

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDOHİPERBOLİK UZAYDA TİRELİKE BİR EĞRİNİN
TANJANT VE TRİNORMAL KÜRESEL GÖSTERGELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sebil İLHAK

(131121108)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

2016

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PSEUDOHİPERBOLİK UZAYDA TİRELİKE BİR EĞRİNİN
TANJANT VE TRİNORMAL KÜRESEL GÖSTERGELERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Sebil İLHAK
(131121108)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.12.2015

OCAK-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDOHİPERBOLİK UZAYDA TİMELİKE BİR EĞRİNİN
TANJANT VE TRİNORMAL KÜRESEL GÖSTERGELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Sebil İLHAK
(131121108)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.12.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 29.01.2016

Danışman: Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ



Diger Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ



Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ



OCAK-2016

ÖNSÖZ

Seminer konumu yöneten, çalışmalarımda bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ 'a ve çalışmamın şekillenmesinde ilgisini esirgemeyen çok değerli sayın hocam Gülden ALTAY'a minnettarlarımı sunarım.

Sebil İLHAK

ELAZIĞ-2016

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	4
Temel Tanım ve Teoremler	4
3. BÖLÜM	27
H_0^3 de Yatan Bir Time-Like Eğrisinin Teğet Göstergesi	27
S_1^3 de Yatan Bir Time-Like Eğrisinin Trinormal Küresel Göstergesi	45
4. BÖLÜM	58
Sonuç	58
KAYNAKLAR	60

ÖZET

PSEUDOHİPERBOLİK UZAYDA TİRELİKE BİR EĞRİNİN TANJANT VE TRİNORMAL KÜRESEL GÖSTERGELERİ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, küresel gösterge, Minkowski uzayı gibi literatürde yer alan çalışmalara ayrıldı.

İkinci bölümde; uzay eğrileri, manifoldlar, involüt eğriler ve küresel göstergeler için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; Minkowski uzay zamanında Pseudohiperbolik uzayda yatan bir time-like eğrisinin tanjant ve trinormal küresel göstergeleri incelendi.

Dördüncü bölüm ise çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzay zamanı, eğri, involüt eğri, küresel gösterge, geodezik eğrilik.

ABSTRACT

TANGENT AND TRINORMAL SPHERICAL IMAGES OF A TIME-LIKE CURVE ON THE PSEUDOHYPERBOLIC SPACE

This thesis consist of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of space curves, involute curve and spherical images are given.

In the third chapter; tangent and trinormal spherical images of a time-like curve lying on the pseudohyperbolic space H_0^3 in Minkowski space-time are investigated.

The fourth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Euclidean space, Minkowski space-time, curve, involut curve, spherical image.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

$(n-1)$ -boyutlu hiperyüzey üzerindeki bir eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri $\mathbb{E}^n$ de ve $(n-1)$ - boyutlu birim hiperküre ($\mathbb{S}^{n-1}$) üzerinde oluşurlar. Her bir küresel gösterge için yay uzunluğunun, geodezik eğrilğin, küresel involütün bulunması bütün küresel göstergelerin özellikleri genelleştirmek için kullanılır.

Diferensiyellenebilir bir eğrinin her noktasında ortogonal birim vektörlerin bir dördlüsünü ele alıp eğri boyunca bu vektörlerin değişimleri oranları incelendiğinde $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay zamanında eğrinin eğrilikleri elde edilir. Bu küresel göstergeler klasik diferensiyel geometride iyi bilinen kavramlardandır.

Einstein teorisi 20. yy. başlangıcında keyfi Lorentz manifoldunun her sabit tangent uzayına indirgenmiş olan geometri ve özel relativite geometrisi denilen Minkowski space time (zaman uzayı) gibi yeni geometrilere kapı açtı. O günden bugüne konu pek çok geometrici ve bilim insanı tarafından sıklıkla çalışılmaya devam etmektedir, [20].

Ekmekçi, Hacısalihoğlu, İlarslan Lorentz uzayında Harmonik eğrilikleri incelemişlerdir, [2].

Arslan yaptığı tez çalışmasında $\mathbb{E}^n$ in bir hiperyüzeyi ve n -boyutlu bir Riemann manifoldunun k boyutlu ($k < n-1$) altmanifoldu üzerindeki eğrilerin Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerini incelemiştir, [1].

Önder, Kocayiğit $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayındaki Lorentz küresel timelike ve null eğrileri karakterize etmişlerdir, [9]

Yılmaz, Turgut Minkowski uzay zamanındaki eğrilerin diferensiyel geometrilerini incelemişlerdir, [15]

Yılmaz, Turgut Minkowski uzay zamandaki timelike ve spacelike eğriler üzerine çalışmışlardır, [17]

Turgut, T.Ali, Lòpez-Bonilla Minkowski uzay zamanda spacelike helislerin time-like involütlerini ele almışlardır, [13].

Karaahmetoğlu hazırladığı Minkowski uzayında eğrilikler üzerine adlı tez çalışmasında 3-boyutlu Minkowski uzayında yüzeylerin normal eğriliklerini hesaplamış, bu uzayda eğrilerin eğrilik çizgisi olması için gerekli koşulları elde etmiştir, [6].

Uğurlu, Çalışkan, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi adlı kitaplarında Minkowski-3 uzayında temel tanımlar, $\mathbb{E}^3$ teki küresel göstergelere benzer olarak spacelike ve timelike eğrilerin küresel göstergeleri, Gauss denkleminin küresel göstergelere uygulanması gibi konulara yer vermiştir, [14]

Şenyurt, Özgüner Bertrand eğri çiftlerinin Frenet vektörleri ve bu vektörlere bağlı birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde oluşturdukları küresel gösterge eğrilerini ve sabit pol eğrisinin yay uzunluklarını, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{S}^2$ ye göre geodezik eğriliklerini hesapladılar, [14].

Dejenere alt manifoldların teorisi son yıllarda bazı araştırmacılar tarafından korunmuş ve klasik diferensiyel geometri konularının bazıları Lorentz manifoldlarına kadar uzanmıştır. Bazı yazarlar daha büyük boyutlarda Serret-Frenet çatılarını hesaplamayı amaçlamışlardır. Bu konuda literatürde büyük bir boşluk olup var olan literatür ışığında, 4-boyutlu Lorentz uzayında eğrilerin küresel göstergeleri incelenmiş ve bazı eğriler çalışılmıştır,[2, 18, 25]. Burada ele alınan eğri $(+, +, +, -)$ işaretlerine göre bir space-like eğridir.

Bu çalışmada Minkowski uzay zamanda Pseudohiperbolik uzayda yatan bir time-like eğrisinin tanjant ve trinormal küresel göstergeleri araştırılıp bahsedilen küresel göstergelerin space-like eğriler olduğu elde edildi. Ayrıca ele alınan eğri ve küresel şekillerin Serret-Frenet çatıları arasındaki ilişkiler hesaplandı. Ek olarak eğri bir ccr-eğrisi ise küresel göstergelerin bazı karakterizasyonlarının genel helisler olduğu gösterilmiştir.

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}_v^n$	Yarı Öklidyen uzay
$\mathbb{R}_1^n$	n -boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	3-boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathbf{T}$	Eğrinin birim teğet vektör alanı
$\mathbf{N}$	Eğrinin birim normal vektör alanı
$\mathbf{B}_1$	Eğrinin birinci binormal vektör alanı
$\mathbf{B}_2$	Eğrinin ikinci binormal vektör alanı
κ	Eğrinin 1. eğriliği
τ	Eğrinin 2. eğriliği
σ	Eğrinin 3. eğriliği
D	Kovaryant türev operatörü
S	Şekil operatörü
$\langle x, y \rangle$	Vektörlerin skaler çarpımı
$\mathbf{S}_v^n(r)$	n -boyutlu v -indeksli Pseudoküre
$H_v^n(r)$	n -boyutlu v -indeksli Pseudohiperbolik Uzay
$\mathbb{E}_1^4$	4- boyutlu Minkowski uzay zamanı

2.BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1.

A boş olmayan bir cümle ve V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlar ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir *afin uzay* denir.

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$,

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. $\overrightarrow{PQ}$ vektöründe ; P noktasına başlangıç noktası, Q noktasına da uç noktası denir. Diğer taraftan A nın boyutu $boyA$ olarak tanımlanır, [3].

Tanım 2.1.2.

Bir V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay A olsun. $P_0, P_1 \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin oluşturduğu cümle V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1 \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, $P_i, 1 \leq i \leq n$ noktalarına da *çatının birim noktaları* denir, [3].

Tanım 2.1.3.

A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. Eğer V de bir

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpım işlemi tanımlanırsa bu işlem yardımıyla A da açı, diklik ve uzunluk gibi metrik özellikler tanımlanabilir. V , n -boyutlu reel iç çarpım uzayı olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n -boyutlu *Öklid Uzayı* denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir, [3].

Tanım 2.1.4.

$\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun.

$$x_i: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

bileşenlerine $\mathbb{E}^n$ nın *i-yinci koordinat fonksiyonu* denir, [3].

Tanım 2.1.5.

$\mathbb{R}^n$ standart reel afin uzay olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de bir

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n -boyutlu *standart Öklid uzayı* denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir, [3].

Tanım 2.1.6.

V , n -boyutlu reel iç çarpım uzayı ve birleştiği Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in$

$\mathbb{A}$ olmak üzere $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine $\mathbb{E}^n$ de bir *Öklid Çatı* veya *Dik Çatı* denir. Bu çatı yardımıyla tanımlanan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ afin koordinat sistemine de *Öklid Koordinat Sistemi* veya *Dik Koordinat Sistemi* denir. Bu sistemdeki

$$x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonlarına da *Öklid Koordinat Fonksiyonları* denir, [3].

Tanım 2.1.7.

$\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı olsun. $U \subset \mathbb{E}^n$ açık bir alt cümle olmak üzere

$$M = \{x \in U \subset \mathbb{E}^n : f(x) = C, C \in \mathbb{R}, \nabla f|_p \neq 0, f, \text{diferensiyellenebilir fonksiyon}\}$$

ile tanımlanan boş olmayan bir M cümlesine $\mathbb{E}^n$ de $(n-1)$ -boyutlu bir *yüzey* veya $(n-1)$ -*yüzey* denir. Bu yüzey $n > 3$ için *hiperyüzey* olarak adlandırılır, [3].

Tanım 2.1.8.

$\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayında bir $(n-1)$ manifold M olsun. Başlangıç nok-

tası $P \in M$ noktası olan bir $\overrightarrow{PQ} = \vec{V}$ vektörü verildiğinde, $(P, \vec{V})$ ikilisine M nin P noktasındaki *bir tanjant vektörü* denir ve kısaca $\vec{V}_p$ ile gösterilir. M nin P noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin cümlesi $T_M(P)$ ile gösterilmek üzere, $\{T_M(P), \oplus, R, +, \cdot, \otimes\}$ altılısı bir vektör uzayı meydana getirir. Bu uzaya M nin P noktasındaki *tanjant uzayı* denir, [3].

Tanım 2.1.9.

$\mathbb{E}^n$ de bir $(n-1)$ -manifold M olmak üzere ,

$$X : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_M(P)$$

şeklinde tanımlanan X operatörüne M üzerinde bir *vektör alanı* denir. Burada,

$$\pi o X = I : M \rightarrow M$$

özdeşlik dönüşümüdür. M üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $\{\chi(M), \oplus, R, +, \cdot, \otimes\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya vektör alanlarının uzayı denir ve

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_M(P) = \chi(M)$$

ile gösterilir, [3].

Tanım 2.1.10.

$X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall P \in \mathbb{E}^n$ için $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in$

$T_{\mathbb{E}^n}(P)$ dir. Eğer

$$y_i : \mathbb{E}^n \rightarrow IR, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından, yani $y_i \in C^\infty(\mathbb{E}^n, IR)$ ise $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. Buna göre Y nin X e göre kovaryant türevi

$$D_X Y = (X_P[y_1], X_P[y_2], \dots, X_P[y_n])$$

şeklinde tanımlıdır, [3].

Tanım 2.1.11.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha & : I \rightarrow \mathbb{E}^n \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^n$ alt cümlesine $\mathbb{E}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir *eğri* denir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin *parametre aralığı* ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin *parametresi* denir, [3].

Tanım 2.1.12

$M, \mathbb{E}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

olsun. Bu takdirde,

$$\frac{d\alpha}{dt} \big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t) \big|_{\alpha(t)} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt} \big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \big|_t \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü* denir, [3].

Tanım 2.1.13.

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hız fonksiyonu*, $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M eğrisine *birim hızlı eğri* ve bu halde $t \in I$ parametresine de eğrinin *yay-parametresi* denir, [3].

Tanım 2.1.14.

Bir M eğrisinin her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise bu eğriye *regüler eğri* denir, [3].

Tanım 2.1.15.

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_b^a \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki *yay-uzunluğu* denir, [3].

Tanım 2.1.16.

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\Psi = (\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)})$$

sistemi lineer bağımsız olsun. $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$, $k > r$ olmak üzere Ψ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin *Serret-Frenet r ayaklı alanı*, $m \in M$ için

$$\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$$

ye $m \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r -ayaklısı* ve her bir V_i , $1 \leq i \leq r$ vektörüne de *Serret-Frenet vektörü* denir, [3].

Tanım 2.1.17.

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen birim hızlı bir eğri ve

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$$

de $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı olsun. Bu takdirde

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin *i -yinci eğrilik fonksiyonu* ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki *i -yinci eğriliği* denir, [3].

Tanım 2.1.18.

$M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen yay parametrelili bir eğri olsun. M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki i -yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$$

olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s) \cdot V_2(s), \\ V_i'(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 \leq i \leq r \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

bağıntıları sağlanır. (2.1) formüllerine Frenet Formülleri adı verilir. Bu formüller matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

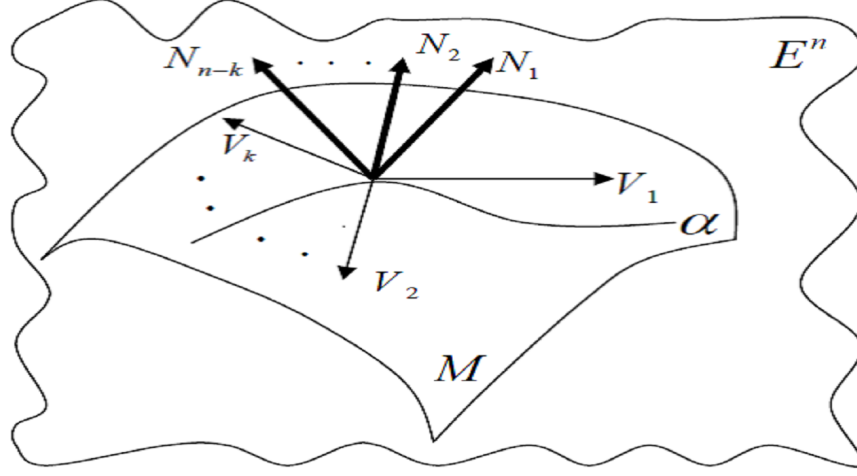
elde edilir. $n = 3$ özel halinde bir M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı genellikle $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ile gösterilir. Bu halde $\mathbf{T}$ ye *teğet vektör alanı*, $\mathbf{N}$ ye *asal (asli) normal vektör alanı*, $\mathbf{B}$ ye de *binormal vektör alanı* denir. Ayrıca bu durumda M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki birinci ve ikinci eğriliği, sırası ile κ ve τ ile gösterilir. κ ya M nin *eğriliği*, τ ya da *burulması* denir. Böylece Frenet formülleri

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$$

şeklinde, [3].



E^n in k – boyutlu altmanifoldu üzerindeki eğrinin

Frenet vektör alanları ve birim vektör alanları

Tanım 2.1.19.

E^3 de tanımlı 2-boyutlu bir S manifolduna E^3 de bir *yüzey* denir, [3].

Tanım 2.1.20.

S , E^3 de bir yüzey olsun. S nin bir P noktasından geçen bütün eğrilerin bu noktadaki teğetleri aynı düzlem içinde kalır. Bu düzleme S nin P noktasındaki *teğet düzlemi* denir. S nin P noktasındaki teğet düzlemi, parametre eğrilerinin X_u ve X_v teğet vektörlerine paralel olduğundan,

$$N_0 = X_u \wedge X_v$$

ile tanımlanan N_0 vektörü, S nin P noktasındaki teğet düzlemine diktir. Bu vektöre S nin P noktasındaki *normal vektörü* ve

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

vektörüne de *birim normal vektör* denir, [3].

Tanım 2.1.21.

M , $\mathbb{E}^3$ 3- boyutlu Öklid uzayında bir yüzey ve $v_p \in T_M(P)$ olsun. M yüzeyi içinde P noktasından geçen ve P noktasındaki hız vektörü v_p olan en az bir eğri vardır. Başka bir anlatımla, $\alpha'(0) = v_p$ olacak biçimde en az bir

$$\alpha : I \rightarrow M$$

eğrisi vardır. Böyle bir eğriye, v_p *teğet vektörüne yapışık bir eğri* adı verilir, [11].

Tanım 2.1.22.

V bir reel vektör uzayı, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V$ için

- i) $g(u, v) = g(v, u)$
- ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$
 $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik-bilineer form* denir, [8].

Tanım 2.1.23.

V bir reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle$ da V üzerinde simetrik bilinear form olsun. Bu takdirde

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise, $\langle, \rangle$ bilinear formuna *pozitif tanımlı*,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ bilinear formuna *negatif tanımlı*,
- iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $w = 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ bilinear formuna *nonde-jeneredir* denir, [8].

Tanım 2.1.24.

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm simetrik, bilineer ve non-dejenere ise $\langle, \rangle$ ya V üzerinde skalar çarpım ve V vektör uzayına da bir *skalar çarpım uzayı* denir, [8].

Tanım 2.1.25.

V bir skalar çarpım uzayı olsun.

$$\langle, \rangle |_w : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ *skalar çarpımının indeksi* denir. $\langle, \rangle$ nin indeksi v olmak üzere $0 < v < \text{boy}V$ dir, [8].

Teorem 2.1.26.

V , n -boyutlu skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir.

V , skalar çarpım uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

yazılabilir. Burada; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$ ve $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 1; & e_i \text{ spacelike} \\ -1; & e_i \text{ timelike} \end{cases}$

dir.

V , n -boyutlu bir skalar çarpım uzayı ve $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$, V nin ortonormal bazı olsun. Bu takdirde $(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin indeksine eşittir, [8].

Tanım 2.1.27.

V bir skalar çarpım uzayı ve $v \in V$ olsun.

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v ye *spacelike vektör*,
- ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye *timelike vektör*,

iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye *lightlike (null) vektör* denir, [8].

Tanım 2.1.28.

V bir skalar çarpım uzayı olsun. $\text{boy}V \geq 2$, indeksi 1 ise V ye Lorentz uzayı denir, [8].

Tanım 2.1.29.

V bir Lorentz uzayı ve $W \subset V$ alt uzay olsun.

- i) $\langle, \rangle|_W$, pozitif tanımlı ise W ye *spacelike alt uzay*,
- ii) $\langle, \rangle|_W$, non-dejenere ve indeksi 1 ise W ye *timelike alt uzay*,
- iii) $\langle, \rangle|_W$, dejenere ise W ye *lightlike(null) alt uzay* denir, [8].

Tanım 2.1.30.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\rightarrow \sum_{i=1}^{n-v} x_i y_i - \sum_{i=n-v+1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

metrik tensörü göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *yarı-Öklidyen uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir, [8].

Tanım 2.1.31.

$\mathbb{R}_v^n$ yarı Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı Öklidyen uzayına

Minkowski Uzayı denir. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayı olsun. I , $\mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}_1^3$ 3-Boyutlu *Minkowski uzayında bir eğri* adı verilir, [8].

Tanım 2.1.32.

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ bir eğri olsun. Eğer

- (i) $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise α ya *spacelike* eğri,
- (ii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise α ya *timelike* eğri,
- (iii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise α ya *null (lightlike)* eğri denir, [8].

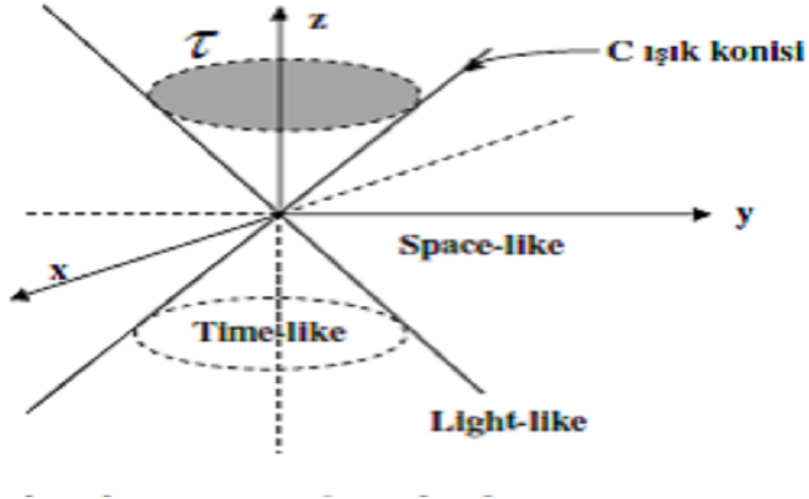
Tanım 2.1.33.

τ , $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki bütün timelike vektörlerin cümlesi olsun. $u \in \tau$

için

$$C(u) = \{v \in \tau \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

cümlesine $\mathbb{R}_1^3$ ün u yu içeren *time (zaman)* konisi denir, [8].



Minkowski Uzayının Nedensel Karakteri

Tanım 2.1.34.

Eğer $v, w \in \mathbb{R}_1^3$ timelike vektörleri aynı time koni de iseler bu takdirde negatif olmayan tek bir $\theta \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki $\langle v, w \rangle = -\|v\| \|w\| \cosh \theta$ dır. Burada $\theta \geq 0$ sayısına *timelike vektörler arasındaki açı* denir. Eğer $v, w \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektörleri $\mathbb{R}_1^3$ te spacelike bir alt uzay üreten vektörler iseler bu takdirde tek bir

$0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır, öyle ki $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cosh \theta$ dır. Burada θ sayısına *spacelike vektörler arasındaki spacelike açı* denir, [10].

Tanım 2.1.35.

Eğer $v, w \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektörleri $\mathbb{R}_1^3$ te timelike bir alt uzay üreten vektörler iseler bu takdirde tek bir $\theta \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cosh \theta$ dır. Burada θ sayısına *spacelike vektörler arasındaki timelike açı* denir. Eğer $w \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektör ve $v \in \mathbb{R}_1^3$ timelike vektör iseler tek bir $\theta \geq 0$ sayısı vardır, öyle ki $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \sinh \theta$ dır. Burada $\theta \geq 0$ sayısına v ve w vektörleri arasındaki *Lorentz timelike açı* denir, [10].

Tanım 2.1.36.

X bir cümle ve alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlarsa τ ya X üzerinde bir *topoloji* denir:

- i) $X, \emptyset \in \tau$,
- ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,
- iii) $A_i \in \tau, i \in I, \cup_{i \in I} A_i \in \tau$

Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir, [6].

Tanım 2.1.37.

X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktasının X deki açık komşulukları, sırası ile U ve V olsun. Eğer U ile V yi $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir, [6].

Tanım 2.1.38.

M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlarsa M ye bir *n-boyutlu topolojik manifold* denir:

- i) M bir Hausdorff uzayıdır,
- ii) M nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{E}^n$ veya $\mathbb{E}^n$ nin bir açık alt cümlesine homeomorfiktir,
- iii) M sonlu sayıda açık alt cümleler ile örtülebilir, [6].

Tanım 2.1.39.

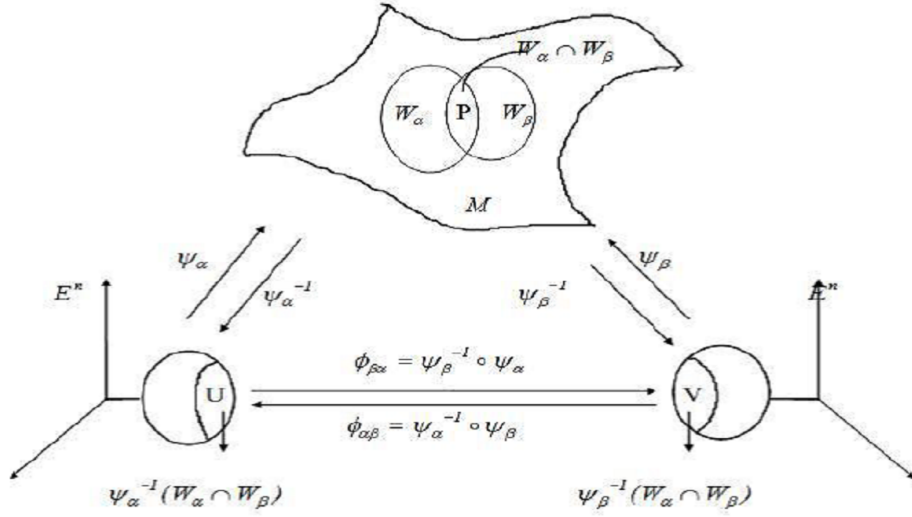
M bir n -boyutlu topolojik manifold ve Ψ de Tanım 2.1.38. deki ii) aksiyomunu sağlayan ve

$$\begin{aligned}\Psi : U \subset \mathbb{E}^n &\rightarrow W \subset M \\ u &\rightarrow \Psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Ψ homeomorfizmi verilsin. Bu takdirde (Ψ, W) ikilisine M de bir *koordinat komşuluğu veya harita* denir. M bir n -boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. Bu takdirde (Ψ_α, W_α) haritalarının $\{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}$ koleksiyonuna M de bir *koordinat komşulukları sistemi veya atlas* denir, [6].

Tanım 2.1.40.

M bir topolojik manifold ve $P \in M$ noktasındaki açık komşulukları da W_α olsun. $\forall \alpha$ için (ψ_α, W_α) üzerindeki lokal koordinat sistemi $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ ile gösterildiğinde $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ ise $W_\alpha \cap W_\beta$ nın her noktasında $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ ve $(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta)$ gibi iki koordinat sistemi tanımlanabilir. Bu durumda aşağıdaki şekil çizilebilir.



Diferensiyellenebilir Manifold Yapısı

$$\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U \subset E^n \text{ ve } \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset V \subset E^n$$

alt cümleleri açık cümlelerin homeomorfizmler altında görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca,

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

ve

$$\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta = \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları da iki homeomorfizmin bileşkesi olduklarından birer homeomorfizmdirler.

Bu homeomorfizmleri $\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha^{-1}$ ve $\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta^{-1}$ ile gösterelim. Eğer $\phi_{\beta\alpha}$ ve $\phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^k -sınıfından diferensiyellenebilir iseler $\check{E} = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}$ atlasına C^k -sınıfından diferensiyellenebilir denir. Bu durumda $\check{E}$ atlasına M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir. M bir topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k -sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir, [6].

Tanım 2.1.41.

M bir C^∞ manifold, $\chi(M)$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı ve $C^\infty(M, \mathbb{R})$ reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası olsun. $\chi(M)$ üzerinde

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde iç çarpım fonksiyonu tanımlı ise M ye bir *Riemann manifoldu* ve iç çarpım fonksiyonuna da M üzerinde bir *Riemann metriği* ve *metrik tensör* denir, [6].

Tanım 2.1.42.

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa D ye M üzerinde bir *afin konneksiyon* ve D_X de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir, [6].

Tanım 2.1.43.

M bir Riemann manifoldu ve D de M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

i) D , C^∞ sınıfından, M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ sınıfından,

ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

ii) $X_P(Y, Z) = \langle D_X Y, Z \rangle |_P + \langle Y, D_X Z \rangle |_P, \forall P \in A$

iii) $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$.

özellikleri sağlanırsa D ye M üzerinde bir Riemann Konneksiyonu ve D_X de X e göre *Riemann anlamında kovaryant türev operatörü* denir, [6].

Tanım 2.1.44.

M , $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey ve $\mathbf{N}$ de M nin birim normal vektör alanı olsun. D , $\mathbb{E}^n$ de Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X \mathbf{N}$ ile tanımlı $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* veya *Weingarten Dönüşümü* denir, [6].

Tanım 2.1.45.

M , $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey, M nin şekil operatörü S ve M nin birim normal vektör alanı da $\mathbf{N}$ olsun. D , $\mathbb{E}^n$ de Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$D_X Y = \overline{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle \mathbf{N}$$

ile tanımlı $\overline{D}$ operatörüne M üzerinde *Gauss anlamında kovaryant türev operatörü* ve denkleme de *Gauss Denklemi* denir, [6].

Tanım 2.1.46.

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\chi(M)$ üzerinde

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere ve sabit indeksli $\langle, \rangle$ fonksiyonuna bir metrik tensör ve $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine de *yarı-Riemann manifoldu* denir. Yarı-Riemann manifoldunu kısaca M ile gösterelim. Bu durumda, $\langle, \rangle$ metrik tensörü M nin P noktasındaki tanjant uzayı üzerinde sabit indeksli bir

$$\langle, \rangle |_P : T_P(M) \times T_P(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

skalar çarpımını tanımlar, [6].

Tanım 2.1.47.

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M nin indeksi, $\langle, \rangle$ nin v sabit indeksine eşittir. $v = 0$ ise M bir Riemann manifoldu olur, [8].

Tanım 2.1.48.

$$\mathbb{S}_v^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_v^{n+1} : g(X, X) = r^2\}$$

cümlesine v -indeksli ve r -yarıçaplı n -boyutlu *pseudoküre* ve

$$H_v^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_{v+1}^{n+1} : g(X, X) = -r^2\}$$

cümlesine de v -indeksli ve r -yarıçaplı n -boyutlu *pseudohiperbolik uzay* denir, [7].

Tanım 2.1.49.

$a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ $\mathbb{E}_1^4$ de vektörler olsun. $\mathbb{E}_1^4$

Minkowski uzay zamanda vektörel çarpım

$$a \wedge b \wedge c = - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (2.1.2)$$

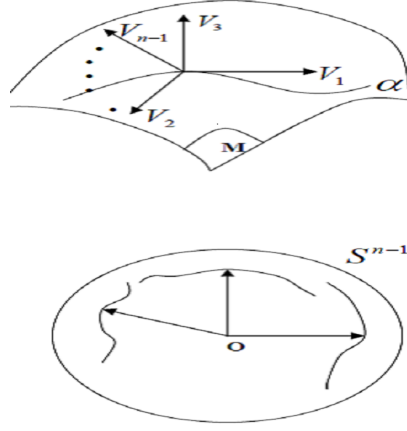
determinantı ile tanımlanmıştır. (2.1.2) de e_1, e_2, e_3, e_4 ,

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &= e_4 \\ e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 &= e_1 \\ e_3 \wedge e_4 \wedge e_1 &= e_2 \\ e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 &= -e_3 \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan ortogonal vektörlerdir, [18].

Tanım 2.1.50.

$M, \mathbb{E}^n$ in $(n - 1)$ boyutlu altmanifoldu (hiperyüzeyi) olsun ve α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile ve Frenet $(n - 1)$ ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s) \dots, V_{n-1}(s)\}, (1 \leq i \leq n - 1)$ olsun. Bu Frenet vektör alanları paralel öteleme ile küre merkezine taşındığında, küre üzerinde oluşan eğrilere *Küresel Gösterge Eğrileri* denir, [4].



$\mathbb{E}^n$ in hiperyüzeyi üzerindeki eğrinin

Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri

Tanım 2.1.51.

$M, \mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey olsun. α da bu hiperyüzey üzerinde bir eğri olmak üzere, α eğrisinin küresel göstergeleri için yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri hesaplamak için bir α eğrisi s yay parametresi ile $a \leq s \leq b$ olmak üzere verilsin. α eğrisinin yay uzunluğu

$$s_\alpha = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| ds = \int_a^b \|\mathbf{T}\| ds$$

dir, [5].

Tanım 2.1.52.

$(n - 1)$ tane küresel göstergenin geodezik eğrilikleri, $\mathbb{E}^n$ de ve küre üzerinde oluştuklarından birim küreye $(\mathbb{S}^{n-1})$ göre de hesaplanacaktır. Bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{T}$, $\mathbb{E}^n$ nin konneksiyonu D olmak üzere;

$$k_g = \|D_T \mathbf{T}\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right\|$$

ifadesi α nın, $\alpha(s)$ noktasındaki $\mathbb{E}^n$ e göre *geodezik eğriliğidir*, [4].

Tanım 2.1.53.

$M, N \subset E^n$ de iki eğri olsun. M ve N sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$, $\beta(s)$ noktalarında M ve N eğrilerinin Frenet r-ayaklıları sırasıyla, $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ olmak üzere; $\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$ ise N eğrisine M eğrisinin involütü, M eğrisine de N eğrisinin evolütü denir. Bir eğrinin teğetlerine dik olan yörüngesine o eğrinin bir involütü denir, [4].

Tanım 2.1.54.

Bir regüler eğri sabit Frenet-Serret eğrilik oranlarına sahipse $(\frac{\tau}{\kappa}$ ve $\frac{\sigma}{\tau})$ bir *ccr-eğri* olarak adlandırılır, [21, 22].

Teorem 2.1.55.

$\alpha = \alpha(t)$, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay zamanda keyfi bir space-like eğri olsun. α nın Serret-Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \alpha'\|} \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{N} \wedge \mathbf{T} \wedge \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \frac{\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \alpha'''}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \alpha'''\|} \quad (2.1.6)$$

$$\kappa = \frac{\|\|\alpha'\|^2 \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \alpha'\|}{\|\alpha'\|^4} \quad (2.1.7)$$

$$\tau = \frac{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \alpha'''\| \|\alpha'\|}{\|\|\alpha'\|^2 \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \alpha'\|} \quad (2.1.8)$$

$$\sigma = \frac{g(\alpha^{(v)}, B_2)}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \alpha'''\| \|\alpha'\|} \quad (2.1.9)$$

Burada μ , $[T, N, B_1, B_2]$ matrisinin determinantını 1 yapmak için -1 veya +1 alınıp, [18].

$\mathbb{S}^{n-1}$ hiperküresine göre geodezik eğrilikler hesaplanırken Gauss denklemi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.56.

$\mathbb{E}^n$ deki konneksiyon D , $\mathbb{S}^{n-1}$ deki konneksiyon $\overline{D}$, $\mathbb{S}^{n-1}$ in birim normal vektör alanı $\mathbf{N}$ ve $\mathbb{S}^{n-1}$ in şekil operatörü S olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{S}^{n-1})$ için Gauss denklemi;

$$D_X Y = \overline{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle \mathbf{N}$$

dir. Burada birim hiperkürenin şekil operatörü;

$$S = \frac{1}{r} \cdot I_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

dır, [4].

Tanım 2.1.57.

$\beta = \beta(s)$ Minkowski uzay zamanda birim hızlı bir time-like eğri olsun. Tanjant vektörü H_0^3 pseudohiperbolik uzayın O merkezine dönüştürülürse, $\delta = \delta(s_\delta)$ eğrisi elde edilir. Bu eğri $\mathbb{E}_1^4$ de β eğrisinin tanjant göstergesi veya tanjant küresel göstergesi olarak adlandırılır, [18].

Tanım 2.1.58.

$\beta = \beta(s), \mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay zamanda birim hızlı time-like bir eğri olsun. Space-like trinormal vektör alanları H_0^3 pseudohiperbolik uzayın O merkezine dönüştürülürse $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ eğrisi elde edilir. Bu eğri $\mathbb{E}_1^4$ de eğrinin trinormal göstergesi veya trinormal küresel göstergesi olarak adlandırılır, [18].

Tanım 2.1.59.

Bir eğrinin tanjant vektör alanı $\mathbf{u}$ sabit vektör alanı ile bir sabit açı oluşturuyorsa bu eğriye *genel helis* denir,[4].

3.BÖLÜM

3.1. H_0^3 de Yatan Bir Time-Like Eğrisinin Trinormal ve Tanjant Küresel Göstergeleri

Bu bölümde, Minkowski uzay zamanda Pseudohiperbolik uzayda yatan bir time-like eğrisinin tanjant ve trinormal küresel göstergeleri verildi. Daha sonra bu küresel göstergelerin space-like eğriler olduğu elde edildi. Ayrıca ele alınan eğri ve küresel ifadelerin Serret-Frenet çatıları arasındaki ilişkiler bulundu. Ek olarak, ele alınan eğri bir ccr-eğrisi ise küresel göstergelerin bazı karakterizasyonlarının genel helis olduğu gösterildi.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayı (x_1, x_2, x_3, x_4) bir dik koordinat sistemi olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzay zamanı üzerinde tanımlanan standart flat metrik

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

olsun. $\mathbb{E}_1^4$ de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Serret-Frenet çatısını $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}_1(s), \mathbf{B}_2(s)\}$ ile gösterelim. $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ sırası ile teğet, asli normal, binormal (1.binormal), trinormal (2.binormal) vektör alanlarıdır.

$\alpha(s)$, $\mathbb{E}_1^4$ zaman uzayında bir time-like birim hızlı eğri olsun. Burada

$$g(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = -1, \quad g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1, \quad g(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1) = 1, \quad g(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2) = 1$$

eşitlikleri mevcuttur. (3.1.1) de κ, τ, σ ile sırası ile α eğrisinin 1., 2. ve 3. eğrilikleri gösterilmektedir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

dir, [24].

Teorem 3.1.1.

α , $\mathbb{E}_1^4$ de birim hızlı bir spacelike eğri, $\mathbf{N}$ ile $\mathbf{B}_1$ spacelike ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0, \tau \neq 0, \sigma \neq 0$ olsun. O zaman α pseudohiperbolik uzayda yatması için gerek ve yeter şart

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\tau} \frac{d\rho}{ds} &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right) \right], \\ \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \right\}^2 &> \rho^2 + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dır, [19].

İspat.

Pseudohiperbolik uzayda m merkezli, r yarıçaplı çarpım (3.1.3.) ve elde edilecek ifadelerin tekrarlı diferensiyelleri alınırsa [19],

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2 \quad (3.1.3)$$

$$2g(\alpha', \alpha - m) = 0$$

$$g(T, \alpha - m) = 0 \quad (3.1.4)$$

$$g(T', \alpha - m) + g(T, T) = 0 \quad (3.1.5)$$

olur.

$$g(T, T) = -1$$

olduğundan (3.1.5) ifadesi

$$g(\kappa N, \alpha - m) = 1 \quad (3.1.6)$$

şekline dönüştür. (3.1.6) diferensiyellendiğinde

$$g(N, \alpha - m) = \frac{1}{\kappa} \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) ifadesinin türevi alınır

$$g(N', \alpha - m) + g(N, T) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \quad (3.1.8)$$

ifadesinde

$$g(N, T) = 0$$

değeri (3.1.8) de yerine yazılıp işlemlere devam edilirse

$$\begin{aligned} g(\kappa T + \tau B_1, \alpha - m) &= \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \\ \kappa g(T, \alpha - m) + \tau g(B_1, \alpha - m) &= \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \\ g(B_1, \alpha - m) &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$g(B_1', \alpha - m) + g(B_1, T) = \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' \quad (3.1.10)$$

$$g(B_1, T) = 0$$

olduğundan (3.1.10) ifadesi

$$\begin{aligned} g(-\tau N + \sigma B_2, \alpha - m) &= \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' \\ -\tau g(N, \alpha - m) + \sigma g(B_2, \alpha - m) &= \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

(3.1.11) denkleminde (3.1.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{-\tau}{\kappa} + \sigma g(B_2, \alpha - m) &= \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' \\ g(B_2, \alpha - m) &= \frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right] \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$g(B_2', \alpha - m) + g(B_2, T) = \frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right]' \quad (3.1.13)$$

elde edilir.

$$g(B_2, T) = 0$$

olduğundan (3.1.13) ifadesi

$$\begin{aligned} g(B'_2, \alpha - m) &= \frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right]' \\ g(-\sigma B_1, \alpha - m) &= \frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right]' \\ g(B_1, \alpha - m) &= -\frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right]' \right] \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

(3.1. 9) ve (3.1.14) birleştirilirse

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' = -\frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \left[\left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \right]' + \frac{\tau}{\kappa} \right]' \right]$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\kappa} = \rho$$

yerine yazılıp son düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\sigma}{\tau} \frac{d\rho}{ds} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma} \left[\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right] \right]$$

(3.1.2) nin ilk kısmı elde edilir.

$$\rho^2 + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left[\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right]^2 = -r^2$$

,[19]

$$\begin{aligned} \rho^2 + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right)^2 &= \frac{1}{\sigma} \left[\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right]^2 - r^2 \\ &\quad \rho^2 + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right)^2 \left\langle \frac{1}{\sigma} \left[\rho\tau + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{ds} \right) \right]^2 \right\rangle \end{aligned}$$

ile de (3.1.2) nin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.2.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time-like eğrisi ve $\delta = \delta(s_\delta)$ onun tanjant küresel göstergesi

olsun. O zaman

i) $\delta = \delta(s_\delta)$ bir space-like eğridir.

ii) δ nın Frenet -Serret araçları $\{\mathbf{T}_\delta, \mathbf{N}_\delta, \mathbf{B}_{1\delta}, \mathbf{B}_{2\delta}, \kappa_\delta, \tau_\delta, \sigma_\delta\}$, β nın $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \kappa, \tau, \sigma\}$ araçlarından elde edilir, [18].

İspat.

i)

$$\begin{aligned}\delta &= T(s) \\ \delta' &= \frac{d\delta}{ds_\delta} \frac{ds_\delta}{ds} = \kappa N \\ \langle \delta', \delta' \rangle &= \langle \kappa N, \kappa N \rangle = \kappa^2 > 0\end{aligned}$$

olup δ spacelike bir eğridir.

ii)(2.1.3.) ü kullanarak tanjant küresel gösterge hesaplaması aşağıdaki gibi yapılır:

$$\begin{aligned}T_\delta &= \frac{\delta'}{\|\delta'\|} \\ T_\delta &= \frac{\kappa N}{\kappa} = N \\ T_\delta &= N\end{aligned}$$

İlerde kullanmak için δ ile ilgili hesaplamalar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\delta'' &= \kappa N' + \kappa' N \\ &= \kappa(\kappa T + \tau B_1) + \kappa' N \\ \delta'' &= \kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta''' &= 2\kappa\kappa'T + \kappa^2\kappa N + \kappa''N + \kappa'(\kappa T + \tau B_1) + \kappa'\tau B_1 + \kappa\tau'B_1 + \kappa\tau(-\tau N + \sigma B_2) \\
\delta''' &= 3\kappa\kappa'T + (\kappa^3 + \kappa'' - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B_1 + (\kappa\tau\sigma)B_2
\end{aligned}$$

ve

$$\delta^{(iv)} = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B_1 + (2\kappa'\tau + \kappa\tau' + \kappa\tau)\sigma B_2$$

elde edilir.

$$\|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta'$$

için

$$\begin{aligned}
\|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' &= \kappa^2(\kappa N)' - g(\kappa N, \kappa'N + \kappa N')\kappa N \\
\|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' &= \kappa^3(\kappa T + \tau B_1) + \kappa^2\kappa'N + [-\kappa\kappa' - \kappa g(N, N')]\kappa N \quad (3.1.17)
\end{aligned}$$

ve

$$g(N, N') = 0$$

olduğundan (3.1.17) ifadesi

$$\|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' = \kappa^3(\kappa T + \tau B_1) \quad (3.1.18)$$

bulunur. (3.1.18) ifadesinin normu alınır

$$\begin{aligned}
\left\| \|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' \right\| &= \left\| \kappa^3(\kappa T + \tau B_1) \right\| \\
\left\| \|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' \right\| &= \kappa^3 \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|} \quad (3.1.19)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.19) ifadesi (2.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_\delta &= \frac{\|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta'}{\left\| \|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'')\delta' \right\|} \\
\mathbf{N}_\delta &= \frac{\kappa^3(\kappa T + \tau B_1)}{\kappa^3 \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}} \\
\mathbf{N}_\delta &= \frac{(\kappa T + \tau B_1)}{\sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}}
\end{aligned}$$

Asli normaller küresel göstergesi elde edilir.

Birinci eğrilik için

$$\begin{aligned}\kappa_\delta &= \frac{\left\| \|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'') \delta' \right\|}{\|\delta'\|^4} \\ \kappa_\delta &= \frac{\kappa^3 \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}}{\kappa^4} \\ \kappa_\delta &= \frac{\sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}}{\kappa}\end{aligned}$$

elde edilir. Trinormal küresel gösterge için (2.1.6) denklemi δ ya uyarlanıp hesaplamalar yapılır

$$\begin{aligned}B_{2\delta} &= \mu \frac{\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta'''}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta'''\|} \\ \frac{1}{\sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}} &= \frac{1}{\xi}\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta''' &= -\frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} -T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \tau & 0 \\ 3\kappa\kappa' & (\kappa'' + \kappa^3 - \kappa\tau^2) & (2\kappa'\tau + \kappa\tau') & \kappa\tau\sigma \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} -T & B_1 & B_2 \\ \kappa & \tau & 0 \\ 3\kappa\kappa' & 2\kappa'\tau + \kappa\tau' & \kappa\tau\sigma \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta''' &= \frac{\kappa\tau}{\xi} \left[\tau\sigma T + \kappa\sigma B_1 + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B_2 \right]\end{aligned}\tag{3.1.21}$$

elde edilir.

(3.1.21) değeri (3.1.20) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}B_{2\delta} &= \mu \frac{\tau\sigma T + \kappa\sigma B_1 + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B_2}{\sqrt{-\tau^2\sigma^2 + \kappa^2\sigma^2 + \tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}} \\ B_{2\delta} &= \mu \frac{\tau\sigma T + \kappa\sigma B_1 + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B_2}{\sqrt{\sigma^2(\kappa^2 - \tau^2) + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}}\end{aligned}\tag{3.1.22}$$

trinormal küresel gösterge elde edilir.

İkinci eğrilik içinse (2.1.8) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\tau_\delta &= \frac{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta'''\| \|\delta'\|}{\left\| \|\delta'\|^2 \delta'' - g(\delta', \delta'') \delta' \right\|} \\
&= \frac{\frac{\kappa\tau}{\xi} \left[\tau\sigma T + \kappa\sigma B_1 + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B_2 \right] \kappa}{\kappa^3 \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|}} \\
&= \frac{\tau \sqrt{\sigma^2(\kappa^2 - \tau^2) + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}}{\kappa |\tau^2 - \kappa^2|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Binormal vektör alanı için (2.1.5) denkleminde faydalanılır.

$$\vartheta = \sqrt{\sigma^2(\kappa^2 - \tau^2) + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}$$

denirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1\delta} &= -\frac{\mu}{\xi\vartheta} \begin{bmatrix} -T & N & B_1 & B_2 \\ \kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tau\sigma & 0 & \kappa\sigma & \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \end{bmatrix} \\
&= \frac{\mu}{\xi\vartheta} \begin{vmatrix} -T & B_1 & B_2 \\ \kappa & \tau & 0 \\ \tau\sigma & \kappa\sigma & \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \end{vmatrix} \\
\mathbf{B}_{1\delta} &= \frac{\mu}{\xi\vartheta} \left[(-\tau^2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)')T + \kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'B_1 + \sigma(\kappa^2 - \tau^2)B_2 \right]
\end{aligned}$$

Binormal küresel gösterge elde edilmiş olur.

Son olarak üçüncü eğrilik için (2.1.9) dan

$$\begin{aligned}
\sigma_\delta &= \frac{g(\delta^{(w)}, B_2)}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \delta'''\| \|\delta'\|} \\
&= \frac{g(\lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{N} + \lambda_3 \mathbf{B}_1 + (2\kappa'\tau + \kappa\tau' + \kappa\tau)\sigma \mathbf{B}_2, B_2)}{\kappa \sqrt{\sigma^2(\kappa^2 - \tau^2) + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}} \\
\sigma_\delta &= \frac{(2\kappa'\tau + \kappa\tau' + \kappa\tau)\sigma}{\kappa \sqrt{\sigma^2(\kappa^2 - \tau^2) + \tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'^2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3.1.3.

$\{\mathbf{T}_\delta, \mathbf{N}_\delta, \mathbf{B}_{1\delta}, \mathbf{B}_{2\delta}\}$, Minkowski uzay zamanının ortonormal bir çatısıdır, [18].

Teorem 3.1.4.

$\beta = \beta(s)$ Minkowski uzay zamanda birim hızlı bir time-like eğri ve $\delta = \delta(s_\delta)$

onun tanjant küresel göstergesi olsun. β bir ccr-eğri veya helis ise o zaman δ da bir helistir.

İspat.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time-like ccr-eğrisi olsun. O zaman $\frac{\kappa}{\tau} = c_1$ =sabit ve

$\frac{\tau}{\sigma} = c_2$ =sabit olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki teoremden sırasıyla

$$\begin{aligned}\kappa_\delta &= \sqrt{\left|1 - \frac{1}{c_1^2}\right|} = \text{sabit} \\ \tau_\delta &= \frac{1}{c_1 \cdot c_2 \sqrt{1 - c_1^2}} = \text{sabit}\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta(s_\delta)$ bir küresel eğridir, böylece (3.1.2) formülünün ilk kısmında τ_δ ve κ_δ kullanılarak

$$\frac{\sigma_\delta}{\tau_\delta} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_\delta} \right) = - \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma_\delta} \left(\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau_\delta} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_\delta} \right) \right) \right) \right]$$

$\kappa_\delta = \text{sabit}$ olduğundan sol taraf 0 olur. $z_1 = \text{sabit}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma_\delta} \frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta} \right] \\ z_1 &= \frac{1}{\sigma_\delta} \frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta}\end{aligned}$$

$$\sigma_\delta = \frac{\frac{1}{c_1 \cdot c_2 \sqrt{1 - c_1^2}}}{z_1 \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{c_1^2} \right|}}$$

$$\sigma_\delta = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{c_1 c_2 (c_1^2 - 1)} = \text{sabit}$$

elde edilir ki $\delta(s_\delta)$ nın da bir helis olduğu görülür.

Bu teorem sabit Serret-Frenet eğrilik oranlarına (helis) göre tanjant küresel göstergesinin bir karakterizasyonunu verir.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time like eğrisi ve $\delta = \delta(s_\delta)$ onun space-like tanjant küresel göstergesi olsun. $\delta = \delta(s_\delta)$ bir genel helis ise o zaman $\mathbf{u}$ sabit space-like vektörü için

$$g(\mathbf{T}_\delta, \mathbf{u}) = \cos \theta \quad (3.1.23)$$

olarak ifade edilebilir. Burada θ sabit bir açıdır. (3.1.23) eşitliği

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{u}) = \cos \theta$$

şeklinde de yazılır. Bu sabit $\mathbf{u}$ vektörü $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ ye göre aşağıdaki gibi oluşturabilir:

$$\mathbf{u} = \gamma_1 \mathbf{T} + \gamma_2 \mathbf{N} + \gamma_3 \mathbf{B}_1 + \gamma_4 \mathbf{B}_2 \quad (3.1.24)$$

denklemini s ye göre diferensiyellenirse

$$\begin{aligned} \gamma_1 \mathbf{T}' + \gamma_1 \mathbf{T} + \gamma_2' \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbf{N}' + \gamma_3 \mathbf{B}_1' + \gamma_3' \mathbf{B}_1 + \gamma_4' \mathbf{B}_2 + \gamma_4 \mathbf{B}_2' &= 0 \\ \gamma_1 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N} + \gamma_1' \mathbf{T} + \gamma_2' \mathbf{N} + \gamma_2 (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{T} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_1) + \gamma_3 (-\boldsymbol{\tau} \mathbf{N} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_2) + \gamma_3' \mathbf{B}_1 + \gamma_4' \mathbf{B}_2 + \gamma_4 (-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

ifadesinden hareketle; tanjant küresel göstergesinin (T) önündeki katsayıların toplamı 0 olacağından

$$\gamma_1' + \gamma_2 \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$$

elde edilir.

Binormaller göstergesinin ($\mathbf{B}_1$) önündeki katsayıların toplamından 0 olup

$$\gamma_2\boldsymbol{\tau} + \gamma'_3 - \gamma_4\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

ifadesi ortaya çıkar.

Trinormaller göstergesinin ($\mathbf{B}_2$) önündeki katsayılar toplamından ise

$$\gamma_3\boldsymbol{\sigma} + \gamma'_4 = 0$$

olur.

Normaller göstergesinin ($\mathbf{N}$) önündeki katsayıların toplamı 0 olacağından

$$\gamma_1\boldsymbol{\kappa} + \gamma'_2 - \gamma_3\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \tag{3.1.26}$$

elde edilir ki (3.1.25) ifadesi N ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} \langle u, N \rangle &= \gamma_2 \\ \gamma_2 &= \textit{sabit} \\ \gamma'_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değer (3.1.26) da yerine yazıldığında

$$\gamma_1\boldsymbol{\kappa} - \gamma_3\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

ifadesi elde edilir. Son düzenleme ile

$$\gamma'_1 + \gamma_2\boldsymbol{\kappa} = 0 \tag{3.1.27}$$

$$\gamma_1\boldsymbol{\kappa} - \gamma_3\boldsymbol{\tau} = 0 \tag{3.1.28}$$

$$\gamma'_3 + \gamma_2\boldsymbol{\tau} - \gamma_4\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{3.1.29}$$

$$\gamma'_4 + \gamma_3\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{3.1.30}$$

adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada, $\gamma_2 = c \neq 0$ ve bir sabit olduğundan (3.1.28) kullanılarak

$$\begin{aligned}\gamma_1 \kappa - \gamma_3 \tau &= 0 \\ \gamma_1 &= \frac{\gamma_3 \tau}{\kappa}\end{aligned}\tag{3.1.31}$$

bulunur.

(3.1.31) diferensiyellendiğinde

$$\gamma_1' = \gamma_3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' + \gamma_3' \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)$$

ifadesi (3.1.27) de yerine yazılırsa

$$\gamma_3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' + \gamma_3' \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) + c\kappa = 0\tag{3.1.32}$$

olan ε_3 e bağlı diferensiyel denklem elde edilir. (3.1.29) kullanılarak

$$\begin{aligned}\gamma_4 &= \frac{\gamma_3'}{\sigma} + \frac{\gamma_2 \tau}{\sigma} \\ (\gamma_4)' &= \left(\frac{\gamma_3'}{\sigma} \right)' + \left(\frac{c\tau}{\sigma} \right)'\end{aligned}\tag{3.1.33}$$

bulunur. Bu (3.1.12) de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\gamma_3'}{\sigma} \right)' + \left(\frac{c\tau}{\sigma} \right)' + \gamma_3 \sigma = 0\tag{3.1.34}$$

elde edilmiş olur. (3.1.32) ve (3.1.34) birleştirildiğinde

$$\begin{cases} \gamma_3' \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) + \gamma_3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' + c\kappa = 0 \\ \left(\frac{\gamma_3'}{\sigma} \right)' + c \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)' + \gamma_3 \sigma = 0 \end{cases}\tag{3.1.35}$$

ortaya çıkar.

Bu iki diferensiyel denklemin çözümü değişken katsayılarla birlikte kolay değildir. Ayrıca genel bir çözümü henüz bulunamamıştır. Bu nedenle (3.1.35) sisteminin özel çözümünü içeren teorem aşağıda verilmiştir, [18].

Teorem 3.1.5.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time like ccr-eğri ve $\delta = \delta(s_\delta)$ onun space-like tanjant küresel göstergesi olsun. δ bir genel helis ise o zaman β nın Serret-Frenet eğrilikleri arasında

$$cc_1 \int_0^s \kappa ds + \alpha_1 \cos \int_0^s \sigma ds + \alpha_2 \sin \int_0^s \sigma ds = 0$$

ilişkisi vardır Burada $c, c_1 = \frac{\kappa}{\tau}$, α_1 ve α_2 sabitlerdir, [18].

İspat.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time-like ccr-eğrisi ve $\delta = \delta(s_\delta)$ onun space-like tanjant küresel göstergesi olsun. Ccr-eğrisi sabit eğrilik oranlarına sahip olduğundan $\frac{\kappa}{\tau} = c_1$ ve

$\frac{\tau}{\sigma} = c_2$ yazılabileceğinden (3.1.35) diferensiyel denklemleri

$$\begin{cases} \gamma'_3 + cc_1\kappa = 0 \\ (\frac{\gamma'_3}{\sigma})' + \gamma_3\sigma = 0 \end{cases} \quad (3.1.36)$$

ifadesine dönüştür. (3.1.36) ın ilk denkleminde

$$\gamma_3 = -cc_1 \int_0^s \kappa ds$$

elde edilir. $t = \int_0^s \sigma ds$ değişken değiştirmesini (3.1.36) ın ikinci denkleminde yerine

yazarsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_3'}{\frac{dt}{ds}} \right)' + \gamma_3 \frac{dt}{ds} &= 0 \\ \left(\frac{\frac{d\varepsilon_3}{ds}}{\frac{dt}{ds}} \right)' + \gamma_3 \frac{dt}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

olur. (3.1.38) ifadesi integrallendiğinde

$$\frac{d^2\gamma_3}{dt^2} + \gamma_3 = 0 \quad (3.1.39)$$

ifadesi elde edilir.

$$y = \gamma_3$$

dönüşümü yaparsak (3.1.39) ifadesi

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y' &= k \end{aligned}$$

alınırsa

$$\begin{aligned} \gamma_3'' + \gamma_3 &= 0 \\ k^2 + 1 &= 0 \\ k &= \pm i \\ \gamma_3 &= y = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \\ \gamma_3 &= \alpha_1 \cos \int_0^s \sigma ds + \alpha_2 \sin \int_0^s \sigma ds \end{aligned}$$

olup (3.1.39) ifadesi $c, c_1, \alpha_1, \alpha_2$ reel sayıları için

$$cc_1 \int_0^s \kappa ds + \alpha_1 \cos \int_0^s \sigma ds + \alpha_2 \sin \int_0^s \sigma ds = 0$$

ifadesine dönüştür. İspat tamamlanmış olur, [18].

Sonuç 3.1.6.

Sabitlenmiş yön (sabit $\mathbf{u}$ vektörü),

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -c \int_0^s \kappa ds, \\ \gamma_2 &= c, \\ \gamma_3 &= -cc_1 \int_0^s \kappa ds, \\ \gamma_4 &= cc_2(1 - c_1^2).\end{aligned}$$

bileşenleri ile oluşturulabilir, [18].

İspat.

Sabitlenmiş yön (sabit $\mathbf{u}$ vektörü) vektöründen

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \gamma_1 \mathbf{T} + \gamma_2 \mathbf{N} + \gamma_3 \mathbf{B}_1 + \gamma_4 \mathbf{B}_2 \\ g(\mathbf{u}, \mathbf{N}) &= \gamma_2 = c\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\gamma_1' + \gamma_2 \kappa &= 0 \\ \gamma_1' &= -c\kappa \\ \int_0^s \gamma_1' ds &= \int_0^s -c\kappa ds \\ \gamma_1 &= -c \int_s^0 \kappa ds\end{aligned}$$

ifadesi ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \kappa - \gamma_3 \tau &= 0 \\
\gamma_1 \kappa &= \gamma_3 \tau \\
\frac{\gamma_1}{\gamma_3} &= \frac{\tau}{\kappa} \\
\frac{\gamma_1}{\gamma_3} &= \frac{1}{c_1} \\
\frac{-c \int_s^0 \kappa ds}{\gamma_3} &= \frac{1}{c_1} \\
\gamma_3 &= -cc_1 \int_s^0 \kappa ds
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\gamma_2 \boldsymbol{\tau} + \gamma_3' - \gamma_4 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \\
-cc_1 \kappa + c\tau &= \gamma_4 \boldsymbol{\sigma} \\
\frac{-cc_1 \kappa}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{c\tau}{\boldsymbol{\sigma}} &= \gamma_4 \\
-cc_1 \frac{c_1}{c_2} + cc_2 &= \gamma_4 \\
cc_2 \left(1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right) &= \gamma_4
\end{aligned}$$

son olarak elde edilir. Bulunan ifadeleri bir araya toplarsak sabit $\mathbf{u}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -c \int_0^s \kappa ds, \\
\gamma_2 &= c, \\
\gamma_3 &= -cc_1 \int_0^s \kappa ds, \\
\gamma_4 &= cc_2 \left(1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

bileşenleri ile oluşturulabilir, [18].

3.2. S_1^3 de Yatan Bir Time-Like Eğrisinin Trinormal Küresel Göstergesi

Teorem 3.2.1.

$\beta = \beta(s)$ birim hızlı time-like bir eğri ve $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ eğrinin trinormal küresel

göstergesi olsun. O zaman

i) $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ bir space-like eğridir.

ii) φ nin Frenet-Serret vektör alanları $\beta = \beta(s)$ in vektör alanları ile aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_\varphi &= -\mathbf{B}_1, \\
\mathbf{N}_\varphi &= \frac{\tau \mathbf{N} - \sigma \mathbf{B}_2}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}, \\
\mathbf{B}_{1\varphi} &= \frac{\mu}{\phi\eta} \left(\tau\kappa - \frac{\sigma^2\kappa}{\tau} \right) T - \sigma \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' N - \tau \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' B_2, \\
&\quad - \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2 \\
\mathbf{B}_{2\varphi} &= \mu \sqrt{\frac{\sigma^2\kappa^2}{\tau^2} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}, \\
\kappa_\varphi &= \frac{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}{\sigma}, \\
\tau_\varphi &= \frac{\tau^2 \sqrt{\frac{\sigma^2\kappa^2}{\tau^2} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}}{\sigma \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}, \\
\sigma_\varphi &= \frac{-3(\sigma')^2 + \sigma^2\tau^2 + \sigma^4 - 4\sigma''\sigma}{\sigma^2\tau^2 \sqrt{\frac{\sigma^2\kappa^2}{\tau^2} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}}
\end{aligned}$$

Burada

$$\eta = \sqrt{|(\kappa\tau\sigma)^2 + (\kappa\tau^2)^2 - [(\tau\sigma)']^2|}$$

$$\phi = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$$

ve w_i , $\varphi^{(IV)}$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun s 'ye göre bileşenleridir.

iii) β bir helis ise o zaman φ de bir helistir, [18].

İspat.

i)

$$g(\varphi', \varphi') = g(-\sigma B_1, -\sigma B_1) = \sigma^2 > 0$$

olduğundan $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ space-like bir eğridir.

ii)

$$\varphi = B_2$$

$$\begin{aligned} T_\varphi &= \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} = \frac{B'_2}{\|B'_2\|} \\ T_\varphi &= \frac{-\sigma B_1}{\sigma} \\ T_\varphi &= -B_1 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

İlerleyen hesaplamalarda kullanılmak üzere φ nin diferensiyellerini alalım.

$$\begin{aligned} \varphi'' &= -\sigma' B_1 - \sigma B'_1 \\ \varphi'' &= -\sigma' B_1 + \sigma\tau N - \sigma^2 B_2 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned} \varphi''' &= -\sigma'' B_1 - \sigma' B'_1 + \sigma'\tau N + \sigma\tau' N + \sigma\tau N' - 2\sigma\sigma' B_2 - \sigma^2 B'_2 \\ \varphi''' &= -\sigma'' B_1 - \sigma'(-\tau N + \sigma B_2) + \sigma'\tau N + \sigma\tau' N + \sigma\tau(\kappa T + \tau B_1) - 2\sigma\sigma' B_2 - \sigma^2(-\sigma B_1) \\ \varphi''' &= -\sigma'' B_1 + \sigma'\tau N - \sigma'\sigma B_2 + \sigma'\tau N + \sigma\tau' N + \sigma\tau\kappa T + \sigma\tau^2 B_1 - 2\sigma\sigma' B_2 + \sigma^3 B_1 \\ \varphi''' &= \sigma\tau\kappa T + (2\sigma'\tau + \sigma\tau')N + (-\sigma'' + \sigma\tau^2 + \sigma^3)B_1 - 3\sigma\sigma' B_2 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\varphi^{(w)} = w_1 T + w_2 N + w_3 B_1 + (-3(\sigma')^2 + \sigma^2 \tau^2 + \sigma^4 - 4\sigma''\sigma) B_2$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_\varphi &= \frac{\|\varphi'\|^2 \varphi'' - g(\varphi', \varphi'') \varphi'}{\|\|\varphi'\|^2 \varphi'' - g(\varphi', \varphi'') \varphi'\|} \\
&= \frac{\sigma^2(-\sigma' B_1 + \sigma \tau N - \sigma^2 B_2) - g(-\sigma B_1, -\sigma' B_1 + \sigma \tau N - \sigma^2 B_2) \cdot (-\sigma B_1)}{\|\sigma^2(-\sigma' B_1 + \sigma \tau N - \sigma^2 B_2) - g(-\sigma B_1, -\sigma' B_1 + \sigma \tau N - \sigma^2 B_2) \cdot (-\sigma B_1)\|} \\
&= \frac{-\sigma^2 \sigma' B_1 + \sigma^3 \tau N - \sigma^4 B_2 + \sigma^2 \sigma' B_1}{\|-\sigma^2 \sigma' B_1 + \sigma^3 \tau N - \sigma^4 B_2 + \sigma^2 \sigma' B_1\|} \\
&= \frac{\sigma^3(\tau N - \sigma B_2)}{\sigma^3 \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \\
\mathbf{N}_\varphi &= \frac{\tau N - \sigma B_2}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$B_{2\varphi} = \mu \frac{\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''\|}$$

$$\sqrt{\tau^2 + \sigma^2} = \phi$$

denirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi''' &= -\frac{1}{\phi} \begin{vmatrix} -T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & -\sigma \\ \sigma \tau \kappa & 2\sigma' \tau + \sigma \tau' & -\sigma'' + \sigma \tau^2 + \sigma^3 & -3\sigma \sigma' \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\phi} \begin{vmatrix} -T & N & B_2 \\ 0 & \tau & -\sigma \\ \sigma \tau \kappa & 2\sigma' \tau + \sigma \tau' & -3\sigma \sigma' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\phi} [T(-3\sigma\sigma'\tau + 2\sigma\sigma'\tau + \sigma^2\tau')] - \sigma^2\tau\kappa N - \sigma\tau^2\kappa B_2 \\
&= \frac{1}{\phi} [-(\sigma\sigma'\tau - \sigma^2\tau')T - \sigma^2\tau\kappa N - \sigma\tau^2\kappa B_2] \\
\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi''' &= \frac{1}{\phi}\sigma\tau^2 \left[-\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2 \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
B_{2\varphi} &= \mu \frac{\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''\|} \\
B_{2\varphi} &= \frac{\frac{1}{\phi}\sigma\tau^2 \left[-\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2 \right]}{\left\| \frac{1}{\phi}\sigma\tau^2 \left[-\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2 \right] \right\|} \\
B_{2\varphi} &= \frac{-\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2}{\left\| -\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2 \right\|} \\
B_{2\varphi} &= \frac{-\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' T - \frac{\sigma\kappa}{\tau} N - \kappa B_2}{\sqrt{\frac{\sigma\kappa}{\tau}^2 + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \right]^2}} \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mathbf{B}_{1\varphi} = \mu \mathbf{N}_\varphi \wedge \mathbf{T}_\varphi \wedge \mathbf{B}_{2\varphi}$$

hesaplaması için

$$\eta = \sqrt{\frac{\sigma\kappa}{\tau}^2 + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' \right]^2}$$

denirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_\varphi \wedge \mathbf{T}_\varphi \wedge \mathbf{B}_{2\varphi} &= \frac{-1}{\phi\eta} \begin{vmatrix} -T & N & B_1 & B_2 \\ 0 & \tau & 0 & -\sigma \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' & \frac{\sigma\kappa}{\tau} & 0 & -\kappa \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\phi\eta} \begin{vmatrix} -T & N & B_2 \\ 0 & \tau & -\sigma \\ -\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)' & \frac{\sigma\kappa}{\tau} & -\kappa \end{vmatrix} \\
\mathbf{N}_\varphi \wedge \mathbf{T}_\varphi \wedge \mathbf{B}_{2\varphi} &= \frac{1}{\phi\eta} \left[\left(\tau\kappa - \frac{\sigma^2\kappa}{\tau} \right) T - \sigma \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' N - \tau \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' B_2 \right]
\end{aligned}$$

kullanılırsa

$$B_{1\varphi} = \mu \mathbf{N}_\varphi \wedge \mathbf{T}_\varphi \wedge \mathbf{B}_{2\varphi} = \frac{\mu}{\phi\eta} \left(\tau\kappa - \frac{\sigma^2\kappa}{\tau} \right) T - \sigma \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' N - \tau \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' B_2$$

bulunur.

$$\kappa_\varphi = \frac{\| \|\varphi'\|^2 \varphi'' - g(\varphi', \varphi'') \varphi' \|}{\|\varphi'\|^4}$$

değeri için pay değeri (3.2.4) de hesaplanmıştı. Yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\kappa_\varphi &= \frac{\|\sigma^3(\tau N - \sigma B_2)\|}{\sigma^4} \\
\kappa_\varphi &= \frac{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}{\sigma}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\tau_\varphi &= \frac{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''\| \|\varphi'\|}{\|\|\varphi'\|^2 \varphi'' - g(\varphi', \varphi'') \varphi'\|} \\
&= \frac{\sigma \tau^2 \sigma \sqrt{\frac{\sigma \kappa^2}{\tau} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}}{\|\sigma^3(\tau N - \sigma B_2)\|} \\
\tau_\varphi &= \frac{\tau^2}{\sigma} \frac{\sqrt{\frac{\sigma \kappa^2}{\tau} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}}{\tau^2 + \sigma^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= \frac{g(\varphi^{(v)}, B_2)}{\|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \wedge \varphi'''\| \|\varphi'\|} \\
&= \frac{g(w_1 T + w_2 N + w_3 B_1 + (-3(\sigma')^2 + \sigma^2 \tau^2 + \sigma^4 - 4\sigma'' \sigma) B_2, B_2)}{\sigma^2 \tau^2 \sqrt{\frac{\sigma \kappa^2}{\tau} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}} \\
\sigma_\varphi &= \frac{-3(\sigma')^2 + \sigma^2 \tau^2 + \sigma^4 - 4\sigma'' \sigma}{\sigma^2 \tau^2 \sqrt{\frac{\sigma \kappa^2}{\tau} + \kappa^2 - \left[\left(\frac{\sigma}{\tau} \right)' \right]^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\varphi = \varphi(s)$ birim hızlı time-like ccr-eğrisi olsun. O zaman $\frac{\kappa}{\tau} = c_1 = \text{sabit}$

ve $\frac{\tau}{\sigma} = c_2 = \text{sabit}$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki teoremden sırasıyla

$$\begin{aligned}
\kappa_\varphi &= \frac{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}{\sigma} \\
\kappa_\varphi &= \sqrt{\frac{\tau^2 + \sigma^2}{\sigma^2}}
\end{aligned}$$

$$\kappa_\varphi = \sqrt{\frac{1}{c_2^2} + 1} = \text{sabit}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= \frac{\tau^2}{\sigma} \frac{\sqrt{\left(\frac{\sigma\kappa}{\tau}\right)^2 + \kappa^2}}{\tau^2 + \sigma^2} \\ \tau_\varphi &= \frac{\tau}{\sigma} \frac{\sqrt{(\sigma\kappa)^2 + (\tau\kappa)^2}}{\tau^2 + \sigma^2} \\ \tau_\varphi &= \frac{\tau\kappa}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} \\ \tau_\varphi &= \frac{\tau\kappa}{\sigma \cdot \sigma} \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau^2 + \sigma^2}{\sigma^2}}} \\ \tau_\varphi &= \frac{c_2^2 \cdot c_1}{\sqrt{c_2^2 + 1}} = \text{sabit} \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta(s_\delta)$ bir küresel eğridir, böylece (3.1.2) formülünün ilk kısmında τ_φ ve κ_φ kullanılarak

$$\frac{\sigma_\varphi}{\tau_\varphi} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_\varphi} \right) = - \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma_\varphi} \left(\frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau_\varphi} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa_\varphi} \right) \right) \right) \right]$$

$\kappa_\varphi = \text{sabit}$ olduğundan (3.1.2) denkleminin sol tarafı 0 olacağından ($z_2 = \text{sabit}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma_\varphi} \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \right] \\ z &= \frac{1}{\sigma_\varphi} \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \\ z\sigma_\varphi &= \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \\ z\sigma_\varphi &= \frac{\frac{c_2^2 \cdot c_1}{\sqrt{c_2^2 + 1}}}{\sqrt{c_2^2 + 1}} \\ \sigma_\varphi &= \frac{c_2^2 \cdot c_1}{c_2^2 + 1} = \text{sabit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sigma_\varphi} \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \right] \\
z_2 &= \frac{1}{\sigma_\varphi} \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \\
z_2 \sigma_\varphi &= \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} \\
z_2 \sigma_\varphi &= \frac{c_2^2 \cdot c_1}{\sqrt{c_2^2 + 1}} \\
\sigma_\varphi &= \frac{c_2^2 \cdot c_1}{z_2(c_2^2 + 1)} = \text{sabit}
\end{aligned}$$

elde edilir ki $\delta(s_\delta)$ nın da bir helis olduğu görülür.

Teorem 3.2.2.

$\beta = \beta(s)$ time-like birim hızlı ccr eğrisi olsun ve $\varphi = \varphi(s_\varphi)$ onun space-like

trinormal küresel göstergesi olsun. φ bir genel helis ise o zaman

i)

$$\frac{c}{c_2} \int_0^s \sigma ds + \Psi_1 \cosh \int_0^s \kappa ds + \Psi_2 \sinh \int_0^s \kappa ds = 0$$

ilişkisi vardır. Burada $c, c_2 = \frac{\tau}{\sigma}, \Psi_1, \Psi_2$ sabitlerdir

ii) Genel helisin eksenlerinin sabitlenmiş yönü

$$\mathbf{u} = \frac{2c}{c_1} \mathbf{T} - \left(\frac{c}{c_2} \int_0^s \sigma ds \right) \mathbf{N} + c \mathbf{B}_1 - \left(c \int_0^s \sigma ds \right) \mathbf{B}_2$$

dur, [18].

İspat.

$$\mathbf{u} = \gamma_1 \mathbf{T} + \gamma_2 \mathbf{N} + \gamma_3 \mathbf{B}_1 + \gamma_4 \mathbf{B}_2 \quad (3.2.5)$$

$$T_\varphi = \mathbf{B}_1$$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{B}_1, \mathbf{u}) &= \cos \theta \\ g(\mathbf{B}_1, \gamma_1 \mathbf{T} + \gamma_2 \mathbf{N} + \gamma_3 \mathbf{B}_1 + \gamma_4 \mathbf{B}_2) &= \cos \theta \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\gamma_3 = \cos \theta = c$$

olup (3.2.5) ifadesi diferensiyellendiğinde

$$0 = \gamma_1 \kappa \mathbf{N} + \gamma_1' T + \gamma_2' \mathbf{N} + \gamma_2 (\kappa T + \tau \mathbf{B}_1) + \gamma_3' \mathbf{B}_1 + \gamma_3 (-\tau N + \sigma \mathbf{B}_2) + \gamma_4' \mathbf{B}_2 + \gamma_4 (-\sigma \mathbf{B}_1) \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.7) den

$$\gamma_1' + \gamma_2 \kappa = 0 \quad (3.2.8)$$

$$\gamma_1 \kappa + \gamma_2' - \gamma_3 \tau = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\gamma_2 \tau + \gamma_3' - \gamma_4 \sigma = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\gamma_3 \sigma + \gamma_4' = 0 \quad (3.2.11)$$

(3.2.11) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} c\sigma + \gamma_4' &= 0 \\ \gamma_4 &= -c \int \sigma ds \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

elde edilir. (3.2.10) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\gamma_2 \tau - \gamma_4 \sigma &= 0 \\
\gamma_2 &= \gamma_4 \frac{\sigma}{\tau} \\
\gamma_2 &= -\frac{\sigma}{\tau} c \int \sigma ds \\
\gamma_2 &= -\frac{c}{c_2} \int \sigma ds
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. (3.2.8) da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\gamma_1' &= -\gamma_2 \kappa \\
\gamma_1 &= -\int_2 \gamma \kappa ds
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. (3.2.9) da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\frac{\sigma}{\kappa} = \frac{c_2}{c_1} \right)$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \kappa - \frac{c}{c_2} \sigma - c \tau &= 0 \\
-\kappa \int_2 \gamma \kappa ds - \frac{c}{c_2} \sigma - c \tau &= 0 \\
-\int_2 \gamma \kappa ds &= \frac{c}{c_2} \frac{\sigma}{\kappa} + c \frac{\tau}{\kappa} \\
\gamma_1 &= \frac{2c}{c_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.5) de elde edilenler yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{c}}{\mathbf{c}_1} \mathbf{T} - \left(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}_2} \int \boldsymbol{\sigma} ds \right) \mathbf{N} + c \mathbf{B}_1 - \left(c \int \sigma ds \right) \mathbf{B}_2$$

bulunur.

(3.2.9) dan

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma_1 \boldsymbol{\kappa} + \gamma_2' - \gamma_3 \tau \\
\gamma_1 \boldsymbol{\kappa} &= -\gamma_2' + \gamma_3 \tau \\
\gamma_1 &= \frac{-\gamma_2'}{\boldsymbol{\kappa}} + \frac{\gamma_3 \tau}{\boldsymbol{\kappa}} \\
\gamma_1' &= \left(\frac{-\gamma_2'}{\boldsymbol{\kappa}} \right)' + \left(\frac{\gamma_3 \tau}{\boldsymbol{\kappa}} \right)' \\
\gamma_1' &= \left(\frac{-\gamma_2'}{\boldsymbol{\kappa}} \right)' + (cc_1)' \\
\gamma_1' &= \left(\frac{-\gamma_2'}{\boldsymbol{\kappa}} \right)' \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.8) ve (3.2.15) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\gamma_1' + \gamma_2 \kappa &= 0 \\
\left(\frac{-\gamma_2'}{\boldsymbol{\kappa}} \right)' + \gamma_2 \kappa &= 0 \\
-\gamma_2'' \kappa + \gamma_2' \kappa' + \gamma_2 \kappa &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada Minkowski uzay zamanının time-like eğrileri küresel gösterge konseptine uyarlanmıştır. Bir time-like eğrinin tanjant ve trinormal küresel göstergesi incelenmiş ve küresel eğrilerin space-like eğriler olduğu görülmüştür. Böylece küresel göstergelerin Frenet-Serret vektörleri ve ele alınan eğri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan hareketle ilerdeki çalışmalar için bazı problemler ortaya konmuştur.

$\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin verilen bir involütü klasik diferensiyel geometride iyi bilinen bir kavramdır ve

$$\gamma = \alpha + \lambda \mathbf{T}_\alpha$$

ile tanımlanır. Burada, c sabiti için $\lambda = (c - s_\alpha)$ dır, [23]. Son olarak Minkowski uzay zamanda bir space-like eğrinin involütleri çalışılmıştır. Benzer şekilde tanjant küresel göstergesinin involütü

$$\gamma = \delta + \lambda \mathbf{T}_\delta$$

olarak elde edilmiştir [23]. Diğer bir ifadeyle

$$\gamma = \mathbf{T} + \lambda \mathbf{N}$$

olur, [18].

Kaynaklar

- [1] **Arslan, İ.**, 2006, n -Boyutlu Bir Riemann Manifoldunun k -Boyutlu ($k < n - 1$) Bir Altmanifoldu Üzerindeki Bir Eğri Boyunca $(n - k)$ Tane Birim Normal Vektör Alanlarının Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 80s.
- [2] **Ekmekçi, N., Hacısalihoğlu, H.H.**, and **İlarslan, K.**, 2000, Harmonic Curvatures in Lorentzian Space, Bull. Malaysian Math.Sc.Soc. (Second Series), 23, 173-179.
- [3] **Hacısalihoğlu, H.H.**, 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.
- [4] **Hacısalihoğlu, H.H.**, 2000, Diferensiyel Geometri, Cilt I.,II.,III. A.Ü.Fen Fakültesi, 202, 269, 340, Ankara.
- [5] **Hicks, N. J.** , 1974, Notes On Differential Geometry. Van Nostrad Reinhold Company,175, London.
- [6] **Karaahmetoğlu, S.**, 2010, Minkowski Uzayında Eğrilikler Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 53s.
- [7] **Mak, M.**, 2008, Genelleştirilmiş Stereografik İzduşüm ve İnversiyon.
- [8] **O’neill, B.**, 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Pres, s.468, New York.
- [9] **Önder, M.ve Kocayığit, H.**, 2007, Minkowski Uzayında Lorentz Küresel Timelike ve Null Eğriler Üzerine, C.B.U. Journal of Science, 3.2, 153-158.
- [10] **Ratcliffe, J.G.**, 1994, Foundations of Hyperbolic Manifolds. Grad. Texts in Math, Springer, New York.
- [11] **Sabuncuoğlu, A.**, 2004, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [12] **Şenyurt, S.ve Özgüner, Z.**, 2013, Bertrand Eğri çiftinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Ordu Üni.Bil.Tek. Derg, 2, 58-81.

- [13] **Turgut, M., Ali, A.T., Lopez-Bonilla, J.Luis.**, 2010, Apeiron, 17, 28-41.
- [14] **Uğurlu, H., ve Çalışkan, A.**, 2012, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları.
- [15] **Yılmaz, S. ve Turgut, M.**, 2008, On The Differential Geometry of The Curves in Minkowski Space-Time I, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3, 1343-1349.
- [16] **Yılmaz, S.ve Turgut, M.**, 2008, On the Characterizations of Inclined Curves in Minkowski Space-Time $\mathbb{E}_1^4$, International Mathematical Forum, 3, 783-792.
- [17] **Yılmaz, S.ve Turgut M.**, 2009, On The Differential Geometry of The Curves in Minkowski Space-Time II, Int. J. Comput. Math. Sciences, 3, 53-55.
- [18] **Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Yaylı, Y., Turgut M.**, 2010, Tangent and Trinormal Spherical Images of a time-like curve on the Pseudohyperbolic Space H_0^3 , Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 59, 3, 216-224.
- [19] **Camcı, Ç., İlarslan, K., Šućurović, E.**, 2003, On Pseudohyperbolical Curves in Minkowski Space-Time, Turk J Math 27, 315-328.
- [20] **Milman, R. S. ve Parker, G. D.**, 1977, Elements Of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [21] **Monterde, J.**, 2007, Curves with constant curvature ratios, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 3, 177-186.
- [22] **Öztürk, G., Arslan, K. ve Hacısalihoğlu, H. H.**, 2008, A characterization of ccr-curves in R^m , Proc. Estonian Acad. Sci., 57, 217-224
- [23] **Turgut, M. ve Yılmaz, S.**, 2008, On the Frenet frame and a characterization of space-like involute-evolute curve couple in Minkowski space-time, Int. Math. Forum, 3, 793-801.
- [24] **Walrave, J.**, 1995, Curves and Surfaces in Minkowski Space, Dissertation, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven.
- [25] **Yılmaz, S.**, 2001, Spherical Indicators of Curves and Characterizations of

Some Special Curves in Four Dimensional Lorentzian Space L^4 ,Dissertation, Dokuz Eylöl Universty.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Malatya’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya’da tamamladım. 1998 yılında Sağlık Bakanlığında memuriyet hayatıma başladım. 2000 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenimime başladım. 2004 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsünde tezsiz yüksek lisansımı tamamladım. 2009 ataması ile matematik öğretmeni olarak yeni görevime başladım. Halen Murat Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Evliyim.