

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Murat KARAKAŞ

(08121202)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Mayıs 2012

HAZİRAN-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ
Murat KARAKAŞ
(08121202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.05.2012

Tezin Savunulduğu Tarih: 04.06.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)

Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA (Y.T.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

HAZİRAN-2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde, engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, doktora eğitimim boyunca hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET' e üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana zamanını ayıran değerli hocalarım Prof. Dr. Rifat ÇOLAK, Yıldız Teknik Üniversitesi öğretim üyesi Prof. Dr. Vatan KARAKAYA, Doç. Dr. Yavuz ALTIN, Yrd. Doç. Dr. Hıfısı ALTINOK ve değerli arkadaşım Arş. Gör. Muhammed ÇINAR'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Murat KARAKAŞ
ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GENEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	1
1.2. Fark Dizi Uzayları.....	4
1.3. Köthe Dizi Uzayı.....	6
1.4. Modüler Uzaylar.....	7
1.5. Cesaro Fark Dizi Uzayları	9
2. BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER	11
3. $C_{(p)}(\Delta_{\lambda}^m)$ DİZİ UZAYI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	14
3.1. $C_{(p)}(\Delta_{\lambda}^m)$ Dizi Uzayı.....	14
3.2. $C_{(p)}(\Delta_{\lambda}^m)$ Dizi Uzayında Kadec Klee Özelliği	15
3.3. $C_{(p)}(\Delta_{\lambda}^m)$ Dizi Uzayında p Tipi Banach Saks Özelliği	26
3.4. $C_{(p)}(\Delta_{\lambda}^m)$ Dizi Uzayında Düzgün Opial Özelliği.....	27
4. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ DİZİ UZAYI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ	32
4.1. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayı.....	32
4.2. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayında k-Nuc Özelliği	33
4.3. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayında Rotundluk.....	40
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ	46

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Banach uzaylarının bazı geometrik özellikleri açıklanmış ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş de la Vallee-Poussin ortalaması yardımıyla $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayı tanımlanmıştır. Bu uzayın bir paranormlu uzay olduğu kanıtlanmış ve modüler uzay olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda, uzayın Lüksemburg normuna göre bir Banach uzay olduğu gösterilip, hem $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayının hem de (p_k) ve (λ_n) 'nin özel durumlarında elde edilen uzayların geometrik özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, lacunary dizisini kullanarak $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı tanımlanmış ve bu uzayın modüler yapısı araştırılmıştır. Daha sonra, Lüksemburg normuyla birlikte göz önüne alınarak k-hemen hemen düzgün konveks (k-NUC) özelliğini sağladığı fakat rotund (kesin konveks) olmadığı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: De la Vallee-Poussin ortalaması, Lacunary dizisi, Lüksemburg normu, Modüler uzay, Rotundluk (kesin konveks)

SUMMARY

Some Geometric Properties Of The Generalized Difference Sequence Spaces

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter, we give some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter, we give some geometric properties of Banach spaces and relations between these properties.

In the third chapter, we define a new difference sequence space $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ by means of the generalized de la Vallee-Poussin mean. Then, we show that the space $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ is paranormed space and modular sequence space. Also, we prove that this space is Banach space equipped with the Luxemburg norm. Later, we study geometric properties of $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ and the spaces which are obtained by special cases of (p_k) and (λ_n) .

In the fourth chapter, we introduce the space $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ by using lacunary sequence and investigate modular structure of this space. Then, we consider the space $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ equipped with the Luxemburg norm and show that it has k-NUC property but is not rotund (strictly convex).

Keywords: De la Vallee-Poussin mean, Lacunary sequence, Luxemburg norm, Modular space, Rotundity (strictly convex)

SİMGELER LİSTESİ

IN	: Doğal sayılar kümesi
IR	: Reel sayılar kümesi
θ	: Lacunary dizisi
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
ρ	: Konveks modül
X_ρ	: Modüler uzay
$\xrightarrow{w}$	: Zayıf yakınsaklık
$\xrightarrow{s}$	: Kuvvetli yakınsaklık
$\ \cdot\ _L$	: Lüksemburg normu
ω	: Reel (ya da kompleks) dizi uzayı
$conv(A)$	: A kümesinin konveks kabuğu
$\overline{conv}(A)$	: A kümesinin kapalı konveks kabuğu
$B(X)$	: X Banach uzayının kapalı birim yuvarı
$S(X)$	: X Banach uzayının birim küresi
$ \sigma_1 $	: Kuvvetli Cesaro yakınsak dizilerin kümesi
N_θ	: Kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1 \cdot x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$ [1].

Tanım 1.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n) \in X$ 'de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisi X 'de yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ yazılır [2].

Tanım 1.1.3. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (α skaler)

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(N3) şartı $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ (α skaler) şeklinde olursa bu takdirde X bir p – normlu uzay olur [3].

Tanım 1.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [1].

Tanım 1.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [1].

Tanım 1.1.6. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay tam ise; yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzay denir [1].

Tanım 1.1.7. X bir K cismi üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X, K)$ Banach uzayına X 'in cebirsel duali denir ve X^* ile gösterilir. X üzerinde tanımlı sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan küme $B(X, K)$ ile gösterilir. $B(X, K) \subset L(X, K)$ olduğu açıktır. $B(X, K) = X'$ eşitliğinde X' ifadesine X in sürekli duali denir [4].

Tanım 1.1.8. X bir normlu uzay ve $X = X''$ ise X uzayına yansımali (reflexive) uzay adı verilir. $\mathbb{R}^n$ ve ℓ_p uzayları yansımali fakat $(c_0)'' = \ell_\infty$ olduğundan c_0 yansımali olmayan bir uzaydır [4].

Tanım 1.1.9. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. $\forall f \in X'$ ve $n \rightarrow \infty$ için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ise (x_n) dizisi x' e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.1.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ise (x_n) dizisi x' e kuvvetli yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{s} x$ şeklinde gösterilir [3].

Tanım 1.1.11. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif bir r sayısı verilsin. Bu takdirde

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi (küre) ad verilir [4].

Tanım 1.1.12. X bir Banach uzay olmak üzere

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı,

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

kümesine ise X uzayının birim küresi denir [1].

Tanım 1.1.13. Kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. ω , $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve, α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω 'nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir. [6]

Tanım 1.1.14. X bir dizi uzay olsun. X bir Banach uzay ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK-uzayı denir [7].

Tanım 1.1.15. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$

olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir [3].

Tanım 1.1.16. Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konvektir denir [3].

Tanım 1.1.17. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Phi(u) + \frac{1}{2}\Phi(v)$$

şartını sağlıyorsa konveks fonksiyon adını alır [8].

Tanım 1.1.18. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu

takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$, $t_k = \frac{p_k}{H} \leq 1$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\} \quad (1.1.1)$$

ve

$$|a_k + b_k|^{t_k} \leq |a_k|^{t_k} + |b_k|^{t_k} \quad (1.1.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

1.2. Fark Dizi Uzayları

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [10] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$,

$c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz, bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [11], $m \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^0 x = (x_k), \quad \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \quad \Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}), \quad \Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}, \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK - uzay olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [12], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genelleştirerek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 1.2.2. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [12].

Teorem 1.2.3. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [12].

Teorem 1.2.4. X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayında konvektir [13].

Teorem 1.2.5. Eğer X , $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzay ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzaydır [12].

Tanım 1.2.6. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

yani h.h.k. için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsaktır

denir. Δ^m - istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$

olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m - istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [12].

Sonuç 1.2.7. $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır [12].

Tanım 1.2.8. p pozitif bir reel sayı ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m – Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m – Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir ve $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazılır [12].

Teorem 1.2.9. $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [12].

Sonuç 1.2.10.

- i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$
- ii) $S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [12].

Tanım 1.2.11. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m – istatistiksel Cauchy dizisi denir [12].

Teorem 1.2.12. Δ^m – istatistiksel yakınsak her dizi Δ^m – istatistiksel Cauchy dizisidir [12].

Teorem 1.2.13. $y = (y_k)$ dizisi Δ^m – istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise bu dizi Δ^m – istatistiksel yakınsak bir dizidir [12].

1.3. Köthe Dizi Uzayı

Tanım 1.3.1. X bir Banach uzay olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa X Banach

uzayına Köthe dizi uzayı adı verilir.

i) $\forall x \in \omega$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|x_i| \leq |y_i|$ şartını sağlayan $y \in X$ için, $x \in X$ ve $\|x\| \leq \|y\|$ dir.

ii) $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x(i) > 0$ şekilde bir $x \in X$ vardır [5].

Tanım 1.3.2. Bir X Köthe dizi uzayında herhangi bir $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(0, 0, 0, \dots, x(n+1), x(n+2), \dots)\| = 0$$

oluyorsa X uzayı kesin sürekli norma sahiptir denir [5].

Tanım 1.3.3. $e_i = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n x(i) e_i \right\| = \|x\|$$

ise X Köthe dizi uzayı A özelliğine sahiptir denir [5].

Tanım 1.3.4. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 \leftarrow x_n(i) \leq |x(i)|$ olacak şekilde bir $x = x(i) \in X$ dizisi için $\|x_n\| \rightarrow 0$ oluyorsa $x = x(i)$ dizisi sıralı sürekli denir. X uzayındaki sıralı sürekli elemanların kümesi X_a ile gösterilir. Eğer $X = X_a$ ise X uzayı sıralı sürekli denir [5].

Tanım 1.3.5. Herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq x_n(i) \rightarrow x(i) \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

oluyorsa X Köthe dizi uzayı monoton tam uzay olarak adlandırılır [5].

1.4. Modüler Uzaylar

Tanım 1.4.1. X bir reel vektör uzay olsun. $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa modül adını alır.

i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $|\alpha| = 1$ şeklinde her α skaleri için $\rho(\alpha x) = \rho(x)$

iii) $\alpha + \beta = 1$ şeklinde $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\forall x, y \in X$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Ayrıca, ρ modülü

iv) $\alpha + \beta = 1$ şeklinde $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\forall x, y \in X$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$

şartını sağlıyorsa konveks olarak adlandırılır [8].

X uzayı üzerinde herhangi bir ρ modülü için,

$$X_\rho = \{x \in X : \rho(\lambda x) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0^+\}$$

şeklinde tanımlanan uzay modüler uzay olarak adlandırılır [8]. X_ρ uzayının elemanlarının bir (x_n) dizisi, $n \rightarrow \infty$ iken $\rho(\lambda(x_n - x)) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ mevcutsa $x \in X_\rho$ 'e modüler yakınsaktır denir [8].

Genellikle bir ρ modülü alt toplamsal değildir ve bu nedenle bir norm ya da uzaklık fonksiyonu olarak düşünülmez. Ancak, bir modülü bir F - normuyla ilişkilendirebiliriz. Öncelikle F - norm kavramını hatırlayalım:

Tanım 1.4.2. Bir $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli,

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $|\alpha| = 1$ olmak üzere $\|\alpha x\| = \|x\|$
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- iv) $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ve $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ise $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \rightarrow 0$

şartlarını sağlıyorsa bir F - normu tanımlar. Bu F - normu X üzerinde $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde bir uzaklık tanımlar ve (X, d) lineer metrik uzay tam ise F - uzay adını alır [8].

X_ρ modüler uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \alpha > 0 : \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanan F - normu ile birlikte göz önüne alınabilir. Eğer ρ bir konveks modül ise

$$\|x\| = \inf \left\{ \alpha > 0 : \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1 \right\}$$

formülü X_ρ üzerinde bir norm tanımlar ve bu norm Lüksemburg normu olarak adlandırılır [8].

Teorem 1.4.3. $(x_n) \subset X_\rho$ alalım. $\|x_n\| \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart $\forall \lambda > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\rho(\lambda(x_n)) \rightarrow 0$ olmasıdır [14].

Tanım 1.4.4. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\rho(x) \leq a$ olmak üzere $\forall x \in X_\rho$ için

$$\rho(2x) \leq K\rho(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde $K \geq 2$ ve $a > 0$ sabitleri varsa, ρ modülü δ_2 şartını sağlar denir ve $\rho \in \delta_2$ ile gösterilir [15].

Tanım 1.4.5. ρ modülü $a > 0$ sayısına bağlı olan $K \geq 2$ sabiti için δ_2 şartını sağlıyorsa, ρ kuvvetli δ_2 şartını sağlıyor denir ve $\rho \in \delta_2^s$ ile gösterilir [15].

Teorem 1.4.6. $\rho \in \delta_2$ ise, X_ρ uzayında norma göre yakınsaklık ile modüler yakınsaklık denktir [15].

Teorem 1.4.7. $\rho \in \delta_2^s$ olsun. $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\rho(u) \leq L$ ve $\rho(v) \leq \zeta$ eşitsizliklerini sağlayan $u, v \in X_\rho$ için

$$|\rho(u+v) - \rho(u)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\zeta > 0$ mevcuttur [15].

Teorem 1.4.8. $\rho \in \delta_2^s$ ise, herhangi $\varepsilon > 0$ için $\rho(x) \geq 1 + \varepsilon$ olmak üzere $\|x\| \geq 1 + \zeta$ olacak şekilde $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ vardır [15].

1.5. Cesaro Fark Dizi Uzayları

Cesaro dizi uzayları ilk olarak 1968 yılında Hollanda Matematik Topluluğu tarafından duallerinin hesaplanması için bir problem olarak ortaya atılmıştır. Leibowitz [16] ve Jagers [17] $ces_1 = \{0\}$ ve $1 < p < \infty$ için ces_p uzaylarının ayrılabilir yansılmalı Banach uzaylar olduğunu kanıtlamıştır. Ancak, bu uzaylar hakkında düzenli bir araştırma 1970 yılında Shiue [18] tarafından yapılmıştır.

ω bütün reel yada kompleks terimli dizilerin uzayı olsun. $1 \leq p < \infty$ için Shiue, Cesaro dizi uzayını

$$ces_p = \left\{ x \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlamıştır ve bu uzay

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right)^{1/p}$$

normu ile donatılmıştır.

$p = (p_k)$ dizisi, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun.

Genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı Suantai [19] tarafından

$$ces_{(p)} = \{x \in \omega : \rho(\lambda x) < \infty, \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ 'lar için}\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\rho(x)$, $ces_{(p)}$ uzayı üzerinde bir konveks modüldür ve

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x(k)| \right)^{p_n}$$

şeklinde tanımlıdır. Daha sonra, Orhan [20] Cesaro fark dizi uzaylarını

$$C_p = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

ve

$$C_{\infty} = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \right| < \infty, n \geq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlamış ve $1 \leq p < \infty$ için $Ces_p \subset X_p \subset C_p$ bağıntısının kesin olduğunu göstermiştir. Daha sonra

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C_p(\Delta^m)$ genelleştirilmiş Cesaro fark dizi uzayı Et [21] tarafından

$$\Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \quad \Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}) \quad \text{ve} \quad \Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$C_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzay olduğu gösterilmiştir.

2. BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Tanım 2.1. (Extremum nokta) Bir $x \in S(X)$ noktası verilsin. Herhangi $y, z \in B(X)$ için $2x = y + z \Rightarrow y = z$ eşitliği sağlanıyorsa $x \in S(X)$ noktasına extremum nokta adı verilir [22].

Tanım 2.2. (Rotund uzay) $\forall x \in S(X)$ noktası $B(X)$ in bir extremum noktası ise X Banach uzayına rotund adı verilir [22].

Örnek 2.3. $x = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ve $y = (0, -1, 0, 0, \dots)$ alalım. Bu takdirde $x, y \in \ell_1$ ve $\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| = 1$ dir. Yani ℓ_1 rotund uzay değildir [23].

Tanım 2.4. (Düzgün konveks uzay) X bir Banach uzay olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $x, y \in S(X)$ için

$$\|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1 - \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcutsa X Banach uzayı düzgün konvektir denir [24].

Örnek 2.5. $1 < p < \infty$ için L_p uzayları düzgün konvektir [25].

Örnek 2.6. Hilbert uzayları paralelkenar kuralının bir sonucu olarak düzgün konveks uzaylardır [26].

Tanım 2.7. (ε – Ayrılmış dizi) $\varepsilon > 0$ için

$$sep(x_n) = \inf \{ \|x_n - x_m\| : n \neq m \} > \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi mevcutsa bu diziye ε – ayrılmış dizi adı verilir [24].

Tanım 2.8. (NUC uzay) $\varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) > \varepsilon$ olmak üzere her $(x_n) \subset B(X)$ dizisi için $conv(x_n) \cap ((1 - \delta)B(X)) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, 1)$ sayısı varsa X Banach uzayına (NUC) uzay adı verilir [24].

Tanım 2.9. (k-NUC uzay) Bir X Banach uzayı $\varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) > \varepsilon$ olmak üzere herhangi bir $(x_n) \subset B(X)$ dizisi için

$$\left\| \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k} \right\| < 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $(k - NUC)$ uzay olarak adlandırılır [24].

Tanım 2.10. (Drop özelliği) Herhangi $x \notin B(X)$ için x ile tanımlanan "drop" kümesi

$$D(x, B(X)) = \text{conv}(\{x\} \cup B(X))$$

şeklinde tanımlıdır. $B(X)$ ile ayrık olan her kapalı C kümesi için

$$D(x, B(X)) \cap C = \{x\}$$

olacak şekilde bir $x \in C$ mevcutsa X Banach uzayı drop özelliğine sahiptir denir [24].

Tanım 2.11. (Kadec-Klee (H) özelliği) Birim küre üzerindeki her zayıf yakınsak dizi norma göre yakınsak ise X Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine ((H) özelliği) sahiptir denir [23].

Tanım 2.12. Bir X Banach uzayının sınırlı bir A alt kümesi için non-kompakt olmanın yuvar ölçümü

$$\beta(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \text{çapı} \leq \varepsilon \text{ olan sonlu çokluktaki yuvarlarla örtülebilir} \}$$

şeklinde tanımlanır. $\beta(A)$ fonksiyonuna kompakt olmamanın Hausdorff ölçümü adı verilir [27].

Tanım 2.13. Bir X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi A olsun. A kümesinin çapı

$$\text{diam} A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$$

şeklinde tanımlıdır [28].

Tanım 2.14. (Normal yapı) X yansımali bir Banach uzayı ve A , X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi olsun. $\forall x \in A$ için $r(x, A) = \sup \{ \|x - y\| : y \in A \}$ olmak üzere A kümesinin Chebyhsev yarıçapı

$$R(A) = \min \{ r(x, A) : x \in A \}$$

şeklinde tanımlıdır. X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks, birden fazla elemana sahip her A alt kümesi için $R(A) < \text{diam} A$ şartı sağlanıyorsa X Banach uzayı normal yapıya sahiptir denir [27].

Tanım 2.15. (Opial özelliği) Bir X Banach uzayında sıfıra zayıf yakınsak herhangi $\{x_n\}$ dizisi ve herhangi $x \in X - \{0\}$ için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

şartı sağlanıyorsa X Banach uzayı Opial özelliğine sahiptir denir [29].

Tanım 2.16. (Düzgün Opial özelliği) $\varepsilon > 0$ verilsin. $\|x\| \geq \varepsilon$ olmak üzere herhangi bir $x \in X$ ve sıfıra zayıf yakınsak $\{x_n\} \subset S(X)$ dizisi için $1 + r < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\|$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa X Banach uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir denir [29].

Tanım 2.17. (L özelliği) $\beta(A)$, kompakt olmamanın Hausdorff ölçümü olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için kompakt olmamanın konvekslik modülü

$$\Delta(\varepsilon) = \inf \{1 - \inf(\|x\| : x \in A) : \beta(A) \geq \varepsilon \text{ olan } A, B(X) \text{ in alt kümesi}\}$$

şeklinde tanımlıdır. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \Delta(\varepsilon) = 1$ oluyorsa X Banach uzayı L özelliğine sahiptir denir [29].

Teorem 2.18. X Banach uzayının L özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart X uzayının yansılmalı ve düzgün Opial özelliğine sahip olmasıdır [29].

Tanım 2.19. (Nonexpansive dönüşüm) X bir Banach uzay ve $A \subset X$ olsun. $x, y \in A$ için $\|Ux - Uy\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa $U : A \rightarrow X$ dönüşümüne nonexpansive dönüşüm adı verilir [29].

Tanım 2.20. (Sabit nokta özelliği) Sınırlı, kapalı, konveks her $A \neq \emptyset$ kümesi ve her $U : A \rightarrow A$ nonexpansive dönüşümü için $U(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in A$ varsa X Banach uzayı sabit nokta özelliğine sahiptir denir [29].

Teorem 2.21. X , duali X^* olan bir Banach uzayı olsun. X^* L- özelliğine sahipse, X uzayı da sabit nokta özelliğine sahiptir [29].

Tanım 2.22. (p tipi Banach-Saks özelliği) X bir Banach uzay ve $1 < p < \infty$ olsun. X uzayındaki her zayıf yakınsak (x_k) dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $C > 0$ için

$$\left\| \sum_{l=0}^n x_{k_l} \right\| < C(n+1)^{1/p}$$

olacak şekilde bir (x_{k_l}) alt dizisine sahipse X Banach uzayı p tipi Banach-Saks ya da (BS_p) özelliğine sahiptir denir [30].

3. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ DİZİ UZAYI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

3.1. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ Dizi Uzayı

Toplanabilme teorisinde, de la Vallée-Poussin ortalaması ilk olarak Leindler [31] tarafından (V, λ) -toplanabilirliği tanımlamak amacıyla kullanılmıştır.

$\Lambda = (\lambda_k)$, sonsuza giden pozitif reel sayıların azalmayan bir dizisi ve $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k + 1$ olsun. Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması bir $x = (x_k)$ dizisi için $I_k = [k - \lambda_k + 1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$t_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} x_j$$

şeklinde tanımlanır.

De la Vallee Poussin ortalaması kullanılarak aşağıdaki uzaylar tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} [V, \lambda]_0 &= \left\{ x \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} |x_j| = 0 \right\}, \\ [V, \lambda] &= \{ x \in \omega : (x - l e) \in [V, \lambda]_0 \}, \\ [V, \lambda]_\infty &= \left\{ x \in \omega : \sup_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} |x_j| < \infty \right\} \end{aligned}$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = k$ ise bu uzaylar, Maddox [32] tarafından tanımlanan w_0, w ve w_∞ uzaylarına indirgenir.

ω bütün reel dizilerin uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ olmak üzere $p = (p_n)$, pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Şimşek, Savaş ve Karakaya [33] de la vallee poussin ortalamasını kullanarak $V(\lambda, p)$ uzayını

$$V(\lambda, p) = \left\{ x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \sum_{j \in I_k} |x_j| \right)^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Şimdi, $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayını de la Vallee Poussin ortalaması ve

genelleştirilmiş fark operatörü Δ^m 'i kullanarak

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n}$$

olmak üzere

$$C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = \left\{ x \in \omega : \rho_{\Delta_\lambda^m}(\sigma x) < \infty, \exists \sigma > 0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlıyoruz. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayını

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \sigma > 0 : \rho_{\Delta_\lambda^m} \left(\frac{x}{\sigma} \right) \leq 1 \right\} \quad (3.1.1)$$

Lüksemburg normuyla birlikte gözönüne alıyoruz.

$p = (p_k)$ dizisi sınırlı ise bu takdirde

$$C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = \left\{ x = x_k : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde yazılır ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p$ olması durumunda $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı $C_p(\Delta_\lambda^m)$ uzayına indirgenir. λ, p ve m nin özel seçilmesi durumunda aşağıdaki uzaylar elde edilir:

- i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ ve $m = 0$ ise bu takdirde $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = ces_{(p)}$ [19],
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n, p_n = p$ ve $m = 0$ ise bu takdirde $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = ces_p$ [18],
- iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p$ ve $\lambda_n = n$ alınırsa $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = C_p(\Delta^m)$ [21],
- iv) $m = 0$ ise bu takdirde $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) = V(\lambda, p)$ [33].

Çalışma boyunca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 1$ ve $M = \sup_n p_n$ olarak alacağız.

3.2. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ Dizi Uzayında Kadec-Klee Özelliği (H-Özelliği)

Bu kısımda öncelikle $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı üzerinde $\rho_{\Delta_\lambda^m}$ modülünün baz temel özelliklerini vereceğiz. Daha sonra $\rho_{\Delta_\lambda^m}$ modülü ile Lüksemburg normu arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Teorem 3.2.1. $\rho_{\Delta_\lambda^m}$ fonksiyoneli $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı üzerinde bir konveks modüldür.

İspat:

$$\begin{aligned}\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = 0 &\Leftrightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m |x(i)| = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

dir. $|\alpha| = 1$ olacak şekilde her α skaleri için $\rho_{\Delta_\lambda^m}(\alpha x) = \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ olacağı açıktır.

$x, y \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ ise, bu takdirde Δ^m operatörünün lineerliği ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t \rightarrow |t|^{p_n}$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\rho_{\Delta_\lambda^m}(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^m |\alpha x(i) + \beta y(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(\alpha x(k) + \beta y(k))| \right)^{p_n} \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\alpha |x(i)| + \beta |y(i)|) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right) + \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m y(k)| \right) \right)^{p_n} \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^m |x(i)| + \beta \sum_{i=1}^m |y(i)| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\ &\quad + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m y(k)| \right)^{p_n} \\ &= \alpha \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) + \beta \rho_{\Delta_\lambda^m}(y)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.2.2.

a) $H = \max\left(1, M = \sup_k p_k\right)$ olsun. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayı

$$g_{\Delta_\lambda^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}}$$

paranormuyla birlikte bir tam paranormlu uzay,

b) $C_p(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_{C_p(\Delta_\lambda^m)} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir $BK -$ uzayıdır.

İspat: a) (1.1.1), (1.1.2) eşitsizlikleri ve Δ^m operatörünün lineerliği kullanılırsa $\forall x, y \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ için

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k + y_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m y_k| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ve

$$|\alpha|^{p_n} \leq \max\{1, |\alpha|^H\} \quad (3.2.2)$$

yazabiliriz. $g_{\Delta_\lambda^m}(\theta) = 0$ ve $g_{\Delta_\lambda^m}(x) = g_{\Delta_\lambda^m}(-x)$ olduğu açıktır. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitsizlikleri kullanılırsa $g_{\Delta_\lambda^m}$ nin alt toplamsallığı elde edilir.

Şimdi, (x^s) dizisi $g_{\Delta_\lambda^m}(x^s - x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayında herhangi bir dizi ve (α_n) , $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olacak şekilde herhangi bir skaler dizi olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} g_{\Delta_\lambda^m}(x^s) &= \sum_{i=1}^m |x_i^s| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^s)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i + x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^s - x_k + x_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| + \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^s - x_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\ &= g_{\Delta_\lambda^m}(x) + g_{\Delta_\lambda^m}(x^s - x) \end{aligned}$$

olduğundan $(g_{\Delta_\lambda^m}(x^s))_{s \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}
g_{\Delta_\lambda^m}(\alpha_s x^s - \alpha x) &= \sum_{i=1}^m |\alpha_s x_i^s - \alpha x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(\alpha_s x_k^s - \alpha x_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\
&\leq |\alpha_s - \alpha| \sum_{i=1}^m |x_i^s| + |\alpha| \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \\
&\quad + |\alpha_s - \alpha|^{p_n/H} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^s)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\
&\quad + |\alpha|^{p_n/H} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^s - x_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} \\
&\leq |\alpha_s - \alpha| g_{\Delta_\lambda^m}(x^s) + |\alpha| g_{\Delta_\lambda^m}(x^s - x)
\end{aligned}$$

olup $s \rightarrow \infty$ iken $g_{\Delta_\lambda^m}(\alpha_s x^s - \alpha x) \rightarrow 0$ elde edilir, yani skaler çarpım süreklidir. O halde

$g_{\Delta_\lambda^m}, C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı üzerinde bir paranormdur.

Şimdi $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayının tam olduğunu gösterelim. (x^l) dizisi $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayında $x^l = (x_k^l)_l = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ olmak üzere bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ ve $\forall l, t > n_0$ için

$$g_{\Delta_\lambda^m}(x^l - x^t) = \sum_{i=1}^m |x_i^l - x_i^t| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^l - x_k^t)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} < \varepsilon \quad (3.2.3)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $l, t \rightarrow \infty$ iken

$|x_k^l - x_k^t| \rightarrow 0$ olur. Böylece $(x_k^l)_l = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisi C de bir Cauchy dizisidir ve C tam olduğundan yakınsaktır. $\lim_l x_k^l = x_k$ diyelim. (3.2.3) eşitliğinde $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$l > n_0$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^l - x_i| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_k^l - x_k)| \right)^{p_n} \right)^{\frac{1}{H}} < \varepsilon$$

buluruz. Buradan $(x_k^l - x_k) \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dir. $(x_k^l)_l, (x_k^l - x_k) \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ ve $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı

lineer uzay olduğundan $x_k = (x_k^l) - (x_k^l - x_k) \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayı tamdır.

b) $1 \leq p < \infty$ için $C_p(\Delta_\lambda^m)$ uzayının bir BK – uzayı olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.3 $x \in C_p(\Delta_\lambda^m)$ için $\rho_{\Delta_\lambda^m}$ modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $0 < a < 1$ ise , bu takdirde $a^M \rho_{\Delta_\lambda^m}(\frac{x}{a}) \leq \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ ve $\rho_{\Delta_\lambda^m}(ax) \leq a \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$,

ii) $a \geq 1$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq a^M \rho_{\Delta_\lambda^m}(\frac{x}{a})$,

iii) $a \geq 1$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq a \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \rho_{\Delta_\lambda^m}(ax)$.

İspat: i) $0 < a < 1$ için

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) &= \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\ &= \sum_{i=1}^m a \left| \frac{x(i)}{a} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} a^{p_n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta^m x(k)}{a} \right| \right)^{p_n} \\ &\geq a^M \sum_{i=1}^m \left| \frac{x(i)}{a} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} a^M \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta^m x(k)}{a} \right| \right)^{p_n} = a^M \rho_{\Delta_\lambda^m} \left(\frac{x}{a} \right), \end{aligned}$$

olur ve $\rho_{\Delta_\lambda^m}$ nın konveksliğinden $\rho_{\Delta_\lambda^m}(ax) \leq a \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ olduğu görülür ve buradan (i) sağlanır.

ii) $a \geq 1$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) &= \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\ &= \sum_{i=1}^m a \left| \frac{x(i)}{a} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} a^{p_n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta^m x(k)}{a} \right| \right)^{p_n} \\ &\leq a^M \left(\sum_{i=1}^m \left| \frac{x(i)}{a} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta^m x(k)}{a} \right| \right)^{p_n} \right) = a^M \rho_{\Delta_\lambda^m} \left(\frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

buluruz. Böylece (ii) elde edilir.

iii) $a \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) &= \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\
&\leq a \sum_{i=1}^m |x(i)| + a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} = a \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^m |ax(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} a^{p_n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\
&= \sum_{i=1}^m |ax(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^n |a \Delta^m x(k)| \right)^{p_n} = \rho_{\Delta_\lambda^m}(ax)
\end{aligned}$$

olur ve buradan $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq a \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \rho_{\Delta_\lambda^m}(ax)$ elde edilir.

Teorem 3.2.4. Herhangi bir $x \in C_p(\Delta_\lambda^m)$ için ,

- i) $\|x\|_L < 1$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \|x\|_L$,
- ii) $\|x\|_L > 1$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \geq \|x\|_L$,
- iii) $\|x\|_L = 1 \Leftrightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = 1$,
- iv) $\|x\|_L < 1 \Leftrightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < 1$,
- v) $\|x\|_L > 1 \Leftrightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) > 1$,
- vi) $0 < a < 1$ ve $\|x\|_L > a$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) > a^M$,
- vii) $a \geq 1$ ve $\|x\|_L < a$ ise , bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < a^M$ dir.

İspat: (i) $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|_L$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\|x\|_L + \varepsilon < 1$ olur. $\|\cdot\|_L$

nin tanımından, $\|x\|_L + \varepsilon > \sigma$ ve $\rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \leq 1$ olacak şekilde $\sigma > 0$ mevcuttur. Teorem 3.2.3

(i) ve (iii)'den,

$$\begin{aligned}
\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) &\leq \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{(\|x\|_L + \varepsilon)}{\sigma} x\right) = \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\left(\|x\|_L + \varepsilon\right) \frac{x}{\sigma}\right) \\
&\leq (\|x\|_L + \varepsilon) \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \leq \|x\|_L + \varepsilon,
\end{aligned}$$

olur ki bu $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \|x\|_L$ olduğunu gösterir. Böylece (i) sağlanmış olur.

ii) $0 < \varepsilon < \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\varepsilon < \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L} &\Rightarrow \varepsilon < 1 - \frac{1}{\|x\|_L} \\ &\Rightarrow 1 < (1 - \varepsilon)\|x\|_L \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{(1 - \varepsilon)\|x\|_L} < 1\end{aligned}$$

dir. $\|\cdot\|_L$ nin tanımını ve Teorem 3.2.3 (i)'den

$$1 < \rho_{\Delta_\lambda^m} \left(\frac{x}{(1 - \varepsilon)\|x\|_L} \right) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)\|x\|_L} \rho_{\Delta_\lambda^m},$$

ve dolayısıyla $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L}\right)$ için $(1 - \varepsilon)\|x\|_L < \rho_{\Delta_\lambda^m}$ olur. Buradan $\|x\|_L \leq \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ bulunur

ve (ii) sağlanır.

iii) $\|x\|_L = 1$ olduğunu kabul edelim. $\|\cdot\|_L$ nin tanımından, $\varepsilon > 0$ için $1 + \varepsilon > \sigma > \|x\|_L$ ve $\rho_{\Delta_\lambda^m}(\frac{x}{\sigma}) \leq 1$ olacak şekilde $\sigma > 0$ mevcuttur. Teorem 3.2.3 (ii) den,

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \sigma^M \rho_{\Delta_\lambda^m}(\frac{x}{\sigma}) \leq \sigma^M < (1 + \varepsilon)^M$$

olur. Buradan $\varepsilon > 0$ için $(\rho_{\Delta_\lambda^m}(x))^{\frac{1}{M}} < 1 + \varepsilon$ olur ki bu $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq 1$ olduğunu gösterir.

$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < 1$ ise, bu takdirde $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < a^M < 1$ olacak şekilde $a \in (0, 1)$ seçebiliriz. Teorem 3.2.3 (i) den,

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(\frac{x}{a}) \leq \frac{1}{a^M} \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < 1$$

buluruz. Buradan $\|x\|_L \leq a < 1$ olup bu bir çelişkidir. Böylece $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = 1$ dir.

Şimdi $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\|x\|_L \leq 1$ dir. $\|x\|_L < 1$ ise, (i)'den

$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq \|x\|_L < 1$ olup bu kabulümüzle çelişir. O halde $\|x\|_L = 1$ dir.

iv) (i) ve (iii)'den açıktır.

v) (iii) ve (iv)'den açıktır.

vi) $0 < a < 1$ ve $\|x\|_L > a$ olsun. Bu durumda $\left\|\frac{x}{a}\right\|_L > 1$ dir. (v)'den, $\rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{a}\right) > 1$ olur.

Böylece Teorem 3.2.3 (i)'den

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \geq a^M \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{a}\right) > a^M$$

elde edilir.

vii) $a \geq 1$ ve $\|x\|_L < a$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\left\|\frac{x}{a}\right\|_L < 1$ dir. (iv)'den,

$\rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{a}\right) < 1$ olur. $a = 1$ ise, $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) < 1 = a^M$ olduğu açıktır. $a > 1$ ise, bu durumda Teorem

3.2.2 (ii)'den

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) \leq a^M \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x}{a}\right) < a^M$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayı (3.1.1) de tanımlanan Lüksemburg normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat: $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayının (3.1.1) normuna göre bir normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayının tam olduğunu gösterelim. Bunun için (x^s) dizisi $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayında bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. $H = \max\{1, M\}$ olmak üzere, $\forall s, t \geq n_0$ için

$$\|x_s - x_t\|_L = \inf \left\{ \sigma > 0 : \rho_{\Delta_\lambda^m}\left(\frac{x_s - x_t}{\sigma}\right) \leq 1 \right\} < \varepsilon^H$$

olacak şekilde n_0 sayısı vardır. Teorem 3.2.4 (i) 'den, $\forall s, t \geq n_0$ için

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x_t) < \|x_s - x_t\|_L < \varepsilon^H \quad (3.2.4)$$

olur ki bu

$$\sum_{i=1}^m |x_s(i) - x_t(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_s(k) - x_t(k))| \right)^{p_n} < \varepsilon$$

olması demektir. Buradan

$$\sum_{i=1}^m |x_s(i) - x_t(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_s(k) - x_t(k))| \right)^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Bu takdirde $i \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_s(i) - x_t(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. Böylece $(x_t(i))$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ tam olduğundan yakınsaktır yani $t \rightarrow \infty$ iken $x_t(i) \rightarrow x(i)$ dir. O halde $\forall s \geq n_0$ için

$$|x_s(i) - x(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m(x_s(k) - x(k))| \right)^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. (3.2.4) eşitsizliğinde $\forall s \geq n_0$ için $t \rightarrow \infty$ iken

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x_t) \rightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\forall s \geq n_0$ için

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x) < \|x_s - x\|_L < \varepsilon$$

elde edilir. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ bir lineer uzay olduğundan $x = x_{n_0} - (x_{n_0} - x) \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6. $(x_s) \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ olsun. Bu takdirde,

i) $s \rightarrow \infty$ iken $\|x_s\|_L \rightarrow 1$ ise , bu durumda $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow 1$,

ii) $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow 0$ ise , bu durumda $\|x_s\|_L \rightarrow 0$ dir.

İspat: i) $s \rightarrow \infty$ iken $\|x_s\|_L \rightarrow 1$ olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon \in (0,1)$ alalım. Bu takdirde

$\forall s \geq N$ için $1 - \varepsilon < \|x_s\|_L < 1 + \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Teorem 3.2.4 (vi) ve

(vii)'den $\forall s \geq N$ için $(1-\varepsilon)^M < \rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) < (1+\varepsilon)^M$ olur ki bu $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow 1$ olması demektir.

ii) $s \rightarrow \infty$ iken $\|x_s\|_L \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{s_k}\|_L > \varepsilon$ olacak şekilde (x_s) dizisinin bir (x_{s_k}) alt dizisi ve vardır. Teorem 3.2.4 (vi) dan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_{s_k}) > \varepsilon^M$ olur. Bu ise $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow 0$ olmasıdır.

Şimdi, yukarıdaki özellikleri kullanarak $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ uzayının (H) - özelliğini sağladığını göstereceğiz. Bunun için önce aşağıdaki teoremi vereceğiz:

Teorem 3.2.7. $x \in C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ ve $(x_s) \subseteq C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ olsun. $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ ve

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_s(k) \rightarrow \Delta^m x(k)$ ise, bu takdirde $s \rightarrow \infty$ iken $x_s \rightarrow x$ dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} < \infty \quad (3.2.5)$$

olduğundan,

$$\sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^{M+1}}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_s(k) \rightarrow \Delta^m x(k)$ olduğundan

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k)| \right)^{p_n} \rightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \quad (3.2.6)$$

olur. Böylece $\forall s \geq n_0$ için

$$\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k)| \right)^{p_n} < \rho_{\Delta_\lambda^m}(x) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \quad (3.2.7)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k) - \Delta^m x(k)| \right)^{p_n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) den $s \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x) &= \sum_{i=1}^m |x_s(i) - x(i)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k) - \Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\
&\leq \sum_{i=1}^m |x_s(i)| + \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k) - \Delta^m x(k)| \right)^{p_n} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k) - \Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\sum_{i=1}^m |x_s(i)| + \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k)| \right)^{p_n} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_s(k)| \right)^{p_n} + \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \right) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) - \sum_{n=1}^{k_0} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \right) + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} + \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(2 \sum_{i=1}^m |x(i)| + 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_n} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left(2 \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^{M+1}} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s - x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. Böylece Teorem 3.2.6 (ii) den

$s \rightarrow \infty$ iken $\|x_s - x\|_L \rightarrow 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.8. $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayı (H) - özelliğine sahiptir.

İspat: $s \rightarrow \infty$ iken $\|x_s\|_L \rightarrow 1$ ve $x_s \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde $x \in S(C_{(p)}(\Delta_\lambda^m))$ ve $(x_s) \subseteq C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ alalım. Teorem 3.2.4 (iii)'den $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x) = 1$ olur ve dolayısıyla Teorem 3.2.6 (i)'den $s \rightarrow \infty$ iken $\rho_{\Delta_\lambda^m}(x_s) \rightarrow \rho_{\Delta_\lambda^m}(x)$ olduğu görülür. $\tau_k(y) = \Delta^m y(k)$ şeklinde tanımlanan $\tau_k : C_{(p)}(\Delta_\lambda^m) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $C_{(p)}(\Delta_\lambda^m)$ üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $s \rightarrow \infty$ iken $\Delta^m x_s(k) \rightarrow \Delta^m x(k)$ olur ve böylece Teorem

3.2.7'den $s \rightarrow \infty$ iken $x_s \rightarrow x$ elde edilir.

3.3. $C_p(\Delta_\lambda^m)$ Dizi Uzayında p-Tipi Banach Saks Özelliği

Teorem 3.2.2 (b) şikkından $C_p(\Delta_\lambda^m)$ uzayının bir Banach uzay olduğu bilinmektedir. Şimdi $C_p(\Delta_\lambda^m)$ dizi uzayının $m=1$ için (BS_p) özelliğini sağladığını gösterelim.

Teorem 3.3.1. $C_p(\lambda, \Delta)$ uzayı p tipi Banach-Saks özelliğine sahiptir.

İspat: (ε_n) dizisi, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve $(x_n), B(C_p(\Delta_\lambda))$

da sıfıra zayıf yakınsak bir dizi olsun. $x_0 = 0$ ve $z_1 = x_{n_1} = \Delta x_1$ alalım. Bu takdirde

$$\left\| \sum_{i=s_1+1}^{\infty} z_1(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde $s_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $x_n \xrightarrow{w} 0$ iken $x_n \rightarrow 0$ olduğundan, $n \geq n_2$ için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_1} x_n(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $z_2 = x_{n_2} = \Delta x_2$ alalım. Bu takdirde

$$\left\| \sum_{i=s_2+1}^{\infty} z_2(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde $s_1 < s_2 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $x_n \rightarrow 0$ olduğundan, $n \geq n_3$ için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_2} x_n(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde $n_2 < n_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $z_j = x_{n_j} = \Delta x_j$ olmak üzere

$n \geq n_{j+1}$ için

$$\left\| \sum_{i=1}^{s_j} x_n(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_j$$

ve

$$\left\| \sum_{i=s_j+1}^{\infty} z_j(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < \varepsilon_j,$$

olacak şekilde (s_i) ve (n_i) artan dizileri bulabiliriz.

$\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j < 1$ olduğundan, $\|x\|_{C_p(\Delta_\lambda)} < 1$ ve dolayısıyla $\|x\|_{C_p(\Delta_\lambda)}^p < 1$ olur.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} &= \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{s_{j-1}} z_j(i) e_i + \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i + \sum_{i=s_j+1}^{\infty} z_j(i) e_i \right) \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{s_{j-1}} z_j(i) e_i \right) \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} + \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=s_j+1}^{\infty} z_j(i) e_i \right) \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left\| \left(\sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right) \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} + 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} z_j(i) e_i \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)}^p &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \left(\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \in I_i} |z_j(i)| \right)^p \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k \in I_i} |z_j(i)| \right)^p \leq n \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

buluruz. Böylece (3.3.1) ve (3.3.2) yi kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\left\| \sum_{j=1}^n z_j \right\|_{C_p(\Delta_\lambda)} \leq n^{\frac{1}{p}} + 1 \leq 2n^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

3.4. $C_{(p)}(\Delta^m)$ Dizi Uzayında Düzgün Opial Özelliği

Düzgün opial özelliği, Banach uzaylarının geometrisinde önemli bir yere sahiptir. Bu özellik, sabit noktaların varlığıyla kuvvetli bir bağı olmasından dolayı Banach uzaylarının sabit nokta

teorisinde önemli bir rol oynar. Bu kısımda $C_{(p)}(\Delta^m_\lambda)$ uzayının $\lambda_n = n$ özel durumunda elde edilen $C_{(p)}(\Delta^m)$ dizi uzayının düzgün opial özelliğini inceleyeceğiz. Bunun için ilk önce düşüncemizde bize yardımcı olacak aşağıdaki 3 teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.4.1. $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2$ ise, $C_{(p)}(\Delta^m)$ uzayında norma göre yakınsaklık ve modüler yakınsaklık denktir.

Teorem 3.4.2. $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olsun. $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\rho_{\Delta^m}(u) \leq L$ ve $\rho_{\Delta^m}(v) \leq \zeta$ eşitsizliklerini sağlayan $u, v \in C_{(p)}(\Delta^m)$ için

$$|\rho_{\Delta^m}(u+v) - \rho_{\Delta^m}(u)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\zeta > 0$ mevcuttur.

Teorem 3.4.3. $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ ise, herhangi $\varepsilon > 0$ için $\rho_{\Delta^m}(x) \geq 1 + \varepsilon$ olmak üzere $\|x\|_L \geq 1 + \zeta$ olacak şekilde $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ vardır.

Teorem 3.4.4. $\limsup_{r \rightarrow \infty} p_r < \infty$ ise bu takdirde $C_{(p)}(\Delta^m)$ uzayı düzgün opial özelliğine sahiptir.

İspat: $\|x\|_L \geq \varepsilon$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ ve $x \in C_{(p)}(\Delta^m)$ alalım. (x_n) dizisi $S(C_{(p)}(\Delta^m))$ birim küresinde sıfıra zayıf yakınsak bir dizi, yani $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. $\limsup_{r \rightarrow \infty} p_r < \infty$, yani $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olduğundan Teorem 3.4.1'den $\rho_{\Delta^m}(x) > \zeta$ olacak şekilde x 'den bağımsız bir $\zeta \in (0,1)$ vardır. Ayrıca $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olduğundan Teorem 3.4.2'den $\rho_{\Delta^m}(y) \leq 1$ ve $\rho_{\Delta^m}(z) \leq \zeta_1$ olmak üzere

$$|\rho_{\Delta^m}(y+z) - \rho_{\Delta^m}(y)| < \frac{\zeta}{4} \quad (3.4.1)$$

olacak şekilde $\zeta_1 \in (0, \zeta)$ mevcuttur. Şimdi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} &< \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\ &< \frac{\zeta_1}{4} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. Buradan,

$$\begin{aligned}
\zeta &< \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\
&\leq \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} + \frac{\zeta_1}{4}
\end{aligned}$$

olur ki bu

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x(i)| \right)^{p_r} &> \zeta - \frac{\zeta_1}{4} \\
&> \zeta - \frac{\zeta}{4} \\
&= \frac{3\zeta}{4}
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

olmasını gerektirir. $x_n \xrightarrow{w} 0$ ise $x_n \rightarrow 0$ olduğundan ve (3.4.3) 'den $\forall n > n_0$ için

$$\frac{3\zeta}{4} < \sum_{i=1}^m |x_n(i) + x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x_n(i) + \Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \tag{3.4.4}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $x_n \rightarrow 0$ olduğundan $\forall r \in \mathbb{N}$ için $p_r \leq M \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n > n_1$ için

$$\|x_{n_1}\| < 1 - \left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}$$

olacak şekilde $n_1 > n_0$ vardır. O halde üçgen eşitsizliğinden

$$\|x_{n_1}\| > \left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}$$

bulunur. Lüksemburg normunun tanımından

$$\begin{aligned}
1 &\leq \rho_{\Delta^m} \left(\frac{x_{n_1}}{\left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_n(i)}{\left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}} \right| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x_n(i)|}{\left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}} \right)^{p_r}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)} \sum_{i=1}^m |x_n(i)| + \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{4}\right)^{1/M}} \right)^M \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x_n(i)| \right)^{p_r}$$

olduğu görülür ki bu $\forall n > n_1$ için

$$1 - \frac{\zeta}{4} \leq \sum_{i=1}^m |x_n(i)| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x_n(i)| \right)^{p_r} \quad (3.4.5)$$

olması demektir.

(3.4.1), (3.4.2), (3.4.4), (3.4.5) eşitsizlikleri, Δ^m operatörünün lineerliği ve $x_n \rightarrow 0$ olduğundan herhangi $n > n_1$ için

$$\begin{aligned} \rho_{\Delta^m}(x_n + x) &= \sum_{i=1}^m |x_n(i) + x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x_n(i) + \Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\ &\quad + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x_n(i) + \Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\ &> \sum_{i=1}^m |x_n(i) + x(i)| + \sum_{r=1}^{r_0} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta^m x_n(i) + \Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\ &\quad + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x_n(i) + \Delta^m x(i)| \right)^{p_r} \\ &\geq \frac{3\zeta}{4} + \sum_{i=1}^m |x_n(i)| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{i=r_0+1}^r |\Delta^m x_n(i)| \right)^{p_r} - \frac{\zeta}{4} \\ &\geq \frac{3\zeta}{4} + \left(1 - \frac{\zeta}{4}\right) - \frac{\zeta}{4} \\ &= 1 + \frac{\zeta}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olduğundan Teorem 3.4.3 gereğince $\|x_n + x\|_L \geq 1 + \tau$ olacak şekilde yalnızca ζ 'ya bağlı bir τ sayısının var olduğu görülür. Bu ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \geq 1 + \tau$ olmasıdır. O halde ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.5. $C_p(\Delta^m)$ uzayı düzgün opial özelliğine sahiptir.

Sonuç 3.4.6. $C_{(p)}(\Delta^m)$ uzayı L – özelliğine ve sabit nokta özelliğine sahiptir.

Sonuç 3.4.7. $C_p(\Delta^m)$ uzayı L – özelliğine ve sabit nokta özelliğine sahiptir.

4. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ DİZİ UZAYI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

4.1. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayı

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir [33].

$\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Bu çalışmada

$$\sum_{i=k_{r-1}+1} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli Cesáro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Cesáro yakınsak dizilerin cümlesi

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir. $|\sigma_1|$ uzayı $\|x\| = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)$ normu ile bir BK - uzayıdır [1].

Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin cümlesi

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \tau_r \equiv \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \rightarrow 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [34].

N_θ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| \right)$ normu ile bir BK - uzayıdır. $\theta = (2^r)$ olması halinde

$N_\theta = |\sigma_1|$ dir.

ω bütün reel dizilerin uzayı ve $\forall r \in \mathbb{N}$ için $p_r \geq 1$ olmak üzere $p = (p_r)$, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayını lacunary dizisi yardımıyla

$$\ell(p, \theta, \Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k| \right)^{p_r} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıyoruz.

$\theta = (k_r)$ dizisi ve m doğal sayısının özel durumlarında, aşağıda verilen uzayları elde ederiz:

i) $\theta = (2^r)$ ve $m = 0$ ise, bu takdirde $\ell(p, \theta, \Delta^m) = ces_{(p)}$ [19],

ii) $\theta = (2^r)$, $p_r = p$ ve $m = 0$ alınırsa $\ell(p, \theta, \Delta^m) = ces_p$ [18],

iii) $\forall r \in \mathbb{N}$ için $p_r = p$ ise $\ell(p, \theta, \Delta^m) = \ell_p(\theta, \Delta^m)$,

iv) $\theta = (2^r)$ ise $\ell(p, \theta, \Delta^m) = \ell(p, \Delta^m)$,

v) $m = 0$ ise, bu takdirde $\ell(p, \theta, \Delta^m) = \ell(p, \theta)$ [35].

Bu kısım boyunca $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ dizi uzayını

$$\sigma_{\Delta^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k| \right)^{p_r}$$

olmak üzere

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sigma_{\Delta^m} \left(\frac{x}{\rho} \right) \leq 1 \right\} \quad (4.1.1)$$

Lüxemburg normuyla birlikte gözönüne alıyoruz.

4.2. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayında k-NUC Özelliği

Bu kısımda $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayının bir modüler uzay olduğunu ve k-NUC özelliğini sağladığını göstereceğiz ve buna ilişkin bazı sonuçlar vereceğiz.

Teorem 4.2.1. σ_{Δ^m} fonksiyoneli $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı üzerinde bir konveks modüldür.

İspat:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta^m}(x) = 0 &\Leftrightarrow \sigma_{\Delta^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_r} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m |x(i)| = 0 \text{ and } \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_r} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

dir. $|\alpha|=1$ olacak şekilde her α skaleri için $\sigma_{\Delta^m}(\alpha x) = \sigma_{\Delta^m}(x)$ olacağı açıktır.

$x, y \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ ise, bu takdirde Δ^m operatörünün lineerliği ve $\forall r \in \mathbb{N}$ için $t \rightarrow |t|^{p_r}$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta^m}(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^m |\alpha x(i) + \beta y(i)| + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m(\alpha x(k) + \beta y(k))| \right)^{p_r} \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\alpha |x(i)| + \beta |y(i)|) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right) + \beta \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m y(k)| \right) \right)^{p_r} \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^m |x(i)| + \beta \sum_{i=1}^m |y(i)| + \alpha \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_r} + \beta \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m y(k)| \right)^{p_r} \\ &= \alpha \sigma_{\Delta^m}(x) + \beta \sigma_{\Delta^m}(y)\end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 3.2.2 nin ispatına benzerdir. Bu nedenle ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 4.2.2.

a) $H = \max(1, M = \sup p_r)$ olsun. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ dizi uzayı

$$\mu_{\Delta^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_r} \right)^{1/H}$$

paranormuyla bir tam paranormlu uzay,

b) $\ell_p(\theta, \Delta^m)$ dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_{\ell_p(\theta, \Delta^m)} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k| \right)^p \right)^{1/p}$$

normuna göre bir $BK -$ uzayıdır.

Teorem 4.2.3. $\liminf q_r > 1$ ise, bu takdirde $\ell(p, \Delta^m) \subset \ell(p, \theta, \Delta^m)$ dir.

İspat: $\liminf q_r > 1$ ise, bu takdirde $\forall r \geq 2$ için $q_r > 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur. Bu durumda $x \in \ell(p, \Delta^m)$ için $K = \max\{1, 2^{H-1}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} &= \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| - \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \\ &\leq K \left[\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \right] \\ &= K \left[\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{k_r}{h_r} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{k_{r-1}}{h_r} \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \right] \end{aligned}$$

olur. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r} < \frac{1+\delta}{\delta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}}{h_r} < \frac{1}{\delta} \quad (4.2.1)$$

buluruz. (4.2.1) 'i kullanarak

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \leq K \left[\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \right]$$

elde edilir. $x \in \ell(p, \Delta^m)$ olduğundan

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} < \infty$$

ve

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} < \infty$$

olur ve dolayısıyla $x \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ dir.

Teorem 4.2.4. $1 < \limsup q_r < \infty$ ise, bu durumda $\ell(p, \theta, \Delta^m) \subset \ell(p, \Delta^m)$ dir.

İspat: $1 < \limsup q_r < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall r \geq 2$ için $1 < q_r < C$ olacak şekilde pozitif bir C sayısı vardır. t sayısı $k_{r-1} < t \leq k_r$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve $x \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \leq \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |\Delta^m x_i| \right)^{p_i} &\leq K \left[\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \right] \\ &\leq K \left[\sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{h_r}{k_{r-1}} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_i| \right)^{p_r} \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. $\frac{h_r}{k_{r-1}} = \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} = q_r - 1 < C - 1$ olacağından $\ell(p, \theta, \Delta^m) \subset \ell(p, \Delta^m)$ elde edilir

ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki lemmaların ispatı Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 ün ispatına benzerdir. Bu nedenle ispatsız olarak vereceğiz.

Lemma 4.2.5. $x \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ için σ_{Δ^m} modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) $0 < \gamma < 1$ ise, bu takdirde $\gamma^M \sigma_{\Delta^m} \left(\frac{x}{\gamma} \right) \leq \sigma_{\Delta^m}(x)$ ve $\sigma_{\Delta^m}(\gamma x) \leq \gamma \sigma_{\Delta^m}(x)$,
- ii) $\gamma > 1$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) \leq \gamma^M \sigma_{\Delta^m} \left(\frac{x}{\gamma} \right)$,
- iii) $\gamma \geq 1$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) \leq \gamma \sigma_{\Delta^m}(x) \leq \sigma_{\Delta^m}(\gamma x)$.

Lemma 4.2.6. Herhangi bir $x \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ için,

- i) $\|x\| < 1$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) \leq \|x\|$,
- ii) $\|x\| > 1$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) \geq \|x\|$,
- iii) $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \sigma_{\Delta^m}(x) = 1$,
- iv) $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \sigma_{\Delta^m}(x) < 1$,

v) $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \sigma_{\Delta^m}(x) > 1$,

vi) $0 < \gamma < 1$ ve $\|x\| > \gamma$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) > \gamma^M$,

vii) $\gamma \geq 1$ ve $\|x\| < \gamma$ ise, bu takdirde $\sigma_{\Delta^m}(x) < \gamma^M$ dir.

Lemma 4.2.7. $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olsun. $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sigma_{\Delta^m}(u) \leq L$ ve $\sigma_{\Delta^m}(v) \leq \delta$

eşitsizliklerini sağlayan $u, v \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ için

$$|\sigma_{\Delta^m}(u+v) - \sigma_{\Delta^m}(u)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur.

Lemma 4.2.8. i) $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ ise, bu takdirde herhangi $x \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ için $\|x\| = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma_{\Delta^m}(x) = 1$ olmasıdır.

ii) $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ ise, bu takdirde herhangi $(x_n) \subset \ell(p, \theta, \Delta^m)$ dizisi için, $\|x_n\| \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma_{\Delta^m}(x_n) \rightarrow 0$ olmasıdır.

Lemma 4.2.9. $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olsun. Herhangi $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\sigma_{\Delta^m}(x) \leq 1 - \varepsilon$ ise $\|x\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta \in (0, 1)$ mevcuttur.

İspat: Farzedelim ki teorem sağlanmasın. Bu durumda $\sigma_{\Delta^m}(x_n) < 1 - \varepsilon$ ve $\frac{1}{2} \leq \|x_n\| \rightarrow 1$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $x_n \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ vardır. $a_n = \frac{1}{\|x_n\|} - 1$ alalım. Bu durumda $n \rightarrow \infty$

iken $a_n \rightarrow 0$ olur. $L = \sup\{\sigma_{\Delta^m}(2x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olduğundan $\sigma_{\Delta^m}(u) \leq 1$ şartını sağlayan $\forall u \in \ell(p, \theta, \Delta^m)$ için $\sigma_{\Delta^m}(2u) \leq K\sigma_{\Delta^m}(u) + 1$ olacak şekilde $K \geq 2$ sayısı vardır. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_{\Delta^m}(2x_n) \leq K\sigma_{\Delta^m}(x_n) + 1 < K + 1$$

dir. Böylece $0 < L < \infty$ olur. $\sigma_{\Delta^m} \in \delta_2^s$ olduğundan Lemma 4.2.8 (i) 'den

$$\begin{aligned}
1 &= \sigma_{\Delta^m} \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right) = \sigma_{\Delta^m} (x_n (1 + a_n)) \\
&= \sigma_{\Delta^m} (2a_n x_n + (1 - a_n) x_n) \\
&\leq a_n \sigma_{\Delta^m} (2x_n) + (1 - a_n) \sigma_{\Delta^m} (x_n) \\
&\leq a_n L + (1 - a_n) (1 - \varepsilon)
\end{aligned}$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $1 \leq 1 - \varepsilon$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde teoremin şartları doğrudur.

Şimdi bu sonuçları kullanarak $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayının k-NUC özelliğini inceleyelim.

Teorem 4.2.10. Herhangi $k \geq 2$ tamsayısı için $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı k-NUC özelliğini sağlar.

İspat: $\text{sep}(x_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve $(x_n) \subset B(\ell(p, \theta, \Delta^m))$ dizisi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n^l = (0, 0, \dots, 0, x_n(l), x_n(l+1), \dots) \quad (4.2.2)$$

alalım. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için, $(x_n(i))_{n=1}^\infty$ dizisi sınırlı olduğundan (x_n) dizisinin yakınsak bir (x_{n_j}) alt dizisini bulabiliriz. Bu durumda, $\text{sep}((x_{n_j}^l)_{j \geq t_l}) \geq \varepsilon$ olacak şekilde artan bir (t_l)

pozitif tamsayılar dizisi mevcuttur. Böylece $\forall l \in \mathbb{N}$ için $r_1 < r_2 < \dots$ olmak üzere $\|x_{r_l}^l\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

olacak şekilde bir $(r_l)_{l=1}^\infty$ pozitif tamsayılar dizisi vardır. Lemma 4.2.8'den, $\forall l \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_{\Delta^m}(x_{r_l}^l) \geq \zeta \quad (4.2.3)$$

olacak şekilde bir $\zeta > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $1 < \alpha < \liminf p_r$ olacak şekilde $\alpha > 0$

ve $k \geq 2$ tamsayısı için $\varepsilon_1 = \frac{k^{\alpha-1} - 1}{(k-1)k^\alpha} \left(\frac{\zeta}{2} \right)$ alalım. Bu takdirde Lemma 4.2.7'den

$\sigma_{\Delta^m}(u) \leq 1$ ve $\sigma_{\Delta^m}(v) \leq \delta$ olmak üzere

$$|\sigma_{\Delta^m}(u+v) - \sigma_{\Delta^m}(u)| < \varepsilon_1 \quad (4.2.4)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Lemma 4.2.6 (i) 'den her $j \geq l_{k-1}$ için $l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1}$

olmak üzere $\sigma_{\Delta^m}(x_{l_i}^{l_i}) \leq \delta$ ve $\alpha \leq p_j$ olacak şekilde l_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) pozitif tamsayıları

mevcuttur. $l_k = l_{k-1} + 1$ tanımlayalım. $\sigma_{\Delta^m}(x_{r_l}^l) \geq \zeta$ olduğundan $\sigma_{\Delta^m}(r_{l_k}^{l_k}) \geq \zeta$ olur.

$1 \leq i \leq k-1$ için $s_i = i$ ve $s_k = r_{l_k}$ alalım. Bu takdirde (4.2.3) , (4.2.4) , Δ^m

operatörünün lineerliği ve $f_i(u) = |u|^{p_i}$ ($i \in \mathbb{N}$) fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\Delta^m} \left(\frac{x_{s_1} + x_{s_2} + \dots + x_{s_k}}{k} \right) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_{s_1}(i) + x_{s_2}(i) + \dots + x_{s_k}(i)}{k} \right| + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_1}(i) + \Delta^m x_{s_2}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} \\
& = \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_{s_1}(i) + x_{s_2}(i) + \dots + x_{s_k}(i)}{k} \right| + \sum_{r=1}^{l_1} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_1}(i) + \Delta^m x_{s_2}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} \\
& \quad + \sum_{r=l_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_1}(i) + \Delta^m x_{s_2}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} \\
& \leq \sum_{i=1}^m \frac{|x_{s_1}(i)| + |x_{s_2}(i)| + \dots + |x_{s_k}(i)|}{k} + \sum_{r=1}^{l_1} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_1}(i) + \Delta^m x_{s_2}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} \\
& \quad + \sum_{r=l_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_1}(i) + \Delta^m x_{s_2}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} + \varepsilon_1 \\
& \leq \sum_{i=1}^m \frac{|x_{s_1}(i)| + |x_{s_2}(i)| + \dots + |x_{s_k}(i)|}{k} + \sum_{r=1}^{l_1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_j}(i)| \right)^{p_r} \\
& \quad + \sum_{r=l_1+1}^{l_2} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_2}(i) + \Delta^m x_{s_3}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} \\
& \quad + \sum_{r=l_2+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_3}(i) + \Delta^m x_{s_4}(i) + \dots + \Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} + 2\varepsilon_1 \\
& \leq \sum_{i=1}^m \frac{|x_{s_1}(i)| + |x_{s_2}(i)| + \dots + |x_{s_k}(i)|}{k} + \sum_{r=1}^{l_1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_j}(i)| \right)^{p_r} \\
& \quad + \sum_{r=l_1+1}^{l_2} \frac{1}{k} \sum_{j=2}^k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_j}(i)| \right)^{p_r} + \sum_{r=l_2+1}^{l_3} \frac{1}{k} \sum_{j=3}^k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_j}(i)| \right)^{p_r} \\
& \quad + \dots + \sum_{r=l_{k-1}+1}^{l_k} \frac{1}{k} \sum_{j=k-1}^k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_j}(i)| \right)^{p_r} + \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} + (k-1)\varepsilon_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{\sigma_{\Delta^m}(x_{s_1}) + \sigma_{\Delta^m}(x_{s_2}) + \dots + \sigma_{\Delta^m}(x_{s_k})}{k} \right) + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{l_k} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} \\
&\quad + \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \left| \frac{\Delta^m x_{s_k}(i)}{k} \right| \right)^{p_r} + (k-1)\varepsilon_1 \\
&\leq \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{l_k} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} + \frac{1}{k^\alpha} \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} + (k-1)\varepsilon_1 \\
&\leq 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} \right) + \frac{1}{k^\alpha} \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} + (k-1)\varepsilon_1 \\
&\leq 1 + (k-1)\varepsilon_1 - \left(\frac{k^{\alpha-1} - 1}{k^\alpha} \right) \sum_{r=l_k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} |\Delta^m x_{s_k}(i)| \right)^{p_r} \\
&\leq 1 + (k-1)\varepsilon_1 - \left(\frac{k^{\alpha-1} - 1}{k^\alpha} \right) \zeta = 1 - \left(\frac{k^{\alpha-1} - 1}{k^\alpha} \right) \left(\frac{\zeta}{2} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 4.2.9'dan $\left\| \frac{x_{s_1} + x_{s_2} + \dots + x_{s_k}}{k} \right\| < 1 - \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ mevcuttur. Bu

ise $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayının k-NUC uzay olduğunu gösterir. k-NUC özelliği NUC özelliğini, NUC olma özelliği de (H) -özellikliğini gerektirdiğinden ve yansılalılığı sağladığından bu teoremden aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 4.2.11. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı NUC uzaydır.

Sonuç 4.2.12. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı drop özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.13. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı NUC uzay olduğundan yansılalıdır ve (H) - özelliğine sahiptir.

4.3. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ Dizi Uzayında Rotundluk

Teorem 4.3.1. $\forall r \in \mathbb{N}$ için $p = (p_r)$ dizisi, $p_r \geq 1$ olacak şekilde pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ dizi uzayı rotund değildir.

İspat: $x = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ve $y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right)$ dizilerini alalım ve $p_r = p$, $\theta = (k_r) = (2^r)$

seçelim. Bu takdirde

$$\sigma_{\Delta^m}(x) = \sum_{i=1}^m |x(i)| + \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x(k)| \right)^{p_r} \right)^{1/p_r}$$

olmak üzere

$$x = (1, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow \Delta^m x = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

ve

$$y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right) \Rightarrow \Delta^m y = \left(-\frac{m}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right)$$

elde edilir. $\theta = (k_r) = (2^r)$ olduğundan $h_r = k_r - k_{r-1} = 2^r - 2^{r-1} = 2^{r-1}$ ve $I_r = (2^{r-1}, 2^r]$ olur. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta^m}(x) &= 1 + \frac{1}{2^0} \cdot 0 + \frac{1}{2^1} (0 + 0) + \frac{1}{2^2} (0 + 0 + 0 + 0) + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta^m}(y) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} (0 + 0) + \frac{1}{2^2} (0 + 0 + 0 + 0) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\sigma_{\Delta^m}(x) = \sigma_{\Delta^m}(y) = 1$ olup Lemma 4.2.6 (iii) gereğince $\|x\| = \|y\| = 1$ olacağından $x, y \in S(\ell(p, \theta, \Delta^m))$ dir.

Şimdi $z = \frac{x+y}{2}$ olsun. $x = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ve $y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right)$ olduğundan,

$$z = \frac{x+y}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots \right)$$

ve bunu kullanarak

$$\Delta^m z = \Delta^m \left(\frac{x+y}{2} \right) = \left(\frac{2-m}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots \right)$$

bulunur. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta^m}(z) &= \sigma_{\Delta^m}\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2^1}(0+0) + \frac{1}{2^2}(0+0+0+0) + \dots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sigma_{\Delta^m}(z) = \sigma_{\Delta^m}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1$ olduğundan, Lemma 4.2.6 (iii) gereğince

$$\|z\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$$

olur. Bu ise $x = y$ olması demektir. Ancak x ve y farklı dizilerdir yani z extremum nokta değildir. $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayının birim küresi üzerinde extremum nokta olmayan bir nokta mevcut olduğundan $\ell(p, \theta, \Delta^m)$ uzayı rotund yani kesin konveks değildir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bayraktar, M.**, 2006, *Fonksiyonel Analiz*, Fersa Matbaacılık, Ankara.
- [2] **Maddox, I.J.**, 1970, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London.
- [3] **Kreyszig, E.**, 1978, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- [4] **Musayev, B.; Alp, M.**, 2000, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.
- [5] **Cui Y.**, 1998, *Weakly Convergent Sequence Coefficient in Köthe Sequence Spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, 126, 195-201.
- [6] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.**, 1981, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- [7] **Choudary, B. and Nanda, S.**, 1989, *Functional Analysis with Applications*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India.
- [8] **Musielak, J.**, 1983, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.
- [9] **Maddox, I.J.**, 1967, *Spaces of Strongly Summable Sequences*, Quart J. Math. Oxford, (2), 18, 345-355.
- [10] **Kızmaz, H.**, 1981, *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
- [11] **Et, M. and Çolak, R.**, 1995, *On Some Generalized Difference Sequence Spaces*, Soochow J. Math., 21, 377- 386.
- [12] **Et, M. and Nuray, F.**, 2001, Δ^m - *Statistical Convergence*, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.
- [13] **Et, M.**, 2000, *On Some Topological Properties of Generealized Difference Sequence Spaces*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 24 (11), 785-791.

- [14] **Maligranda, M.**, 1989, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Mathematics, vol. 5, Campinas.
- [15] **Cui, Y.A. and Hudzik, H.**, 1998, *On the Uniform Opial Property in Some Modular Sequence Spaces*, Funct. Approx. Comment., 26, 93-102.
- [16] **Leibowitz, G. M.**, 1971, *A Note on the Cesaro Sequence Spaces*, Tamkang Journal of Mathematics, 2 (2), 151-157.
- [17] **Jagers, A. A.**, 1974, *A Note on Cesaro Sequence Spaces*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vol. 22, 113-124.
- [18] **Shiue, J. S.**, 1970, *On the Cesaro Sequence Spaces*, Tamkang Journal of Mathematics, 1 (1), 19-25.
- [19] **Suantai, S.**, 2003, *On Some Convexity Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces*, Georgian Mathematical Journal, 10 (1), 193-200.
- [20] **Orhan, C.**, 1983, *Cesaro Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations*, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser., 32, 55-63.
- [21] **Et, M.**, 1996, *On Some Generalized Cesaro Difference Sequence Spaces*, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Dergisi, 221-229.
- [22] **Cui, Y., Hudzik, H. and Meng, C.**, 1998, *On Some Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped With the Luxemburg Norm*, Acta Math. Hungar., 80, 143-154.
- [23] **Meggison, R. E.**, 1998, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag.
- [24] **Sanhan, W. and Suantai, S.**, 2003, *On k -Nearly Uniform Convex Property in Generalized Cesaro Sequence Spaces*, Hindawi Publishing Corp., 57, 3599-3607.
- [25] **Chidume, C.E.**, 1965, *Geometric Properties of Banach Spaces and Non-linear Iterations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin.

- [26] **Dominguez, T. B.**, 2002, *Geometric Properties of Banach Spaces and Metric Fixed Point Theory*, Extracta Mathematicae, 17, 331-349.
- [27] **Bynum, W. L.**, 1980, *Normal Structure Coefficients for Banach Spaces*, Pacific J. Math., 86, 427-436.
- [28] **Landes, T.**, 1984, *Normal Structure and Weakly Normal Structure of Orlicz Sequence Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 285, 523-534.
- [29] **Prus, S.**, 1992, *Banach Spaces With the Uniform Opial Property*, Nonlinear Anal., 18 (8), 697-704.
- [30] **Savaş, E., Karakaya, V. and Şimşek, N.**, 2009. *Some $\ell(p)$ -Type New Sequence Spaces and Their Geometric Properties*, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, 12pp.
- [31] **Leindler, L.**, 1965, *Über Die Verallgemeinerte de la Vallee-Poussinsche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreihen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16 (3-4), 375-387.
- [32] **Maddox, I. J.**, 1968, *On Kuttner's Theorem*, J. London Math. Soc., 43, 285-290.
- [33] **Şimşek, N., Savaş, E. and Karakaya, V.**, 2010, *Some Geometric and Topological Properties of a New Sequence Space Defined By De La Vallee Poussin Mean*, J. Comput. Anal. Appl., 12 (4), 768-780.
- [34] **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M.**, 1978, *Some Cesàro- type summability spaces*, Proc. Lond. Math. Soc., 37 (3), 508-520.
- [35] **Karakaya, V.**, 2007, *Some Geometric Properties of Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence*, J. Inequal. Appl., Art. ID 81028, 8 pp.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Mersin’de doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Mersin’de tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladım. 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2008 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi programında doktora başladım. 2009 yılında Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım ve Fırat Üniversitesine görevlendirildim. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.