

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Ümit ÇETİNKAYA

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAĞIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Ümit ÇETİNKAYA

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/
oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih
ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Bana bu çalıőmayı veren, bu çalışmanın planlanmasında ve dőzenli bir şekilde yőrőtőlmesinde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK’a ve yine bu çalıőma hazırlanırken gerekli tőm imkanları sağlayarak bana yardımcı olan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN ve Dr. Hıfzı ALTINOK’a teőekkőrlerimi sunarım.

Őmit ÇETINKAYA

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER LİSTESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
1. GENEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Temel Tanımlar.....	1
1.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık.....	6
2. Δ-DİZİ UZAYLARI.....	13
2.1. $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ Uzaylarının Bazı Özellikleri.....	13
2.2. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları.....	17
3. KAPSAMA TEOREMLERİ.....	21
3.1. Tanımlar ve Notasyonlar.....	21
3.2. Kapsama Teoremleri.....	22
KAYNAKLAR.....	29

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
h.h.k.	:	hemen hemen her k
θ	:	Lacunary dizisi
$\delta(E)$	:	E cümlesinin yoğunluğu
$S(\chi, \Delta)$	:	Tüm Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$S_0(\chi, \Delta)$	:	Sıfıra Δ -istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi
$S_\theta(\chi, \Delta)$	:	Δ -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Ümit ÇETİNKAYA

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2006, Sayfa: 29

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir. İkinci bölümde; $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzaylarının bazı özellikleri ile $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayları verildikten sonra; çalışmanın orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde $S(\chi, \Delta)$ ve $S_\theta(\chi, \Delta)$ uzayları tanımlanarak bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, kuvvetli Cesàro yakınsaklık, kuvvetli p-Cesàro yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, fark dizi uzayları, genelleştirilmiş fark dizi uzayları.

ABSTRACT

Master Thesis

STATISTICAL CONVERGENCE

Ümit ÇETİNKAYA

Firat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

2007, Page: 29

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, we give some fundamental definitions, theorems which will be used in the later chapters and lacunary statistical convergence concept.

In the second chapter we give some properties of the difference sequence spaces $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ and $c_0(\Delta)$, and we also give the generalised difference sequence spaces $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ and $c_0(\Delta^m)$, $m \in \mathbb{N}$. In the third chapter which is the last and the original part of the thesis, we define the sequence spaces $S(\chi, \Delta)$ and $S_\theta(\chi, \Delta)$, and give some inclusion relations between these spaces.

Key Words: natural density, statistical convergence, statistical Cauchy sequence, strongly Cesàro convergence, strongly p-Cesàro convergence, lacunary statistical convergence, difference sequence spaces, generalised difference sequence spaces.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanımlar

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast [1] ve Schoenberg [2] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verildi. Yıllar sonra farklı isimler altında Fourier analiz teorisinde, ergodic teoride ve sayı teorisinde çalışıldı. Son zamanlarda, genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli integral toplanabilmede ve lokal kompakt uzaylar üzerinde tanımlı sınırlı sürekli fonksiyon ideallerinin yapısında görülmeye başlandı.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının ihtimaliyetteki yakınsaklık kavramıyla da yakından ilişkisi vardır. Bu kavram $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin altkümelerinin yoğunluğuna bağlıdır.

$\mathbb{N}$ 'nin bir E altkümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_E(k)$$

şeklinde tanımlanan $\delta(E)$ sayısı ile gösterilir. Burada χ_E , E 'nin karakteristik fonksiyonudur. Açıktır ki $\mathbb{N}$ 'nin sonlu herhangi bir altkümesi sıfır doğal yoğunluğa sahiptir ve $\delta(E^c) = 1 - \delta(E)$ 'dir. Ayrıca, E kümesinin doğal yoğunluğu ($|\{k \leq n : k \in E\}|$ notasyonu E 'nin n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere)

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer bir $P(k)$ özelliği sıfır yoğunluklu bir küme dışında sağlanırsa, P özelliği hemen hemen her k için sağlanır diyeceğiz ve bunu kısaca h.h.k. ile göstereceğiz.

Her bir J reel sayısı için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > J\}) = 1$$

ise (x_k) dizisi ∞ 'a ıraksaktır denir.

Her bir Q reel sayısı için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < Q\}) = 1$$

ise (x_k) dizisi $-\infty$ 'a ıraksaktır denir.

Eğer en az bir A reel sayısı için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > A\}) = 0$$

ise (x_k) dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Tanım 1.1.1. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S\text{-}\lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir [3].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L=0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Bu uzaylar aşağıda gösterilmiştir:

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\},$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.$$

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, ancak bunun tersi doğru değildir. Bunun için $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S\text{-}\lim x_k = 0$ olması demektir. Diğer taraftan ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ 'dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ 'dur. Bunun yanında $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x_k = L_1$ ve $S - \lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ 'dir.

Teorem 1.1.2. $S - \lim x_k = L_1$, $S - \lim y_k = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $S - \lim (\alpha x_k) = \alpha L_1$,

(ii) $S - \lim (x_k + y_k) = L_1 + L_2$ 'dir.

(i) ve (ii) 'den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 1.1.3. $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise, yani

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [3].

Teorem 1.1.4. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

(i) $x = (x_k)$ bir istatistiksel yakınsak dizidir.

(ii) $x = (x_k)$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır[3].

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) Burada “yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir” teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, h.h.k. için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse, h.h.k. için

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece x bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (ii) sağlansın ve h.h.k. için $x_k \in I = [x_N - 1, x_N + 1]$ olacak şekilde bir N sayısı seçelim. Aynı şekilde h.h.k. için $x_k \in I' = [x_M - 1/2, x_M + 1/2]$ olacak şekilde bir M sayısı seçelim. Burada h.h.k. için $x_k \in I_1 = I \cap I'$ olduğunu belirtelim. Çünkü

$$\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \{k \leq n : x_k \notin I'\}$$

olup, böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I'\}| = 0$$

dır. Bu nedenle I_1 , h.h.k. için x_k 'yi ihtiva eden ve uzunluğu 1'den küçük veya 1 e eşit olan kapalı bir aralıktır.

Benzer şekilde h.h.k. için $x_k \in I'' = [x_{N(2)} - 1/2, x_{N(2)} + 1/2]$ olacak şekilde $N(2)$ sayısını seçelim. Yukarıdaki düşünceye göre I_2 , h.h.k. için x_k 'yi ihtiva eder ve uzunluğu $\leq 1/2$ olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam edilirse her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturabiliriz. I_m 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir ve h.h.k. için $x_k \in I_m$ 'dir. İç içe aralıklar teoremi gereğince $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \lambda$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır. h.h.k. için $x_k \in I_m$ olduğu göz önüne alınırsa $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}, \quad (1.1.1)$$

olacak şekilde pozitif artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ tamsayı dizisini seçebiliriz.

Şimdi $T_m < k < T_{m+1}$ iken $x_k \notin I_m$ ve x 'in $k > T_m$ olacak şekildeki tüm x_k terimlerinden oluşan bir z alt dizisini tanımlayalım. Daha sonra y dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & x_k \text{ z'nin bir terimi ise} \\ x_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\lim y_k = \lambda$ 'dir. Çünkü eğer $\varepsilon > 1/m > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k , z 'nin bir terimidir ki bu $y_k = \lambda$ anlamına gelir, ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir. Burada h.h.k. için $x_k = y_k$ 'dir. Şimdi bunu gösterelim: Eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise bu taktirde

$$\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$$

dir ve (1.1.1)'den

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken limit 0 'dır ve h.h.k. için $x_k = y_k$ 'dir. Bu nedenle (ii), (iii)'ü gerektirir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Kabul edelim ki (iii) sağlansın. h.h.k. için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde, her bir n için, $\lim y_k = L$ olduğundan

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Böylece h.h.k. için $x_k = y_k$ olması sebebiyle

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq y_k\}| + \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu nedenle h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ dir, bu yüzden (i) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 1.1.5. Eğer (x_k) , $S - \lim x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise, bu taktirde $\lim y_k = L$ olacak şekilde (x_k) 'nın bir $y=(y_k)$ alt dizisi vardır.

Tanım 1.1.6. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ alınırsa bu uzay $|\sigma_1^0|$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.7. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L 'ye kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [4].

Teorem 1.1.8. $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde,

(i) Bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır [5].

1.2. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 1.2.1. Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir [6].

$\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Bu çalışmada

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

alınacak ve uygunluk için bu toplam kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.2. θ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \quad (1.2.1)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir $x = (x_k)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ile gösterilir[7]. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.3. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [6]. N_θ uzayı $L = 0$ olması durumunda N_θ^0 ile gösterilir.

Teorem 1.2.4. $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

İspat. (Yeterlilik) $\liminf_r q_r > 1$ ise her $r \geq 1$ için $1 + \delta \leq q_r$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $x \in |\sigma_1^0|$ için

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| - \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1 + \delta}{\delta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

elde ederiz. Böylece $\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|$ ve $\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|$ terimlerinden her ikisi de sifıra yakınsar ve $x \in N_\theta^0$ elde edilir. Buradan $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ bağıntısı elde edilir.

(Gereklilik) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. θ lacunary dizisi olduğundan $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_{j-2}}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde herhangi bir L sayısı için

$$\frac{1}{h_{r_j}} \sum_{I_{r_j}} |x_i - L| = |1 - L|, j=1, 2, 3, \dots$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_i - L| = |L|, r \neq r_j$$

olur. Bundan dolayı $x \notin N_\theta$ fakat x kuvvetli Cesàro yakınsaktır. Eğer t yeteri kadar büyük bir tamsayı ise $k_{r_j-1} < t \leq k_{r_{j+1}-1}$ olacak şekilde bir tek j bulabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i| \leq \frac{k_{r_j-1} + h_{r_j}}{k_{r_j-1}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazabiliriz. $t \rightarrow \infty$ iken $j \rightarrow \infty$ olur. Böylece $x \in |\sigma_1^0|$ olur.

Teorem 1.2.5. $N_\theta \subseteq |\sigma_1|$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [6].

Teorem 1.2.6. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. Bu durumda

- (i) $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$,
- (ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$,
- (iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$,

dir[7].

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

yazabiliriz. Buradan (i) gerçekleşir.

(i) 'deki içirme kesindir. Gerçekten, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_k)$ dizisi I_r aralığında ilk $\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor$ tamsayılarında $1, 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{h_r} \rfloor$, diğer durumlarda 0 olarak tanımlayalım. Bu dizi sınırlı değildir, ancak lacunary istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon \right\} \right| = \frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor}{h_r} \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty)$$

dır. Yani (x_k) dizisi sıfıra lacunary istatistiksel yakınsaktır. Diğer yandan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor (\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor + 1)}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0, \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x_k \rightarrow 0(N_\theta)$ 'dır.

(ii) Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Buradan $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ elde edilir.

(iii) (i) ve (ii)'nin sonucudur.

Teorem 1.2.7. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için $S_\theta \subseteq S$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat. (Yeterlilik) Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $N_r = \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$

olsun. (1.2.1) göz önüne alınırsa her $\varepsilon > 0$ ve $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir

$r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ diyelim ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir n seçelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r \right\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{ h_{r_0+1} + \dots + h_r \} \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \varepsilon \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon q_r \\
&\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon H
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $S \subseteq S_\theta$ elde edilir.

(Gereklilik) Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. Bu taktirde $q_{r_j} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_{r_j-1} < i \leq 2k_{r_j-1}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in N_\theta$ fakat $x \notin |\sigma_1|$ 'dir. (Teorem 1.2.6 (i)) 'den

$x \in S_\theta$ 'dir. Fakat (Teorem 1.2.8) 'den $x \notin S$ 'dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 1.2.8. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için $S \subseteq S_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

İspat. (Yeterlilik) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ elde edilir. $x_k \rightarrow L(S)$ ise $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| &\geq \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $S \subseteq S_\theta$ elde edilir.

(Gereklilik) $\liminf_r q_r = 1$ olsun. (Teorem 1.2.4.)’deki yol takip edilirse $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_{j-2}}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçelim ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. x ’ in sınırlı olduğu aşıkârdır. (Teorem 1.2.4)’den $x \in |\sigma_1|$, fakat

$x \notin N_\theta$ ’dir. (Teorem 1.2.6 (ii))’den $x \notin S_\theta$ ve (Teorem 1.2.8)’den $x \in S$ olduğu görülür.

O halde $S \not\subseteq S_\theta$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1.2.9. $(x_k) \in S \cap S_\theta$ ise $S_\theta - \lim x_k = S - \lim x_k$ ’dir. Böylece herhangi bir θ lacunary dizisi için (x_k) dizisinin $S_\theta - \lim$ limiti tektir.

İspat. Kabul edelim ki $S - \lim x_k = L$, $S_\theta - \lim x_k = L'$ ve $L \neq L'$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon < \frac{1}{2}|L - L'|$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

elde ederiz. Bu durumda $\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right|$ istatistiksel limit ifadesinin k_m -inci terimini göz önüne alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ k \in \cup_{r=1}^m I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| &= \frac{1}{k_m} \sum_{r=1}^m \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \left(\sum_{r=1}^m h_r \right)^{-1} \sum_{r=1}^m h_r t_r \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

elde edilir. Burada

$$t_r = \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| \rightarrow 0$$

dır. Çünkü $x_k \rightarrow L'(S_\theta)$ idi. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olduğundan (1.2.2) ifadesi t 'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür ve $m \rightarrow \infty$ için sıfır olur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{1}{k_m} \left| \left\{ k \in \bigcup_{r=1}^m I_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| \right)$$

dizisi

$$\left\{ \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon \right\} \right| \rightarrow 1$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani $L = L'$ 'dir.

2. Δ -DİZİ UZAYLARI

2.1. $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ Uzaylarının Bazı Özellikleri

Fark dizileri Kızmaz [8] tarafından tanımlandı. Bu bölümde $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları tanımlanacak, bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.1.1. $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Teorem 2.1.2. $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları, $\|x\|_\infty = \sup |x_k|$ olmak üzere

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty \quad (2.1.1)$$

normu ile birer normlu uzaydır [8].

İspat. X ; $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

$$N1) \quad \|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty \geq 0$$

N2) $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty = 0$ olsun. Bu taktirde $x_1 = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - x_{k+1}| = 0$ dır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir. O halde $x = 0$ dır. Tersine $x = 0$ olması halinde $\|x\|_\Delta = 0$ olduğu aşikârdır.

N3)

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_\Delta &= |\alpha x_1| + \sup_k |\alpha(x_k - x_{k+1})| \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| \right) \end{aligned}$$

$$= |\alpha| \|x\|_{\Delta}$$

N4)

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + \sup_k |(x_k - y_k) - (x_{k+1} - y_{k+1})| \\ &\leq |x_1| + \sup_k |x_k - x_{k+1}| + |y_1| + \sup_k |y_k - y_{k+1}| \\ &\leq \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta} \end{aligned}$$

Teorem 2.1.3. $\ell_{\infty}(\Delta)$ dizi uzayı (2.1.1) normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. $x^s = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \dots) \in \ell_{\infty}(\Delta)$ olmak üzere (x^s) , $\ell_{\infty}(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olsun.

Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = |x_1^s - x_1^t| + \|\Delta(x^s - x^t)\|_{\infty} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_1^s - x_1^t| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| \rightarrow 0$$

dır. Buna göre (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir.

$$|x_{k+1}^s - x_{k+1}^t| \leq |(x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t)| + |x_k^s - x_k^t|$$

olması nedeniyle her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için,

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre $x_k^s = (x_k^1, x_k^2, x_k^3, \dots)$ dizisi her sabit $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^s) , $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$) diyelim.

(x^s) , $\ell_{\infty}(\Delta)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ iken $\|x^s - x^t\|_{\Delta} \leq \varepsilon$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde her $s, t \geq N$ için

$$|x_1^s - x_1^t| < \varepsilon$$

ve her bir k için

$$\left| (x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t) \right| < \varepsilon$$

olur. Bu son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\lim_t |x_1^s - x_1^t| = |x_1^s - x_1| < \varepsilon$$

$$\lim_t \left| (x_k^s - x_k^t) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}^t) \right| = \left| (x_k^s - x_k) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}) \right| < \varepsilon$$

bulunur. Buradan $s \geq N$ için

$$\|x^s - x\|_\Delta = |x_1^s - x_1| + \sup_k \left| (x_k^s - x_k) - (x_{k+1}^s - x_{k+1}) \right| < 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi de $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+1}| &= |x_k - x_{k+1} - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N| \\ &\leq \left| (x_k - x_k^N) - (x_{k+1} - x_{k+1}^N) \right| + |x_k^N - x_{k+1}^N| \\ &\leq \|x^N - x\|_\Delta + |x_k^N - x_{k+1}^N| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta)$ elde edilir. O halde $(\ell_\infty(\Delta), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayı olur.

Sonuç 2.1.4. $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzayları, $\ell_\infty(\Delta)$ uzayının birer kapalı altuzayı olduklarından (Teorem 2.1.3) den dolayı (2.1.1) deki norm ile birer Banach uzayıdır.

X herhangi bir dizi uzayı olsun. $X(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in X\}$ yazılır.

Teorem 2.1.5. $X \subset Y$ ise $X(\Delta) \subset Y(\Delta)$ dır [8].

Teorem 2.1.6. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta), X(\Delta)$ da konvektir [9].

Teorem 2.1.7. $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta)$

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|$$

normu ile Banach uzayıdır [9].

Teorem 2.1.8. X ayrılabilir ise $X(\Delta)$ da ayrılabilir [9].

Sonuç 2.1.9. $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $\ell_p(\Delta)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayları ayrılabilir [9].

Tanım 2.1.10. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani h.h.k için $|\Delta x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ -istatistiksel yakınsaktır denir. Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta)$ ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta)$, yani sıfıra Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [10].

Teorem 2.1.11. $S(\Delta)$ lineer uzaydır [10].

Tanım 2.1.12. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ -Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$w_p(\Delta) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - L|^p = 0, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir. $x \in w_p(\Delta)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ yazacağız [10].

Teorem 2.1.13. $p \in \mathbb{R}$, ve $0 < p < \infty$ olsun.

(i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ dir.

(ii) $x \in \ell_\infty(\Delta)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta))$ dir [10].

Sonuç 2.1.14.

(i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$

(ii) $S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta) = w_p(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$ dir [9].

Tanım 2.1.15. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta x_k - \Delta x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ – istatistiksel Cauchy dizisi denir [9].

Teorem 2.1.16. Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ – istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ – istatistiksel Cauchy dizisidir [9].

İspat. Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde h.h.k. için

$$|\Delta x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. N sayısını $|\Delta x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçelim. Bu taktirde h.h.k. için

$$|\Delta x_k - \Delta x_N| < |\Delta x_k - L| + |\Delta x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup x, Δ – istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 2.1.17. $y = (y_k)$, Δ – istatistiksel yakınsak dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi h.h.k. için $\Delta x_k = \Delta y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x, Δ – istatistiksel yakınsak bir dizidir [9].

İspat. h.h.k. için $\Delta x_k = \Delta y_k$ ve $S(\Delta) - \lim y_k = L$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her n için

$$\{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : \Delta x_k \neq \Delta y_k\} \cup \{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin ikinci yanındaki son cümle sonlu sayıda eleman içerir. Bunu $g = g(\varepsilon)$

ile gösterelim. h.h.k. için $\Delta x_k = \Delta y_k$ olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta x_k \neq \Delta y_k\}| + \lim_n \frac{g}{n}$$

yazabiliriz. Bu $x_k \rightarrow L(S(\Delta))$ demektir.

2.2. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

$m \in \mathbb{N}$ ve $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k)$, $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere Et ve Çolak [11],

$$\ell_{\infty}(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_{\infty}\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty} \quad (2.2.1)$$

normu ile birer *BK*-uzayı olduğunu gösterdiler.

Teorem 2.2.1. $\ell_{\infty}(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları (2.2.1) normu ile birer Banach uzayıdır [11].

İspat. Her bir $s \in \mathbb{N}$ için $x^s = (x_i^s) = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \ell_{\infty}(\Delta^m)$ olmak üzere (x^s) , $\ell_{\infty}(\Delta^m)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_k |\Delta^m (x_k^s - x_k^t)| \rightarrow 0$$

dır. Bu durumda her bir $k \in \mathbb{N}$ için $s, t \rightarrow \infty$ iken

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan da $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin her bir k için $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu sonucu çıkar. $\mathbb{C}$ tam olduğundan bu dizilerin her biri yakınsaktır. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_s x_k^s = x_k$$

alalım. (x^s) bir Cauchy dizisi olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için $\forall s, t \geq N$ olduğunda $\|x^s - x^t\|_{\Delta} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ vardır. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon \quad \text{ve} \quad \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \leq \varepsilon$$

sağlanır. Buradan $\forall s \geq N$ için,

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

ve

$$\lim_t |\Delta^m(x_k^s - x_k^t)| = |\Delta^m(x_k^s - x_k)| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu $\forall s \geq N$ için $\|x^s - x\|_\Delta < 2\varepsilon$, yani $x = (x_k)$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için $x^s \rightarrow x$ olmasını gerektirir.

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_k| &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \\ &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N) \right| \\ &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^N - x_{k+v}) \right| + \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}^N \right| \\ &\leq \|x^N - x\|_\Delta + |\Delta^m x_k^N| = O(1) \end{aligned}$$

olduğunda $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. O halde $\ell_\infty(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır.

$c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ uzaylarının $\ell_\infty(\Delta^m)$ nin birer kapalı altuzayları olduğu gösterilebilir.

Bu nedenle bu dizi uzayları da (2.2.1) de tanımlı norm'a göre birer Banach uzayıdır.

Aşağıda bu dizi uzayları arasındaki bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

Lemma 2.2.2. (i) $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^{m+1})$,

(ii) $c(\Delta^m) \subset c(\Delta^{m+1})$,

(iii) $\ell_\infty(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta^{m+1})$

ve bu kapsama bağıntıları kesindir [11].

İspat. $x \in c_0(\Delta^m)$ olsun.

$$\begin{aligned} |\Delta^{m+1} x_k| &= |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}| \\ &\leq |\Delta^m x_k| + |\Delta^m x_{k+1}| \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğunda $x \in c_0(\Delta^{m+1})$ elde ederiz. Böylece $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^{m+1})$ olur. Örneğin $x = (k^m)$ dizisi $c_0(\Delta^{m+1})$ 'e ait fakat $c_0(\Delta^m)$ 'e ait olmadığından bu kapsamalar kesindir.

(ii) ve **(iii)** 'nin ispatları **(i)** 'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 2.2.3. (i) $c_0(\Delta^m) \subset c(\Delta^m)$

(ii) $c(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$

ve bu kapsamalar kesindir.

İspatı (Lemma 2.2.2) ye benzer şekilde yapılabilir.

Ayrıca $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ uzayları koordinatsal sürekliliğe sahip, yani $\|x^s - x\|_\Delta \rightarrow 0$ olmasının, $|x_k^s - x_k| \rightarrow 0$ olmasını $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $s \rightarrow \infty$ için gerektirecek şekilde Banach uzayları olduklarından, $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ uzayları aynı zamanda birer BK uzaylarıdır.

3. KAPSAMA TEOREMLERİ

3.1. Tanımlar ve Notasyonlar

Bir topolojik gruptaki bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı ile lacunary istatistiksel yakınsaklığı Çakallı tarafından verilmiştir ([12],[13]). Bu bölümde biz Δ -istatistiksel yakınsaklığı ve Δ -lacunary istatistiksel yakınsaklığı vereceğiz.

Bu bölümde χ bir abel topolojik Hausdorff grubunu gösterecektir. Ayrıca χ toplamsaldır ve sayılabilirliğin ilk aksiyomu sağlanır.

Tanım 3.1.1. Bir χ topolojik grubundaki bir (x_k) dizisine, eğer 0'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{k \leq m : \Delta x_k - \ell \notin U\}| = 0$$

ise χ 'nin ℓ elemanına Δ -istatistiksel yakınsak denir. Burada dikey çizgiler o kümenin eleman sayısını göstermektedir.

$S(\chi, \Delta), S_0(\chi, \Delta)$ sırasıyla tüm Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin ve χ 'de sıfıra Δ -istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesini gösterecektir.

Şimdi topolojik gruplarda Δ -lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını aşağıdaki gibi vereceğiz:

Tanım 3.1.2. (x_k) , χ topolojik grubunda bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer 0'ın her bir U komşuluğu için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}| = 0$$

ise (x_k) dizisi ℓ sayısına Δ -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer (x_k) dizisi ℓ sayısına Δ -lacunary istatistiksel yakınsak ise bunu

$$S_\theta(\chi, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell \text{ veya } x_k \rightarrow \ell(S_\theta(\chi, \Delta))$$

yazarak göstereceğiz. Yukarıdaki tanım anlamında Δ -lacunary istatistiksel yakınsak olan dizilerin sınıfı $S_\theta(\chi, \Delta)$ ile gösterilir, yani

$$S_\theta(\chi, \Delta) = \left\{ (x_k) : \exists \ell \text{ için } S_\theta(\chi, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell \right\}$$

dir. Özel olarak

$$S_{\theta}^0(\chi, \Delta) = \left\{ (x_k) : S_{\theta}(\chi, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

tanımlayacağız.

3.2. Kapsama Teoremleri

Bu bölümde tüm Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile tüm Δ -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi arasındaki bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $S_{\theta}(\chi, \Delta) \subset S(\chi, \Delta)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat (Yeterlilik) Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu taktirde her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. (Δx_k) , $S_{\theta}(\chi, \Delta)$ 'nın herhangi bir elemanı olsun, yani $S_{\theta}(\chi, \Delta) - \lim x_k = \ell$ diyelim. 0'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. ε herhangi bir pozitif sayı olsun. $N_r = |\{k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}|$ yazalım. Lacunary istatistiksel yakınsaklığın tanımını gereğince her $r > r_0$ için

$$N_r(h_r)^{-1} < \varepsilon(2H)^{-1}$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi de $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ olsun ve n sayısı $k_{r-1} < n \leq k_r$ eşitsizliğini sağlayan herhangi tamsayı olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta x_k - \ell \notin U\}| \leq \frac{Mr_0}{k_{r-1}} + \frac{\varepsilon q_r}{2H}$$

yazabiliriz. Böylece $r > r_1$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta x_k - \ell \notin U\}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan $S(\chi, \Delta) - \lim x_k = \ell$ olduğu anlaşılır.

(Gereklilik) Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. χ 'nin 0 'dan farklı bir x elemanını alalım. $\theta = (k_r)$ 'nin $q_{r(j)} > j$ ve $k_{r(j)} > j + 3$ olacak şekilde bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçelim. Şimdi de bazı $j=1,2,\dots$ ler için

$$\Delta x_i = \begin{cases} x, & k_{r(j)} < i \leq 2k_{r(j)-1} \quad j = 1,2,3,\dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. U , 0'ın Δx 'i ihtiva etmeyen simetrik bir komşuluğu olsun. Bu taktirde $j > 1$ için

$$\frac{1}{h_{r(j)}} \left| \left\{ k \leq k_{r(j)} : \Delta x_k \notin U \right\} \right| < \frac{k_{r(j)-1}}{h_{r(j)}} = \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)} - k_{r(j)-1}} < \frac{1}{j-1}$$

yazabiliriz. Böylece $(x_k) \in S_\theta(\chi, \Delta)$ 'dır. Fakat $(x_k) \notin S(\chi, \Delta)$ 'dir. Çünkü $(x_k) \in S_\theta(\chi, \Delta)$ olmasından dolayı

$$\frac{1}{2k_{r(j)-1}} \left| \left\{ k \leq 2k_{r(j)-1} : \Delta x_k \notin U \right\} \right| = \frac{1}{2k_{r(j)-1}} [k_{r(1)-1} + k_{r(2)-1} + \dots + k_{r(j)-1}] > \frac{1}{2}$$

olur ki buradan $x \notin S(\chi, \Delta)$ 'dır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.2. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $S(\chi, \Delta) \subset S_\theta(\chi, \Delta)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

İspat (Yeterlilik) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun ve $\liminf_r q_r = \alpha$ diyelim. $\beta = (\alpha - 1) / 2$ yazalım. Bu taktirde $r \geq n_0$ için $q_r \geq 1 + \beta$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı vardır. Böylece $r \geq n_0$ için

$$\frac{h_r}{k_r} = 1 - \frac{k_{r-1}}{k_r} = 1 - \frac{1}{q_r} \geq 1 - \frac{1}{1 + \beta} = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

yazılabilir.

Herhangi bir $(x_k) \in S(\chi, \Delta)$ alalım ve $S(\chi, \Delta) - \lim x_k = \ell$ olsun. $S_\theta(\chi, \Delta) - \lim x_k = \ell$ olacağını ispatlayacağız. 0'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu taktirde $r \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}| \\
&= h_r \frac{1}{k_r} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}| \\
&\geq \frac{\beta}{\beta+1} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $S_\theta(\chi, \Delta) - \lim x_k = \ell$ 'dir.

(Gereklilik) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. İstatistiksel yakınsak fakat lacunary istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi bulmaya çalışacağız. θ 'nın $r(j) \geq r(j-1) + 2$ olmak üzere

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j$$

olacak şekilde bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçebiliriz. χ 'nin 0'dan farklı bir x elemanını alalım. Şimdi $j = 1, 2, \dots$ için

$$\Delta x_k = \begin{cases} x, & k \in I_{r(j)} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir dizi tanımlayalım. Bu taktirde $(x_k) \in S(\chi, \Delta)$ 'dir (Gerçekte $(x_k) \in S_0(\chi, \Delta)$). Bunu görmek için 0'ın herhangi bir U komşuluğunu alalım. Bu taktirde $W \subset U$ ve $x \in W$ olacak şekilde 0'ın herhangi bir W komşuluğunu seçebiliriz. Diğer yandan her bir m için $k_{r(j)-1} \leq n \leq k_{r(j+1)-1}$ olacak şekilde pozitif bir j_m sayısı bulabiliriz. Bu taktirde her bir m için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} |\{k \leq m : \Delta x_k \notin U\}| &\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} |\{k \leq m : \Delta x_k \notin W\}| \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} \left\{ |\{k \leq k_{r(j_m)} : \Delta x_k \notin W\}| + |\{k_{r(j_m)} < k \leq m : \Delta x_k \notin W\}| \right\} \\
&\leq \frac{1}{k_{r(j_m)}} |\{k \leq k_{r(j_m)} : \Delta x_k \notin W\}| + \frac{1}{k_{r(j_m)}} (k_{r(j_m)+1} - k_{r(j_m)}) \\
&< \frac{1}{j_m + 1} + 1 + \frac{1}{j_m} - 1 \\
&< \frac{1}{j_m + 1} + \frac{1}{j_m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $(x_k) \in S_0(\chi, \Delta)$ dır. Şimdi de $(x_k) \notin S_\theta(\chi, \Delta)$ olacağını gösterelim. χ bir Hausdorff uzay olduğundan $x \notin V$ olacak şekilde 0 'ın bir V komşuluğu vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} \left| \{k_{r(j)-1} < k \leq k_{r(j)} : \Delta x_k \notin V\} \right| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} (k_{r(j)} - k_{r(j)-1}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{h_{r(j)}} h_{r(j)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \neq r(j), j=1,2,\dots}} \left| \{k_{r-1} < k \leq k_r : \Delta x_k - x \notin V\} \right| = 1 \neq 0$$

olur. Böylece ne x ne de 0, (x_k) dizisinin lacunary istatistiksel limiti olabilir. χ 'nin diğer hiçbir noktası da dizinin lacunary istatistiksel limiti olamaz. Buna göre $(x_k) \notin S_\theta(\chi, \Delta)$ 'dır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.3. θ bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $S(\chi, \Delta) = S_\theta(\chi, \Delta)$ olması için gerek ve yeter şart

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır.

Şüphesiz ki $S_\theta(\chi, \Delta)$ –limiti tektir. Bununla birlikte farklı θ 'lar için farklı $S_\theta(\chi, \Delta)$ –limitlerinin olması da mümkündür. $\chi = \mathbb{C}$ durumunda buna bir örnek Fridy ve Orhan [7] da gösterilmiştir. Teorem 3.2.4, $x \in S(\chi, \Delta)$ iken bu durumun vuku bulmayacağını göstermektedir.

Teorem 3.2.4. Eğer $(x_k) \in S(\chi, \Delta) \cap S_\theta(\chi, \Delta)$ ise $S(\chi, \Delta)$ – $\lim x_k = S_\theta(\chi, \Delta)$ – $\lim x_k$ dır.

İspat. Herhangi bir $(x_k) \in S(\chi, \Delta) \cap S_\theta(\chi, \Delta)$ için $S(\chi, \Delta)$ – $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_1$ ve $S_\theta(\chi, \Delta)$ – $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_2$ diyelim. Kabul edelim ki $\ell_1 \neq \ell_2$ olsun. χ bir Hausdorff uzay olduğundan $\ell_1 - \ell_2 \notin U$ olacak şekilde 0'ın bir simetrik U komşuluğun vardır. Bu durumda $W + W \subset U$ olacak şekilde 0'ın simetrik bir W komşuluğunu seçebiliriz. Buna göre her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = \ell_2 - \ell_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : z_k \notin U\}| &\leq \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \Delta x_k - \ell_1 \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \Delta x_k - \ell_1 \notin W\}| \\ &+ \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim $m \rightarrow \infty$ iken 0'a gider. Bunu görmek için $t_r = \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| &= \frac{1}{k_m} |\{k \in \cup_{r=1}^m I_r : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| \\ &= \frac{1}{k_m} \sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| \\ &= \left(\sum_{r=1}^m h_r \right)^{-1} \sum_{r=1}^m h_r t_r \end{aligned}$$

yazalım. $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_2$ olduğundan $\lim t_r = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle (t_r) 'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümü de sıfıra gider, yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \ell_2 - \Delta x_k \notin W\}| = 0 \quad (3.2.1)$$

olur. Diğer yandan, $S(\mathcal{X}, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell_1$ olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : \Delta x_k - \ell_1 \notin W\}| = 0 \quad (3.2.2)$$

yazabiliriz. (3.2.1) ve (3.2.2)'den dolayı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} |\{k \leq k_m : z_k \notin U\}| = 0$$

elde edilir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

İstatistiksel Cauchy dizisi kavramı kompleks terimli diziler için Fridy ve Orhan tarafından [14] de ve bir topolojik gruptaki diziler için Çakallı tarafından [13] de verilmiştir.

Tanım 3.2.5. (x_k) , $\mathcal{X}$ topolojik grubunda bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her bir r için $k'_r \in I_r$ ve 0 'ın her bir U komşuluğu için $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta x_{k'_r} = \ell$ ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \Delta x_{k'_r} \notin U \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde (Δx_k) 'nın bir $(\Delta x_{k'_r})$ alt dizisi varsa (x_k) dizisine bir $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ -Cauchy dizisi denir.

Burada bir dizinin $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şartın tamlık şartı olmaksızın bir $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ -Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 3.2.6. Bir (x_k) dizisinin $S(\mathcal{X}, \Delta)$ -yakınsak olması için gerek ve yeter şart $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ -Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat (Yeterlilik) Kabul edelim ki (x_k) bir $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ -Cauchy dizisi olsun. U , 0 'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu taktirde $W + W \subseteq U$ olacak şekilde 0 'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin U \right\} \right| &\leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \Delta x_{k'_r} \notin W \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_{k'_r} - \ell \notin W \right\} \right|. \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \Delta x_{k'_r} \notin U \right\} \right| = 0$$

ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta x_{k'_r} = \ell$ olduğundan hipotez gereği son eşitsizlikten $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ - $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ elde edilir.

(Gereklilik) $S_\theta(\mathcal{X}, \Delta)$ - $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x_k = \ell$ olacak şekilde herhangi bir (Δx_k) dizisini alalım. (U_n) , 0 'ın içiçe yığılmış komşuluklarının bir dizisi olsun. Her bir $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \{k \in \mathbb{N} : \Delta x_k - \ell \in U_j\}$ yazalım. Buna göre her bir j için $K^{(j+1)} \subseteq K^{(j)}$ ve $\lim_{r \rightarrow \infty} |K^{(j)} \cap I_r| (h_r)^{-1} = 1$ dir. $r \geq m(1)$ olması $|K^{(j)} \cap I_r| > 0$, yani $K^{(j)} \cap I_r \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde bir $m(1)$ sayısı seçelim. Bu taktirde $m(1) \leq r < m(2)$ eşitsizliğini

sağlayan her bir r için $k'_r \in K^{(1)} \cap I_r$ yani $\Delta x_{k'_r} - \ell \in U_1$ olacak şekilde $k'_r \in I_r$ seçelim. Bunu genelleştirirsek, $r > m(p+1)$ olması $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçelim. Bu taktirde $m(p) \leq r < m(p+1)$ eşitsizliğini sağlayan her r için $k'_r \in K^{(p)} \cap I_r$, yani $\Delta x_{k'_r} - \ell \in U_p$ olacak şekilde $k'_r \in I_r$ seçelim. Böylece $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta x_{k'_r} = \ell$ olur. U , 0 'ın herhangi bir komşuluğu olsun. Bu taktirde $W + W \subseteq U$ olacak şekilde 0 'ın bir W komşuluğunu seçebiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \Delta x_{k'_r} \notin U \right\} \right| &\leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \ell \notin W \right\} \right| \\ &+ \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \ell - \Delta x_{k'_r} \notin W \right\} \right|. \end{aligned}$$

elde edilir. $S_\theta(\chi, \Delta) - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$ ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta x_{k'_r} = \ell$ olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \Delta x_k - \Delta x_{k'_r} \notin U \right\} \right| = 0$$

bulunur. Bu ise gerekliliğin ispatını tamamlar, böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.7. Bir χ abel topolojik Hausdorff grubundaki herhangi Δ -lacunary istatistiksel yakınsak bir dizinin Δ -yakınsak bir alt dizisi vardır.

KAYNAKLAR

- [1] Fast, H., 1951, “Sur la convergence statistique”, Colloq. Math., 241-244.
- [2] Schoenberg, I.J., (1959), “The integrability of certain functions and related summability methods”, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
- [3] Fridy, J.A., (1985), “On the statistical convergence”, Analysis, 5, 301-313
- [4] Maddox, I. J., (1978), “A new type of convergence”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83, 61-64.
- [5] Connor, J.S., (1988), “The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences”, Analysis, 8, 47-63.
- [6] Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., (1978), “Some Cesaro-type summability spaces”, Proc. Lond. Math. Soc., 37, 508-520.
- [7] Fridy, J.A. and Orhan, C., (1993), “Lacunary statistical convergence”, Pasific J. Math., 160, 43-51.
- [8] Kızılmaz, H., (1981), “On Certain Sequence Spaces”, Canad. Math. Bull. Vol., 24 (2), 169-176.
- [9] M. Et, F. Nuray, 2001, “ Δ^m -Statistical convergence”, Indian J. Pure Appl. Math., 6 (32), 961-969.
- [10] Başarır, M., (1995), “On the Δ -statistical convergence of sequences”, Firat University Journal of Science and Engineering, 7 (2), 1-6.
- [11] M. Et, R. Çolak, (1995), “On Some Generalized Difference Sequence Spaces”, Soochow J. Math. 21, No.4, 377-386.
- [12] Çakallı, H., (1996) “On statistical convergence in topological groups” Pure Appl. Math. Sci., 43, No.1-2, 27-31.
- [13] Çakallı, H., (1995) “Lacunary statistical convergence in topological groups”, Indian.J.Pure & Appl. Math., 26, No.2., 113-119.
- [14] Fridy, J.A. and Orhan, C., (1993) “Lacunary statistical summability”, J. Math. Anal. Appl., 173, No.2, 497-504.

ÖZGEÇMİŞ

1979 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 1998 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2002 yılında mezun oldum. Aynı yıl özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalıştım. 2003 yılında Muş İli Bulanık İlçesine matematik öğretmeni olarak atandım. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladım. Bu sebeple Elazığ'a atandım ve Kovancılar Lisesinde bir yıl görev yaptım. 2006 yılında Baskil lisesine atandım ve halen aynı okulda görevimi sürdürmekteyim.

Ümit ÇETİNKAYA