

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA KOMPAKT HİPERYÜZEYLER

Tuğba ŞENPINAR

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa:27

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Kapalı hiperyüzeyler için bazı integral formülleri araştırıldı.

Üçüncü bölümde; çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde; Öklid uzayında Kompakt hiperyüzeyler üzerinde bazı integral formülleri ifade ve ispat edildi.

Anahtar Kelimeler: Kompakt hiperyüzeyler, İntegral Formülleri

ABSTRACT

M.S.Thesis

COMPACT HYPERSURFACES IN EUCLIDEAN SPACE

Tugba SENPINAR

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2007, Page:27

This thesis is arranged in three chapters.

In first chapter, some basic concepts and theorems are given.

In second chapter, some integral formulas for closed hypersurfaces are investigated.

The third chapter is the original part of this study. In this section some integral formulas and proofs are given on compact hypersurfaces in Euclidean Space.

Keywords: Compact Hypersurfaces, Integral Formulas

BİRİNCİ BÖLÜM

1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzay V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$(A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$(A_2) \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır, [1].

Tanım 1.2. V , sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun.

$$\Psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa Ψ ye V üstünde iç çarpım denir.

(i) Ψ bilineer formdur; $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall x_1, y_1, x_2, y_2, x, y \in V$ ise;

$$\Psi(a_1 x_1 + a_2 x_2, y) = a_1 \Psi(x_1, y) + a_2 \Psi(x_2, y)$$

$$\Psi(x, a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 \Psi(x, y_1) + a_2 \Psi(x, y_2)$$

(ii) Ψ simetriktir;

$$\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$$

(iii) Ψ pozitif tanımlıdır;

$$\Psi(x, x) \geq 0, \forall x \in V$$

$$\Psi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Psi(x, y) = \langle x, y \rangle$ olup $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ile gösterilir, [2].

Tanım 1.3. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzay V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak;

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımıyla A da uzaklık ve aç› gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzay›nda yeni bir ad olarak Öklid uzay› ad›n› alır, [1].

Tanım 1.4. E^n de sıral› bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ lisine R^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör n lisine R^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çat›s› veya Öklid çat›s› denir, [1].

Tanım 1.5. X bir cümle olsun. X in altcümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlarsa X üzerinde bir topoloji ad›n› alır, [1].

$$(\tau_1) X, \emptyset \in \tau,$$

$$(\tau_2) \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau,$$

$$(\tau_3) \forall A_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \cup A_i \in \tau.$$

Tanım 1.6. Bir X cümlesi ve üzerindeki τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir, [1].

Tanım 1.7. X bir topolojik uzay olsun. X in p ve q gibi farklı noktalar› için X de sıras› ile p ve q noktalar›n› içine alan A_p ve A_q aç›k altcümleleri

$$A_p \cap A_q \neq \emptyset$$

olacak şekilde bulunabilirse X topolojik uzay›na bir Hausdorff uzay› denir, [1].

Tanım 1.8. M bir topolojik uzay olsun. Elemanlar› M içinde n -boyutlu koordinat sistemleri olan bir A kümesi aşağıdaki iki önermeyi doğrularsa A kümesine M topolojik uzay› üstünde n -boyutlu bir atlas ad› verilir.

(A₁) M nin her bir noktası A kümesinin en az bir elemanın tanım bölgesinde bulunur.

(A₂) A içindeki her iki koordinat sistemi düzgün olarak örtüşür, [3].

Tanım 1.9. A, M topolojik uzay üzerinde bir atlas olsun. A nın elemanlarıyla düzgün örtüşen her koordinat sistemi yine A nın elemanları oluyorsa A ya M üstünde bir tam atlas denir, [3].

Tanım 1.10. M , Hausdorff uzay üstünde bir tam atlas varsa, bu tam atlasla birlikte M ye bir düzgün (diferensiyellenebilir) manifold denir, [1].

Tanım 1.11. M bir topolojik uzay olsun. M aşağıdaki önermeleri doğrularsa M ye n -boyutlu topolojik manifold denir.

(M₁) M bir Hausdorff uzaydır,

(M₂) M nin her bir açık altcümlesi E^n e veya E^n in bir açık altcümlesine homomorftur,

(M₃) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [1].

Tanım 1.12. M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanın uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye Riemann manifoldu denir, [1].

Tanım 1.13. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(p, \vec{v})$ ikilisine A afin uzayının p noktasındaki tanjant vektörü denir, [1].

Tanım 1.14. $\{T_A(p), \oplus, R, +, \cdot, \Theta\}$ vektör uzayına A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(p)$ ile gösterilir, [1].

Tanım 1.15. $V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü;

$$X : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_V(p)$$

biçiminde bir fonksiyondur. Öyle ki;

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur, [1].

$$\textbf{Tanım 1.16. } grad : C(E^n, IR) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$f \rightarrow grad(f)$$

öyle ki E^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ bir koordinat sistemi olmak üzere

$$grad(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı $grad$ fonksiyonuna E^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre gradient fonksiyonu denir ve ∇ ile gösterilir, [1].

$$\textbf{Tanım 1.17. } div : \chi(E^n) \rightarrow C(E^n, IR)$$

$$X \rightarrow div(X)$$

öyle ki;

$$X = \sum_{i=1}^n f \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere;

$$div(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

veya

$$div(x) = \langle \nabla, x \rangle$$

şeklinde tanımlı div fonksiyonuna E^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre divergens fonksiyonu denir, [1].

Tanım 1.18. E^n de $(n-1)$ boyutlu bir yüzey, E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir. Öyle ki;

$$M = \{ x \in U \subset E^n \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \text{ bir açık altcümle} \}$$

$$x \rightarrow f(x) = c$$

$$\nabla f \mid p \neq 0, \forall p \in M$$

biçiminde tanımlanır. E^n de $n=2$ ise düzlemsel eğri, $n=3$ ise yüzey, $n>3$ ise hiperyüzey denir, [1].

Tanım 1.19. E^n in hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ nın ortonormal bazı N ise, N ye M nin birim normal vektör alanı denir, [1].

Tanım 1.20. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Wiengarten dönüşümü denir, [1].

Tanım 1.21. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{iz} S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir, [1].

Tanım 1.22. M , n -boyutlu bir manifold ve M üzerinde C^∞ sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$f \rightarrow \Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme M nin Laplace operatörü denir, [4].

Tanım 1.23. E^n de M bir $(n-1)$ altmanifold ve P noktasında M nin tanjant uzay $T_M(P)$ olduğuna göre M üzerinde Weingarten dönüşümü; M nin birim normal vektör alan N verilmek üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S : T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlanır. S ile tanımlanan ikinci temel form M üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak $\forall X, Y \in T_M(P)$ için,

$$II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle N$$

şeklinde tanımlanır, [1].

Tanım 1.24. E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. E^n in Riemann konneksiyonu D ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü ve (1.1) denkleminde de M üzerinde de Gauss denklemi denir. Ayrıca

$$\overline{D}_Y (S(X) - \overline{D}_X (S(Y) + S([X, Y]))) = 0$$

denkleminde Codazzi–Mainardi denklemi denir, [1].

Tanım 1.25. Eğer M altmanifoldunun ikinci temel formu sıfıra eşitse M ye total geodeziktir denir, [5].

$$\textbf{Tanım 1.26. } R : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y, Z) = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z$$

$$= (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]})Z$$

$$= ([D_X, D_Y] - D_{[X, Y]})Z$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde üçüncü mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına E^n in eğrilik tensör alanı ve bunun bir $p \in E^n$ noktasındaki değeri olan $R(X_p Y_p)Z_p$ tensörüne de E^n in p noktasındaki eğrilik tensörü veya kısaca E^n in p deki eğriliği denir, [1].

Tanım 1.27. M , n -boyutlu bir Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olsun. $T_M(p)$ nin ortonormal bazu $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$\text{Ric} : T_M(p) \times T_M(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow \text{Ric}(u, v)$$

dönüşümü

$$\text{Ric}(u, v) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, u)v, e_i \rangle$$

şeklinde tanımlanırsa, M nin p noktasındaki Ricci eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Bu Ricci eğrilik tensörünün $p \in M$ noktasındaki değerine M nin Ricci eğriliği denir, [1].

Tanım 1.28. M , n -boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere $T_M(X)$ tanjant uzayındaki $\forall P$ düzlemi için $K(P)$ kesit eğriliği; $\{X_1, X_2\}$, P nin ortonormal bazu olmak üzere,

$$K(P) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle$$

şeklinde tanımlanır, [5].

Tanım 1.29. M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ için $T_M(p)$ nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. S , M nin Ricci eğrilik tensör alanı olmak üzere,

$$S = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlı S değerine M nin skalar eğriliği denir. (1.2) eşitliğinde

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle$$

ifadesi göz önüne alınırsa,

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle$$

şeklindedir, [6].

Tanım 1.30. M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve $f: M \rightarrow \bar{M}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobian matrisi $\forall P \in M$ noktasında regüler ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir immersiyon (daldırma) denir. Bir başka ifade ile $\text{rank } f = \text{boy } M$ ise f bir immersiyondur, [1].

$$\textbf{Tanım 1.31.} \quad S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\} \subset E^{n+1} \text{ ile tanımlı}$$

ifadeye n -boyutlu küre denir, [1].

Tanım 1.32. E^3 içinde yönlü bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow \rho(P) = \langle P, N(P) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna M yüzeyinin destek fonksiyonu denir. $\rho(P)$ sayısı $T_P(M)$ düzleminin başlangıç noktasına uzaklığıdır [7].

İKİNCİ BÖLÜM

2. İNTEGRAL FORMÜLLERİ

2.1. Giriş

V^n , E^{n+1} Öklid uzayına daldırılmış ikinci mertebeden diferensiyellenebilir yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $x_1, \dots, x_n$, V^n in bir P noktasındaki karakteristik eğrilikleri olsun. V^n in bir P noktasındaki r-inci temel simetrik fonksiyonu olarak tanımlanan, r-inci ortalama eğriliği; $x_1, \dots, x_n$ nin terimlerin sayısına bölünerek elde edilir. Yani,

$$\binom{n}{r} M_r = \sum x_1 \dots x_r, \quad r = 1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

dir. $M_0=1$ olarak tanımlanır.

$p(p)$, E^{n+1} in belirli bir O noktasından, V^n in P noktasındaki tanjant hiperyüzeyine olan uzaklığı gösterebilir ve dA da P noktasında V^n in alan elementi olsun. n-1 boyutlu V^{n-1} kapalı sınıra sahip yönlendirilebilir V^n hiperyüzeyi için

$$\int_{V^n} (M_{r-1} p + M_r) dA, \quad r = 0, \dots, n-1$$

integrallerini, V^{n-1} sınırı üzerinden integraller olarak ifade edilebileceğini W.Sherrer [8] de n=2 için elde edilen bu ilişkileri, kapalı hiperyüzeyler ile ilgili olan aşağıdaki üç teoremi ispat etmek için kullandı.

Teorem 2.1.1. V^n , E^{n+1} Öklid uzayına daldırılmış ikinci mertebeden diferensiyellenebilir kapalı bir hiperyüzey olsun. Buna göre

$$\int_{V^n} (M_{r+1} p dA + \int_{V^n} M_r dA = 0, \quad r = 0, \dots, n-1 \quad (2.1.2)$$

dir. Bu formüller konveks hiperyüzeyler için n=2 halinde H.Minkowski tarafından elde edildi ve T.Kuboto tarafından n için genelleştirildi [9].

Teorem 2.1.2. V^n , E^{n+1} Öklid uzayına daldırılmış ikinci mertebeden diferensiyellenebilir kapalı bir hiperyüzey olsun. E^{n+1} de bir O noktasına ve $M_s > 0$ şartı

altında, ya $p \leq -M_{s-1} / M_s$ ya da $p \geq -M_{s-1} / M_s$ özelliklerini V^n in tüm noktalar için sağlayan bir s tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Buna göre V^n bir hiperküredir.

V^n hiperyüzeyinin konveks olması durumunda $s=1$ dir ve son şarttaki eşitlik sağlanır. Bu teorem $n=2$ için K.P.Grotemeyer [10] tarafından elde edildi ve W.Süss [11] tarafından n için genelleştirildi. Grotemeyer ve Süss aynı zamanda $(-p)^s = 1/M_s$ şartını sağlayan konveks hiperyüzeylerin bir hiperküre olduğunu gösterdiler. Bu sonuç teorem 2.1.1 ve Süss' ün metodu kullanılarak hiperyüzeylerin daha genel sınıflar içinde elde edilebilir.

Teorem 2.1.3. V^n , E^{n+1} Öklid uzayına daldırılmış ikinci mertebeden diferensiyellenebilir kapalı bir hiperyüzey olsun. E^{n+1} de bir O noktasın ve V^n in tüm noktalarının da p fonksiyonu ile aynı işarete sahip olduğunu, $i=1, \dots, s$ için $M_i > 0$ ve M_s sabit olacak şekilde, bir s tamsayısının ($1 \leq s \leq n$) var olduğunu kabul edelim. Bu durumda V^n bir hiperküredir.

$n=2$ hali için Teorem 2.1.3; sabit Gauss eğrilikli kapalı hiperyüzeylerin küre olduğu ve eğer yüzeyin aynı tarafındaki tüm tanjant düzlemler üzerinde bir nokta mevcutsa, sabit ortalama eğrilikli bir kapalı yüzeyin bir küreye karşılık gelmesi gerektiği bilinen sonucuna dönüşür. Keyfi boyuta sahip konveks hiperyüzeler için teorem W.Süss' ün yaklaşımıyla ispatlanır. Teoremin ispatı da Süss' ün ispatına benzerdir.

2.2. Kapalı Hiperyüzeyler için Bazı Temel Kavramlar

Bu bölümde temel kaynak olarak [12] Hsiung, C.C, nin makalesi kullanıldı.

E^{n+1} Öklid uzayında O noktası orijin olmak kaydıyla bir ortogonal $O\eta_1, \dots, O\eta_{n+1}$ çatışın göz önüne alalım. Bu ortogonal çatıya göre E^{n+1} de n -tane $A_1, \dots, A_n$ vektörlerinin çarpımın A_{n+1} vektörü olarak tanımlayalım ve aşağıdaki şartları sağlayan bu vektörü $A_1 \times \dots \times A_n$ ile gösterelim

- (a) A_{n+1} vektörü, $A_1, \dots, A_n$ vektörleri ile belirlenen n -boyutlu uzaya normaldir.
- (b) A_{n+1} vektörünün büyüklüğü, köşeleri $A_1, \dots, A_n$ vektörleri olan paralelyüzün hacmine eşittir.
- (c) $O, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ ve $O\eta_1, \dots, O\eta_{n+1}$ çatılar aynı yönlendirmeye sahiptir.

Kabul edelim ki, $\sigma; 1, \dots, n$ sayısının permütasyon fonksiyonu olsun, buna göre;

$$A_{\sigma(1)} \times \dots \times A_{\sigma(n)} = (\text{sgn } \sigma) A_1 \times \dots \times A_n \quad (2.2.1)$$

dir. Burada $\text{sgn } \sigma$, permütasyonun tek veya çift olmasına bağlı olarak +1 veya -1 e eşittir.

$i_1, \dots, i_{n+1}$ orjinden $\eta_1, \dots, \eta_{n+1}$ e yönüne tanımlı birim vektörler ve A_α^j da $j=1, \dots, n+1$ olmak üzere $O\eta_1, \dots, O\eta_{n+1}$ çatışma göre $\alpha=1, \dots, n$ için A_α vektörünün bileşenleridir. A_α ve A_β vektörlerinin skalar ve $A_1, \dots, A_n$ n.vektörünün vektörel çarpımları da sırasıyla

$$A_\alpha \cdot A_\beta = \sum_i A_\alpha^i \cdot A_\beta^i \quad (2.2.2)$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = (-1)^n \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{n+1} \\ A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^{n+1} \end{vmatrix} \quad (2.2.3)$$

dir. Eğer A_α^j lar $x^1, \dots, x^n$ n değişkenin diferensiyellenebilir fonksiyonları ise (2.2.3) denkleminde ve determinantların türevinden

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \sum_{\beta=1}^n (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{\beta-1} \times \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \times A_{\beta+1} \times \dots \times A_n) \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Şimdi E^{n+1} e daldırılmış ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir V^n hiperyüzeyini ele alalım. $(Y_1, \dots, Y_{n+1})$ E^n deki bir p noktasının $O\eta_1, \dots, O\eta_{n+1}$ ortogonal çatışma göre koordinatları olsun. Böylece V^n aşağıdaki parametrik denklemle

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i=1, \dots, n+1 \quad (2.2.5)$$

yada

$$Y = F(x^1, \dots, x^n) \quad (2.2.6)$$

vektör denklemiyle verilebilir. Burada y^i ve f^i sırasıyla Y ve F vektörlerinin bileşenleridir; $x^1, \dots, x^n$ parametreleri de n boyutlu reel sayı uzayının basit irtibatlı bir D aralığında değer alırlar, $f^i(x^1, \dots, x^n)$ lerde ikinci sınıf ve D nin her noktasında rank n

olan $\left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \right\|$ Jakobian matrisine sahiptirler.

Eğer $\alpha=1,\dots,n$ için $\left\|\frac{\partial y}{\partial x^\alpha}\right\|$ vektörünü Y_α ile gösterirsek V^n in bir P noktasındaki

birinci temel formu

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = Y_\alpha Y_\beta \quad (2.2.7)$$

olur. Burada $\|g_{\alpha\beta}\|$ matrisi pozitif tanımlıdır, yani

$$g = |g_{\alpha\beta}| > 0 \quad (2.2.8)$$

determinantı sıfırdan büyüktür.

N , V^n in bir P noktasındaki birim normal vektörü ve N_α da $\left|\frac{\partial N}{\partial x^\alpha}\right|$ vektörüdür, yani

$$N_\alpha = -b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} Y_\gamma \quad (2.2.9)$$

dır. Burada

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -N_\alpha Y_\beta \quad (2.2.10)$$

olup V^n nin II. temel formunun bileşenleridir. Burada g_γ^α Kronecker deltası olmak üzere

$$g^{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (2.2.11)$$

dır. V^n in p noktasındaki $x_1, \dots, x_n$ n-karakteristik eğrilikleri,

$$|b_{\alpha\beta} - x g_{\alpha\beta}| = 0 \quad (2.2.12)$$

determinantının kökleridir. (2.1.1) ve (2.2.12) eşitliklerinden

$$M_n = b/g, \quad nM_1 = b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad nM_{n-1} = g_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}/g \quad (2.2.13)$$

yazılabilir. Burada

$$b = |b_{\alpha\beta}| \quad (2.2.14)$$

ve $B^{\alpha\beta}$ da b de $b_{\alpha\beta}$ nın kofaktörüdür. V^n in P noktasındaki alan elementi

$$dA = g^{1/2} dx^1 \dots dx^n \quad (2.2.15)$$

ile verilir. Kabul edelim ki $PY_1, \dots, Y_n N$ ve $O\eta_1, \dots, O\eta_{n+1}$ aynı yönlendirmeye sahip

olmak üzere N birim normal vektörünün yönünde olsun. Böylece (2.2.3) ve (2.2.15)

denklemlerinden

$$g^{1/2}N = Y_1x....xY_n \quad (2.2.16)$$

ve

$$| Y_1,.,Y_n, N | = g^{1/2} \quad (2.2.17)$$

elde edilir.

2.3. $r = 0$ için (2.1.2) Formülünün İspatı

$Y_1x....xY_{n-1}xNxY_{\alpha+1}x....xY_n$ vektörü N normal vektörüne dik ve

$$Y_1x....xY_{n-1}xNxY_{\alpha+1}x....xY_n = a^{\alpha\beta}Y_\beta \quad (2.3.1)$$

dir.

(2.3.1) denkleminin her iki yanın Y_α vektörü ile skaler çarparsak ve (2.2.1), (2.2.3), (2.2.7), (2.2.16) denklemlerini kullanırsak

$$a^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = -g^{1/2} \delta_\gamma^\alpha, \quad \alpha, \gamma = 1, ..., n \quad (2.3.2)$$

elde ederiz.

$$(2.3.2) \text{ denklemini belirli bir } \alpha \text{ ve } a^{\alpha\beta} \text{ değeri için çözüp sonucunu (2.3.1)}$$

denklemiyle birlikte düşünersek

$$Y_1x....xY_{\alpha-1}xNxY_{\alpha+1}x....xY_n = -g^{1/2} g^{\alpha\beta} Y_\beta \quad (2.3.3)$$

yazabiliriz. (2.2.4), (2.2.9), (2.2.13) ve (2.2.16) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (Y_1x....xY_{\alpha-1}xNxY_{\alpha+1}x....xY_n) &= \sum_{\alpha=1}^n (Y_1x....xY_{\alpha-1}xN_\alpha xY_{\alpha+1}x....xY_n) \\ &= -ng^{1/2} M_1N \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

olduğu görülebilir. Böylece (2.3.3) ve (2.3.4) denklemlerinden

$$ng^{1/2} M_1N = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{1/2} g^{\alpha\beta} Y_\beta) \quad (2.3.5)$$

bulunur.

(2.3.5) eşitliğinin her iki yanının Y ile skaler çarpımını alalım. Böylece (2.2.7) ve (2.2.11) denklemlerinin bir sonucu olarak

$$nM_1pg^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g^{1/2} g^{\alpha\beta} \eta_\beta) - ng^{1/2} \quad (2.3.6)$$

elde ederiz. Burada

$$P=Y.N, \quad \eta_\alpha=Y.Y_\alpha \quad (2.3.7)$$

dir. V^{n-1} kapalı sınırağına sahip bir V^n hiperyüzeyini göz önüne alalım ve E^{n+1} Öklid uzayına daldırılmış, ikinci mertebeden diferensiyellenebilir olduğunu kabul edelim. (2.3.6) denkleminin V^n üzerinden $x^1, \dots, x^n$ e göre integralini alarak ve (2.3.6) denkleminin sağ tarafının ilk terimine Green teoremini uygulayarak

$$\int_{V^n} M_1 p dA + A n^{-1} \int_{V^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} g^{1/2} g^{\alpha\beta} \eta_\beta dx^1 \dots dx^{\alpha-1} dx^{\alpha+1} \dots dx^n \quad (2.3.8)$$

elde ederiz.

Özel olarak V^n kapalı ve yönlendirilebilir olduğundan (2.3.8) denkleminin sağ tarafındaki integral ayrılır ve böylece (2.1.2) denklemi $r = 0$ için sağlanır.

2.4. (2.1.2) Formülünün Genel Bir r için İspatı

Bu bölümde (2.3.8) formülünü genel bir r için benzer şekilde türetmek için kullanacağız. Bunun için ilk olarak E^{n+1} de V^{n-1} kapalı sınırağına sahip ve V^n e paralel olan $\overline{V^n}$ hiperyüzeyini ele alalım. Bu durum da $\overline{V^n}$ ve V^n aynı normale sahip olur. t reel bir parametre olmak üzere $\overline{V^n}$ in vektör denkleminin

$$\overline{Y} = Y - tN \quad (2.4.1)$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. (2.4.1) denkleminde $N.N=1$ ve $N.\overline{Y}_\alpha = 0$ olmasından

$$\left(\frac{dt}{dx^\alpha} \right) = 0 \text{ yani } t \text{ nin sabit olduğu sonucuna varırız. (2.2.7), (2.2.9), (2.2.10)}$$

denklemlerinden ve bunların $\overline{V^n}$ için benzerlerini kullanarak $\overline{V^n}$ in birinci ve ikinci temel formlarının bileşenlerini

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + 2b_{\alpha\beta}t + b_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma} g^{\rho\gamma} t^2 = (g_{\alpha\rho} + b_{\alpha\rho}t)(\delta_\beta^\rho + b_{\beta\alpha}g^{\rho\alpha}t), \quad (2.4.2)$$

$$\overline{b}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\rho}b_{\beta\gamma} g^{\rho\gamma} t = b_{\alpha\rho}(\delta_\beta^\rho + b_{\beta\alpha}g^{\rho\alpha}t) \quad (2.4.3)$$

olarak elde ederiz. Burada basit hesaplamalar yardımıyla $\overline{V^n}$ ve b (2.2.8) ve (2.2.14) denklemlerine benzer şekilde tanımlanarak,

$$\bar{b} = b\Delta, \quad (2.4.4)$$

$$\bar{g} = g\Delta^2, \quad (2.4.5)$$

$$|\bar{R} \cdot \bar{b}_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}| = |(\bar{R} - t)b_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}| \Delta \quad (2.4.6)$$

olarak bulunur. $\bar{x}_i$, $\bar{V}^n$ nin karakteristik eğrilikleri olmak üzere

$$\Delta = |\delta_\beta^\rho + b_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} t|, \quad (2.4.7)$$

$$\bar{R}_i = 1/\bar{X}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4.8)$$

bulunur. (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6) ve (2.2.12), (2.2.13), (2.2.15) denklemlerinin bir sonucu olarak, $\bar{V}^n$ inkilere benzer formüllerle $d\bar{A}$, $\bar{g}$ nin alan elementi ve $R_i=1/X_i$ olmak üzere;

$$\bar{M}_n \cdot d\bar{A} = M_n dA \quad (2.4.9)$$

ve

$$\bar{R}_i = R_i + t \quad (2.4.10)$$

bulunur. $\bar{g}^{\alpha\beta}$, $\bar{g}$ de $\bar{g}$ ile bölünmüş $\bar{g}_{\alpha\beta}$ nın kofaktörü olsun, böylece (2.3.7), (2.4.1), (2.4.2) ve (2.4.7) eşitliklerden

$$\eta_\beta = \eta_\beta + t b_{\beta\delta} g^{\delta\gamma} \eta_\gamma = \eta_\gamma (\delta_\beta^\gamma + t b_{\beta\delta} g^{\delta\gamma}) \quad (2.4.11)$$

ve

$$\bar{g} \cdot \bar{g}^{\alpha\beta} \cdot \bar{\eta}_\beta = \Phi^\alpha \Delta \quad (2.4.12)$$

elde ederiz. Burada $\bar{\eta}_\beta = \bar{Y} \cdot \bar{Y}_\beta$

$$\Phi^\alpha = \begin{vmatrix} g_{11} + tb_{11} & g_{12} + tb_{12} & \dots & g_{1n} + tb_{1n} \\ g_{\alpha-1,1} + tb_{\alpha-1,1} & g_{\alpha-1,2} + tb_{\alpha-1,2} & \dots & g_{\alpha-1,n} + tb_{\alpha-1,n} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \\ g_{\alpha+1,1} + tb_{\alpha+1,1} & g_{\alpha+1,2} + tb_{\alpha+1,2} & \dots & g_{\alpha+1,n} + tb_{\alpha+1,n} \\ g_{n1} + tb_{n1} & g_{n2} + tb_{n2} & \dots & g_{nn} + tb_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.4.13)$$

dır ve

$$\Phi^\alpha = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \Theta_r^\alpha t^r \quad (2.4.14)$$

$$\Theta^{\alpha}_{0} = g g^{\alpha\beta} \eta_{\beta} \quad (2.4.15)$$

olduğu açıktır. (2.1.1) ve (2.4.8) denklemleri yardımıyla $\overline{g}$ için (2.3.8) eşitliği

$\overline{P} = \overline{Y}N = p-t$ ve $\overline{V}^{n-1}$, $\overline{V}^n$ nin sınırı olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \int_{V^n} \overline{P} (\Sigma \overline{R}_1 \cdot \overline{R}_2 \dots \overline{R}_{n-1}) + \int_{V^n} \overline{R}_1 \cdot \overline{R}_2 \dots \overline{R}_n \cdot \overline{M}_n \cdot d\overline{A} \\ = \int_{V^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} g^{-1/2} g^{-\alpha\beta} \overline{\eta}_{\beta} dx^1 \dots dx^{\alpha-1} dx^{\alpha+1} \dots dx^n \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

(2.4.5), (2.4.9), (2.4.10), (2.4.12) ve (2.4.14) eşitliklerini (2.4.16) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \int_{V^n} (p-t) \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) (\Sigma R_1 \dots R_i) t^{n-i-1} M_n dA + n \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \sum_{i=0}^n (\Sigma R_1 \dots R_i) t^{n-i} M_n dA \\ = \int_{V^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{\alpha-1} \binom{n-1}{r} g^{-1/2} \Theta_r^{\alpha} t^r dx^1 \dots dx^{\alpha-1} dx^{\alpha+1} \dots dx^n \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

elde ederiz ki bu da t de bir özdeşliktir. Buradan (2.4.17) denkleminin her iki yanındaki t^r nin katsayılarını eşitleyerek ve (2.1.1) denklemini kullanarak (2.3.8) formülünün aşağıdaki genelleştirilmiş şeklini elde ederiz. Yani

$$\int_{V^n} M_{r+1} P dA + \int_{V^n} M_r dA = n^{-1} \int_{V^{n-1}} \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} g^{-1/2} \int_{V^n} dx^1 \dots dx^{\alpha-1} dx^{\alpha+1} \dots dx^n \quad (2.4.18)$$

dir.

Bu formül V^n in kapalı ve yönlendirilebilir olması durumunda (2.1.2) formülünden elde edilir.

2.5. Teorem 2.1.2 ve 2.1.3 ün İspatları

Teorem 2.1.2 yi ispatlamak için $M_s > 0$ olduğundan $p \leq -M_{s-1} / M_s$ ve $p \geq -M_{s-1} / M_s$ önermelerinin sırasıyla $M_s P + M_{s-1} \leq 0$ ve $M_s P + M_{s-1} \geq 0$ eşitsizliklerine denk olduğunu göz önüne alalım.

$R = s-1$ için (2.1.2) den

$$\int_{V^n} (M_s P + M_{s-1}) dA = 0$$

yazılabilir. Böylece iki önerme de $p = -M_{s-1} / M_s$ olduğunu gösterir. $r = s$ için bu sonucu (2.1.2) de yerine yazarsak

$$\int_{V^n} (M_s^2 - M_{s-1}M_{s+1}) | M_s dA = 0 \quad (2.5.1)$$

elde ederiz.

$\binom{n}{i} M_i, x_1, \dots, x_n$ reel sayıların i -inci temel simetrik fonksiyonları olduğundan

$$M_i^2 - M_{i-1}M_{i+1} \geq 0 \quad i=1, \dots, n-1 \quad (2.5.2)$$

elde ederiz ve i nin herhangi bir değeri için (2.5.2) deki eşitlikten $x_1 = \dots = x_n$ elde edilir [13]. (2.5.1) den V^n nin her noktasında $x_1 = \dots = x_n$ olduğu söylenebilir. Bilindiği gibi bu sonuçta V^n nin bir hiperküre olduğunu gösterir. Böylece Teorem 2.1.2 ispatlanmış olur. Eğer $M_{i-1} > 0$ ve $M_i > 0$ ise (2.5.2) eşitsizliği

$$M_i | M_i \geq M_{i+1} / M_i \quad (2.5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.1.3 ün $s < n$ özelliğindeki bazı değerler için sağlandığını kabul edelim. Böylece (2.5.3) eşitsizliği $i=1, \dots, s$ için sağlanır. Özel olarak

$$M_1/M_0 \geq M_{s+1}/M_s \text{ veya } M_1.M_s \geq M_{s+1} \quad (2.5.4)$$

dir ve eşitsizlikten $x_1 = \dots = x_n$ elde edilir. $M_1 > 0$ olduğundan ve V^n nin her noktasında p nin aynı işarete sahip olduğu kabul edildiğinden $r=0$ için (2.1.2) formülünden $p < 0$ olduğu söylenebilir.

(2.5.4) eşitsizliğinin her iki yanına P yi ekleyelim. V^n üzerinden integral alalım ve (2.1.2) formülünü $r=0$ ve $r=s$ için uygulayalım, böylece M_s sabit olmak üzere

$$-M_s \int_{V^n} dA = M_s \int_{V^n} M_1 P dA \leq \int_{V^n} M_{s+1} P dA = -M_s \int_{V^n} dA$$

elde ederiz. Sonuç olarak (2.5.4) denklemini V^n nin tüm noktaları için sağlanmalıdır ve $s < n$ için Teorem 2.1.3 sağlanır. Teorem 2.1.3 ün geriye kalan hali için yani $s = n$ için önerme

$$M_i > 0, i=1, \dots, n \quad (2.5.5)$$

olduğunu gösterir. (2.5.2) ve (2.5.5) eşitliklerinden

$$M_1 \geq M_2^{1/2} \geq \dots \geq M_{n-1}^{1/(n-1)} \geq M_n^{1/n} \quad (2.5.6)$$

elde edilir. Şimdi c pozitif bir sabit olmak üzere $M_n=c^n$ alalım. Böylece bir taraftan $r=n-1$ için (2.1.2) formülü ve (2.5.6) eşitsizliğinden

$$\int_{V^n} M_n PdA = - \int_{V^n} M_{n-1} dA \leq -c^{n-1} \int_{V^n} dA \quad (2.5.7)$$

ve diğer taraftan da $p < 0$ (2.5.6) eşitsizliği ve $r = 0$ için (2.1.2) formülünden

$$\int_{V^n} M_n PdA = c^{n-1} \int_{V^n} M_n^{1/n} PdA \geq c^{n-1} \int_{V^n} M_1 PdA = -c^{n-1} \int_{V^n} dA$$

bulunur. Böylece $M_n^{1/n} = M_1$ ve tekrar V^n nin tüm noktalar için $x_1 = \dots = x_n = c$ elde edilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. HİPERYÜZEYLER

3.1.Giriş

λ_1 , $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında c sabit eğrilikli $S^n(c)$ küresinin Δ n -n diferensiyellenebilir bir fonksiyonu ve $S^n(c)$ nin skalar eğriliği S olmak üzere $S = \lambda_1(n-1)$ bağıntısını sağladığı bilinir. Bu bölümde; tersine, “ $\mathbb{R}^{n+1}$ in pozitif Ricci eğrilikli kompakt, bağlantılı, daldırılmış M hiperyüzeyinin, laplasyanın sıfırdan farklı λ_1 birinci karakteristik değeri $S = \lambda_1(n-1)$ bağıntısını sağlıyorsa M , bazı özel c sabitleri için $S^n(c)$ ye izometrik midir?” sorusunun cevabı araştırıldı.

Diferensiyel geometri açısından önemli olan bu sorunun cevabı S.Deshmukh [14] tarafından aşağıdaki teoremle ifade ve ispat edildi.

Teorem 3.1.1. M , $\mathbb{R}^{n+1}$ de pozitif Ricci eğrilikli, kompakt, irtibatlı bir hiperyüzey olsun. Eğer M üzerinde, Δ Laplace operatörünün sıfırdan farklı birinci karakteristik değeri λ_1 ve M nin skalar eğriliği S olmak üzere; $S \leq \lambda_1(n-1)$ bağıntısı sağlanırsa M , $S^n(c)$ küresine izometriktir [14].

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki temel kavramlar verilebilir.

3.2. Öklid Uzayında Kompakt Hiperyüzeyler

Bu bölümde temel kaynak olarak [14] Deshmukh, S., nin makalesi kullanıldı.

$\mathbb{R}^{n+1}$ in kompakt daldırılmış bir hiperyüzeyi M ve $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ diferensiyellenebilir bir immersiyon olsun. Ayrıca M nin şekil operatörü A ve birim normal vektör alanı N olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)N, \quad \overline{\nabla}_X N = -AX, \quad X, Y \in \chi(M) \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\mathbb{R}^{n+1}$ ve $\chi(M)$ in Riemann konneksiyonları; h , A n -n ikinci temel formudur ve $h(X, Y) = \langle A_X, Y \rangle$ şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan A şekil operatörü $(\nabla A)(X, Y) = \nabla_X AY - A(\nabla_X Y)$

olmak üzere aşağıdaki Codazzi denklemini sağlar, yani

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X) \quad (3.2.2)$$

A şekil operatörü simetrik olduğundan ve (3.2.2) eşitliğini sağladığından $\alpha = (1/n) \int_M \text{grad } \alpha \cdot \text{grad } \alpha$ ortalama eğriliği

$$\text{grad } \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\nabla A)(e_i, e_i) \quad (3.2.3)$$

ve

$$X(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\nabla A)(e_i, e_i), X \rangle, \quad X \in \chi(M)$$

şartlarını sağlar. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$ M üzerinde bir lokal ortonormal bazdır. (3.2.1) eşitliğinden, M nin Ricci ve skalar eğriliği sırasıyla

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{grad}(A_X, Y) - g(A_X, A_Y), \quad X, Y \in \chi(M) \quad (3.2.4)$$

ve

$$S = n^2 \alpha^2 - \|A\|^2 \quad (3.2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \frac{1}{2} \|\psi\|^2$ şeklinde seçilirse ve $\psi, \mathbb{R}^{n+1}$ de M nin yer vektörü olmak üzere

$$\Psi = \text{grad } f + \rho N \quad (3.2.6)$$

elde ederiz. Burada $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\rho = \langle \Psi, N \rangle$ şeklinde tanımlı M nin destek fonksiyonudur. Böylece (3.2.1) denkleminde

$$\nabla_X \text{grad } f = X + \rho A_X, \quad X(\rho) = -g(A(X), \text{grad } f), \quad X \in \chi(M) \quad (3.2.7)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.7) denkleminin ilk kısmında $\Delta f = n(1 + \rho\alpha)$ bulunur. Bu ifadenin M üzerinden integrali alınrsa

$$\int_M (1 + \rho\alpha) dV = 0 \quad (3.2.8)$$

elde edilir ki bu da Minkowski integral formülü olarak bilinir. r-inci dereceden ortalama eğrilik; H_r ,

$$\det(I + tA) = H_0 + \binom{n}{1} H_1 t + \binom{n}{2} H_2 t^2 + \dots + \binom{n}{n} H_n t^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.2.9)$$

denklemleriyle tanımlanır. Burada H_1 ortalama eğriliği, H_2 bir sabitten büyük olan skalar eğriliği, H_n ise Gauss-Kronecker eğriliğidir. Hsiung, R^{n+1} de bir M kompakt hiperyüzeyi için (3.2.8) deki Minkowski formülünü içeren

$$\int_M H_{r-1} dV + \int_M H_r \rho dV = 0, \quad r = 1, \dots, n \quad (3.2.10)$$

formülünü elde etmiştir.

3.3. Teorem 3.1.1 in İspatı

M nin kütle merkezini R^{n+1} in orijininin geçtiğini kabul etmek genelliği bozmaz. O halde $\psi : M \rightarrow R^{n+1}$ immersiyonu $\int_M \psi dV = 0$ eşitliğini sağlar.

$$\lambda_1 \leq n \text{vol}(M) / \int_M \|\Psi\|^2 dV$$

formülünü elde etmek için minimum prensibi uygulanabilir. Burada λ_1 , M üzerinde Δ , Laplace operatörünün birinci karakteristik değeridir. Böylece

$$\int_M \|\Psi\|^2 dV \leq (n \cdot \text{vol}(M) / \lambda_1) \quad (3.3.1)$$

yazılır. O halde (3.2.4) eşitliğinden

$$\int_M \text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f) dV = n \int_M \alpha g(A(\text{grad} f), \text{grad} f) dV = \int_M \|A(\text{grad} f)\|^2 dV \quad (3.3.2)$$

bulunur.

(3.2.7) deki ikinci denklemden $\text{grad } \rho = -A(\text{grad } f)$ olur, böylece

$$\begin{aligned} g(A(\text{grad } f), \text{grad } f) &= -g(\text{grad } \rho, \text{grad } f) = -\text{grad } f(\rho) \\ &= -\text{div}(\rho \text{ grad } f) + \rho \Delta f \\ &= -\text{div}(\rho \text{ grad } f) + n\rho(1 + \rho\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha g(A(\text{grad } f), \text{grad } f) = -\alpha \text{div}(\rho \text{ grad } f) + n\alpha\rho(1 + \rho\alpha) \quad (3.3.3)$$

yazılır. M üzerindeki $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı kullanılırsa

$$\text{div}(A(\text{grad } f)) = \sum g(\nabla_{e_i} A(\text{grad} f), e_i)$$

$$= \Sigma [g((\nabla A)(e_i, \text{grad} f), e_i) + g(A(\nabla e_i \text{grad} f) e_i)]$$

bulunur. Diğer taraftan denklem (3.2.3) ve (3.2.7) den

$$\text{div} (A(\text{grad} f)) = n (\text{grad} f)\alpha + n\alpha + \rho \|A\|^2 \quad (3.3.4)$$

yazılır. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x \in \chi(M)$ için

$$\text{div} (fx) = x(f) + f \text{div} x$$

olduğundan

$$\text{div} (\rho A (\nabla f)) = A(\nabla f)\rho + \rho \text{div} (A(\nabla f))$$

$$\rho \text{div} (A(\nabla f)) = \text{div} (\rho A(\nabla f)) - A(\nabla f)\rho$$

$$= \text{div}(\rho A(\nabla f)) + \|A(\nabla f)\|^2 \quad (3.3.4)'$$

elde edilir. Eğer (3.3.4) eşitliği ρ ile çarpılırsa

$$\rho \text{div} (A(\nabla f)) = n\rho(\text{grad} f)\alpha + n\alpha\rho + \rho^2 \|A\|^2 \quad (3.3.4)''$$

olacağından (3.3.4)' ve (3.3.4)'' birleştirilerek

$$n\rho(\text{grad} f)\alpha + n\alpha\rho + \rho^2 \|A\|^2 = \text{div}(\rho A(\text{grad} f)) + \|A(\text{grad} f)\|^2$$

$$\text{div}(\alpha\rho \text{grad} f) = \rho(\text{grad} f)\alpha + \alpha \text{div}(\rho \text{grad} f) \quad (3.3.5)$$

ve bu eşitlik (3.3.4)'' de yazılarak

$$-n\alpha \text{div}(\rho \text{grad} f) + \text{div} (n\alpha\rho \text{grad} f) + n\alpha\rho + \rho^2 \|A\|^2 = \text{div}(\rho A(\text{grad} f)) + \|A(\text{grad} f)\|^2 \quad (3.3.6)$$

bulunur. Eğer denklem (3.3.6) dan $-n\alpha \text{div}(\rho \text{grad} f)$, (3.3.3) de yerine yazılırsa ve Stokes

teoremi ve (3.2.8) Minkowski formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_M n\alpha g(A(\text{grad} f), \text{grad} f) dV &= \int_M [\|A(\text{grad} f)\|^2 - n\alpha\rho - \rho^2 \|A\|^2 + n^2\rho\alpha(1+\alpha\rho)] dV \\ &= \int_M [n(n-1)\alpha\rho + \rho^2 s + \|A(\text{grad} f)\|^2] dV \end{aligned} \quad (3.3.6)'$$

$$= -n(n-1)\text{vol}(M) + \int_M \rho^2 s dV + \int_M \|A(\text{grad} f)\|^2 dV \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\|\Psi\|^2 = \|(\text{grad } f)\|^2 + \rho^2 \text{ ve } s \leq \lambda_1(n-1)$$

ve (3.3.1) eşitliğinden

$$\int_M \rho^2 s dV \leq \int_M \|\Psi\|^2 dV \leq \lambda_1(n-1) \int_M \|\Psi\|^2 s dV \leq n(n-1) \text{vol}(M)$$

bulunur. Böylece (3.3.7) deki integral formülü yeniden yazılırsa

$$\int_M n \alpha g(A(\text{grad } f), \text{grad } f) dV \leq \int_M \|(\text{grad } f)\|^2 dV$$

ve (3.3.2) denklemiyle birlikte düşünülürse

$$\int_M \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) dV \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Teoremin hipotezinde Ricci eğriliği pozitif olduğundan $\text{grad } f = 0$ olmalıdır.

Böylece M irtibatlı, $f, \frac{1}{2}r^2$ olan sabit fonksiyondur yani M, r yarıçaplı bir küreye izometriktir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.4. Hsiung İntegralleri Sıfır Olan Hiperyüzeyler

Bu bölümde R^{n+1} de birinci ve ikinci Hsiung integralleri sıfır olan kompakt daldırılmış hiperyüzeyleri göz önüne alacağız.

Teorem 3.4.1. M, R^{n+1} de kompakt ve irtibatlı daldırılmış hiperyüzey olsun.

Eğer M nin ρ destek fonksiyonu ve α ortalama eğriliği

$$1 + \alpha \rho \leq 0$$

bağıntısını sağlıyorsa; M, S^n küresine izometriktir.

İspat: $\varphi: M \rightarrow R^{n+1}$ immersiyonu için $f = \frac{1}{2} \|\Psi\|^2$ fonksiyonunun (3.2.7)

denklemini sağladığını biliyoruz. Böylece

$$\operatorname{div} (f \operatorname{grad} f) = \|\operatorname{grad} f\|^2 + \frac{n}{2} \|\Psi\|^2 (1 + \alpha \rho) \quad (3.4.1)$$

elde etmek için $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f)$ yi hesaplayalım. Bu ifadenin integrali alınrsa

$$\int_M \|\operatorname{grad} f\|^2 dV + \frac{n}{2} \int_M \|\Psi\|^2 (1 + \alpha \rho) dV = 0 \quad (3.4.2)$$

bulunur.

$1 + \alpha \rho \leq 0$ olduğundan (3.2.8) Minkowski formülü $1 + \alpha \rho = 0$ olduğunu ifade eder. Bu ifade (3.4.2) de kullanılarak $\operatorname{grad} f = 0$ bulunur ki bu da M nin küreye izometrik olması demektir.

Teorem 3.4.2. R^{n+1} de bir kompakt, irtibatlı, daldırılmış hiperyüzey M olsun. Eğer M nin II.temel formu negatif tanımlı ise M nin α ortalama eğriliği ve S skalar eğriliği ve ρ destek fonksiyonu arasında $n(n-1)\alpha + \rho \leq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa; M , küreye izometriktir.

İspat: Kabul edelim ki, $\varphi: M \rightarrow R^{n+1}$ bir immersiyon ve $f = \frac{1}{2} \|\Psi\|^2$ olsun.

(3.2.6) denkleminde

$$A(\operatorname{grad} f) f = g(A(\operatorname{grad} f), \operatorname{grad} f)$$

ve burada (3.3.4) kullanırsa

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f A(\operatorname{grad} f)) &= A(\operatorname{grad} f) f + f \operatorname{div}(A(\operatorname{grad} f)) \\ &= h(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + n f (\operatorname{grad} f) \alpha + n \alpha f + f \rho \|A\|^2 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

bulunur. Ayrıca (3.4.1) kullanırsa

$$\operatorname{div}(n \alpha f \operatorname{grad} f) = n f (\operatorname{grad} f) \alpha + n \alpha \|\operatorname{grad} f\|^2 + \frac{n^2 \alpha}{2} \|\Psi\|^2 (1 + \alpha \rho) \quad (3.4.4)$$

bulunur. (3.4.3) denkleminde (3.4.4) denklemi çıkarırsa;

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f A(\operatorname{grad} f) - n \alpha f \operatorname{grad} f) &= h(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + n \alpha f + f \rho \|A\|^2 - n \alpha \|\operatorname{grad} f\|^2 - n^2 \alpha^2 \rho f - n^2 \alpha f \\ &= h(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) - \rho f + n \alpha f - n \alpha \|\operatorname{grad} f\|^2 - n^2 \alpha f \\ &= h(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) - f (n(n-1) \alpha + \rho) + n(n-1) \alpha f + n \alpha f - n^2 \alpha f - n \alpha \|\operatorname{grad} f\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin integrali alınırsa

$$\int_M [h(\text{grad } f, \text{grad } f) - n\alpha \|\text{grad } f\|^2] dV = \int_M [f(n(n-1)\alpha + \rho s)] dV$$

$\text{grad } f \neq 0$ olmak üzere U açık kümesi üzerinde e birim vektör alanı $e = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$ ile

tanımlanırsa

$$\int_M \|\text{grad } f\|^2 [h(e, e) - n\alpha] dV = \int_M f(n(n-1)\alpha + \rho s) dV \quad (3.4.5)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.10) da $r = 2$ alınırsa

$$\int_M (n(n-1)\alpha + \rho s) dV = 0 \quad (3.4.6)$$

bulunur. Bu integral formülü aynı zamanda

$$\text{div}(A(\text{grad } f) - n\alpha \text{grad } f) = -n(n-1)\alpha - \rho s \quad (3.4.7)$$

formülünden de elde edilir. Böylece $n(n-1)\alpha + \rho s \leq 0$ olduğu için ve (3.4.6), (3.4.7) integrallerden $n(n-1)\alpha + \rho s = 0$ elde edilir. Sonuç olarak (3.4.5) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\int_M \|\text{grad } f\|^2 [h(e, e) - n\alpha] dV = 0 \quad (3.4.8)$$

elde edilir. U üzerindeki lokal ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$n\alpha = h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + \dots + h(e_n, e_n)$$

yazılabilir ki II. temel formun negatif tanımlı olmasından $n\alpha < h(e, e)$ olur. Bu da (3.4.8) de yazılırsa $\|\text{grad } f\| = 0$ bulunur. Yani f sabit bir fonksiyondur. O halde M , küreye izometriktir.

3.5. İntegral Formülü

Teorem 3.5.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir kompakt, irtibatlı, daldırılmış hiperyüzey M olsun. M nin ortalama eğriliği α , destek fonksiyonu ρ ve s skalar eğriliği arasında;

$$\int_M [\kappa(1+\rho\alpha)^2 - \kappa n \rho \alpha - \rho^2 s] dV \leq 0 \quad (3.5.1)$$

bağıntısı vardır. Burada $\kappa=n(n-1)$ olan pozitif bir sabittir.

İspat: $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere Bochner-Lichnerowicz formülünün M üzerinden integrali alırsa

$$\int_M [(\Delta f)^2 - \|\text{Hess } f\|^2 - \text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f)] dV = 0 \quad (3.5.2)$$

bulunur [15]. Diğer taraftan $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(\Delta f)^2 \leq n \|\text{Hess } f\|^2 \quad (3.5.3)$$

yazılabilir. Eğer (3.3.2) de (3.3.6)' kullanırsa

$$\int_M \text{Ric}(\text{grad} f, \text{grad} f) dV = \int_M (n(n-1)\alpha\rho + s\rho^2) dV \quad (3.5.4)$$

elde edilir. (3.5.4), (3.5.3) ifadeleri (3.5.2) de yerine yazılıp $\Delta f = n(1+\alpha\rho)$ ve $\kappa=n(n-1)$ konumu yapılırsa (3.5.1) elde edilir.

Teorem 3.5.2. $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir kompakt, irtibatlı, daldırılmış hiperyüzey M olsun. M nin ortalama eğriliği α , destek fonksiyonu ρ olsun. Eğer $\lambda_1, \mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında c sabit eğrilikli $S^n(c)$ küresinin Δ nın diferensiyellenebilir bir fonksiyonu ve $S^n(c)$ nin skalar eğriliği S olmak üzere $S = \lambda_1(n-1)$ bağıntısını sağlıyorsa,

$$\int_M [n(1+\rho\alpha)^2 - n\rho\alpha - \rho^2\lambda_1] dV \leq 0 \quad (3.5.5)$$

dır.

İspat: Hipotezden ve (3.5.1) den (3.5.5) elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1983.
- [2] Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1980.
- [3] Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 2001.
- [4] Bektaş, M., Lorentz Uzayının İntegral Geometrisi, Doktora Tezi, 1998.
- [5] Hacısalihoğlu, H.H., Emekçi, N., Tensör Geometri, 2003.
- [6] Ergüt, M., Genelleştirilmiş Regle Yüzeyle Dair, Doktora Tezi, 1983.
- [7] Sabuncuoğlu, A. ve Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, MEB., 1983.
- [8] Scherrer, W., Integralsatze der Flächentheorie, Comment. Math. Helv. 19 (1946), 105-114.
- [9] Bonnesen, Tand Frenchel, W., Theoric der konvexen Körper, Berlin, 1934.
- [10] Grottemeyer, K.P., Eiene kennzeichnen de Eigenschaft der Affinspharen, Arch. Math. 3, (1952), 307-310.
- [11] Süss, W., Über Kennzeichnungen der Kugelnund Affinspharen durch Herrn K.P. Grottemeyer, Arch. Math. 3 (1952), 311-313.
- [12] Hsiung, C.C., Some Integral Formulas for Closed Hypersurfaces, Math. Scan 2 (1954), 286-294.
- [13] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Poyla, G., Inequalities, Cambridge, 1934.
- [14] Desmukh, S., Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space, Quar.J.Math..Oxford (2), 49, (1998), 35-41.
- [15] Bektas, M., Ergut, M., Compact Space-like Hypersurfaces in the de Sitter Space, Proceedings of IMM of Azerbaijan AS, X, (1999), 20-24.