir: *Bir h-homojen üretim fonksiyonunun ölçeğe göre sabit getiri özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen üretim hiperyüzeyi null Gauss-Kronocker eğriliklidir*, (Chen, 2011).

Chen' in yukarıda verdiği sonuç doğrudur fakat yine kendisi tarafından bulunan bir eksikliği vardı. Bu eksikliği aşağıdaki şekilde gidererek elde ettiği sonucu kusursuz hale getirdi: *Bir d-homojen üretim fonksiyonuna ($d \neq 0$) karşılık gelen üretim hiperyüzeyinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart üretim fonksiyonu ya ölçeğe göre sabit getiri özelliğine sahiptir, ya da üretim fonksiyonu*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1 \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)\right)^d$$

şeklindedir. Burada $\phi(u_1, \dots, u_n)$, $\det(\phi_{ij}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlayan, $(n - 1)$ –girdili bir fonksiyondur, (Chen, 2012f).

Diğer yandan, $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayının bir M^n hiperyüzeyi verilsin. Eğer M^n ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \times \dots \times f_n(x_n)$$

şeklinde tek değişkenli fonksiyonların çarpımının grafiği olarak elde edilebiliyorsa, M^n ye bir *homotetiksel hiperyüzey* adı verilir, (Sağlam ve Sabuncuoğlu, 2011). Burada $f_1, \dots, f_n$ fonksiyonlarına f nin bileşen fonksiyonları denir ve M^n homotetiksel hiperyüzeyi (M^n, f) ile gösterilir. Bu homotetiksel hiperyüzeylerin minimal olanları çeşitli uzaylarda çalışılmıştır (Van de Woestyne, 1995; Sağlam ve Sabuncuoğlu, 2008, 2011; Jiu ve Sun, 2007; Geomans ve Van de Woestyne, 2011).

Buna göre genelleştirilmiş Cobb-Douglas hiperyüzeyi de bir homotetiksel hiperyüzeydir. Böylece null Gauss-Kronocker eğriliğine sahip tüm homotetiksel hiperyüzeyler aşağıdaki teorem ile sınıflandırılır: $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında bir (M^n, f) homotetiksel hiperyüzeyi null Gauss-Kronocker eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart ya

(a) sıfırdan farklı $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$ sabitleri için, M^n homotetiksel hiperyüzeyi

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \times \prod_{j=3}^n f_j(x_j) \right)$$

şeklinde parametrize edilir, ya da

(b) M^n , sabit ölçek getirili bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun grafiğine karşılık gelen bir hiperyüzeydir, (Aydın ve Ergüt, incelemede(a)).

Dolayısıyla, Vilcu’ nun Cobb-Douglas hiperyüzeyleri için elde ettiği sonuç, yukarıdaki teorem ile tüm homotetiksel hiperyüzeylere genelleştirilmektedir.

Bir üretim fonksiyonu, sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için,

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

formunda yazılabiliyor ise, yani lineer olarak homojen ise, o zaman *mükemmel ikame* adını alır, (Chen, 2011).

İş gücü ve sermaye girdili bir mükemmel ikame, önemli özelliklere sahiptir. Bunlardan ilki, mükemmel ikame üretim fonksiyonu için, hem sermaye hem de iş gücünün marjinal ve fiziki verimlilikleri, yalnızca iş gücü-sermaye katsayısının bir fonksiyonu olarak ifade edilebilirler. Bir diğeri ise, mükemmel ikame durumunda, eğer her girdi için onun marjinal verimine eş bir oranda ödeme yapılırsa, firmanın gelirleri tamamiyle azalacak ve ek bir ekonomik kar olmayacaktır, (Chen, 2011).

Chen bir h -homojen üretim fonksiyonunun mükemmel ikame olmasına ilişkin aşağıda ki önemli sonuçları elde etmiştir, (Chen, 2011):

- (a) *En az üç girdili bir h -homojen üretim fonksiyonunun bir mükemmel ikame olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen üretim hiperyüzeyi flattır.*
- (b) *Üç girdili bir h -homojen üretim fonksiyonunun bir mükemmel ikame olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen üretim hiperyüzeyi Ricci-flattır.*
- (c) *İki girdili bir h -homojen üretim fonksiyonunun bir mükemmel ikame olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen üretim yüzeyi minimaldir.*

Üretim fonksiyonlarına karşılık gelen hiperyüzeylerinin flat, yani Riemann eğrilik tensörünün özdeş olarak sıfır, olmasına ilişkin tam bir sınıflandırma Chen ve Vilcu tarafından yapılmıştır. Bu sınıflandırma şöyledir: *f iki kez diferensiyellenebilir, sabit olmayan, n -girdili bir h -homojen üretim fonksiyonu olsun. Buna göre f nin üretim hiperyüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart ya*

- (a) *f lineer olarak homojendir, yani $h = 1$ dir, ya da*
- (b) *herhangi $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için $f = (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)^h$, $h \neq 1$ şeklindedir, (Chen ve Vilcu, 2013).*

Üretim hiperyüzeylerinin minimalliğine ilişkin, Mihai ve Sandu şu sonuçları elde ettiler:

(a) *Mükemmel ikame olan bir h -homojen üretim fonksiyonuna karşılık gelen üretim hiperyüzeyi minimaldir.*

(b) *Üretim hiperyüzeyi minimal olan bir h -homojen üretim fonksiyonu daima bir mükemmel ikame değildir, (Mihai ve Sandu, 2012).*

$F, h_1, \dots, h_n$ kesin monoton fonksiyonlar ve $F > 0$ olsun. Buna göre

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$$

şeklinde ifade edilen f üretim fonksiyonuna *quasi-toplam üretim fonksiyonu* adı verilir, (Aczél ve Maksa, 1996). Eğer $F, h_1, \dots, h_n$ fonksiyonlarından en çok biri lineer olmayan fonksiyon ise, quasi-toplam üretim fonksiyonuna *quasi-lineer* adı verilir, (Chen, 2012a). Quasi-toplam formunda fonksiyonlar, genel bisimetri denkleminin çözümleri olarak karşımıza çıkmaktadır ve bu tür fonksiyonlar, ekonomide ki, tutarlı agregasyon problemi ile ilgilidir, (Aczél ve Maksa, 1996).

Chen, quasi-toplam üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim hiperyüzeylerinin diferensiyel geometrisine dair önemli sonuçlar elde etti. Bu sonuçlardan üçüncü bölümde bahsedilecektir, (Chen, 2012a).

2-girdili quasi-toplam üretim fonksiyonlarının minimallğine dair belli varsayımlar altında çeşitli sonuçlar Mihai ve Sandu tarafından elde edilmiştir, (Mihai and Sandu, 2012).

Üretim faktörlerinin, ikame edilebilirlik açısından, en genel sayısal belirteci ikame esnekliğidir. İkame esnekliği orijinal olarak Hicks tarafından ortaya konulmuştur, (Chen, 2012b). Daha sonra Allen ve Hicks, Hicks'in iki girdili orijinal elastiklik kavramını aşağıdaki yolla genelleştirmiştir: f iki kez diferensiyellenebilir bir üretim fonksiyonu olsun. Ayrıca, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $1 \leq i \neq j \leq n$ için,

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{x_i f_{x_i}} + \frac{1}{x_j f_{x_j}}}{-\frac{f_{x_i x_i}}{f_{x_i}^2} + \frac{2f_{x_i x_j}}{f_{x_i} f_{x_j}} - \frac{f_{x_j x_j}}{f_{x_j}^2}}$$

verilsin, burada $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Tüm kısmi türevler $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ noktasında alınır ve payda sıfırdan farklı kabul edilir, (Allen ve Hicks, 1934).

Yukarıda verilen H_{ij} değerine i –yinci üretim faktörünün j –yinci üretim faktörüne göre *Hicks ikame esnekliği* denir, (Allen ve Hicks, 1934).

İki kez diferensiyellenebilir bir $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ üretim fonksiyonu için, eğer

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma, (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, 1 \leq i \neq j \leq n)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\sigma \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, f ye CES (sabit ikame esnekliği) özelliğini sağlıyordur denir, (Losonczi, 2010). CES özelliğini sağlayan iki girdili üretim fonksiyonları için, denilebilir ki; *iki kez diferensiyellenebilen iki değişkenli h –homojen ($h \neq 0$) üretim fonksiyonu, sıfırdan farklı bir $\sigma \in \mathbb{R}$ için*

$$H_{12}(\mathbf{x}) = \sigma, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$$

özelliğini sağlarsa, o zaman

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx^\alpha y^{h-\alpha}, & \text{if } \sigma = 1, \\ \left(\beta_1 x^{\frac{h}{\beta}} + \beta_2 y^{\frac{h}{\beta}} \right)^\beta, & \text{if } \sigma \neq 1, \end{cases}$$

dir. Burada α sıfırdan farklı keyfi bir sabit olup öyle ki; $h - \alpha \neq 0$ ve C, β_1, β_2 keyfi pozitif sabitlerdir, (Losonczi, 2010).

Losonczi; ikiden daha fazla girdili olan üretim fonksiyonlarında kendi ispat metodunun çalışmadığını ifade etmiştir. Ama Chen, CES özelliğini sağlayan herhangi sayıda tüm h –homojen üretim fonksiyonlarını sınıflandırarak, bu problemi çözmüştür. Şöyle ki, $f(x_1, \dots, x_n)$ *iki kez diferensiyellenebilir bir h –homojen üretim fonksiyonu olsun. Eğer f sabit ikame esnekliği özelliğini sağlarsa, o zaman f , ya*

(a) genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, ya da

(b) genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur, (Chen, 2012b).

Bir f fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerinden oluşan (f_{ij}) karesel matrisine *Hessiyen matrisi* (ya da kısaca *Hessiyani*) adı verilir ve $H(f)$ ile gösterilir. Eğer

f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesi üzerinde sürekli ise, o zaman f nin Hessiyani simetrik bir matristir, (Chen, 2012c).

Fonksiyonların Hessiyani matrisleri matematiğin birçok alanında önemli roller oynar. Örneğin, Newton-tipi metodlar içerisinde büyük ölçek optimizasyon problemlerinde kullanılır, çünkü

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T H(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$$

denklemden de görüldüğü gibi, Hessiyani matrisleri bir fonksiyonun lokal Taylor açılımının kuadratik teriminin katsayılarıdır. Bu denklemde J Jakobiyen matrisidir. Bir diğer örnek, Hessian matrislerinin Morse teorisindeki uygulamasıdır. Eğer bir manifold üzerinde f nin gradiyenti bir $\mathbf{x}$ noktasında sıfır ise, o zaman f bu $\mathbf{x}$ noktasında bir kritik noktaya sahiptir denir. $\mathbf{x}$ noktasında Hessiyani matrisinin determinantına *diskriminant* adı verilir. Eğer bu diskriminant sıfır ise, o zaman $\mathbf{x}$ noktasına f nin *dejenere kritik noktası* denir, üstelik bu nokta f nin bir Morse olmayan kritik noktası diye de adlandırılır. Aksi takdirde bu nokta dejenere olmayandır ve f nin bir *Morse kritik noktası* adı verilir. Morse teorisi, Morse kritik noktalar yardımıyla manifoldlar üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlarının çalışılma alanı ile ilgilidir. Bu teori manifoldların topolojisini analiz etmek için elverişli bir metoddur.

$h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$ ve $F(u)$, $F'(u) \neq 0$, iki kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ formunda bileşke fonksiyonların Hessiyani determinantları için oldukça açık bir formül Chen tarafından verildi;

$$\det(H(f)) = (F')^n h_1'' \dots h_n'' + (F')^{n-1} F'' \sum_{j=1}^n h_1'' \dots h_{j-1}'' h_j'^2 h_{j+1}'' \dots h_n'' \quad (1.1)$$

dir. Burada $h_j' = \frac{dh_j}{dx_j}$, $h_j'' = \frac{d^2 h_j}{dx_j^2}$ ve $u = h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n)$ için $F' = F'(u)$, $F'' = F''(u)$.

Chen, bu Hessiyani determinant formülünü Cobb-Douglas ve ACMS (CES) gibi önemli üretim modellerine uygulayarak çeşitli sonuçlar elde etmiştir, (Chen, 2012c).

$h(x_1, \dots, x_n)$ herhangi dereceden bir homojen fonksiyon ve F kesin monoton artan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için, $f(\mathbf{x}) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ şeklindeki üretim fonksiyonlarına bir *homotetik fonksiyon* adı verilir, (Lindberg, Eriksson ve Mattsson, 2002).

Ekonomilerde *eş-ürün eğrileri*, belli bir üretim düzeyinin gerçekleşmesini sağlayan faktör bileşimlerinin geometrik yeridir. Homotetik üretim fonksiyonlarına ilişkin eş-ürün eğrileriyle homojen üretim fonksiyonlarına ait eş-ürün eğrileri, şekil ve konum olarak, birbirine benzer. Bunlar arasındaki tek fark, aynı eş ürün eğrisi; homojen üretim fonksiyonunda başka, homotetik üretim fonksiyonunda daha başka üretim düzeyini gösterir, (Bulmuş, 2008).

Chen, sabit ikame esneklikli homotetik fonksiyonlarını sınıflandırmış ve bu tür fonksiyonlara karşılık gelen üretim hiperyüzeylere ilişkin, çeşitli sonuçlar elde etmiştir, (Chen, 2012d). Bu sonuçlardan dördüncü bölümde bahsedilecektir.

Sabit ikame esnekliğini sağlayan quasi-toplam üretim fonksiyonları tam anlamıyla Chen tarafından sınıflandırılmıştır. Ayrıca Chen, bu sınıflandırmanın çeşitli geometrik uygulamalarını ifade etmiştir, (Chen, 2012e). Üçüncü bölümde, bu sonuçlar ifade edilecektir.

n –boyutlu Monge-Ampère denkleminin orijinal formu

$$\det(f_{x_i x_j}) = \eta(f, f_{x_i}, x_i) \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

şeklinde, burada $x_1, \dots, x_n$ koordinatlar ve $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dir. Eğer $\eta = 0$ ise, bu denkleme *homojen Monge-Ampère denklemi* denir, (Chen, 2013).

Monge-Ampère denklemleri Riemannian geometri, konformal geometri ve Cauchy-Riemann geometrideki bazı problemlerde karşımıza çıkmaktadır. Bu uygulamaların en basit örneklerinden biri Gauss eğriliği ile ilgilidir. Böyle diferensiyel denklemler ilk olarak 1784 yılında G. Monge ve 1820 yılında A.-M. Ampère tarafından çalışılmıştır, (Chen, 2013).

Chen homojen Monge-Ampère denklemini sağlayan homotetik fonksiyonları tamamiyle sınıflandırmış; ayrıca, ekonomilerdeki üretim modellerine ve onların grafikleri

olan hiperyüzeylerine ilişkin çeşitli uygulamalar vermiştir, (Chen, 2013). Dördüncü bölümde bu sınıflandırmaya yer verilecektir.

Ekonomilerde, üretimin *faktör esneklik katsayıları*; faktörlerden biri sabitken, ötekinde ortaya çıkan oransal değişmeye karşı üretimin ne ölçüde duyarlı olduğunu gösterir. İktisatçılar, üretim fonksiyonlarına ilişkin birçok soruya, esneklik katsayıları yardımıyla cevap aramışlardır, (Bulmuş, 2008).

İki girdili bir üretim fonksiyonu için, *marjinal teknik ikame oranı*; ürün miktarı aynı kalmak üzere, iş gücünden azaltılacak bir birim yerine sermaye faktöründen artırılması gereken miktarı göstermektedir, (Uluatam, 1998).

A.D. Vilcu ve G.E. Vilcu, sabit esneklik katsayılı ve nispi marjinal teknik ikame özelliğini sağlayan, homojen üretim fonksiyonlarını tamamiyle sınıflandırmışlardır, (Vilcu ve Vilcu, 2013). İkinci bölümde bu sınıflandırmadan bahsedilecektir.

Mihai ve Olteanu iki girdili bazı bilinen üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim yüzeylerini, sabit Gauss eğrilikli kabul ederek ele almış ve bu konuda çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca iki girdili bazı özel üretim yüzeylerinin ortalama eğriliklerini hesaplamışlardır, (Mihai ve Olteanu, 2013).

Allen ve Uzawa tarafından incelenmiş olan bir diğer ikame esnekliği kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır, (Uzawa, 1962).

$f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir üretim fonksiyonu olsun. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ için,

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = - \frac{x_1 f_{x_1} + \dots + x_n f_{x_n}}{x_i x_j} \frac{F_{ij}}{F}$$

fonksiyonuna i –yinci üretim faktörünün j –yinci üretim faktörüne göre *Allen ikame esnekliği* denir. Burada F ile

$$M = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

matrisinin determinanı ve F_{ij} ile de $f_{x_i x_j}$ elemanın ko-faktörü gösterilmektedir. Ayrıca $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ için, $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dir, (Losonczi, 2010).

$M(f)$ matrisine f üretim fonksiyonun *Allen matrisi* ve bu matrisin $\det M(f)$ determinantına ise *Allen determinanı* adı verilir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Aydın ve Mihai quasi-toplam üretim fonksiyonları için, Chen tarafından (1.1) ile verilen Hessiyan Determinant Formülüne benzer bir Allen Determinant Formülü vermiştir. Ayrıca bu formüle göre quasi-toplam üretim fonksiyonları için tam bir sınıflandırma elde etmiştir. Üstelik bu sonuçların bazı geometrik uygulamaları verilmiştir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi). Üçüncü bölümde bu sonuçlar ifade edilecektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. (Kovaryant ve Kontravaryant Tensör): V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda

$$\phi: \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{m \text{ tane}} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^{n \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^* \in V^*$ olmak üzere

$$\phi(v_1, \dots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v'_k, \dots) = \lambda_1 \phi(v_1, \dots, v_k, \dots) + \lambda_2 \phi(v_1, \dots, v'_k, \dots)$$

şartını sağlayan ϕ dönüşümüne m . mertebeden kovaryant ve n . mertebeden kontravaryant tensör adı verilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.2. (Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar): f , $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu C^0 sınıfından bir fonksiyondur denir. $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}$ ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 sınıfındandır denir.

f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ nın her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır denir. $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır denir. $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}$ ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.3. (Topolojik Manifold): M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n –boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n –manifold) dur denir

- (1) M bir Hausdorff uzayıdır,
- (2) M nin herbir açık alt cümlesi $\mathbb{R}^n$ e veya $\mathbb{R}^n$ in bir açık altcümlesine homeomorftur,
- (3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 1.1.4. (Diferensiyellenebilir Manifold): M bir m –boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), \dots\}$ cümlesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$ koleksiyonuna M üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) adı verilir.

- (1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık cümlelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.
- (2) $\mathbb{A}$ daki herhangi iki harita r . mertebeden uyumludur.
- (3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{\varphi}, \bar{U})$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{\varphi}, \bar{U}) \in \mathbb{A}$ dır.

Eğer bir M manifoldu üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna C^∞ manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) adı verilir, (Şahin 2012).

Tanım 1.1.5. (Tanjant vektör): M bir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$(1) V_p(af + bg) = aV_p f + bV_p g,$$

$$(2) V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p g,$$

şartlarını sağlayan $V_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir.

Kolayca görülebilir ki tanjant vektörlerinin uzayı bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir. Bunun nedeni esas olarak manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı ile Öklidyen uzay izomorfiktir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.6. (Vektör Alanı): M bir manifold ve $T_p M$ manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayında bir tanjant vektörü karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$X: M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$$

diferensiyellenebilir bir dönüşümdür, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.7. (Türev Dönüşümü): M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in T_p M$ için, M de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $F(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $F_*(X)$ vektörüne karşılık getiren $F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dönüşümüne, türev dönüşümü denir. Türev dönüşümü dF ile gösterilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.8. (İmmersiyon): M ve N , sırası ile m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı, F_* dönüşümünün rankı olarak tanımlanır. Eğer her p noktasında F dönüşümünün rankı m ise, F dönüşümüne dolgulama veya immersiyon adı verilir. Eğer F , M manifoldundan $F(M)$ ye bir homeomorfizm ve $F(M)$ altuzay topolojisine sahip ise F dönüşümüne yerleştirme (imbedding) denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.9. (Jakobien Matrisi): $F: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $p \in \mathbb{E}^n$ için F_{*p} olsun. Sırasıyla, $T_p \mathbb{E}^n$ ve $T_{F(p)} \mathbb{E}^m$ de

$$\Phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}, \quad \Psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_{F(p)} \right\}$$

standart bazları için F_{*p} nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine F nin p noktasında ki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir, (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 1.1.10. (Semi-Riemann Manifold): M , bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde $(2,0)$ tipinde, simetrik, sabit indeksli ve non-dejenere tensör alanına metrik tensör adı verilir. g bir metrik tensör ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. (M, g) ikilisine semi-Riemann manifoldu denir. Eğer g nin indeksi sıfır ise (M, g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.11. (Lie Parantez Operatörü): V bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde vektör uzayı ve $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ dönüşümü de;

a) 2-lineer

b) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

c) $\forall X, Y, Z \in V$ için; $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

olarak verilsin. $[\]$ dönüşümüne, V üstünde bir Lie parantez operatörü denir, (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 1.1.12. (Afin Konneksiyon): M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı ve

$$(1) \nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$$

$$(2) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$(3) \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$$

$$(4) \nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_XY$$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. ∇_XY vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.13. (Torsiyon ve Eğrilik Tensörleri): M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad T(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y]$$

ve

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z$$

ile tanımlı T ve R tensör alanlarına ∇ afin konneksiyonunun, sırasıyla, torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü denir. Açık bir şekilde T , (2,1) mertebeli tensör alanı ve R , (3,1) mertebeli tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ afin konneksiyonunun torsiyonsuz ve $R = 0$ olması durumunda ise flattır (düzlemsel) denir, (Şahin, 2012).

Teorem 1.1.1. Verilen bir (M, g) Riemann manifoldu için, M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek afin ∇ konneksiyon vardır:

(1) ∇ simetriktir; yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

(2) ∇ metrik ile uyumludur; her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

(do Carmo, 1992).

Tanım 1.1.14. (Levi-Civita Konneksiyon): M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun. Eğer ∇ aşağıdaki şartları sağlarsa, ∇ dönüşümüne bir Levi-Civita konneksiyon veya Riemann konneksiyon denir:

(1) ∇ simetriktir,

(2) ∇ metrik ile uyumludur, (do Carmo, 1992).

Tanım 1.1.15. (Riemann-Christoffel Eğrilik Tensör): (M, g) bir Riemann manifoldu ve R , M üzerinde tanımlı eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ile tanımlı tensör alanına Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı adı verilir, (Şahin, 2012).

Diferensiyel geometride, Riemann eğrilik tensör alanı ya da Riemann-Christoffel tensör alanı, Riemann manifoldlarının eğriliğini ifade etmek için en standart yoldur. Bu tensör alanı, Riemann manifoldunun her noktasına bir tensör taşır öyle ki bu tensör; Riemann manifoldunun metrik tensörünün bir Öklidyen uzayın metriğinden lokal olarak ne kadar farklı olduğunu ölçer.

Tanım 1.1.16. (Ricci Tensör): (M, g) , n –boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $e_1, \dots, e_n$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad S(X, Y) = \text{tr} R(\cdot, X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı $(2,0)$ –mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci tensörü adı verilir. M manifoldunun Ricci operatörü Ric ise,

$$g(RicX, Y) = S(X, Y)$$

ile tanımlanır, (Şahin, 2012).

Ricci eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır olan Riemann manifolduna *Ricci-flat* denir. Ricci-flat 3-manifoldlar aynı zamanda flat manifoldlardır, (Chen, 2011).

Tanım 1.1.17. (Kesitsel Eğrilik): (M, g) , n –boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2 –boyutlu bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesitsel eğriliği denir, (Şahin, 2012).

M bir semi-Riemann manifoldu olsun. M flat bir uzaydır gerek ve yeter şart M nin kesitsel eğrilik fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır, (O’Neill, 1983).

Tanım 1.1.18. (Skaler Eğrilik): (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2 –boyutlu altuzaylarına göre kesitsel eğriliklerinin toplamına M manifoldunun skaler eğriliği denir ve r ile gösterilir. Buna $T_p M$ uzayının ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

dir. Diğer taraftan manifoldun X doğrultusundaki Ricci eğriliği $k(X)$

$$k(X) = \frac{S(X, X)}{g(X, X)}$$

ile tanımlanır, (Şahin, 2012).

$(\bar{M}, g)$ ve M sırası ile m boyutlu Riemann manifoldu ve n boyutlu keyfi manifold olsun. $i: M \rightarrow \bar{M}$ inclusion dönüşümü ele alınırsa $i(p)$ ile p özdeş kabul edilebilir. Bu

durumda $T_p M$, $T_p \bar{M}$ tanjant uzayının altvektör uzayıdır. p noktasında $T_p M$ uzayına dik olan tamamlayan uzayı $T_p M^\perp$ ile gösterilsin. $T_p M^\perp$ uzayına normal uzay ve bu uzayın meydana getirdiği $TM^\perp$ tanjant demetine normal demet denir. Böylece $T_p \bar{M}$ uzayı için

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$$

veya

$$T\bar{M} = TM \oplus TM^\perp$$

ayrışımı geçerlidir. $V \in T_p M^\perp$ vektörüne normal vektör ve birim normal vektöre de normal kesit denir. Normal vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)^\perp$ ile gösterilir. $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ ile gösterilsin ve $X, Y \in \chi(M)$, $V \in \chi(M)^\perp$ için

$$(\bar{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y, \quad (\bar{\nabla}_X V)^\perp = \nabla_X^\perp V$$

tanımlansın, burada T ve $\perp$ sırası ile altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki izdüşümleri gösterilmektedir. Diğer taraftan

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\perp = h(X, Y)$$

ve

$$(\bar{\nabla}_X V)^T = -A_V X$$

tanımlansın. Bu durumda h nın simetrik ve bilineer olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

ve

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V$$

elde edilir, (Şahin, 2012).

Yardımcı Teorem 1.1.2. ∇ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonudur, (Şahin, 2012).

Yardımcı Teorem 1.1.3. $(\bar{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M , $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için

$$g(A_V X, Y) = g(h(X, Y), V)$$

dir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.19. (Ortalama Eğrilik Vektör Alanı): $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu olsun. $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve M nin ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$H = \frac{1}{n} \text{izh} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlı H vektör alanına, ki bu vektör alanı normal demetin kesitidir, ortalama eğrilik vektör alanı denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.20. (Jeodezik): M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin teğet vektör alanı α boyunca paralel ise eğriye jeodeziktir denir, (Şahin, 2012).

Bir M Riemann manifoldu üzerinde, jeodezik eğriler, uç noktaları arasındaki uzunluğu minimize edilmiş olan eğrilerdir. Bu eğriler, iki noktası arasında gerilmiş bir elastik bant görünümündedir. Matematiksel olarak jeodezikler, varyasyonlar hesabından kısmi diferensiyel denklemler kullanılarak ifade edilebilirler. Verilen bir $u \in T_p N$ birim tanjant vektörü için, p noktasından geçen ve N içinde birim hızlı olan, bir tek $\gamma_u(t)$ jeodeziği vardır, öyle ki

$$\gamma'_u(0) = u$$

dir. $T_p N$ tanjant uzayının verilen bir π kesiti (2-düzlem) için, p noktasından geçen ve π ye teğet olan tüm jeodezikler, p nin herhangi bir komşuluğunda bir yüzey oluşturur. Bu yüzeyin p noktasındaki Gauss eğriliği, π nin kesitsel eğriliğidir, (Chen, 2011).

Tanım 1.1.21. (Hiperüzey): $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n+1)$ –boyutlu Öklid uzayında n –boyutlu bir yüzey, veya n –yüzey diye $\mathbb{E}^n$ deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset \mathbb{E}^{n+1} | f: U \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c, c \text{ sabit ve } U \text{ bir açık alt cümle}\}$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$ şeklinde tanımlanır. $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir n –yüzey, $n > 2$ olması halinde bir hiperüzey olarak adlandırılır, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.22. (Hiperküre): $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n+1)$ –boyutlu Öklid uzayında

$$\mathbb{S}_r^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit} \right\}$$

nokta cümlesine bir n –boyutlu hiperküre veya kısaca n –küre denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.23. (Üretim Hiperüzeyi): Her $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üretim fonksiyonu, $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklidyen $(n + 1)$ -uzayının

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_n, Q(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (1.1.1)$$

ile verilen bir non-parametrik hiperüzeyi ile tanımlanabilir. Bu hiperüzeye, bir üretim hiperüzeyi adı verilir, (Chen, 2011).

Daha açık olarak, f nin Jakobiyen matrisi

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve bu matrisin rankı n dir. Dolayısıyla f bir immersiyondur ve bir hiperüzey tanımlar, (Vilcu ve Vilcu, 2011).

Tanım 1.1.24. (Gauss Dönüşümü): $\mathbb{E}^{n+1}$ de yönlendirilmiş bir hiperüzey M ve M nin diferensiyellenebilir birim normal vektörü ξ olsun.

$$v: M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}, v(p) = \xi(p)$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne Gauss dönüşümü denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Gauss dönüşümü sürekli bir dönüşümdür öyle ki $v(p)$, M nin p noktasındaki $\xi(p)$ birim vektörüne karşılık gelir. Gauss dönüşümü lokal olarak, yani hiperüzeyin küçük bir parçası üzerinde, daima tanımlanabilir. Eğer hiperüzey yönlendirilebilir ise o zaman Gauss dönüşümü global olarak tanımlanabilir.

Tanım 1.1.25. (Gauss-Kronocker eğriliği): $\mathbb{E}^{n+1}$ de bir hiperüzey M ve M nin Gauss dönüşümü v olsun. v Gauss dönüşümünün dv diferensiyeli, şekil operatörü (ya da

Weingarten dönüşümü) olarak tanımlanır. Her $p \in M$ noktasında, $T_p M$ tanjant uzayı bir iç çarpım uzayıdır. Ayrıca S_p şekil operatörü, bu uzay üzerinde, $x, y \in T_p M$ için,

$$g(S_p(x), y) = g(dv(x), y)$$

formülü ile verilen bir lineer operatör olarak tanımlanır. Burada g , $\mathbb{E}^{n+1}$ in Öklidyen metriğinden M üzerine indirgenmiş olan metrik tensördür. M nin σ ikinci temel formu ile S şekil operatörü arasında, $x, y \in T_p M$ için,

$$g(\sigma(x, y), \xi(p)) = g(S_p(x), y)$$

şeklinde bir bağıntı vardır. S_p şekil operatörünün özdeğerleri asli eğrilikler olarak bilinir. S_p şekil operatörünün determinantına Gauss-Kronocker eğriliği denir ve $G(p)$ notasyonu ile gösterilir. Dolayısıyla $G(p)$ Gauss-Kronocker eğriliği, p noktasındaki asli eğriliklerin çarpımına karşılık gelir. $n = 2$ durumunda, Gauss-Kronocker eğriliğine kısaca Gauss eğriliği denir, (Chen, 2011).

Tanım 1.1.26. (Ortalama eğrilik): $\mathbb{E}^{n+1}$, Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi verilsin. M nin şekil operatörünün izinin hiperyüzeyin boyutuna bölümüne ortalama eğrilik denir. Bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği özdeş olarak sıfırsa, bu hiperyüzeye minimaldir denir, (Chen, 2011).

Gauss eğriliğinin tersine, ortalama eğrilik hiperyüzeyin immersiyonuna bağlı olan bir dış niceliktir.

$\mathbb{E}^{n+1}$ uzayının bir M hiperyüzeyi için, Gauss denklemi

$$g(R(u, v)w, x) = g(\sigma(u, x), \sigma(v, w)) - g(\sigma(u, w), \sigma(v, x))$$

şeklinde dir.

(1.1.1) ile verilen f dönüşümünün $f_{x_i}, f_{x_i x_j}, \dots$ kısmi türevleri $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$ ile gösterilsin. O zaman f nin Hessiyen matrisi $(f_{x_i x_j})$, simetrik bir matris olur. Ayrıca bunun için

$$w = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2} \quad (1.1.2)$$

şeklinde bir notasyon kullanılır.

Teorem 1.1.4. $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzayında

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

şeklinde tanımlanan bir üretim hiperyüzeyi ve (1.1.2) de verilen w fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler ifade edilebilir:

(a) ξ birim normali;

$$\xi = \frac{-1}{w}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}, -1).$$

(b) Metrik tensörün $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ katsayısı;

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x_i}f_{x_j}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j; \\ 0, & \text{eğer } i \neq j. \end{cases}$$

(c) Hacim elementi;

$$dV = \sqrt{g_{ij}}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = wdx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

(ç) (g_{ij}) nin (g^{ij}) invers matrisi;

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{f_{x_i}f_{x_j}}{w^2}.$$

(d) σ ikinci temel formun matrisi;

$$\sigma_{ij} = \frac{f_{x_i}f_{x_j}}{w}.$$

(e) S şekil operatörü matrisi;

$$a_i^j = \sum_k \sigma_{ik}g^{kj} = \frac{f_{x_i}f_{x_j}}{w} - \sum_k \frac{f_{x_i}f_{x_k}f_{x_k}f_{x_j}}{w^3}.$$

(f) H ortalama eğriliği;

$$H = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{x_j}}{w} \right).$$

(g) G Gauss-Kronocker eğriliği;

$$G = \frac{\det(\sigma_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{\det(f_{x_i x_j})}{w^{n+2}}.$$

(h) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektörleri tarafından gerilen bir düzlem kesitinin K_{ij} kesitsel eğriliği;

$$K_{ij} = \frac{f_{x_i x_i} f_{x_j x_j} - f_{x_i x_j}^2}{w^2 (1 + f_{x_i}^2 + f_{x_j}^2)}.$$

(ı) R , Riemann eğrilik tensörü;

$$g \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = \frac{f_{x_i x_l} f_{x_j x_k} - f_{x_i x_k} f_{x_j x_l}}{w^4}$$

denklemini sağlar, (Chen, 2011).

Tanım 1.1.27. (Satırca Basamak Matrisi): $A \in \mathbb{K}_n^m$ olsun. Burada $\mathbb{K}$ bir cisim ve $\mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde matrislerin cümlesidir. $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ eşitsizliğini sağlayan $j_1, \dots, j_r$ doğal sayıları, aşağıdaki iki önerme doğru olacak şekilde bulunabiliyorsa bu matrise satırca basamak matrisi denir.

(1) Son $m - r$ tane satırın tümü sıfırdır.

(2) Her $h \in \{1, \dots, r\}$ için h -yıncı satırdaki j_h - yıncı bileşen 1 dir. Bu bileşenden önceki bileşenlerin tümü sıfırdır, (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.28. (Gauss Eliminasyon Metodu): Bir lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde elementer satır işlemleri yaparak bu matrisi, satırca basamak matrisi şekline getirip lineer denklem sisteminin çözümünü bulmaya, Gauss eliminasyon metodu denir, (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.29. (Öteleme Fonksiyonu): u uzayda bir vektör olmak üzere

$$f_u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_u(P) = P + u$$

fonksiyonuna, uzayda öteleme vektörü u olan bir öteleme fonksiyonu denir, (Sabuncuoğlu, 2009).

Tanım 1.1.30. (Tam Diferensiyel Denklem): Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ifadesi, $du(x, y)$ toplam diferensiyeline eşit olacak şekilde iki reel değişkenli bir u fonksiyonu varsa, bu ifadeye D bölgesinde bir tam diferensiyel denir. Yani;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu varsa yukarıdaki toplam bir tam diferensiyeldir. Eğer

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

denkleminin sol tarafı bir tam diferensiyel ise diferensiyel denkleme tam diferensiyel denklem denir, (Sezer ve Daşcıoğlu, 2010).

Tanım 1.1.31. (Homojen Fonksiyon): Bir $f(x, y)$ fonksiyonunda, eğer x yerine xt ; y yerine yt konulduğunda $f(xt, yt) = t^n f(x, y)$, $n \in \mathbb{R}$ oluyorsa, fonksiyona n . dereceden homojendir denir, (Sezer ve Daşcıoğlu, 2010).

Teorem 1.1.5. (Euler Homojen Fonksiyon Teoremi): Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu n . dereceden homojen ve birinci kısmi türevleri var ise, o zaman

$$xf_x + yf_y = nf$$

dir, (Hiwarekar, 2009).

Tanım 1.1.32. (Kesin Monoton Fonksiyon): Bir aralığın herhangi iki noktası x_1 ve x_2 olduğuna göre, eğer $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta monoton artandır denir. Eğer $f(x_1) < f(x_2)$ ise fonksiyona kesin olarak artandır denir. Benzer şekilde eğer $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta monoton azalandır denir; eğer $f(x_1) > f(x_2)$ ise fonksiyona kesin olarak azalandır denir, (Süray, 1978).

2. ÜRETİM TEORİSİ VE ÜRETİM FONKSİYONLARI

Üretim oldukça geniş kapsamlı bir kavramdır. Bu kavramı kısaca aşağıdaki gibi izah edebiliriz:

Bir ihtiyacın karşılanması için gerekli olan nesnelere mal adı verilir. Bir malın ya da malların faydalıklarını artıracak şekilde farklı bir mala dönüştürülmesine üretim denir. Üretimi gerçekleştiren ekonomik birime, işletme denir. İşletmenin ürettiği mal ise, çıktı olarak adlandırılır. Malını üretebilmek için işletmenin gereksinme duyduğu mal ve hizmetlerin tümüne girdiler denir. Bu girdilerin bir bölümü, üretilen malların niteliğinden bağımsızdır. Bu tür girdilere; üretimin temel girdileri denir. Üretimin temel girdileri; iş gücü, sermaye, doğa ve girişimden oluşur. Üretimin temel girdilerine aynı zamanda üretim faktörleri de denir. Üretim faktörleri içinde yer alan sermaye, başka işletmelerce üretilmiş mallardan oluşur. Buna karşılık, üretimin sermaye dışında kalan faktörleri üretilmemiştir, (Bulmuş, 2008).

2. 1. Üretim Fonksiyonlarının Özellikleri

Tanım 2.1.1. (Mikroiktisat): İktisadın, insan davranışı ve insanların piyasa, endüstri, firma ve birey gibi nispeten küçük birimlerle ilişkili tercihlerini inceleyen bölümüne mikroiktisat denir, (Parasız ve Özer, 2005).

Tanım 2.1.2. (Üretim fonksiyonu): Mikroiktisatta, bir üretim fonksiyonu; bir firmanın, bir endüstrinin ya da bir ekonominin ürettiği çıktı ile bu çıktıyı oluşturan girdiler arasındaki ilişkiyi veren matematiksel bir formüldür, (Vilcu, 2011).

Böylece bir üretim fonksiyonu

$$Q: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ile tanımlanan C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Burada Q ile çıktı miktarı, n girdi sayısı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler ise kullanılan girdilerdir (işgücü, kapital, arazi, ham madde vb. gibi). Ayrıca $\mathbb{R}_+^n$ ve $\mathbb{R}_+$ notasyonları ile

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}$$

ve

$$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$$

gösterilmektedir, (Vilcu, 2011).

Üretim fonksiyonlarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(a) Herhangi bir girdinin yokluğunda üretim durur, yani Q özdeş olarak sıfır olur. Bu ise her bir girdinin üretim sürecinde zorunlu olması demektir.

(b) $i = 1, \dots, n$ için $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0$ dir. Bu her bir üretim faktörüne göre üretim fonksiyonunun kesin monoton artan olduğunu gösterir.

(c) $i = 1, \dots, n$ için $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} < 0$ dir, yani herhangi bir üretim faktörüne göre üretim fonksiyonu azalan bir etkiye sahiptir.

(d) $\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için, $Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geq Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y})$ dir. Bu ise üretim fonksiyonunun azalmayan bir global etkiye sahip olduğunu gösterir.

(e) Q homojen bir fonksiyondur, yani her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p Q(\mathbf{x})$$

olacak şekilde bir p reel sayısı vardır. Bu ise, girdilerin bir skalerle çarpılması durumunda oluşan çıktının da, aynı sabitin bir kuvveti kadar çarpılacağı anlamına gelir, (Vilcu, 2011).

Eğer $p = 1$ ise, o zaman üretim fonksiyonu *sabit ölçek getirisine* sahiptir denir. Eğer $p > 1$ ise, *artan ölçek getirisine* ve son olarak eğer $p < 1$ ise üretim fonksiyonuna *azalan ölçek getirisine* sahiptir denir, (Vilcu, 2011).

Ölçeğe göre artan, azalan ve sabit getirileri şu örnekle izah edebiliriz: Tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktı %5 den daha fazla artarsa ölçeğe göre artan getiri söz konusu olur. Eğer tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktı %5 den daha az artarsa ölçeğe göre azalan getiriden söz edilir. Ölçeğe göre sabit getiri ise, tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktının yalnızca %5 oranda artması demektir, (Parasız ve Özer, 2005).

Yukarıdaki beş özellikten (c) ile belirtilen dışındakiler açıktır. (c) şikkını açıklamadan önce bazı kavramların verilmesi gerekir.

İki girdili üretim yapan bir işletme ele alınsın. İşletmenin ürettiği malı Q , kullandığı girdileri de K ve L ile gösterelim. Buna göre işletmenin üretim fonksiyonu;

$$Q = f(K, L)$$

ile ifade edilebilir. Burada, sırasıyla, K ve L ile sermaye ve iş gücü girdileri gösterilmektedir.

Tanım 2.1.3. (Ortalama ve marjinal verimlilik): Bir faktörün ya da girdinin ortalama verimliliği aşağıdaki gibi ifade edilir: Faktörlerden birinin, örneğin, K faktörünün ortalama verimliliği: L nin $L = L_0$ gibi bir sabit değeri için değişen K değerlerine bağlı olarak birim K başına elde edilen Q olarak ifade edilir, yani,

$$\text{Ortalama verimlilik} = \frac{Q}{K} = \frac{f(K, L^0)}{K}$$

dir. K faktörünün marjinal verimliliği; L nin $L = L_0$ gibi bir sabit değeri için,

$$\text{Marjinal verimlilik} = \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır, (Bulmuş, 2008).

Şimdi yukarıda (c) ile verilen özellik, aşağıda verilen bir tablo ile izah edilebilir:

Tablo 2. 1.1. Çıktı, Ortalama ve Marjinal verimlilikler

Değişken Girdi (L)	Çıktı (Q)	Ortalama Verimlilik($\frac{Q}{L}$)	Marjinal Verimlilik($\frac{\partial Q}{\partial L}$)
0	0	0,00	0
1	12	12,00	12
2	28	14,00	16
3	52	17,33	24
4	74	18,50	22
5	91	18,20	17
6	104	17,33	13
7	114	16,29	10
8	120	15,00	6

9	121	13,44	1
10	121	12,10	0
11	119	10,82	-2
12	115	9,50	-4
13	110	8,46	-5

Tablo 2.1.1 de birinci sütun işçi sayısı, ikinci sütun üretim miktarı, üçüncü sütun ortalama verimlilik ve son sütun marjinal verimliliği ifade etmektedir. Tablodan görüldüğü gibi, işçi sayısı arttıkça üretim miktarıda artmakta ancak bu artış 9 işçi kullanıncaya kadar devam etmekte ve 9. işçinin işe alınmasıyla maksimum ürün elde edilmektedir. Ancak, 10. işçi üretim miktarını değiştirmemektedir. Yani, 10. işçi üretimi etkilememektedir. 11. işçinin işe alınması sonucu üretim azalmakta ve bunu izleyen işçi alımları ise üretimi daha da düşürmektedir. Özet olarak denilebilir ki; diğer girdilerin miktarı sabitken, sadece bir girdi miktarının artırılması, ürünün gelişimini üç aşamada ortaya çıkartmaktadır: artan hızla artan, azalan hızla artan ve negatif getirilerin olduğu aşamalarıdır, (Parasız ve Özer, 2005).

Yukarıdaki tablo ve açıklamalar, üretim fonksiyonunun belli bir değişkene göre ikinci kısmi türevinin, neden negatif olduğunu açıklamaktadır.

Bu açıklamalardan sonra, üretim fonksiyonları için anahtar kavramlardan biri olarak bilinen eş-ürün eğrilerini ifade edebiliriz:

Tanım 2.1.4. (Eş-ürün eğrisi): K ve L faktörleri sermaye ve iş gücü girdilerini göstermek üzere, bir işletmenin üretim fonksiyonu

$$Q = f(K, L)$$

ile verilsin. Belirli bir üretim düzeyinin gerçekleşmesini sağlayan K ve L faktör bileşimlerinin geometrik yerine eş-ürün eğrisi adı verilir.

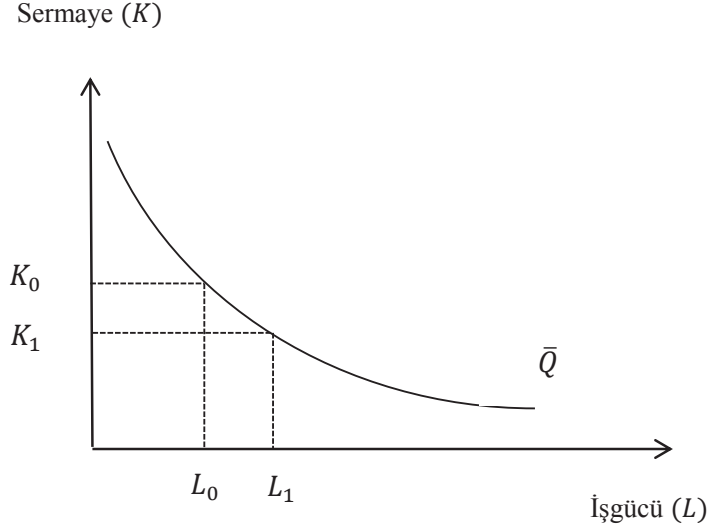
Belli bir üretim düzeyi için $Q = f(K, L)$ üretim fonksiyonu

$$Q^0 = f(K, L)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki bağıntıda Q^0 bir parametredir. Bir başka deyişle, Q^0 bir üretim düzeyini göstermektedir. Burada Q^0 üretim düzeyini veren K ve L faktörlerinin tüm bileşimlerinin geometrik yeri, bir eş-ürün eğrisi oluşturur, (Bulmuş, 2008).

Eş-ürün eğrilerini aşağıdaki şekil ile daha da açık bir konuma getirebiliriz.



Şekil 2.1.1. Eş ürün eğrisi

Şekil 2.1.1 de belli bir $\bar{Q}$ üretim seviyesine karşılık olan böyle bir eş-ürün eğrisi gösterilmiştir, (Uluatam, 1998).

Tanım 2.1.5. (Teknik ikame oranı): Belirli sınırlar içinde faktörlerin birbirleri yerine kullanılabilmesi, iktisatta, teknik ikame olarak adlandırılır. Bir faktörün diğerini ikame gücü, bir oran yardımıyla ifade edilebilir. Bu orana teknik ikame oranı adı verilir, (Bulmuş, 2008).

Teknik ikame oranı'na ulaşmak için, eş-ürün eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimini (-1) ile çarpmak yeterlidir, yani

$$\text{Marjinal teknik ikame oranı} = -\frac{dK}{dL} \quad (2.1.2)$$

şeklindedir.

Diğer taraftan bir $Q = f(K, L)$ üretim fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL \quad (2.1.3)$$

dir. Bir eş-ürün eğrisi boyunca üretim miktarı sabit olduğundan, tam diferensiyelin sıfıra eşitlenmesi ile belli bir eş-ürün eğrisinin denklemi elde edilir. Yani, belli bir ürün miktarı için,

$$dQ = 0 \quad (2.1.4)$$

dir. (2.1.4) eşitliği (2.1.3) de göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \quad (2.1.5)$$

eş ürün eğrilerinin denklemini veren sonucu elde ederiz. Ayrıca bu denklemden

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \quad (2.1.6)$$

yazılabilir. Marjinal verimlilik tanımı (2.1.1) eşitliği ile ifade edilmişti. (2.1.2) ile verilen marjinal teknik ikame oranı da göz önüne alınırsa, (2.1.6) dan

$$\text{Marjinal teknik ikame oranı} = \frac{\text{İş gücünün marjinal verimliliği}}{\text{Sermayenin marjinal verimliliği}}$$

elde edilir, (Uluatam, 1998).

Üretim teorisi içerisinde oldukça önemli bir konumda bulunan esneklik katsayıları, üretim fonksiyonlarına ilişkin birçok soruya cevap vermektedir.

Tanım 2.1.6. (Esneklik katsayıları): Faktörlerden biri sabitken, ötekinde ortaya çıkan oransal değişmeye karşı, üretimin ne ölçüde duyarlı olduğunu gösteren parametrelere üretim faktörü esneklik katsayıları denir, (Bulmuş, 2008).

Yine, iki-girdili

$$Q = f(K, L)$$

üretim fonksiyonunu ele alalım. Burada K ve L faktörleri sermaye ve iş gücü girdilerini ifade etmektedir.

Üretimin iş gücü faktörüne olan esneklik katsayısı (e_L), sermaye faktörüne olan esneklik katsayısı (e_K) ile gösterilsin. Bu katsayıların nasıl elde edileceği aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$e_L = \frac{\partial Q / \partial L}{Q / L} \text{ ve } e_K = \frac{\partial Q / \partial K}{Q / K}.$$

Üretimin faktör esneklik katsayıları ile, faktörlerin marjinal fiziki verimlilik fonksiyonları arasında bir benzerlik vardır. Her ikisi de, kullanılan faktörlerde ki değişimin, üretimde yaratacağı değişmeyi göstermektedir, (Bulmuş, 2008).

Tanım 2.1.7. (Faktörler arası ikame esneklik katsayısı): Faktör oranlarındaki oransal değişimin, teknik ikame oranındaki oransal değişmeye oranına, faktörler arası ikame esneklik katsayısı denir (ε_s) ile gösterilir, (Bulmuş, 2008).

Teknik ikame oranını kısaca (s) ile gösterilirse, faktörler arası ikame esneklik katsayısı, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon_s = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{ds}{s}} = \frac{d(K/L)}{ds} \cdot \frac{s}{(K/L)}.$$

Ayrıca bu son eşitlikte (2.1.6) ile verilen teknik ikame oranı yerine yazılırsa, ikame esneklik katsayısı

$$\varepsilon_s = \frac{d(K/L)}{d\left(\frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K}\right)} \cdot \frac{\frac{\partial Q / \partial L}{\partial Q / \partial K}}{(K/L)}$$

şeklinde de gösterilebilir.

A.D. Vilcu ve G.E. Vilcu, sırasıyla, sabit esneklik katsayılı ve oransal marjinal teknik ikame oranlı homojen üretim fonksiyonlarını, aşağıdaki teoremlerle sınıflandırmışlardır:

Teorem 2.1.1. f iki kez diferensiyellenebilir, r –homojen, sabit olmayan ve iki girdili (K –sermaye ve L –iş gücü) bir üretim fonksiyonu olsun. O zaman

(a) f , işgücü faktörüne olan sabit esneklik katsayısına sahip olması için gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^{r-k}L^k$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabit ve k üretimin işgücü faktörüne olan sabit esneklik katsayısıdır.

(b) f , sermaye faktörüne olan sabit esneklik katsayısına sahip olması için gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^kL^{r-k}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabit ve k üretimin sermaye faktörüne olan sabit esneklik katsayısıdır.

(c) f , sermaye ve iş gücü arasında oransal ikame oranı özelliğini sağlaması için (yani marjinal teknik ikame oranı $= k \left(\frac{K}{L} \right)$, burada k pozitif bir sabittir) gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^{r/(k+1)}L^{rk/(k+1)}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabittir (Vilcu ve Vilcu, 2013).

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n > 2$, şeklinde n –girdili bir homojen üretim fonksiyonu olsun. O zaman herhangi bir x_i faktörüne göre üretimin esnekliği

$$E_{x_i} = \frac{\partial f / \partial x_i}{f / x_i}$$

şeklinde tanımlanır. Yine üretimin i –yinci faktörünün j –yinci faktörüne göre marjinal teknik ikame oranı

$$MRS_{ij} = \frac{\partial f / \partial x_j}{\partial f / \partial x_i}$$

şeklinde verilir. Bir üretim fonksiyonuna, oransal marjinal teknik ikame oranı özelliğini sağlıyordur denir gerek ve yeter şart

$$MRS_{ij} = \frac{x_i}{x_j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

dir, (Vilcu ve Vilcu, 2013).

Teorem 2.1.2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iki kez diferensiyellenebilir, r –homojen, sabit olmayan, $D = \mathbb{R}_+^n$ üzerinde tanımlı ve n -değişkenli ($n > 2$) bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

(a) Herhangi bir x_i üretim faktörüne göre, üretim esnekliğinin bir k_i sabiti olması için gerek ve yeter şart

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i^{k_i} x_j^{r-k_i} F(u_1, \dots, u_{n-2})$$

dir. Burada $j, \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ cümlesinden alınmış herhangi bir eleman, F iki kez diferensiyellenebilir ve

$$\{u_1, \dots, u_{n-2}\} = \left\{ \frac{x_k}{x_j} \mid k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\} \right\}$$

şeklinde verilen $(n - 2)$ –değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur.

(b) Tüm üretim faktörlerine göre, üretim esnekliğinin bir k_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) sabitine eşit olması için gerek ve yeter şart

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$$

ve f ,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Burada C bir pozitif sabittir.

(c) Üretim fonksiyonunun oransal marjinal ikame oranı özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C x_1^{r/n} x_2^{r/n} \dots x_n^{r/n}$$

dir. Burada C pozitif bir sabittir, (Vilcu ve Vilcu, 2013).

3. QUASI-TOPLAM ÜRETİM MODELLERİ VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

3.1. Quasi-toplam Üretim Fonksiyonları İçin Geometrik Sonuçlar

Tanım 3.1.1. (Quasi-toplam üretim fonksiyonu) $h_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) ve $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli kesin monoton artan fonksiyonlar olsun. Buna göre her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için $h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n) \in I$ olacak şekilde

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$$

ile tanımlanan f üretim fonksiyonuna quasi-toplam üretim fonksiyonu adı verilir. Eğer $F, h_1, \dots, h_n$ fonksiyonlarından en çok biri lineer olmayan fonksiyon ise, quasi-toplam üretim fonksiyonuna quasi-lineer denir, (Aczél ve Maksa, 1996).

Teorem 3.1.1. En az üç-girdili, iki kez diferensiyellenebilir bir quasi-toplam üretim fonksiyonunun quasi-lineer olması için gerek ve yeter şart üretim hiperyüzeyi flattır, (Chen, 2012a).

Ricci-flat 3-manifoldlar aynı zamanda flat uzaylar olduklarından, Teorem 3.1.1. den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. Üç-girdilli, iki kez diferensiyellenebilir bir quasi-toplam üretim fonksiyonunun quasi-lineer olması için gerek ve yeter şart üretim hiperyüzeyi Ricci-flat bir uzaydır, (Chen, 2012a).

Tanım 3.1.2. (Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ verilsin. Buna göre

$$f(\mathbf{x}) = bx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (3.1.1)$$

ile verilen üretim fonksiyonuna genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu denir. Burada b pozitif bir sabit ve α_i ($i = 1, \dots, n$) ler $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı sabitlerdir, (Losonczi, 2010).

Tanım 3.1.3. (Genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu) a_i, b, h, ρ, b sabitleri

$$b, h > 0, \rho < 1 \text{ ve } a_i, \rho \neq 0$$

şeklinde verilsin. Buna göre

$$f(x) = b(a_1^\rho x_1^\rho + \dots + a_n^\rho x_n^\rho)^{\frac{h}{\rho}} \quad (3.1.2)$$

ile verilen üretim fonksiyonuna genelleştirilmiş CES (ACMS) üretim fonksiyonu denir, (Chen, 2012a).

Grafikleri, null Gauss-Kronocker eğriliğine sahip olan quasi-toplam üretim fonksiyonlarının sınıflandırılması aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.1.3. f iki kez diferensiyellenebilir bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. Bu takdirde, f nin üretim hiperyüzeyinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart uygun ötelemelere göre, f aşağıdakilerden biridir:

(a) $f = ax_1 + \sum_{i=2}^n \varphi_i(x_i)$, burada a sıfırdan farklı bir sabit ve $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ kesin monoton fonksiyonlardır,

(b) $f = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \sum_{i=3}^n \varphi_i(x_i))$, burada a_1, a_2 sıfırdan farklı sabitler ve $F, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ kesin monoton fonksiyonlardır,

(c) f , $f = \gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ şeklinde verilen bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, burada $\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, şartını sağlayan sıfırdan farklı sabitlerdir,

(d) $f = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-2}} \right)^{\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1}}$ dir, burada $a_i \neq 0$ ve $\varepsilon \neq 1, 2$ şeklinde sabitlerdir,

(e) Sıfırdan farklı a, b_i, r_i sabitleri için, $f = a \ln(\sum_{i=1}^n b_i e^{r_i x_i})$ dir, (Chen, 2012a).

Sonuç 3.1.4. $f(x, y)$ iki kez diferensiyellenebilen bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. O zaman f nin üretim yüzeyinin flat bir yüzey olması için gerek ve yeter şart, uygun ötelemelere göre, f aşağıdakilerden biridir:

(a) f bir quasi-lineer üretim fonksiyonudur,

(b) f bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, yani, sıfırdan farklı a ve sıfır ile birden farklı r sabitleri için $f = ax^r y^{1-r}$ şeklindedir,

(c) sıfırdan farklı a, b, c, r, s sabitleri için $f = a \ln(b e^{rx} + c e^{sy})$ dir,

(d) $\varepsilon \neq 1, 2$ için, $f = \left(ax^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-2}} + by^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-2}}\right)^{\frac{\varepsilon-2}{\varepsilon-1}}$ ile verilen bir ACMS üretim fonksiyonudur, (Chen, 2012a)

Teorem 3.1.3 ve Sonuç 3.1.4 üretim hiperyüzeyleri flat olan quasi-toplam üretim fonksiyonlarının tamamını sınıflandırır.

3.2. Sabit İkame Esneklik Özelliğini Sağlayan Quasi-toplam Üretim Fonksiyonları

Tanım 3.2.1. (Hicks ikame esnekliği) f iki kez diferensiyellenebilir bir üretim fonksiyonu olsun. Tüm kısmi türevler $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ noktasında alınır ve payda sıfırdan farklı kabul edilirse, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ve $1 \leq i \neq j \leq n$ için,

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{x_i f_{x_i}} + \frac{1}{x_j f_{x_j}}}{-\frac{f_{x_i x_i}}{f_{x_i}^2} + \frac{2f_{x_i x_j}}{f_{x_i} f_{x_j}} - \frac{f_{x_j x_j}}{f_{x_j}^2}} \quad (3.2.1)$$

tanımlanan H_{ij} değerine, i –yinci üretim faktörünün j –yinci üretim faktörüne göre Hicks ikame esnekliği denir. Burada $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dir, (Allen ve Hicks, 1934).

Tanım 3.2.2. (CES özelliği) İki kez diferensiyellenebilir bir $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ üretim fonksiyonu için, eğer

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, 1 \leq i \neq j \leq n)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\sigma \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, f ye CES (sabit ikame esnekliği) özelliğini sağlıyordur denir, (Losonczy, 2010).

Tanım 3.2.3. (Homotetik genelleştirilmiş Cobb-Douglas ve homotetik genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu) $h(x_1, \dots, x_n)$ herhangi dereceden bir homojen fonksiyon ve F monoton artan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f(\mathbf{x}) = F(h(x_1, \dots, x_n)) \quad (3.2.2)$$

ile verilen bir üretim fonksiyonuna bir homotetik fonksiyon adı verilir. Bir homotetik üretim fonksiyonu, eğer

$$f(\mathbf{x}) = F(a_1^\rho x_1^\rho + \dots + a_n^\rho x_n^\rho) \quad (3.2.3)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, buna homotetik genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu denir. Ayrıca, eğer bu homotetik üretim fonksiyonu,

$$f(\mathbf{x}) = F(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) \quad (3.2.4)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, homotetik genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu adını alır, (Chen, 2012e).

Sabit ikame esneklikli quasi-toplam üretim fonksiyonları aşağıdaki teoremle sınıflandırılmıştır:

Teorem 3.2.1. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$, $n \geq 2$, bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. Bu taktirde f nin sabit ikame esnekliği özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart, uygun ötelemelere göre, f aşağıdakilerden biridir:

(a) $f(\mathbf{x}) = F\left(c_1 x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + c_n x_n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)$, $\sigma \neq 1$, ile verilen bir homotetik genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur,

(b) $f(\mathbf{x}) = F(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$ ile verilen bir homotetik genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur,

(c) iki girdili bir üretim fonksiyonu $f(\mathbf{x}) = F\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ formundadır, burada F bir kesin monoton artan fonksiyondur, (Chen, 2012e).

Diğer yandan, sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ formundaki bileşke fonksiyonlar için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 3.2.1. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$, $n \geq 2$, iki kez diferensiyellenebilen bileşke formunda bir üretim fonksiyonu olsun. Bu taktirde f nin sabit ikame esnekliği özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart, $x_1, \dots, x_n$ nin uygun ötelemelerine göre, f aşağıdakilerden biridir:

(a) $f(\mathbf{x}) = F\left(c_1 x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + c_n x_n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)$, $\sigma \neq 1$, ile verilen bir homotetik genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur,

(b) $f(\mathbf{x}) = F(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$ ile verilen bir homotetik genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur,

(c) $f(\mathbf{x}) = F(\prod_{i=1}^n \ln(x_i)^{\mu_i})$ formundadır, burada μ_i sıfırdan farklı sabitlerdir $i = 1, \dots, n$, (Aydın ve Ergüt, incelemede(a)).

Sabit ikame esneklikli quasi-toplam üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim hiperyüzeylerinin, null Gauss-Kronocker eğriliğine sahip olmasına ilişkin bir karakterizasyon aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.2.2. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. O zaman f nin grafiğinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart f aşağıdakilerden biridir:

(a)

$$f(\mathbf{x}) = \gamma \left(\sum_{i=1}^n a_i^\rho x_i^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \gamma, a_1, \dots, a_n, \rho \neq 0,$$

ile verilen ve lineer olarak homojen olan genelleştirilmiş bir ACMS üretim fonksiyonudur,

(b)

$$f(\mathbf{x}) = \gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1,$$

ile verilen ve lineer olarak homojen olan genelleştirilmiş bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Burada $\gamma, a_1, \dots, a_n \neq 0$ dir, (Chen, 2012e).

Sabit ikame esneklikli quasi-toplam üretim fonksiyonlarının grafiklerinin flat olmalarına ilişkin bir diğer teorem aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.2.3. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. Bu taktirde, f nin grafiğinin flat bir uzay olması için gerek ve yeter şart ya

(a) f ,

$$\gamma \left(\sum_{i=1}^n a_i^\rho x_i^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \gamma, a_1, \dots, a_n, \rho \neq 0$$

ile verilen ve lineer olarak homojen olan genelleştirilmiş bir ACMS üretim fonksiyonu, ya da

(b) f ,

$$\gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

ile verilen ve lineer olarak homojen olan genelleştirilmiş bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, öyle ki $\gamma, a_1, \dots, a_n \neq 0$ dir, (Chen, 2012e).

3.3. Allen Determinantlı Quasi-toplam Üretim Fonksiyonları

Bir önceki alt bölümde (3.2.1) numaralı denklem ile verilen Hicks ikame esnekliğinden farklı olarak, Allen ve Uzawa (Uzawa, 1962) tarafından da bir başka ikame esnekliği kavramı verilmiştir:

Tanım 3.3.1. (*Allen ikame esnekliği*) $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir üretim fonksiyonu olsun. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ için,

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = - \frac{x_1 f_{x_1} + \dots + x_n f_{x_n}}{x_i x_j} \frac{F_{ij}}{F} \quad (3.3.1)$$

fonksiyonuna i –yinci üretim faktörünün j –yinci üretim faktörüne göre Allen ikame esnekliği denir. Burada F ile

$$M = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

matrisinin determinantı ve F_{ij} ile de $f_{x_i x_j}$ elemanının kofaktörü gösterilmektedir. Ayrıca $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ için

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

dir, (Losonczi, 2010).

Tanım 3.3.2. (3.3.2) ile verilen $M(f)$ matrisine f üretim fonksiyonunun Allen matrisi ve bu matrisin $\det M(f)$ determinantına ise Allen determinanı adı verilir, (Aydın ve Mihai, Kabul edildi).

$f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ iki-faktörlü bir üretim fonksiyonu olsun. f nin Allen matrisi

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & f_{x_2} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2} & f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

ve bu matrisin determinanı

$$\det M(f) = -f_{x_1}^2 f_{x_2 x_2} + 2f_{x_1} f_{x_2} f_{x_1 x_2} - f_{x_2}^2 f_{x_1 x_1}$$

şeklinde. Ayrıca F_{12} ile Allen matrisinin $f_{x_1 x_2}$ elemanının kofaktörü gösterilirse $F_{12} = -f_{x_1} f_{x_2}$ olduğu görülür. Buna göre iki-faktörlü $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ üretim fonksiyonunun 1 –inci üretim faktörünün 2 –inci üretim faktörüne göre Allen ikame esnekliği

$$\begin{aligned} A_{12}(x) &= -\frac{x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2}}{x_1 x_2} \frac{-f_{x_1} f_{x_2}}{-f_{x_1}^2 f_{x_2 x_2} + 2f_{x_1} f_{x_2} f_{x_1 x_2} - f_{x_2}^2 f_{x_1 x_1}} \\ &= \frac{\frac{x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2}}{x_1 x_2 f_{x_1} f_{x_2}}}{\frac{-f_{x_1}^2 f_{x_2 x_2} + 2f_{x_1} f_{x_2} f_{x_1 x_2} - f_{x_2}^2 f_{x_1 x_1}}{(f_{x_1} f_{x_2})^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{x_1 f_{x_1}} + \frac{1}{x_2 f_{x_2}}}{-\frac{f_{x_1 x_1}}{f_{x_1}^2} + \frac{2f_{x_1 x_2}}{f_{x_1} f_{x_2}} - \frac{f_{x_2 x_2}}{f_{x_2}^2}} \end{aligned}$$

olur. (3.2.1) numaralı eşitlik ve son eşitlik birlikte düşünüldüğünde $A_{12}(x) = H_{12}(x)$ elde edilir, yani iki-faktörlü üretim fonksiyonları için Allen ikame esnekliği ve Hicks ikame esnekliği birbiri ile çakışmaktadır.

Teorem 3.3.1. (Allen Determinant Formülü): $f(x) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ n –faktörlü bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. O zaman $M(f)$ Allen matrisinin determinanı

$$\det M(f) = -(F')^{n+1} \sum_{j=1}^n h_1'' \dots h_{j-1}'' (h_j')^2 h_{j+1}'' \dots h_n'' \quad (3.3.4)$$

dir. Burada $h_j' = \frac{dh_j}{dx_j}$, $h_j'' = \frac{d^2h_j}{dx_j^2}$ ve $u = h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n)$ için $F' = F'(u)$ dir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Sonuç 3.3.2. $f(x) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ quasi-toplam üretim fonksiyonu için Allen matrisinin singülerliği yalnızca $h_1, \dots, h_n$ fonksiyonlarına bağlıdır, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Teorem 3.3.3. $f(x) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilen bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. O zaman $M(f)$ Allen matrisi singüler olması için gerek ve yeter şart f in aşağıdakilerden biri olmasıdır:

(a) $f(x) = F(c_1x_1 + c_2x_2 + h_3(x_3) + \dots + h_n(x_n))$ dir, burada c_1, c_2 sıfırdan farklı sabitler ve $F, h_3, \dots, h_n$ kesin monoton fonksiyonlardır,

(b) $f(x) = F(\sum_{i=1}^n c_i \ln(x_i + d_i) + e_i)$ dir, burada, $i = 1, \dots, n$ için, c_i ler sıfırdan farklı sabitler ve d_i, e_i ler ise keyfi sabitlerdir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Teorem 3.3.1 de (3.3.4) ile verilen Allen Determinat Formülü $f = F(\sum_{i=1}^n b_i x_i^{c_i})$

bileşke fonksiyonlara uygulanarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.3.4. $F(u)$, $F'(u) \neq 0$ olmak üzere, iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f = F(\sum_{i=1}^n b_i x_i^{c_i})$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu da, b_i ($i = 1, \dots, n$) sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, F ve $r(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^{c_i}$ fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu olsun. Aşağıdaki şartlardan biri gerçekleşmedikçe, f nin Allen matrisi tersinirdir:

(a) $c_1, \dots, c_n$ lerden en az biri sıfırdır,

(b) $c_1, \dots, c_n$ lerden en az ikisi bire eşittir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Allen determinantlarını kullanarak, quasi-toplam üretim fonksiyonlarına karşılık gelen hiperyüzeylerin geometrisi ile ilgili aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.3.5. $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilen, en az üç faktörlü bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. Eğer f nin üretim hiperyüzeyi flat bir uzay ise f nin Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Sonuç 3.3.6. $h_1, \dots, h_n$ lerden biri lineer fonksiyon ve $F'' \neq 0$ olmak üzere, $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) + \dots + h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilen bir quasi-toplam üretim fonksiyonu olsun. $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart f nin üretim hiperyüzeyi null Gauss-Kronocker eğriliklidir, (Aydın ve Mihai, kabul edildi).

Diğer yandan, Öklid uzaylarında hiperyüzeylerin önemli bir sınıfını oluşturan öteleme hiperyüzeyleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.3.3. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayının bir M^n hiperyüzeyi verilsin. Eğer M^n hiperyüzeyi

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

şeklinde bir fonksiyonun grafiğine karşılık geliyorsa, M^n ye bir *öteleme hiperyüzeyi* adı verilir, (Lima, Santos, Silva and Sousa, 2014). Burada tek değişkenli $f_1, \dots, f_n$ fonksiyonları, f nin *bileşenleri* olarak adlandırılır ve öteleme hiperyüzeyleri (M^n, f) çifti ile gösterilir.

Öteleme hiperyüzeylerinin minimallik ve flatlık özelliği, Öklidyen ve pseudo-Öklidyen uzaylarda, pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır, (Dillen, Verstraelen and Zafindratafa, 1991; Goemans ve Van de Woestyne, 2011; Seo, 2013).

Öteleme hiperyüzeylerine ilişkin yeni bir sınıflandırma aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Teorem 3.3.7. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında (M^n, f) bir öteleme hiperyüzeyi olsun. f nin $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart (M^n, f) aşağıdakilerden biridir:

(a) $n = 2$ durumunda, $\mathbb{E}^3$ uzayının x_1x_2 –düzleminin bir açık parçasıdır.

(b) $n = 3$ durumunda, bir $\Gamma \times \mathbb{E}^2$ çarpım manifoldudur, burada Γ ile $\mathbb{E}^4$ uzayının x_3x_4 –düzleminde yatan bir eğri gösterilmektedir.

(c) $n \geq 4$ durumunda, bir $M^{n-2} \times \mathbb{E}^2$ çarpım manifoldudur, burada M^{n-2} ile $\mathbb{E}^{n-1}$ $(n - 1)$ –boyutlu Öklid uzayında bir öteleme hiperyüzeyi ifade edilmektedir.

(d) $n \geq 2$ durumunda,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n, \sum_{j=1}^n (\alpha_j \ln(x_j + \beta_j) + \mu_j) \right)$$

ile parametrize edilen bir öteleme hiperyüzeyidir. Burada, α_j ler sıfırdan farklı ve $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ olan sabitler ve β_j, μ_j ler de herhangi sabitlerdir, $j = 1, \dots, n$, (Aydın ve Mihai, incelemede).

Teorem 3.3.7 den aşağıdaki verilebilir:

Sonuç 3.3.8. $\mathbb{E}_+^{n+1}$ uzayında, (M^n, f) bir öteleme hiperyüzeyi olsun öyle ki f nin tüm bileşenleri non-lineer fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda f nin $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart, $x_1, \dots, x_n$ nin uygun ötelemelerine göre, (M^n, f)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \ln(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$$

ile verilen bir homotetik üretim fonksiyonun grafiği olmasıdır. Burada $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sıfırdan farklı sabitler ve $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ dir, (Aydın ve Mihai, incelemede).

Tzitzeica şartını sağlayan öteleme hiperyüzeleri için aşağıdaki ifadeler verilebilir:

Teorem 3.3.9. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında (M^n, f) bir öteleme hiperyüzeyi olsun. (M^n, f) nin bir Tzitzeica hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart (M^n, f) nin bir hiperüzlemin bir açık parçası olmasıdır, (Aydın ve Mihai, incelemede).

Sonuç 3.3.10. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında, Gauss-Kronocker eğriliği sıfırdan farklı olan ve Tzitzeica şartını sağlayan bir öteleme hiperyüzeyi yoktur, (Aydın ve Mihai, incelemede).

Teorem 3.3.11. $\mathbb{E}_+^{n+1}$ uzayında, (M^n, f) bir öteleme hiperyüzeyi olsun. (M^n, f) nin bir Tzitzeica hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart (M^n, f) nin mükemmel ikame formunda bir üretim fonksiyonunun grafiğine karşılık gelen bir hiperyüzey olmasıdır, (Aydın ve Mihai, incelemede).

4. HOMOTETİK FONKSİYONLARIN ALLEN DETERMİNANTLARI

Bu bölümde, ilk olarak sabit ikame esnekliği (CES) özelliğini sağlayan homotetik fonksiyonlar için elde edilmiş sonuçlar ifade edilecektir. Homojen Monge-Ampère denklemini sağlayan homotetik fonksiyonlara dair bulunan sonuçlar da ele alınacaktır.

Daha sonra, iki faktörlü homotetik üretim fonksiyonları için, Allen determinatları kullanılarak, bir sınıflandırma teoremi elde edilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş Cobb-Douglas ve genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonlarının Allen matrislerinin singüler olamayacağı ispatlanacaktır.

Son olarak üç ve dört boyutlu Öklid uzaylarında, homotetik üretim fonksiyonların grafiklerine ilişkin çeşitli diferensiyel geometrik sonuçlar verilecektir.

4.1. CES Özelliği ve Homojen Monge-Ampère Denklemini Sağlayan Homotetik Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1. (*Homotetik üretim fonksiyonu*) F monoton artan bir fonksiyon ve $h(x_1, \dots, x_n)$ keyfi dereceden bir homojen fonksiyon olsun. O zaman, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f(\mathbf{x}) = F(h(x_1, \dots, x_n)) \quad (4.1.1)$$

üretim fonksiyonuna bir homotetik üretim fonksiyonu adı verilir, (Lindberg, Eriksson ve Mattsson, 2002).

Homotetik fonksiyonlar marjinal teknik ikame oranı sıfırıncı dereceden homojen olan üretim fonksiyonlarıdır, (Chen, 2014).

Homotetik üretim fonksiyonlarına ilişkin eş ürün eğrileriyle homojen üretim fonksiyonlarına ait eş-ürün eğrileri, şekil ve konum olarak, birbirine benzer. Bunlar arasındaki tek fark, aynı eş-ürün eğrisi; homojen üretim fonksiyonunda başka, homotetik üretim fonksiyonunda bir başka üretim düzeyini gösterir, (Bulmuş, 2008).

Aşağıdaki teorem ile sabit Hicks ikame esnekliğine sahip homotetik fonksiyonlar sınıflandırılmıştır:

Teorem 4.1.1. $f(x) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. O zaman f nin sabit ikame esnekliği özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart h , ya

(a) bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, ya da

(b) bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur, (Chen, 2012d).

Sabit Hicks ikame esnekliğine sahip homotetik fonksiyonlarına karşılık gelen hiperyüzeylerin geometrisi ile ilgili aşağıdaki geometrik sonuçlar verilebilir:

Teorem 4.1.2. $f(x) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. O zaman f nin grafiği null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart f , ya

(a) lineer olarak homojen olan bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, ya da

(b) lineer olarak homojen olan bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur, (Chen, 2012d).

Teorem 4.1.3. $f(x) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. Bu taktirde f nin grafiğinin flat bir uzay olması için gerek ve yeter şart f , ya

(a) lineer olarak homojen olan bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, ya da

(b) lineer olarak homojen olan bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur, (Chen, 2012d).

Teorem 4.1.4. $f(x) = h(x_1, \dots, x_n)$ sabit ikame esnekliği özelliğini sağlayan p –homojen üretim fonksiyonu olsun. O zaman, f nin grafiğinin minimal olması için gerek ve yeter şart f aşağıdakilerden biridir:

(a) bir mükemmel ikamedir,

(b) $f(x, y, z) = xy/z$ formunda üç-girdili bir üretim fonksiyondur, (Chen, 2012d).

Tanım 4.1.2. (Homojen Monge-Ampère denklemi) n –boyutlu Monge-Ampère denkleminin orijinal formu

$$\det(f_{x_i x_j}) = \eta(f, f_{x_i}, x_i) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

şeklindedir, burada $x_1, \dots, x_n$ koordinatlar ve $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dir. Eğer $\eta = 0$ ise bu denkleme homojen Monge-Ampère denklemi denir, (Chen, 2014).

Homojen Monge-Ampère denklemi homotetik fonksiyonlara uygulanarak aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.1.5. $h(x)$, d –yinci dereceden bir homojen fonksiyon olsun, $d \neq 1$. Kabul edelim ki h , $\det(h_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlasın. O zaman $F' \neq 0$ olacak şekilde her F fonksiyonu için $f(x) = F(h(x))$ homotetik fonksiyonu da, $\det(f_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlar, (Chen, 2014).

Teorem 4.1.6. $F(u)$, $F' \neq 0$ olacak şekilde, bir fonksiyon ve $u = h(x)$, d –yinci dereceden bir homojen fonksiyon olsun, $d \neq 1$. Eğer $f = F \circ h$, $\det(f_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlarsa, o zaman ya

(a) h fonksiyonu $\det(h_{x_i x_j}) = 0$ denklemini sağlar, ya da

(b) uygun sabitlere göre, $f = F \circ h$ lineer olarak homojen olan bir fonksiyondur, (Chen, 2014).

Teorem 4.1.7. F , $F' \neq 0$ olacak şekilde, bir fonksiyon ve $h(x, y)$ bir homojen fonksiyon olsun. Bu taktirde $f = F(h(x, y))$, $\det(f_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart ya

(a) herhangi a, b sabitleri için $h(x, y) = (ax + by)^d$ dir, ya da

(b) uygun sabitlere göre, $f(x, y)$ lineer olarak homojen olan bir fonksiyondur, (Chen, 2014).

Teorem 4.1.8. $F(u)$, $F' \neq 0$ olacak şekilde, bir fonksiyon ve h , bir n -girdili d – homojen fonksiyon olsun öyle ki $d \neq 0$ ve $n \geq 3$. O zaman $f = F \circ h$, $\det(f_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlaması için gerek ve yeter şart ya

(a) uygun sabitlere göre, f lineer olarak homojen olan bir fonksiyondur, ya da

(b) $f = F\left(x_1 \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)\right)$ dir, burada $\phi(u_2, \dots, u_n)$, $\det(\phi_{x_i x_j}) = 0$ denklemini sağlayan (n-1)-girdili bir fonksiyondur, (Chen, 2014).

Yukarıda ifade edilen teoremlerin üretim hiperyüzeylerine uygulanması ile aşağıdaki geometrik sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.1.9. $f(x, y) = F(h(x, y))$ bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. f nin grafiğinin flat bir yüzey olması için gerek ve yeter şart ya

(a) $f(x, y)$ lineer olarak homojendir, ya da

(b) $F(u)$ kesin monoton artan bir fonksiyon ve $h(x, y)$ bir mükemmel ikamedir, (Chen, 2014).

Sonuç 4.1.10. $f(x) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ bir homotetik fonksiyon öyle ki h bir d – homojen fonksiyon olsun, $d \neq 1$. Bu taktirde f nin grafiğinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart ya

(a) h fonksiyonu $\det(h_{x_i x_j}) = 0$ homojen Monge-Ampère denklemini sağlar, ya da

(b) uygun sabitlere göre, $f = F \circ h$ lineer olarak homojen olan bir fonksiyondur, (Chen, 2014).

Sonuç 4.1.11. $P(x_1, \dots, x_n) = \gamma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ve F kesin monoton artan fonksiyon olsun. O zaman $F \circ P$ homotetik üretim fonksiyonunun grafiğinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart F ile P nin lineer fonksiyon olmalarıdır, (Chen, 2014).

Sonuç 4.1.12. $Q(x_1, \dots, x_n) = \gamma(\sum_{i=1}^n a_i^\rho x_i^\rho)^{\frac{d}{\rho}}$ bir ACMS üretim fonksiyonu ve F kesin monoton artan fonksiyon olsun. Bu taktirde $f = F \circ Q$ homotetik üretim fonksiyonunun grafiğinin null Gauss-Kronocker eğrilikli olması için gerek ve yeter şart ya $\rho = 1$, ya da uygun sabitlere göre, $f = \gamma(\sum_{i=1}^n x_i^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ dir, burada $a_i, \gamma, \rho \neq 0$, (Chen, 2014).

4.2. Allen Determinantları ile Homotetik Fonksiyonların Sınıflandırılması

$f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir üretim fonksiyonu olsun. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ için, f nin kısmi türevleri

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

ile gösterilsin. (3.3.2) de verilen Allen matrisi burada tanımlanan f üretim fonksiyonu için yeniden yazılırsa

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

olur. Bu matrisin $\det M(f)$ determinanı da yine Allen determinanı adını alır.

Böylece homotetik fonksiyonların Allen determinantlarına ilişkin aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir:

Teorem 4.2.1. $f(\mathbf{x}) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ iki kez diferensiyellenbilir n -faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. f ve h fonksiyonlarının Allen matrisleri, sırasıyla, $M(f)$ ve $M(h)$ olmak üzere

$$\det M(f) = (F')^{n+1} \det M(h)$$

dir, burada $F' = F'(u)$ ve $u = h(x_1, \dots, x_n)$, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: Kabul edelim ki

$$f(\mathbf{x}) = F(h(x_1, \dots, x_n))$$

iki kez diferensiyellenebilir n -faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. Bu eşitlikte kısmi türevler alınırsa,

$$f_{x_i} = h_i F', \quad f_{x_i x_j} = h_{ij} F' + h_i h_j F'' \quad (4.2.2)$$

olur. Burada

$$h_{x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad h_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$$

dir.

Diğer yandan, f homotetik üretim fonksiyonunun (4.2.1) ile verilen Allen matrisinin determinanı için

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{vmatrix} \quad (4.2.3)$$

dir. (4.2.2) ile verilen kısmi türevler, (4.2.3) determinantında yerine yazılırsa

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & h_{x_1} F' & \dots & h_{x_n} F' \\ h_{x_1} F' & h_{x_1 x_1} F' + (h_{x_1})^2 F'' & \dots & h_{x_1 x_n} F' + h_{x_1} h_{x_n} F'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{x_n} F' & h_{x_n x_1} F' + h_{x_1} h_{x_n} F'' & \dots & h_{x_n x_n} F' + (h_{x_n})^2 F'' \end{vmatrix} \quad (4.2.4)$$

olur. (4.2.4) numaralı eşitlikle verilen determinanı hesaplamak için bazı elementer operasyonlar kullanılacaktır. Buna göre, eğer birinci sütunun $-h_{x_1} F''/F'$ katı ikinci sütuna eklenirse

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & h_{x_1} F' & \dots & h_{x_n} F' \\ h_{x_1} F' & h_{x_1 x_1} F' & \dots & h_{x_1 x_n} F' + h_{x_1} h_{x_n} F'' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_n F' & h_{x_n x_1} F' & \dots & h_{x_n x_n} F' + (h_{x_n})^2 F'' \end{vmatrix} \quad (4.2.5)$$

bulunur. (4.2.5) numaralı eşitlikle verilen determinant için, birinci sütunun $-h_{x_2} F''/F'$ katı üçüncü sütuna eklenirse ve bu elementer operasyon işlemi, birinci sütunun $-h_{x_n} F''/F'$ katının $(n + 1)$ -inci sütuna eklenmesine kadar devam ettirilirse

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & h_{x_1} F' & \dots & h_{x_n} F' \\ h_{x_1} F' & h_{x_1 x_1} F' & \dots & h_{x_1 x_n} F' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{x_n} F' & h_{x_n x_1} F' & \dots & h_{x_n x_n} F' \end{vmatrix}$$

$$= (F')^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & h_{x_1} & \dots & h_{x_n} \\ h_{x_1} & h_{x_1 x_1} & \dots & h_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{x_n} & h_{x_n x_1} & \dots & h_{x_n x_n} \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1 in hipotezinde ki F fonksiyonu monoton artan olduğundan, $F' > 0$ dır ve böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.2. $f(x) = F(h(x_1, \dots, x_n))$ iki kez diferensiyellenbilir n -faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. O zaman $M(f)$ Allen matrisinin singüler olup olmaması yalnızca $h(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonuna; özellikle, $h(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonunun $M(h)$ Allen matrisinin singülerliğine bağlıdır, (Aydın ve Ergüt, 2014).

Allen matrisi singüler olan tüm iki-faktörlü homotetik üretim fonksiyonları aşağıdaki teorem ile sınıflandırılmıştır:

Teorem 4.2.3. $f(x) = F(h(u, v))$ iki kez diferensiyellenebilir ve iki-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. O zaman $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart

$$h(u, v) = (c_1 u + c_2 v)^p$$

olmasıdır. Burada c_1, c_2 sıfırdan farklı sabitler ve p , $h(u, v)$ fonksiyonunun homojenlik derecesidir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $f(x) = F(h(u, v))$ iki-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. Teorem 4.2.1 kullanılarak,

$$\det M(f) = (F')^3 \det M(h) \quad (4.2.6)$$

yazılır. $h(u, v)$ fonksiyonunun Allen matrisi

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h_{x_1} & h_{x_2} \\ h_{x_1} & h_{x_1 x_1} & h_{x_1 x_2} \\ h_{x_2} & h_{x_2 x_1} & h_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

ve bu matrisin determinanı

$$\det M(h) = -h_{x_1}^2 h_{x_2 x_2} + 2h_{x_1} h_{x_2} h_{x_1 x_2} - h_{x_2}^2 h_{x_1 x_1} \quad (4.2.7)$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$h_{x_1} = h_u, \quad h_{x_2} = h_v, \quad h_{x_1 x_1} = h_{uu}, \quad h_{x_1 x_2} = h_{uv}, \quad h_{x_2 x_2} = h_{vv}$$

dir. Kabul edelim ki f homotetik üretim fonksiyonunun $M(f)$ Allen matrisi singüler olsun. Bu durumda F monoton artan, yani $F' > 0$, olduğundan (4.2.6) ve (4.2.7) eşitlikleri kullanılarak

$$-h_{x_1}^2 h_{x_2 x_2} + 2h_{x_1} h_{x_2} h_{x_1 x_2} - h_{x_2}^2 h_{x_1 x_1} = 0 \quad (4.2.8)$$

denklemini elde edilir.

Diğer yandan h , bir p –homojen fonksiyon olduğundan, Euler Homojen Fonksiyon Teoremi kullanılarak

$$uh_u + vh_v = ph \quad (4.2.9)$$

yazılır. (4.2.9) denkleminde u ve v ye göre kısmi türevler alınırsa

$$uh_{x_1 x_1} + vh_{x_1 x_2} = (p-1)h_{x_1} \quad (4.2.10)$$

$$uh_{x_1 x_2} + vh_{x_2 x_2} = (p-1)h_{x_2} \quad (4.2.11)$$

elde edilir. (4.2.10) ve (4.2.11) denklemleri için iki hal söz konusudur:

1. Hal: $p = 1$ olsun. Dolayısıyla (4.2.10) ve (4.2.11) denklemlerinden

$$h_{x_1 x_1} = -\frac{v}{u} h_{x_1 x_2} \text{ ve } h_{x_2 x_2} = -\frac{u}{v} h_{x_1 x_2} \quad (4.2.12)$$

bulunur. (4.2.12) ifadeleri (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[h_{x_1}^2 \frac{u}{v} + 2h_{x_1} h_{x_2} + h_{x_2}^2 \frac{v}{u} \right] h_{x_1 x_2} = 0$$

veya

$$\left[h_{x_1}^2 u^2 + 2h_{x_1} h_{x_2} uv + h_{x_2}^2 v^2 \right] h_{x_1 x_2} = 0 \quad (4.2.13)$$

olur. (4.2.13) denkleminde herhangi φ ve ψ fonksiyonları için

$$h_{x_1 x_2} = 0 \Rightarrow h = \varphi(u) + \psi(v)$$

sonucuna varılır. $p = 1$ olarak kabul edildiğinden, yani h lineer olarak homojen olduğundan, sıfırdan farklı c_1, c_2 sabitleri için

$$h(u, v) = c_1 u + c_2 v$$

olmak zorundadır. O halde $p = 1$ için teoremin ispatı tamamlanır.

2. Hal: $p \neq 1$ olsun. Eğer $p \neq 1$ ise, o zaman

$$\hat{F}(y) = F(y^p), \quad \hat{h}(u, v) = (h(u, v))^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonlarını ele alalım. $h(u, v)$, p -homojen fonksiyon olduğundan $\hat{h}(u, v)$ lineer olarak homojen fonksiyon olur, gerçekten herhangi bir pozitif t sabiti için

$$\hat{h}(tu, tv) = (h(tu, tv))^{\frac{1}{p}} = (t^p h(u, v))^{\frac{1}{p}} = t \hat{h}(u, v)$$

dir. Buna göre

$$f(u, v) = F(h(u, v)) = \hat{F}(\hat{h}(u, v))$$

yazılabilir. f nin Allen matrisi singüler olarak kabul edildiğinden ve $\hat{h}$ lineer olarak homojen fonksiyon olduğundan, 1. Hal gereğince sıfırdan farklı c_1, c_2 sabitleri için

$$\hat{h}(u, v) = c_1 u + c_2 v$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece

$$h(u, v) = (c_1 u + c_2 v)^p$$

elde edilir.

Bu da teoremin yeter şartının ispatını tamamlar.

Tersine; kabul edelim ki $h(u, v) = (c_1 u + c_2 v)^p$ olmak üzere $f(x) = F(h(u, v))$

iki-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. Bu durumda Teorem 4.2.1 gereğince

$$\det M(f) = (F')^3 \det M(h)$$

dir ve (4.2.7) eşitliğinden

$$\det M(f) = (F')^3 [-h_{x_1}^2 h_{x_2 x_2} + 2h_{x_1} h_{x_2} h_{x_1 x_2} - h_{x_2}^2 h_{x_1 x_1}] \quad (4.2.14)$$

olur. Ayrıca

$$h(u, v) = (c_1 u + c_2 v)^p$$

fonksiyonunun türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$h_{x_1} = c_1 p (c_1 u + c_2 v)^{p-1}, \quad h_{x_2} = c_2 p (c_1 u + c_2 v)^{p-1},$$

$$h_{x_1 x_2} = c_1 c_2 p (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{p-2},$$

$$h_{x_1 x_1} = (c_1)^2 p (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{p-2}, \quad h_{x_2 x_2} = (c_2)^2 p (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{p-2}.$$

Bu türevler (4.2.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \det M(f) &= (F')^3 \{ -(c_1)^2 (c_2)^2 p^3 (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{3p-4} \\ &\quad + 2(c_1 c_2)^2 p^3 (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{3p-4} - (c_1)^2 (c_2)^2 p^3 (p-1) (c_1 u + c_2 v)^{3p-4} \} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun Allen matrisinin singüler olması, yani gerek şartın ispatını verir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.3. Allen Determinantlı Homotetik Fonksiyonların Üretim Modellerine Uygulamaları ve Diferensiyel Geometrik Sonuçlar

Yardımcı Teorem 4.3.1 $F(u)$, iki kez diferensiyellenebilen ve $F'(u) \neq 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ için $r(\mathbf{x}) = c_1^p x_1^p + \dots + c_n^p x_n^p$ verilsin, burada $p, c_1, \dots, c_n$ sıfırdan farklı sabitler ve $r(\mathbf{x}) \neq 0$ dir. O zaman

$$f(\mathbf{x}) = F(c_1^p x_1^p + \dots + c_n^p x_n^p)$$

bileşke fonksiyonunun Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart r , lineer olarak homojendir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $F(u)$, iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Üstelik

$$f(\mathbf{x}) = F(c_1^p x_1^p + \dots + c_n^p x_n^p) \quad (4.3.1)$$

ile F ve $r(\mathbf{x}) = c_1^p x_1^p + \dots + c_n^p x_n^p$ fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu gösterilsin. Homotetik fonksiyonlar aynı zamanda birer bileşke fonksiyonlar olduklarından, Teorem 4.2.1, (4.3.1) ile verilen bileşke fonksiyonuna uygulanabilir. O zaman

$$\det M(f) = (F')^{n+1} \det M(r) \quad (4.3.2)$$

yazılır.

Kabul edelim ki $f = F \circ r$ bileşke fonksiyonunun $M(f)$ Allen matrisi singüler olsun. Bu durumda, yardımcı teoremin hipotezi altında, r fonksiyonunun Allen matrisinin determinanı

$$0 = \det(M(r)) = \begin{vmatrix} 0 & r_{x_1} & r_{x_2} & \dots & r_{x_n} \\ r_{x_1} & r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_n} \\ r_{x_2} & r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & \dots & r_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{x_n} & r_{x_n x_1} & r_{x_n x_2} & \dots & r_{x_n x_n} \end{vmatrix} \quad (4.3.3)$$

şeklinde dir. $r(\mathbf{x}) = c_1^p x_1^p + \dots + c_n^p x_n^p$ fonksiyonunun kısmi türevleri

$$r_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = p c_i^p x_i^{p-1}, \quad r_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = p(p-1) c_i^p x_i^{p-2}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

dir. Bu kısmi türevler (4.3.3) denklemindeki determinantta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M(r)) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & p c_1^p x_1^{p-1} & p c_2^p x_2^{p-1} & \dots & p c_n^p x_n^{p-1} \\ p c_1^p x_1^{p-1} & p(p-1) c_1^p x_1^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ p c_2^p x_2^{p-1} & 0 & p(p-1) c_2^p x_2^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ p c_n^p x_n^{p-1} & 0 & 0 & \dots & p(p-1) c_n^p x_n^{p-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu determinant birinci satıra göre açılırsa

$$0 = \det(M(r)) = (-1)^3 (p c_1^p x_1^{p-1}) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} pc_1^p x_1^{p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ pc_2^p x_2^{p-1} & p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ pc_3^p x_3^{p-1} & 0 & p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ pc_n^p x_n^{p-1} & 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^4 (pc_2^p x_2^{p-1}) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} pc_1^p x_1^{p-1} & p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ pc_2^p x_2^{p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ pc_3^p x_3^{p-1} & 0 & p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ pc_n^p x_n^{p-1} & 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \end{vmatrix}$$

...

$$+(-1)^{n+2} (pc_n^p x_n^{p-1}) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} pc_1^p x_1^{p-1} & p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ pc_2^p x_2^{p-1} & 0 & p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ pc_{n-1}^p x_{n-1}^{p-1} & 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_{n-1}^p x_{n-1}^{p-2} \\ pc_n^p x_n^{p-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

bulunur. Son eşitlikteki birinci determinant birinci satıra göre, ikinci determinant ikinci satıra göre ve sırasıyla, n-yinci determinant n-yinci satıra göre tekrar açılırsa

$$0 = \det(M(r)) = -(pc_1^p x_1^{p-1})^2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \end{vmatrix}$$

$$-(pc_2^p x_2^{p-1})^2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \end{vmatrix}$$

...

$$-(pc_n^p x_n^{p-1})^2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(p-1)c_{n-1}^p x_{n-1}^{p-2} \end{vmatrix}$$

yazılır. Yukarıdaki determinantların asal köşegen elemanlarının dışındaki elemanlar sıfıra eşit olduğundan, bu determinantlar asal köşegen elemanlarının çarpımına eşittir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 = \det(M(r)) &= -(pc_1^p x_1^{p-1})^2 p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} \cdot p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} \cdot \dots \cdot p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \\ &\quad -(pc_2^p x_2^{p-1})^2 \cdot p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} \cdot p(p-1)c_3^p x_3^{p-2} \cdot \dots \cdot p(p-1)c_n^p x_n^{p-2} \\ &\quad \dots \\ &\quad -(pc_n^p x_n^{p-1})^2 \cdot p(p-1)c_1^p x_1^{p-2} \cdot p(p-1)c_2^p x_2^{p-2} \cdot \dots \cdot p(p-1)c_{n-1}^p x_{n-1}^{p-2} \end{aligned}$$

$$0 = \det(M(r)) = -(p)^{n+1}(p-1)^{n-1} \left(\prod_{j=1}^n c_j^p x_j^{p-2} \right) r(\mathbf{x})$$

elde edilir. Teoremin hipotezi gereğince $p, c_1, \dots, c_n$ sıfırdan farklı sabitler ve $r(\mathbf{x}) \neq 0$ olduğundan $p = 1$ olur ki bu $r(\mathbf{x})$ fonksiyonunun lineer olarak homojen olması demektir.

Tersine; kabul edelim ki $r(\mathbf{x})$ fonksiyonu lineer olarak homojen, yani

$$r(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

olsun. $r(\mathbf{x})$ fonksiyonunun Allen determinanı için,

$$\det(M(r)) = \begin{vmatrix} 0 & r_{x_1} & r_{x_2} & \dots & r_{x_n} \\ r_{x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{x_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

olur ki, bu (4.3.2) eşitliği göz önüne alındığında, f bileşke fonksiyonunun $M(f)$ Allen matrisi singüler olması demektir.

Bu da ispatı tamamlar.

Bir önceki bölümde (3.1.2) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu yeniden ele alınırsa,

$$f(\mathbf{x}) = b(c_1^\rho x_1^\rho + \dots + c_n^\rho x_n^\rho)^{\frac{h}{\rho}}, \quad (4.3.4)$$

yazılır. Burada $b, h > 0, \rho < 1$ ve $c_i, \rho \neq 0$ olan sabitlerdir, (Chen, 2012a).

Yardımcı Teorem 4.3.1 ve (4.3.4) ile verilen genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonunun tanımı gereğince aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.2. Genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonunun Allen matrisinin determinantı singüler olamaz, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $F(u), F'(u) \neq 0$, iki kez diferensiyellenebilen ve

$$F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad F(u) = bu^{\frac{h}{\rho}}, \quad (4.3.5)$$

ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. Burada

$$b, h > 0, \rho \neq 0 \text{ ve } \rho < 1$$

dir. Ayrıca sıfırdan farklı $c_1, \dots, c_n$ sabitleri için $r(\mathbf{x})$ fonksiyonunu

$$r: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad r(\mathbf{x}) = c_1^\rho x_1^\rho + \dots + c_n^\rho x_n^\rho, \quad (4.3.6)$$

olarak seçelim. Eğer

$$f = F \circ r: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

denirse,

$$f(\mathbf{x}) = b(c_1^\rho x_1^\rho + \dots + c_n^\rho x_n^\rho)^{\frac{h}{\rho}}$$

şeklinde elde edilir. Bu bileşke fonksiyonu, bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonudur.

Diğer yandan, Yardımcı Teorem 4.3.1 göz önüne alındığında, eğer $f = F \circ r$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisi singüler ise, o zaman $r(\mathbf{x})$ fonksiyonu lineer olarak

homojendir, yani $\rho = 1$ olmalıdır ki bu genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonunun tanımı gereğince mümkün değildir.

Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.3.3. $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ iki kez diferensiyellenebilen ve $F'(u) \neq 0$ olan bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki q iki kez diferensiyellenebilen, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ve $q(\mathbf{x}) \neq 0$ için,

$$q: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad q(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad (4.3.7)$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $f = F \circ q$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart ya

(a) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, ya da

(b) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lerden en az birinin sıfır olmasıdır, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $F'(u) \neq 0$ olmak üzere, $f = F(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n})$ iki kez diferensiyellenebilen bir bileşke fonksiyon olsun. Teorem 4.2.1 nin f bileşke fonksiyonuna uygulanması ile

$$\det(M(f)) = (F')^{n+1} \det(M(q)) \quad (4.3.8)$$

yazılır. Burada $M(f)$ ile $f = F \circ q$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisi ve $M(q)$ ile de q nun Allen matrisi gösterilmektedir.

Kabul edelim ki $f = F \circ q$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisi singüler olsun. (4.3.8) numaralı eşitlik ve (3.3.2) ile tanımlanan Allen matrisi tanımı gereğince

$$0 = \det(M(q)) = \begin{vmatrix} 0 & q_{x_1} & q_{x_2} & \cdots & q_{x_n} \\ q_{x_1} & q_{x_1 x_1} & q_{x_1 x_2} & \cdots & q_{x_1 x_n} \\ q_{x_2} & q_{x_2 x_1} & q_{x_2 x_2} & \cdots & q_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{x_n} & q_{x_n x_1} & q_{x_n x_2} & \cdots & q_{x_n x_n} \end{vmatrix} \quad (4.3.9)$$

olur. Buna göre (4.3.7) ile verilen fonksiyonun kısmi türevleri, $1 \leq i \neq j \leq n$ için

$$q_{x_i} = \frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} q, \quad q_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{x_i x_j} q, \quad q_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{x_i^2} q$$

şeklinde hesaplanır. Bu kısmi türevler (4.2.9) ile verilen eşitlikteki determinanтта yerine yazılırsa

$$0 = \det(M(q))$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{x_1} q(x) & \frac{\alpha_2}{x_2} q(x) & \dots & \frac{\alpha_n}{x_n} q(x) \\ \frac{\alpha_1}{x_1} q(x) & \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{x_1^2} q(x) & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} q(x) & \dots & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} q(x) \\ \frac{\alpha_2}{x_2} q(x) & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} q(x) & \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)}{x_2^2} q(x) & \dots & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} q(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} q(x) & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} q(x) & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} q(x) & \dots & \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{x_n^2} q(x) \end{vmatrix} \quad (4.3.10)$$

olur.

(4.3.10) de verilen determinantın hesabı için Gauss eliminasyon metodu kullanılacaktır. Buna göre birinci sütunun $-\frac{\alpha_1}{x_1}$ katı ikinci sütuna eklenirse,

$$0 = \det(M(q)) = q(x)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{x_1} & \frac{\alpha_2}{x_2} & \dots & \frac{\alpha_n}{x_n} \\ \frac{\alpha_1}{x_1} & -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} & \dots & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} \\ \frac{\alpha_2}{x_2} & 0 & \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)}{x_2^2} & \dots & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} & \dots & \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{x_n^2} \end{vmatrix} \quad (4.3.11)$$

elde edilir. (4.3.11) de verilen determinant için, birinci sütunun $-\frac{\alpha_2}{x_2}$ katı üçüncü sütuna eklenirse ve bu elementer operasyon işlemine, birinci sütunun $-\frac{\alpha_n}{x_n}$ katının $(n + 1)$ -yinci sütuna eklenmesine kadar devam edilirse

$$0 = \det(M(q)) = q(\mathbf{x})^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{x_1} & \frac{\alpha_2}{x_2} & \dots & \frac{\alpha_n}{x_n} \\ \frac{\alpha_1}{x_1} & -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_2}{x_2} & 0 & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{vmatrix} \quad (4.3.12)$$

bulunur. (4.3.12) deki determinant birinci satıra göre açılırsa

$$0 = \det(M(q)) = q(\mathbf{x})^{n+1} .$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-1)^3 \frac{\alpha_1}{x_1} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_2}{x_2} & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_3}{x_3} & 0 & -\frac{\alpha_3}{x_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{vmatrix} \right. \\ & + (-1)^4 \frac{\alpha_2}{x_2} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} & -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_2}{x_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_3}{x_3} & 0 & -\frac{\alpha_3}{x_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{vmatrix} \\ & \dots \\ & \left. + (-1)^{n+2} \frac{\alpha_n}{x_n} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{x_1} & -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha_2}{x_2} & 0 & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}^2} \\ \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikteki birinci determinanı birinci satıra göre, ikinci determinant ikinci satıra göre ve sırasıyla, n-yinci determinant n-yinci satıra göre tekrar açılırsa

$$0 = \det(M(q)) = q(x)^{n+1} .$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-1)^5 \left(\frac{\alpha_1}{x_1} \right)^2 \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{x_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{vmatrix} \right. \\ & + (-1)^7 \left(\frac{\alpha_2}{x_2} \right)^2 \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{x_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n^2} \end{vmatrix} \\ & \dots \\ & \left. + (-1)^{2n+3} \left(\frac{\alpha_n}{x_n} \right)^2 \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{x_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}^2} \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

yazılır ki, bu determinantların sonucu asal köşegendeki elemanların çarpımına eşittir.

Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M(q)) \\ &= q(x)^{n+1} \cdot \left\{ \left[(-1)^{n+4} \left(\frac{\alpha_1}{x_1} \right)^2 \frac{\alpha_2}{x_2^2} \cdot \frac{\alpha_3}{x_3^2} \dots \frac{\alpha_n}{x_n^2} \right] + \left[(-1)^{n+6} \left(\frac{\alpha_2}{x_2} \right)^2 \frac{\alpha_1}{x_1^2} \cdot \frac{\alpha_3}{x_3^2} \dots \frac{\alpha_n}{x_n^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left[(-1)^{3n+2} \left(\frac{\alpha_2}{x_2} \right)^2 \frac{\alpha_1}{x_1^2} \cdot \frac{\alpha_2}{x_2^2} \dots \frac{\alpha_{n-1}}{x_{n-1}^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik

$$0 = \det(M(q)) = q(\mathbf{x})^{n+1}(-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(x_i)^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (4.3.13)$$

formunda yazılabilir. Hipotez altında, (4.3.13) numaralı denklemden ya $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lerden en az biri sıfır ya da $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ olduğu sonucu çıkarılır. Bu yeter şartın ispatını tamamlar.

Tersine; kabul edelim ki $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lerden en az biri sıfır ya da $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ olsun. Açık bir şekilde (4.3.13) numaralı denklemden $q(\mathbf{x})$ fonksiyonunun Allen determinanı sıfır olur. Dolayısıyla, (4.3.8) numaralı eşitlik gereğince $f = F \circ q$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisi singülerdir. Bu ise gerek şartın ispatı anlamına gelir.

Böylece ispat tamamlanır.

Bir önceki bölümde genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{x}) = bx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (4.3.14)$$

şeklinde ifade edilmişti. Burada b pozitif bir sabit ve α_i ($i = 1, \dots, n$) ler $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı sabitlerdir, (Losonczi, 2010).

Yardımcı Teorem 4.3.3 ve (4.3.14) ile verilen Cobb-Douglas üretim fonksiyonu tanımını kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.4. Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun Allen matrisi singüler olamaz, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $F(u)$, $F'(u) \neq 0$ olmak üzere, iki kez diferensiyellenebilen ve

$$F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad F(u) = bu, \quad b > 0$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sıfırdan farklı ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ şartını sağlayan sabitler olmak üzere, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$q(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $f = F \circ q$ bileşke fonksiyonu

$$f = bx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ile verilen bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olur. Eğer f nin Allen matrisi singüler ise o zaman, Yardımcı Teorem 4.3.3 den, ya $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sabitlerinden en az biri sıfır ya da $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ olmalıdır ki her iki halde Cobb-Douglas üretim fonksiyonu tanımını gereğince mümkün değildir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremlerden elde edilen sonuçların, üretim hiperyüzeylerinin geometrisindeki karşılıkları aşağıdaki gibidir:

Sonuç 4.3.5. $f(u, v) = F(h(u, v))$ iki-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu ve $F'' \neq 0$ olsun. Eğer f nin grafiği flat bir yüzey ise o zaman f nin Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $F'' \neq 0$ olmak üzere, iki-faktörlü $f = F \circ h$ homotetik üretim fonksiyonu verilsin. Eğer f nin grafiği flat bir yüzey ise o zaman, Sonuç 4.1.9 gereğince F kesin monoton artan bir fonksiyon ve $h(u, v)$ bir mükammel ikamedir. Yani sıfırdan farklı c_1 ve c_2 sabitleri için, h fonksiyonu

$$h(u, v) = c_1 u + c_2 v$$

formundadır. Bu ise Teorem 4.2.3 den f nin Allen matrisinin singüler olması demektir.

Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.5 nin tersi, $h(u, v)$ homojen fonksiyonunun homojenlik derecesinin sadece bir olduğu durumda geçerlidir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3.6. $h(u, v)$ lineer olarak homojen bir fonksiyon ve $f(u, v) = F(h(u, v))$, $F'' \neq 0$ olacak şekilde, iki-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. Bu taktirde f nin grafiğinin flat bir yüzey olması için gerek ve yeter şart f nin Allen matrisinin singüler olmasıdır, (Aydın ve Ergüt, 2014).

Teorem 4.3.7. $f(x_1, x_2, x_3) = F(h(x_1, x_2, x_3))$ iki kez diferensiyellenebilir ve üç-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. $\mathbb{E}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında, eğer h nin grafiği flat bir uzaysa o zaman f nin Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

İspat: $f = F \circ h$ üç-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. $\mathbb{E}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında h nin grafiği

$$L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, h(x_1, x_2, x_3))$$

ile tanımlanan bir hiperyüzeye karşılık gelir. Bu hiperyüzeyin Riemannian eğrilik tensörü ve metrik tensörü, Teorem 1.1.4 ün (i) şıkı gereğince

$$g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \frac{h_{x_i x_l} h_{x_j x_k} - h_{x_i x_k} h_{x_j x_l}}{(1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^2} \quad (4.3.15)$$

eşitliğini sağlar, burada $1 \leq i, j, k, l \leq 3$. Eğer h nin grafiği flat bir uzaysa o zaman (4.3.15) den

$$h_{x_i x_l} h_{x_j x_k} = h_{x_i x_k} h_{x_j x_l}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq 3 \quad (4.3.16)$$

olur.

Diğer yandan Teorem 4.2.1, $f = F \circ h$ homotetik fonksiyonu için ele alınırsa

$$\det(M(f)) = (F')^4 \det(M(h)) \quad (4.3.17)$$

yazılır. h fonksiyonunun Allen matrisinin determinanı aşağıdaki gibidir:

$$\det(M(h)) = \begin{vmatrix} 0 & h_{x_1} & h_{x_2} & h_{x_3} \\ h_{x_1} & h_{x_1 x_1} & h_{x_1 x_2} & h_{x_1 x_3} \\ h_{x_2} & h_{x_2 x_1} & h_{x_2 x_2} & h_{x_2 x_3} \\ h_{x_3} & h_{x_3 x_1} & h_{x_3 x_2} & h_{x_3 x_3} \end{vmatrix}.$$

Bu determinant hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \det(M(h)) &= -h_{x_1}^2 (h_{x_2 x_2} h_{x_3 x_3} - h_{x_2 x_3}^2) - h_{x_2}^2 (h_{x_1 x_1} h_{x_3 x_3} - h_{x_1 x_3}^2) \\ &\quad - h_{x_3}^2 (h_{x_1 x_1} h_{x_2 x_2} - h_{x_1 x_2}^2) + 2h_{x_1} h_{x_2} (h_{12} h_{33} - h_{13} h_{23}) \\ &\quad - 2h_{x_1} h_{x_3} (h_{x_1 x_2} h_{x_2 x_3} - h_{x_1 x_3} h_{x_1 x_3}) + 2h_{x_2} h_{x_3} (h_{x_1 x_1} h_{x_2 x_3} - h_{x_1 x_3} h_{x_1 x_2}) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

olduğu görülür. (4.3.16) eşitliği (4.3.18) de göz önüne alınırsa bu ifadedeki tüm parantez içleri sıfır olur. Bu ise (4.3.17) den f nin Allen matrisinin singüler olması demektir.

Böylece ispat tamamlanır.

Ricci 3-flat tüm manifoldlar aynı zamanda flat manifoldlardır. Ayrıca bir Riemann manifoldunun flat olması için ancak ve ancak kesitsel eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıyla mümkündür, (O' Neill, 1983).

Bu durumda aşağıdaki sonuçlar ispatsız olarak verilebilir:

Sonuç 4.3.8. $f(x_1, x_2, x_3) = F(h(x_1, x_2, x_3))$ iki kez diferensiyellenebilir üç-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. $\mathbb{E}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında, eğer h nin grafiği Ricci-flat bir uzaysa o zaman f nin Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

Sonuç 4.3.9. $f(x_1, x_2, x_3) = F(h(x_1, x_2, x_3))$ iki kez diferensiyellenebilir üç-faktörlü bir homotetik üretim fonksiyonu olsun. $\mathbb{E}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında, eğer h ya karşılık gelen hiperyüzey, özdeş olarak sıfır olan kesitsel eğrilik fonksiyonuna sahip bir uzaysa o zaman f nin Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergüt, 2014).

5. BİLEŞKE FONKSİYONLAR İÇİN ALLEN DETERMİNANT FORMÜLÜ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, ilk olarak $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ formunda bileşke fonksiyonlar için elde edilen Hessiyen Determinant Formülü ve bu formülün çeşitli uygulamalarına yer verilecektir. Sonra, bu tür bileşke fonksiyonlar için bir Allen Determinant Formülü ifade ve ispat edilip, bu formül yardımıyla $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonlar için bir sınıflandırma teoremi ifade edilecektir. Bu sınıflandırma teoremine ilişkin ekonomik sonuçlar verildikten sonra, $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ şeklindeki bileşke fonksiyonların grafiklerine karşılık gelen hiperyüzeyler için geometrik sonuçlar ifade edilecektir.

Son olarak

$$f(\mathbf{x}) = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_m(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

formunda genelleştirilmiş bileşke fonksiyonlar tanımlanıp, bu tür bileşke fonksiyonlar Allen matrisleri kullanılarak sınıflandırılacaktır.

5.1. Bileşke Fonksiyonlar İçin Hessiyen Determinant Formülü

Tanım 5.1.1. Bir f fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerinden oluşan $(f_{x_i x_j})$ karesel matrisine Hessiyen matrisi (ya da kısaca Hessiyani) adı verilir ve $H(f)$ ile gösterilir, (Chen, 2012c).

Eğer f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri bir D bölgesi üzerinde sürekli ise, o zaman f nin Hessiyani simetrik bir matristir. Verilen bir $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu için, f nin grafiği, $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayının

$$L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

ile tanımlanan bir hiperyüzeyine karşılık gelir. Böylece bu hiperyüzeyin Gauss-Kronocker eğriliği,

$$G = \frac{H(f)}{(1 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2)^{\frac{n}{2}}}$$

şeklinde tanımlanır, (Chen, 2011, Chen 2012c).

Hessiyan determinantlarının geometriksel bir uygulaması aşağıdaki teoremlerle verilir:

Teorem 5.1.1. $f(x_1, \dots, x_n)$ iki kez diferensiyellenebilen ve n –değişkenli bir fonksiyon olsun. O zaman $H(f)$ Hessiyan matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart f nin grafiğinin null Gauss-Kronocker eğriliğine sahip olmasıdır, (Chen 2012c).

$h_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının üç kez diferensiyellenebilir ve özdeş olarak sıfır olmadığını kabul edelim ($i = 1, \dots, n$). Ayrıca $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilir ve $F'(u) \neq 0$ olsun, öyle ki $I \subset \mathbb{R}$ pozitif uzunluklu bir aralıktır. Buna göre her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)) \quad (5.1.1)$$

bileşke fonksiyonu göz önüne alınırsa bu formdaki bileşke fonksiyonların Hessiyan determinantları aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir:

Teorem 5.1.2. (Hessiyan Determinant Formülü): $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ formundaki bileşke fonksiyonunun $H(f)$ Hessiyan matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det(H(f)) = (uF')^n & \left\{ \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' + \right. \\ & \left. + \left(1 + u \frac{F''}{F'} \right) \sum_{j=1}^n \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' \dots \left(\frac{h'_{j-1}}{h_{j-1}} \right)' \left(\frac{h'_j}{h_j} \right)^2 \left(\frac{h'_{j+1}}{h_{j+1}} \right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' \right\} \end{aligned}$$

ile verilir. Burada, $h'_j = \frac{dh_j}{dx_j}$ ve $u = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ için $F' = F'(u)$, $F'' = F''(u)$ dir, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(b)).

$f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ formundaki bileşke fonksiyonların Hessiyan Determinant Formülünün, genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonları üzerindeki karakterizasyonları aşağıdaki iki teoremle verilebilir:

Teorem 5.1.3. $F(u), F'(u) \neq 0$ olacak şekilde, iki kez diferensiyellenebilir fonksiyon ve f

$$f(\mathbf{x}) = F((x_1 + \zeta_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (x_n + \zeta_n)^{\alpha_n})$$

ile verilen bir bileşke fonksiyon olsun. Buna göre f nin $H(f)$ Hessiyan matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden biri sağlanır:

- (a) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lerden en az biri sıfırdır,
- (b) $x_1, \dots, x_n$ nin uygun ötelemelerine göre, f sabit ölçek getirisine sahip bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(b)).

Teorem 5.1.4. $F(u) = u^r, r \neq 0,1$, şeklinde bir fonksiyon ve f

$$f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

ile verilen bir bileşke fonksiyonu olsun. f nin $H(f)$ Hessiyan matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart ya

- (a) sıfırdan farklı $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$ sabitleri için $f(\mathbf{x}) = F(\gamma e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \times \prod_{j=3}^n f_j(x_j))$ dir, ya da
- (b) $x_1, \dots, x_n$ nin uygun ötelemelerine göre, f sabit ölçek getirili bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(b)).

Hessiyan Determinant Formülü için aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir:

Teorem 5.1.5. $f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonu verilsin. f nin $H(f)$ Hessiyan matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart $h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$ lerden en az birinin, sıfırdan farklı γ_j, α_j sabitleri için, $\gamma_j e^{\alpha_j x_j}$ formunda olmasıdır, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(b)).

Sonuç 5.1.6. $f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilir bir bileşke fonksiyonu olsun. Eğer $h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$ lerden en az ikisi, sıfırdan farklı γ_j, α_j sabitleri

için, $\gamma_j e^{\alpha_j x_j}$ formunda ise, o zaman f nin $H(f)$ Hessiyen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(b)).

5.2. Bileşke Fonksiyonların Allen Determinant Formülü İle Sınıflandırılması

$$f(x) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)) \quad (5.2.1)$$

ile verilen bileşke fonksiyonların Allen determinantlarının hesaplanması için aşağıdaki formül verilebilir:

Teorem 5.2.1. (Allen Determinant Formülü): $f(x) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonunun $M(f)$ Allen matrisinin determinanı

$$\det(M(f)) = -u^{n+1}(F')^{n+1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \dots \left(\frac{h'_{j-1}}{h_{j-1}}\right)' \left(\frac{h'_j}{h_j}\right)^2 \left(\frac{h'_{j+1}}{h_{j+1}}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' \quad (5.2.2)$$

ile verilir, burada $h'_i = \frac{dh_i}{dx_i}$ ve $u = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ için $F' = F'(u)$ dir, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(a)).

İspat: $f(x) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilir bir bileşke fonksiyonu olsun. Bu taktirde, f fonksiyonunun kısmi türevleri, sırasıyla,

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{h'_i}{h_i} u F', \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{h'_i h'_j}{h_i h_j} u (F' + u F''), \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \quad (5.2.3)$$

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{h''_i}{h_i} u F' + \left(\frac{h'_i}{h_i}\right)^2 u^2 F'' \quad (5.2.4)$$

şeklinde hesaplanır.

Diğer yandan verilen bir f fonksiyonunun Allen matrisi

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & f_{x_1} & \dots & f_{x_n} \\ f_{x_1} & f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_n} & f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

şeklinde verilmişti. (5.2.3) ve (5.2.4) ile hesaplanan kısmi türevler f fonksiyonunun Allen matrisinin determinantında yerine yazılırsa

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{h'_1}{h_1} uF' & \frac{h'_2}{h_2} uF' & \dots & \frac{h'_n}{h_n} uF' \\ \frac{h'_1}{h_1} uF' & \frac{h''_1}{h_1} uF' + \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)^2 u^2 F'' & \frac{h'_1 h'_2}{h_1 h_2} u(F' + uF'') & \dots & \frac{h'_1 h'_n}{h_1 h_n} u(F' + uF'') \\ \frac{h'_2}{h_2} uF' & \frac{h'_1 h'_2}{h_1 h_2} u(F' + uF'') & \frac{h''_2}{h_2} uF' + \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)^2 u^2 F'' & \dots & \frac{h'_2 h'_n}{h_2 h_n} u(F' + uF'') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} uF' & \frac{h'_1 h'_n}{h_1 h_n} u(F' + uF'') & \frac{h'_2 h'_n}{h_2 h_n} u(F' + uF'') & \dots & \frac{h''_n}{h_n} uF' + \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2 u^2 F'' \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinanti hesaplamak için Gauss eliminasyon metodunu uygulayacağız. Bunun için birinci sütunun $-\frac{h'_1}{h_1} \left(\frac{F' + uF''}{F'}\right)$ katı ikinci sütuna eklenirse, o zaman

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{h'_1}{h_1} uF' & \frac{h'_2}{h_2} uF' & \dots & \frac{h'_n}{h_n} uF' \\ \frac{h'_1}{h_1} uF' & \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' uF' & \frac{h'_1 h'_2}{h_1 h_2} u(F' + uF'') & \dots & \frac{h'_1 h'_n}{h_1 h_n} u(F' + uF'') \\ \frac{h'_2}{h_2} uF' & 0 & \frac{h''_2}{h_2} uF' + \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)^2 u^2 F'' & \dots & \frac{h'_2 h'_n}{h_2 h_n} u(F' + uF'') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} uF' & 0 & \frac{h'_2 h'_n}{h_2 h_n} u(F' + uF'') & \dots & \frac{h''_n}{h_n} uF' + \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2 u^2 F'' \end{vmatrix}$$

bulunur. Son determinant için birinci sütunun $-\frac{h'_2}{h_2} \left(\frac{F' + uF''}{F'}\right)$ katı üçüncü sütuna eklenirse

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{h'_1}{h_1} uF' & \frac{h'_2}{h_2} uF' & \dots & \frac{h'_n}{h_n} uF' \\ \frac{h'_1}{h_1} uF' & \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' uF' & 0 & \dots & \frac{h'_1 h'_n}{h_1 h_n} u(F' + uF'') \\ \frac{h'_2}{h_2} uF' & 0 & \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' uF' & \dots & \frac{h'_2 h'_n}{h_2 h_n} u(F' + uF'') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} uF' & 0 & 0 & \dots & \frac{h''_n}{h_n} uF' + \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2 u^2 F'' \end{vmatrix}$$

olur ve bu elementer operasyon işlemine, birinci sütunun $-\frac{h'_n}{h_n} \left(\frac{F'+uF''}{F'} \right)$ katının (n+1)-inci sütuna eklenmesine kadar devam edilirse

$$\det(M(f)) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{h'_1}{h_1} uF' & \frac{h'_2}{h_2} uF' & \dots & \frac{h'_n}{h_n} uF' \\ \frac{h'_1}{h_1} uF' & \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' uF' & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_2}{h_2} uF' & 0 & \left(\frac{h'_2}{h_2} \right)' uF' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} uF' & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' uF' \end{vmatrix} \quad (5.2.6)$$

determinantı elde edilir. (5.2.6) ile verilen determinant birinci satıra göre açılırsa

$$\det(M(f)) = u^{n+1} (F')^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-1)^{1+2} \frac{h'_1}{h_1} \begin{vmatrix} \frac{h'_1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_2}{h_2} & \left(\frac{h'_2}{h_2} \right)' & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_3}{h_3} & 0 & \left(\frac{h'_3}{h_3} \right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' \end{vmatrix} \right. \\ & + (-1)^{1+3} \frac{h'_2}{h_2} \begin{vmatrix} \frac{h'_1}{h_1} & \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_2}{h_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_3}{h_3} & 0 & \left(\frac{h'_3}{h_3} \right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_n}{h_n} & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' \end{vmatrix} \\ & \dots \end{aligned}$$

$$+(-1)^{1+n+1} \frac{h'_n}{h_n} \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{h'_1}{h_1} & \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h'_2}{h_2} & 0 & \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{h'_{n-1}}{h_{n-1}} & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_{n-1}}{h_{n-1}}\right)' \\ \frac{h'_n}{h_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\}$$

bulunur. Yukarıdaki determinantlardan ilki birinci satıra göre, ikincisi ikinci satıra göre ve böyle devam edilerek n-yinci determinant n-yinci satıra göre açılırsa

$$\det(M(f)) = u^{n+1} (F')^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-1)^5 \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)^2 \left| \begin{array}{cccc} \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' \end{array} \right| \right. \\ & + (-1)^7 \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)^2 \left| \begin{array}{cccc} \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' \end{array} \right| \\ & \dots \\ & \left. + (-1)^{2n+3} \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2 \left| \begin{array}{cccc} \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{h'_{n-1}}{h_{n-1}}\right)' \end{array} \right| \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu determinantların asal köşegen elemanlarının çarpımına eşit olduğu gerçeğinden hareket edilirse, aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\begin{aligned} \det(M(f)) = & -u^{n+1}(F')^{n+1} \cdot \left\{ \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2} \right)' \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3} \right)' \cdots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' \cdot \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)^2 \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3} \right)' \cdots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)' + \cdots + \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2} \right)' \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3} \right)' \cdots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\det(M(f)) = -u^{n+1}(F')^{n+1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{h'_1}{h_1} \right)' \cdots \left(\frac{h'_{j-1}}{h_{j-1}} \right)' \left(\frac{h'_j}{h_j} \right)^2 \left(\frac{h'_{j+1}}{h_{j+1}} \right)' \cdots \left(\frac{h'_n}{h_n} \right)'$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Allen Determinant formülü kullanılarak, Allen matrisi singüler olan $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ formunda ki bileşke fonksiyonlarını aşağıdaki teorem ile sınıflandırabiliriz:

Teorem 5.2.2. $F(u)$, $F'(u) \neq 0$ olacak şekilde, iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca kabul edelim ki $h_1, \dots, h_n$ ler üç kez diferensiyellenebilir ve sabit olmayan fonksiyonlar olsunlar. O zaman

$$f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

bileşke fonsiyonunun $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart f aşağıdakilerden biridir:

(a) $f(\mathbf{x}) = F(de^{c_1 x_1 + c_2 x_2} \times h_3(x_3) \times \dots \times h_n(x_n))$, burada c_1, c_2, d sıfırdan farklı sabitlerdir,

(b) $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı c_i ve γ sabitleri ve herhangi b_i sabitleri için ($i = 1, \dots, n$), $f(\mathbf{x}) = F(\gamma(x_1 + b_1)^{c_1} \times \dots \times (x_n + b_n)^{c_n})$ şeklindedir, (Aydın ve Ergüt, kabul edildi(a)).

İspat: $f(x) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilir bir bileşke fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $M(f)$ Allen matrisi singülerdir. O zaman Allen Determinant formülünden,

$$\det(M(f)) = -u^{n+1}(F')^{n+1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \dots \left(\frac{h'_{j-1}}{h_{j-1}}\right)' \left(\frac{h'_j}{h_j}\right)^2 \left(\frac{h'_{j+1}}{h_{j+1}}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' = 0 \quad (5.2.7)$$

yazılır. Burada $u = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n) \neq 0$ dır. Dolayısıyla teoremin hipotezi gereğince, (5.2.7) denklemi;

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \dots \left(\frac{h'_{j-1}}{h_{j-1}}\right)' \left(\frac{h'_j}{h_j}\right)^2 \left(\frac{h'_{j+1}}{h_{j+1}}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' = 0 \quad (5.2.8)$$

şeklinde bir diferensiyel denkleme indirgenir. Bu toplam açık bir şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' + \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' + \\ & + \dots + \left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

olur. (5.2.9) denklemi için iki hal söz konusudur:

1. Hal: $\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)', \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)', \dots, \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)'$ ler den az biri sıfır olsun. Genelliği bozmayacağı için,

$$\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' = 0 \quad (5.2.10)$$

olduğunu kabul edebiliriz. Böylece (5.2.9) ve (5.2.10) denklemlerinden

$$\left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' \cdot \left(\frac{h'_3}{h_3}\right)' \dots \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' = 0 \quad (5.2.11)$$

sonucu çıkarılabilir. (5.2.11) denkleminde genelliği bozmayacağı için

$$\left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' = 0 \quad (5.2.12)$$

seçilebilir. (5.2.10) ve (5.2.12) denklemlerinden, $i = 1, 2$ için

$$\left(\frac{h'_i}{h_i}\right)' = 0 \quad (5.2.13)$$

yazılabilir. (5.2.13) denkleminde, sıfırdan farklı c_1 ve c_2 sabitleri için

$$\frac{h'_i}{h_i} = c_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.2.14)$$

veya

$$\frac{dh_i}{h_i} = c_i dx_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.2.15)$$

ve buradan sıfırdan farklı d_1 ve d_2 sabitleri için (5.2.15) denklemini

$$h_1(x_1) = d_1 e^{c_1 x_1}, \quad h_2(x_2) = d_2 e^{c_2 x_2}$$

şeklinde elde edilir.

Bu da teoremin ilk şikkının ispatını verir.

2. Hal: $\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)', \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)', \dots, \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)' \neq 0$. Dolayısıyla (5.2.9) eşitliğinin her iki tarafı $\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)' \cdot \left(\frac{h'_2}{h_2}\right)' \cdot \dots \cdot \left(\frac{h'_n}{h_n}\right)'$ çarpımına bölünürse

$$\frac{\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)^2}{\left(\frac{h'_1}{h_1}\right)'} + \frac{\left(\frac{h'_2}{h_2}\right)^2}{\left(\frac{h'_2}{h_2}\right)'} + \dots + \frac{\left(\frac{h'_n}{h_n}\right)^2}{\left(\frac{h'_n}{h_n}\right)'} = 0 \quad (5.2.16)$$

bulunur. (5.2.16) denklemini,

$$y_i(x_i) = \frac{h'_i}{h_i}(x_i) \quad (5.2.17)$$

notasyonu ile yeniden

$$\frac{(y_1)^2}{(y_1)'} + \frac{(y_2)^2}{(y_2)'} + \dots + \frac{(y_n)^2}{(y_n)'} = 0 \quad (5.2.18)$$

şeklinde düzenleyelim. (5.2.18) eşitliğinin her iki tarafının x_i değişkenine göre türevi alınır

$$\frac{2y_i(y_i')^2 - (y_i)^2 y_i''}{(y_i')^2} = 0 \quad (5.2.19)$$

bulunur. (5.2.19) eşitliğinden

$$y_i y_i'' - 2(y_i')^2 = 0 \quad (5.2.20)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Buradan

$$\frac{y_i''}{y_i'} - 2 \frac{y_i'}{y_i} = 0$$

$$(\ln(y_i'))' - 2(\ln(y_i))' = 0$$

$$\ln(y_i') - \ln(y_i^2) = \ln c_i$$

$$\frac{y_i'}{y_i^2} = c_i$$

bulunur ve her iki tarafın integrali alınır

$$y_i(x_i) = \frac{h_i'}{h_i}(x_i) = \frac{c_i}{x_i + b_i} \quad (5.2.21)$$

olur. Burada $c_1, \dots, c_n$ ler sıfırdan farklı ve $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ sağlayan sabitler, b_i ler ise herhangi sabitlerdir. (5.2.21) ifadesinde

$$\frac{dh_i}{h_i} = c_i \frac{dx_i}{x_i + b_i} \quad (5.2.22)$$

$$h_i = \mu_i (x_i + b_i)^{c_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.2.23)$$

elde edilir. Burada μ_i ler sıfırdan farklı sabitlerdir. Bu ise yeter şartın ispatını verir.

Tersine; eğer $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonu (a) veya (b) formunda verilirse, (5.2.9) ve (5.2.16) denklemleri kullanılarak, $M(f)$ Allen matrisini singüler olacağı kolayca görülebilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.2 den homotetiksel hiperyüzeyler için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.2.3. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında bir (M^n, f) homotetiksel hiperyüzeyi verilsin. f nin $M(f)$ Allen matrisi singülerdir gerek ve yeter şart (M^n, f) aşağıdakilerden biri ile parametrize edilir:

(a)

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \times \prod_{j=3}^n h_j(x_j) \right)$$

dir, burada $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$ sıfırdan farklı sabitler ve $h_3, \dots, h_n$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

(b) $x_1, \dots, x_n$ nin uygun ötelemelerine göre,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \right)$$

dir, burada γ, α_j sıfırdan farklı sabitler ve $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ dir, (Aydın ve Ergüt, incelemede(b)).

Sonuç 5.2.4. $\mathbb{E}^{n+1}$, $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayında (M^n, f) bir homotetiksel hiperyüzey olsun öyle ki f , bir açık $D \subset \mathbb{E}^n$ bölgesi üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı ve $h_j(x_j) \neq \gamma_j e^{\alpha_j x_j}$, $j = 1, \dots, n$, olsun. Eğer f nin $M(f)$ Allen matrisi singüler ise o zaman (M^n, f) nin Gauss-Kronocker eğriliği daima sıfırdan farklıdır, (Aydın ve Ergüt, incelemede(b)).

Uyarı 5.2.1. Teorem 5.2.3 ile null Gauss-Kronocker eğrilikli homotetiksel hiperyüzeyler için elde edilen teorem oldukça benzerlik göstermektedir, öyle ki bu teoremlerin ilk seçenekleri aynıdır. Fakat ikinci seçenekler arasında önemli bir fark vardır. Bu fark; birinde α_j sabitlerinin toplamı sıfır iken diğerinde birdir. Bu farkın ortaya çıkardığı değişimler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(i) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ olduğunda, karşılık gelen $f(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ fonksiyonu sabit ölçek getirisine sahip bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Ayrıca bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen hiperyüzey null Gauss-Kronocker eğriliğine sahiptir.

(ii) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ olduğunda, karşılık gelen $f(\mathbf{x}) = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ fonksiyon bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu değildir ve bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen hiperyüzeyin Gauss-Kronocker eğriliği daima sıfırdan farklıdır.

5.3. Allen Determinantlı Bileşke Fonksiyonların Üretim Modellerine Uygulamaları ve Bazı Geometrik Sonuçlar

Tanım 5.3.1. (Mükemmel ikame) Ekonomilerde, birbiriyle tamamen ikame edilen ürünlere mükemmel ikame adı verilir ve sabit marjinal ikame oranına sahip olarak kabul edilirler. Matematiksel olarak, bir üretim fonksiyonu, sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

formunda ifade edilir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ dir, (Chen, 2013).

Mükemmel ikame üretim fonksiyonları için Teorem 5.2.2 nin bir sonucu aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 5.3.1. $h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$ üç kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bir bileşke fonksiyonu olsun. Eğer f bir mükemmel ikame ise bu taktirde $M(f)$ Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergut, kabul edildi(a)).

İspat:

$$f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)) \quad (5.3.1)$$

fonksiyonunun iki kez diferensiyellenebilir bir bileşke fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer f bir mükemmel ikame ise o zaman sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad (5.3.2)$$

olur. (5.3.1) ve (5.3.2) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olacağından

$$\ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

veya

$$\ln(h_1(x_1)) + \dots + \ln(h_n(x_n)) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \quad (5.3.3)$$

yazılır. (5.3.3) den iki fonksiyonun eşitliği tanımı gereğince

$$\ln(h_i(x_i)) = a_ix_i$$

ya da

$$h_i(x_i) = e^{a_ix_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.3.4)$$

elde edilir. Bu ise Teorem 5.2.2 nin a) şikkının özel bir halidir. Dolayısıyla Teorem 5.2.2 gereğince $f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisi singülerdir.

Bu ispatı tamamlar.

Uyarı 5.3.1. Sonuç 5.3.1 in tersi her zaman doğru değildir. Yani

$$f(\mathbf{x}) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

bileşke fonksiyonunun Allen matrisi singüler ise her zaman f bir mükemmel ikame olmayabilir.

Bileşke fonksiyonların (5.1.3) de verilen Cobb-Douglas üretim fonksiyonlarına dair aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.3.2. $h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$ üç kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $i = 1, \dots, n$ için $h'_i(x_i) \neq c_ie^{d_ix_i}$ olsun. $F(u) = u$ şeklinde özdeşlik fonksiyonu olarak seçilsin. Buna göre $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ bileşke fonksiyonunun Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart, uygun ötelemelere göre, f bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur, (Aydın ve Ergut, kabul edildi(a)).

İspat: $f(\mathbf{x}) = F(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilir bir bileşke fonksiyonu olsun. $M(f)$ Allen matrisinin singüler olduğunu kabul edelim. Bu taktirde Teorem 5.2.2 gereğince, uygun ötelemelere göre,

$$f(\mathbf{x}) = F(\gamma x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}) = \gamma x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$$

olur. Burada $c_1, \dots, c_n$ sıfırdan farklı sabitler ve $\gamma > 0$ dir. Bu ise f bileşke fonksiyonunun bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olması demektir.

Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 5.3.2. Teorem 4.3.4 de bir genelleştirilmiş Cobb Douglas üretim fonksiyonunun Allen matrisinin singüler olamayacağı ifade edilmişti. Diğer yandan Teorem 5.2.2 nin ikinci şıkkının hipotezinde

$$c_1 + \dots + c_n = 0$$

dir. O halde, Teorem 5.3.2 de bahsedilen bileşke fonksiyonu biçim olarak bir Cobb-Douglas fonksiyonuna karşılık gelmektedir, ama ekonomiksel perspektifte bir Cobb-Douglas fonksiyonu olamaz.

Teorem 5.3.3. En az üç faktörlü bir h –homojen üretim fonksiyonu bir mükemmel ikame olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen üretim hiperyüzeyi flattır, (Chen, 2011).

Bileşke fonksiyonlarla ilgili bazı geometriksel uygulamalar aşağıdaki gibi verilebilir:

Sonuç 5.3.4. $h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)$, $n \geq 3$, üç kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$f(x) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

bir h –homojen bileşke fonksiyonu olsun. Eğer f nin grafiği flat bir uzaysa, o zaman $M(f)$ Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergut, kabul edildi(a)).

İspat: $f(x) = \ln(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ iki kez diferensiyellenebilir h –homojen bileşke fonksiyonu olsun. Eğer f ye karşılık gelen üretim hiperyüzeyi flat bir uzaysa, Teorem 5.3.3 den, f , h –homojen bileşke fonksiyonu bir mükemmel ikamedir. Bu ise Sonuç 5.3.1 den f nin Allen matrisinin singüler olması demektir.

Uyarı 5.3.3. Sonuç 5.3.4, f nin grafiğinin null kesitsel eğrilik fonksiyonuna sahip olması durumunda da geçerlidir.

Ricci-flat 3-manifoldlar aynı zamanda flat manifoldlardır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.3.5. $h_1(x_1), h_2(x_2), h_3(x_3)$, üç kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$f(x) = \ln(h_1(x_1) \times h_2(x_2) \times h_3(x_3))$$

bir h –homojen bileşke fonksiyonu olsun. Eğer f nin grafiği Ricci-flat bir uzaysa, o zaman $M(f)$ Allen matrisi singülerdir, (Aydın ve Ergut, kabul edildi(a)).

5.4. Genelleştirilmiş Bileşke Fonksiyonlar

$I_j \subset \mathbb{R}$ pozitif uzunluklu bir aralık olmak üzere $F_j: I_j \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, fonksiyonları, iki kez diferensiyellenebilir ve

$$F'_1(u_1), \dots, F'_m(u_m) \neq 0$$

olsun. Ayrıca

$$h_1, \dots, h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları iki kez diferensiyellenebilir ve özdeş olarak sıfırdan farklı olacak şekilde seçilsin. Böylece her $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_m(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)) \quad (5.4.1)$$

bileşke fonksiyonu ele alınabilir. Burada $F_1 \circ F_2 \dots \circ F_m$ ile $F_1, F_2, \dots, F_m$ fonksiyonlarının art arda bileşkeleri gösterilmiştir.

(5.4.1) ile verilen fonksiyonu, bir *genelleştirilmiş bileşke fonksiyon* olarak adlandıracamız.

(5.4.1) ile verilen genelleştirilmiş bileşke fonksiyonun, $i = 1, \dots, n$ için, x_i değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{h'_i}{h_i} u_m \prod_{j=1}^m F'_j, \quad (5.4.2)$$

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{h'_i}{h_i} \frac{h'_j}{h_j} u_m \left(\prod_{j=1}^m F'_j + u_m \left(\prod_{j=1}^m F'_j \right)' \right), \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \quad (5.4.3)$$

ve

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{h_i''}{h_i} u_m \prod_{j=1}^m F_j' + \left(\frac{h_i'}{h_i} \right)^2 (u_m)^2 \left(\prod_{j=1}^m F_j' \right)' \quad (5.4.4)$$

elde edilir. Burada $u_m = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ dir.

Teorem 5.4.1 $f(x) = F_1 \circ \dots \circ F_m(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$ genelleştirilmiş bileşke fonksiyonunun $M(f)$ Allen matrisinin determinanı

$$\det(M(f)) = -(u_m)^{n+1} \left(\prod_{j=1}^m F_j' \right)^{n+1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_1'}{h_1} \right)' \dots \left(\frac{h_{j-1}'}{h_{j-1}} \right)' \left(\frac{h_j'}{h_j} \right)^2 \left(\frac{h_{j+1}'}{h_{j+1}} \right)' \dots \left(\frac{h_n'}{h_n} \right)'$$

şeklinde, burada $h_i' = \frac{dh_i}{dx_i}$, $u_m = h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n)$ ve $F_j' = F_j'(u_j)$, $(j = 1, \dots, m)$, dir.

İspat: (5.4.2)-(5.4.4) eşitlikleriyle; (5.2.3) ve (5.2.4) numaralı eşitlikleri karşılaştırılırsa (5.2.3) ve (5.2.4) de F' nin yerine $\prod_{j=1}^m F_j'$ ve F'' nin yerine de $(\prod_{j=1}^m F_j')'$ ifadesi yazılmıştır. Geriye kalan ifadeler tamamiyle aynıdır. Böylece genelleştirilmiş bileşke fonksiyonların Allen determinant formülünü hesaplamak için yapılacak olan tüm işlemler, (5.2.2) ile verilen Allen Determinant Formülünün ispatındaki işlemler ile aynı olacaktır.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.4.2. $F_1, \dots, F_m$ fonksiyonları, $F_1'(u_1), \dots, F_m'(u_m) \neq 0$ olacak şekilde iki kez diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca kabul edelim ki $h_1, \dots, h_n$ ler üç kez diferensiyellenebilir ve sabit olmayan fonksiyonlardır. O zaman

$$f(x) = F_1 \circ \dots \circ F_m(h_1(x_1) \times \dots \times h_n(x_n))$$

genelleştirilmiş bileşke fonsiyonunun $M(f)$ Allen matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart f aşağıdakilerden biridir:

(a)

$$f(x) = F_1 \circ \dots \circ F_m(de^{c_1 x_1 + c_2 x_2} \times h_3(x_3) \times \dots \times h_n(x_n)),$$

burada c_1, c_2, d sıfırdan farklı sabitlerdir,

(b) $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $c_1, \dots, c_n$ ve herhangi $\gamma, b_1, \dots, b_n$ sabitleri için

$$f(\mathbf{x}) = F_1 \circ \dots \circ F_m(\gamma(x_1 + b_1)^{c_1} \times \dots \times (x_n + b_n)^{c_n})$$

ile verilen bir genelleştirilmiş bileşke fonksiyonudur.

İspat: Teorem 5.2.2 nin ispatında, F' nin yerine $\prod_{j=1}^m F'_j$ ifadesi alınırsa, ifade edilen teoremin ispatı Teorem 5.2.2 nin ki ile tamamiyle aynı olacaktır.

6. SONUÇ

Üretim fonksiyonlarının uygulama sahaları, sadece mikroiktisat ve makroiktisat ile sınırlı değildir. Biyoloji, eğitim ve mühendislik alanlarında da karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple üretim fonksiyonlarının genel özellikleri ayrıntılı şekilde ikinci bölümde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, sabit ikame esneklikli ve Allen determinantlı quasi-toplam üretim fonksiyonlarına dair bulunan sonuçlar, yeniden ele alınmıştır.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısımlarından ilkidir. Bu bölümde, homotetik fonksiyonlar çalışılmıştır. Bu tür fonksiyonlar, Allen determinantları kullanılarak, sınıflandırılmıştır. Homotetik fonksiyonlar yardımıyla, Cobb-Douglas ve ACMS üretim modellerinin Allen matrislerinin, daima regüler oldukları elde edilmiştir. Üstelik homotetik fonksiyonlara karşılık gelen hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisine ilişkin, çeşitli sonuçlar bulunmuştur.

Bu çalışmanın bir diğer orijinal bölümü beşinci bölümdür. Bu bölümde bileşke fonksiyonlara dair bir Allen Determinant Formülü elde edilmiştir. Bu formül yardımıyla, bileşke fonksiyonlar; Allen matrislerinin singüler olup olmamasına göre tam olarak sınıflandırılmışlardır. Ayrıca bileşke fonksiyonlar kullanılarak, genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim modeline ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde genelleştirilmiş bileşke fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu tanım kullanılarak, Hessiyen determinantları için bir formül elde edildikten sonra, bu formüle göre önemli sonuçlar bulunabilir. Yine genelleştirilmiş bileşke fonksiyonlar yardımıyla, genelleştirilmiş quasi-toplam ve genelleştirilmiş homotetik fonksiyonlar tanımlanıp, bu tez de bulunan sonuçlar bu tür genelleştirilmiş fonksiyonlara uygulanabilir.

Ayrıca, quasi-toplam, homotetik, Cobb-Douglas ve ACMS üretim fonksiyonlarının dışında çeşitli üretim modelleri de bulunmaktadır. Bu üretim modellerinin Allen determinantları incelenerek çeşitli sınıflandırmalar yapılabilir. Bu sınıflandırmalar yapılırken, üretim fonksiyonlarına karşılık gelen hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisi dikkate alınarak, önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Aczél, J. and Maksa, G.,** 1996. Solution rectangular $m \times n$ generalized bisymmetry equation of the problem of consistent aggregation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **203**, 104-126.
- Allen, R.G. and Hicks, J.R.,** 1934. A reconsideration of theory of value, Pt. II, *Economica*, **1**, 196-219.
- Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S. and Solow, R.M.,** 1961. Capital-Labor substitution and economic efficiency, *The Review of Economics and Statistics*, **43**, 225-250.
- Aydın, M.E. and Ergut, M.,** 2014. Homothetic functions with Allen's perspective and its geometric applications, *Kragujevac Journal of Mathematics* **38(1)**, 185–194.
- Aydın, M.E. and Ergut, M.,** a. Composite functions with Allen determinants and their applications to production models in economics, *Tamkang Journal of Mathematics*, kabul edildi.
- Aydın, M.E. and Ergut, M.,** b. Hessian determinants of composite functions with applications for production functions in economics, *Kragujevac Journal of Mathematics*, kabul edildi.
- Aydın, M.E. and Ergut, M.,** a. Classification of homothetical hypersurfaces and its applications to production functions in economics, incelemede.
- Aydın, M.E. and Ergut, M.,** b. Homothetical hypersurfaces in Euclidean spaces from the point of view production theory in economics, incelemede.
- Aydın, M.E. and Mihai, A.,** Classification of quasi-sum production functions with Allen determinants, *Filomat*, kabul edildi.
- Aydın, M.E. and Mihai, A.,** Classification of translation hypersurfaces of Euclidean spaces with applications to production models in microeconomics, incelemede.
- Bulmuş, İ.,** 2008. Mikroisktisat, Gazi Üniversitesi, Ankara.

- Chen, B.-Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, M. Dekker, New York.
- Chen, B.-Y.**, 2011. On some geometric properties of h-homogeneous production functions in microeconomics, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **35**, 3 343-357.
- Chen, B.-Y.**, 2012a. On some geometric properties of quasi-sum production models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **392**, 192-199.
- Chen, B.-Y.**, 2012b. Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution, *Tamkang Journal of Mathematics*, **43**, 321-328.
- Chen, B.-Y.**, 2012c. An explicit formula of Hessian determinants of composite functions and its applications, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **36**, 1 27-39.
- Chen, B.-Y.**, 2012d. Classification of homothetic functions with constant elasticity of substitution and its geometric applications, *International Electronic Journal of Geometry*, **5**, 2 67-78.
- Chen, B.-Y.**, 2012e. Geometry of quasi-sum production functions with constant elasticity substitution property, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, **5**, 2 90-97.
- Chen, B.-Y.**, 2012f. A note on homogeneous production models, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **36**, 1 41-43.
- Chen, B.-Y. and Vilcu, G.E.**, 2013. Geometric classifications of homogeneous production functions, *Applied Mathematics and Computation*, **225**, 345-351.
- Cobb, C.W. and Douglas, P.H.**, 1928. A theory of production, *American Economic Review*, **18**, 139-165.
- Constantinescu, O. and Crasmareanu, M.**, 2011. A new Tzitzeica Hypersurface and cubic Finslerian metrics of Berwald type, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, **16**, 2 27-34.
- Dillen, F., Verstraelen, L. and Zafindratafa, G.**, 1991. A generalization of the translation surfaces of Scherk. Differential Geometry in honor of Radu Rosca, K.U.L., 107–109.

- Douglas, P.H.**, 1976. The Cobb-Douglas production function once again: Its history, its testing and some new empirical values, *Journal of Political Economy*, **84**, 903-916.
- do Carmo, P.M.**, 1992. Riemannian Geometry, Birkhäuser, Boston.
- Goemans, W. and Van de Woestyne, I.**, 2011. Translation and homothetical lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean space, *Kuwait Journal of Science and Engineering*, **38**, 2A 35-42.
- Hiwarekar, A.P.**, 2009. Extension of Euler's theorem on homogeneous function to higher derivatives, *Bulletin of the Marathwada Mathematical Society*, **10**, 2 16-19.
- Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.
- Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1998. Diferensiyel Geometri 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Ioan, C.A.**, 2007. Applications of the space differential geometry at the study of production functions, *Euro Economica*, **18**, 30-38.
- Jiu, L. and Sun, H.**, 2007. On minimal homothetical hypersurfaces, *Colloquium Mathematicum*, **109**, 239-249.
- Losonczi, L.**, 2010. Production functions having the CES property, *Acta Mathematica Academy Paedagog Nyházi*, N.S., **1**, 113-125.
- Lima, B.P., Santos, N.L., Silva, J.P. and Sousa, P.**, 2014. Translation hypersurface with constant S_r -curvature in the Euclidean space, arXiv:1402.2362v1 [math.DG].
- Linderberg, P.O., Eriksson, E. A. and Mattsson, L.-G.**, 2002. Homothetic functions revisited, *Economic Theory*, **19**, 417-427.
- Mihai, A. and Sandu, M.**, 2012. The use of the h-homogeneous production function in microeconomics, Modelling Challenges, *Revista Economica*, **1**, 465-472.

- Mihai, A. and Olteanu, A.,** 2013. Applied geometry in microeconomics. Recent developments, *Land Reclamation, Earth Observation & Surveying, Environmental Engineering*, **II**, 159-166.
- Mishra, S.K.,** 2010. A brief history of production functions, *The IUP Journal of Managerial Economics*, **8**, 4 6-34.
- O' Neill, B.,** 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Press.
- Parasız, İ. and Özer, M.,** 2005. Bugünkü İktisadın Temelleri, Aktüel Yayınları.
- Sezer, M. and Daşcıoğlu A.,** 2010. Diferensiyel Denklemler I Teori ve Problem Çözümleri, Dora Yayınları.
- Sabuncuoğlu, A.,** 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.
- Sabuncuoğlu, A.,** 2009. Analitik Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.
- Sabuncuoğlu, A.,** 2011. Lineer Cebir, Nobel Yayın Dağıtım.
- Saglam, D. and Sabuncuoglu A,** 2008. Geodesic curves of the minimal homothetical hypersurfaces in the semi-Euclidean space, *Differential Geometry and Dynamical Systems*, **10**, 275-287.
- Saglam, D. and Sabuncuoglu A,** 2011. Minimal homothetical lightlike (degenerate) hypersurfaces of semi-Euclidean spaces, *Kuwait Journal of Science and Engineering*, **38 (1A)**, 1-14.
- Seo, K.,** 2013. Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms. *Osaka Journal of Mathematics*, **50**, 631–641.
- Süray, S.,** 1978. Teori ve Problemlerle İleri Analiz, Güven Kitap Evi Yayınları.
- Şahin, B.,** 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayın Dağıtım.
- Uluatam, Ö.,** 1998. Makroiktisat, Savaş Yayınları.
- Uzawa, S.K.,** 1962. Production functions with constant elasticities of substitution, *Review of Economic Studies*, **29**, 4 291-299.

- Van de Woestyne, I.**, 1995. Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-Euclidean space, *Results in Mathematics* **27**, 333–342.
- Vilcu, G.E.**, 2011. A geometric perspective on generalized Cobb-Douglas production functions, *Applied Mathematics Letters*, **24**, 777-783.
- Vilcu, A.D. and Vilcu, G.E.**, 2011. On some geometric properties of generalized CES production functions, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 124-129.
- Vilcu, A.D. and Vilcu, G.E.**, 2013. On homogenous production functions with proportional marginal rate of substitution, *Mathematical problems in Engineering*, doi.10.1155.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2004 yılında, Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2008 yılında, Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında, tezli yüksek lisansa başladım. 2009 yılı kasım ayında, Fen Edebiyat Fakültesi araştırma görevliliği kadrosunu kazandım. 2010 yılında, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladım. 2013-2014 yılları arasında, Romanya'nın Technical University of Civil Engineering Bucharest' de, YÖK doktora araştırma bursuyla, bir yıl boyunca ziyaretçi araştırmacı olarak bulundum. Halen Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.