

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇEKİRDEK ÜRETEN UZAY YÖNTEMİNİN
MATEMATİKSEL TEMELLERİ VE BAZI
UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ
Ali AKGÜL

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

MART-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇEKİRDEK ÜRETEN UZAY YÖNTEMİNİN MATEMATİKSEL
TEMELLERİ VE BAZI UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ
Ali AKGÜL

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik
Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12 Şubat 2014

MART-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

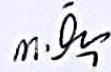
ÇEKİRDEK ÜRETEN UZAY YÖNTEMİNİN MATEMATİKSEL
TEMELLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

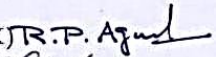
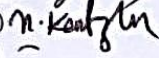
DOKTORA TEZİ
Ali AKGÜL
(102121202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12 Şubat 2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 10 Mart 2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)



Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Ravi P. AGARWAL (TAMUK) 
Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü) 
Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü) 
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü) 

MART-2014

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ' e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Texas A&M University-Kingsville (TAMUK) üniversitesinde bulunduğum 3 aylık süre içerisinde bana yardımcı olan Prof. Dr. Ravi P. AGARWAL'a çok teşekkür ederim.

Missouri University of Science and Technology (MST) üniversitesinde bulunduğum 1 yıllık süre içerisinde yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Elvan AKIN, Doç. Dr. David E. GROW ve Doç. Dr. Matt INSALL'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca bana yardım eden Prof. Dr. Etibar PENAHILI, Prof. Dr. Adem KILICMAN, Prof. Dr. Ferman MAMEDOV, Doç Dr. Hikmet KEMALOĞLU, Doç. Dr. Reza MOKHTARİ, Yrd. Doç. Dr. Maryam MOHAMMADI, Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ ve Dr. Ebru CAVLAK hocalarıma da teşekkür ederim.

Bu süreçte, bana destek veren ve hep yanımda olan başta annem Rağde AKGÜL ve babam Mehmet Nafi AKGÜL olmak üzere sevgili aileme ve değerli dostlarıma tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ali Akgül

Elazığ-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
TABLolar LİSTESİ	X
SEMBOLLER LİSTESİ	XII
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	3
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. BÖLÜM	9
ÇEKİRDEK ÜRETEN UZAYLAR VE ÜRETİLEN ÇEKİRDEKLERİN ÖZELLİK- LERİ	9
3.1 Üretilen Çekirdeğin Temel Özellikleri	9
3.2 $W_2^m[a, b]$ Çekirdek Üreten Uzay ve Onun Üretilen Çekirdek Fonksiyonu	9
3.3 $W_2^m[a, b]$ Fonksiyon Uzayı	10
3.4 $W_2^{(m,n)}(D)$ İkili (Binary) Çekirdek Üreten Uzay	13
4. BÖLÜM	17
SİNE-GORDON DENKLEMİ	17
4.1 Mekanik İletim Sistemi	18
4.2 Sine-Gordon Denkleminin Türetilmesi	20
4.3 Sine-Gordon Denkleminin Çekirdek Üreten Uzay Metodu ile Çözümü	23
4.3.1 Çekirdek Üreten Uzaylar	23
4.3.2 $W(\Omega)$ Uzayında Çözümün Sunumu	30

4.3.3 Metodun Uygulanması	33
4.3.4 Sayısal Sonuçlar	37
4.3.5 Sonuç	48
5. BÖLÜM	49
BRATU PROBLEMİ	49
5.1 Bratu Probleminin Çekirdek Üreten Uzay Metodu ile Çözümü	49
5.1.1 Çekirdek Üreten Uzaylar	49
5.1.2 $W_2^3[0, 1]$ Uzayında Çözümün Sunumu	53
5.1.3 Çözümün Yapısı ve Temel Sonuçlar	54
5.1.4 Sayısal Sonuçlar	58
5.1.5 Sonuç	62
6. BÖLÜM	63
MAGNETOHİDRODİNAMİK (MHD) SIKIŞAN AKIŞKAN PROBLEMLERİNE	
RKHSN'NUN UYGULANMASI	63
6.1 Problemin Formülasyonu	63
6.2 Çekirdek Üreten Uzaylar	66
6.3 $W_2^5[0, 1]$ Uzayında Sınırlı Lineer Operatör	70
6.4 Sistemin Çözümünün Analiz Edilmesi	72
6.5 Sayısal Sonuçlar	74
6.6 Sonuç	81
7. BÖLÜM	82
YEDİNCİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN	
RKHSN İLE ÇÖZÜMÜ	82
7.1 Çekirdek Üreten Uzaylar	82
7.2 Problemin $T_2^8[0, 1]$ Uzayında Analitik ve Yaklaşık Çözümleri	85
7.3 Sayısal Sonuçlar	87
7.4 Sonuç	96
8. BÖLÜM	97
SONUÇ VE TARTIŞMA	97
KAYNAKLAR	98

ÖZGEÇMİŞ.....	106
---------------	-----

ÖZET

Bu tez sekiz bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde çekirdek üreten uzayın tarihçesi ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde çekirdek üreten uzay ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde sine–Gordon denkleminin çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile çözümü elde edilmiştir.

Beşinci bölümde Bratu probleminin çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile çözümü bulunmuştur.

Altıncı bölümde magnetohidrodinamik (MHD) sıkışan akışın çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile çözümü verilmiştir.

Yedinci bölümde yedinci mertebeden sınır değer problemlerinin çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile çözümleri verilmiştir.

Sekizinci bölümde sonuç ve tartışma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çekirdek üreten uzaylar, Çekirdek üreten uzay metodu, Seri çözümleri, Sine–Gordon denklemi, Bratu problemi, Magnetohidrodinamik akışı, Yedinci mertebeden sınır-değer problemi.

SUMMARY

Mathematical Foundations and Some Applications of the Reproducing

Kernel Method

This thesis is organized in eight sections.

In Section 1, information about the history of the reproducing kernel method is presented.

In Section 2, some fundamental definitions and theorems are introduced.

In Section 3, some basic definitions and theorems of the reproducing kernel method are given.

In Section 4, solution of the sine-Gordon equation is acquired by the reproducing kernel Hilbert space method.

In Section 5, solution of the Bratu problem is found by the reproducing kernel Hilbert space method.

In Section 6, solution of the MHD squeezing fluid flow is given by the reproducing kernel Hilbert space method.

In Section 7, solutions of seventh order boundary value problems are presented by the reproducing kernel Hilbert space method.

In Section 8, results and discussion are given.

Key Words: Reproducing kernel spaces, Reproducing kernel method, Series solutions, Sine-Gordon equation, Bratu problem, Magnetohydrodynamic squeezing flow, Seventh order boundary value problems.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 4.1. Yatay bir yaya tutturulmuş sarkaçlar [50]	18
Şekil 4.2. Sarkaçlarda meydana gelen küçük titreşimler [50]	19
Şekil 4.3. Sarkaçlarda meydana gelen hareketli titreşimler [50]	19
Şekil 4.4. Eşit mesafede konumlanmış sarkaçlar [50]	22
Şekil 4.5. Dönme momentinin açısı [50]	22
Şekil 4.6. Örnek 4.1 için çekirdek üreten metodun çözümü.	39
Şekil 4.7. Örnek 4.1 için mutlak hatayı veren grafik.	40
Şekil 4.8. Örnek 4.1 için iki boyutlu çekirdek üreten metodun çözümü	40
Şekil 4.9. Örnek 4.2 için çekirdek üreten metodun çözümü.	46
Şekil 4.10. Örnek 4.2 için mutlak hatayı veren grafik	47
Şekil 4.11. Örnek 4.2 için iki boyutlu, çekirdek üreten metodun çözümü	47
Şekil 5.1. λ 'nın farklı değerleri için yaklaşık çözümlerin grafiği.	62
Şekil 6.1. İki paralel plaka arasındaki durağan sıkışan eksenel simetrik bir akışkan [80]	64
Şekil 6.2. $m = Re = 1$ için RKHSM, OHAM ve RK-4 çözümlerinin karşılaştırılması	77
Şekil 6.3. $m = Re = 1$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH).	78
Şekil 6.4. $m = 3$ ve $Re = 1$ için RKHSM, OHAM ve RK-4 çözümlerinin karşılaştırıl- ması	78
Şekil 6.5. $m = 8$ ve $Re = 1$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)	79
Şekil 6.6. $m = 1$ ve $Re = 4$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)	79
Şekil 6.7. $m = 1$ ve $Re = 10$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)	80
Şekil 6.8. Sabit bir Reynolds sayısı $Re = 1$ ve artan manyetik alan etkisi $m =$ 1, 3, 8, 20 için RKHSM çözümünün karşılaştırılması	80
Şekil 6.9. Sabit bir manyetik alan etkisi $m = 1$ ve artan Reynolds sayısı $Re = 1, 4, 10$ için RKHSM çözümünün karşılaştırılması	81

Şekil 7.1. Örnek 7.1 için analitik çözüm (AÇ) ve RKHSM ile elde edilen çözümün karşılaştırılması	89
Şekil 7.2. Örnek 7.1 için VIM, HPM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması.	90
Şekil 7.3. Örnek 7.2 için analitik çözümü ve RKHSM çözümünü gösteren grafik...	92
Şekil 7.4. Örnek 7.2 için ADM, VPM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	92
Şekil 7.5. Örnek 7.3 için analitik çözüm (AÇ) ve RKHSM çözümünün karşılaştırılması	95
Şekil 7.6. Örnek 7.3 için ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	95

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1. Örnek 4.1 için elde edilen sayısal sonuçlar.....	38
Tablo 4.2. Örnek 4.1 için $t = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	38
Tablo 4.3. Örnek 4.1 için mutlak ve bağıl hataların karşılaştırılması.....	39
Tablo 4.4. Örnek 4.2 için elde edilen MH ve BH.	41
Tablo 4.5. Örnek 4.2 için $t = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	41
Tablo 4.6. Örnek 4.2 için mutlak ve bağıl hataların karşılaştırılması.....	42
Tablo 4.7. Örnek 4.2 için $x = 2.5$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar.....	42
Tablo 4.8. Örnek 4.2 için $x = 5.0$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	42
Tablo 4.9. Örnek 4.2 için $x = 7.5$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	43
Tablo 4.10. Örnek 4.2 için $x = 10.0$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	43
Tablo 4.11. Örnek 4.2 için $x = 2.5$ (birinci sıra) ve $x = 5.0$ (ikinci sıra) iken mutlak hataların karşılaştırılması	44
Tablo 4.12. Örnek 4.2 için $x = 7.5$ (birinci sıra) ve $x = 10.0$ (ikinci sıra) iken mutlak hataların karşılaştırılması.....	45
Tablo 4.13. Örnek 4.2 için $x = 0.06$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar.	45
Tablo 4.14. Örnek 4.2 için $x = 0.08$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar.	45
Tablo 4.15. Örnek 4.2 için $x = 0.1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar.....	46
Tablo 4.16. Örnek 4.2 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	46
Tablo 5.1. $\lambda = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar.....	59
Tablo 5.2. $\lambda = 2$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	59
Tablo 5.3. $\lambda = 3.51$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar	60
Tablo 5.4. $\lambda = 1$ durumunda Adomian ayrışım metodu, Laplace ayrışım metodu, B-spline metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar.....	60
Tablo 5.5. $\lambda = 2$ durumunda Laplace ayrışım metodu, Adomian ayrışım metodu, B-spline metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar	61

Tablo 5.6. $\lambda = 3.51$ durumunda B-spline metodu, çok terimli olmayan eğri metodu, Lie-grup çekim metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar	61
Tablo 6.1. $m = 1$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar	74
Tablo 6.2. $m = 3$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar	75
Tablo 6.3. $m = 8$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar	75
Tablo 6.4. $m = 20$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar	76
Tablo 6.5. $m = 1$ ve $Re = 4$ için elde edilen sayısal sonuçlar	76
Tablo 6.6. $m = 1$ ve $Re = 10$ için elde edilen sayısal sonuçlar	77
Tablo 7.1. Örnek 7.1 için elde edilen sayısal sonuçlar	88
Tablo 7.2. Örnek 7.1 için HPM, VIM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	89
Tablo 7.3. Örnek 7.2 için elde edilen sayısal sonuçlar	91
Tablo 7.4. Örnek 7.2 için VPM, ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	91
Tablo 7.5. Örnek 7.3 için elde edilen sayısal sonuçlar	94
Tablo 7.6. Örnek 7.3 için ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması	94

SEMBOLLER LİSTESİ

L :	Lineer Operatör
L^{-1} :	İntegral Operatörü
$\sum$:	Toplam Sembolü
α :	Alpha
β :	Beta
δ :	Delta
σ :	Sigma
ρ :	Rho
ε :	Epsilon
η :	Eta
λ :	Lambda
$\mathbb{R}$:	Reel Sayılar Cümlesi

KISALTMALAR

HAM:	Homotopi analiz metodu
KdV:	Korteweg-de Vries denklemi
HPM:	Homotopi pertürbasyon metodu
DTM:	Diferansiyel dönüşüm metodu
RKHSM:	Çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu
ADM:	Adomian ayrışım yöntemi
VIM:	Varyasyonel iterasyon metodu
VPM:	Varyasyonel parametreler metodu
MHPM:	Genişletilmiş homotopi pertürbasyon metodu
MDM:	Genişletilmiş ayrışım metodu
LGM:	Lie grup metodu
BSM:	B-spline metodu
AÇ:	Analitik çözüm
YÇ:	Yaklaşık çözüm
MH:	Mutlak hata
BH:	Bağıl hata

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu problemlerin diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir. Biz ise tezimizde çekirdek üreten uzay metodunu inceleyip bazı uygulamalarını ele aldık.

Çekirdek üreten uzay özel bir Hilbert uzayıdır. Çekirdek üreten uzayın teorisinin oluşturulması 1908'lere dayanmaktadır. Yakın zamanlarda birçok diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler ve sınır değer problemleri bu metodla incelenmiştir. Diferansiyel denklemin çözüm şartlarının çeşitli tanımlamalarına göre buna karşılık gelen çekirdek üreten uzaylar mantıklı bir şekilde inşa edilebilir. Bu uzaylar tanımlandıktan sonra bu uzaylarda üretilen çekirdek fonksiyonları kolaylıkla bulunabilir. Yakın tarihte lineer olmayan problemlerin bu metodla çözümü ile ilgili pek çok çalışma yapıldı. Aslında üretilen çekirdeğin teorisinin gelişim evresinin öncesinde çalışmaların birçoğu Bergman çekirdekleri ile ilgili çalışmalardır [1 – 7]. 1930'larda ve 1940'larda tartışılan çekirdeklerin çoğu Bergman çekirdekleridir [8]. Üretilen çekirdeğin teorisi hakkında daha sonra Mercer [9] çalışmalar yapmıştır. Mercer pozitif tanımlı integral denkleminin sürekli çekirdeğinin

$$\sum_{i,j=1}^n k(x_i, y_i) \xi_i \xi_j \geq 0$$

şeklinde pozitif tanımlı olma özelliğine sahip olduğunu keşfetmiştir. Bu özelliğiyle beraber çekirdeği pozitif tanımlı Hermite matrisi olarak isimlendirmiştir. Mercer aynı zamanda pozitif tanımlı Hermite matrisinin $\langle f, g \rangle$ iç çarpımı ile öne sürülen bir Hilbert uzayındaki fonksiyon ailesine tekabül ettiğini öne sürüp bu çekirdeğin yeniden üretilmesini

$$f(y) = \langle f(x), k(x, y) \rangle$$

şeklinde ispatlamıştır [8]. Üretilen çekirdeklerin teorisi [10], 20. yüzyılın başlarında Zaremba tarafından harmonik ve biharmonik fonksiyonlar için sınır değer problemleri üzerine yaptığı çalışmada kullanılmıştır. Yakın tarihlerde bu metod bilimsel birçok model için önemli bir ilgi alanı olmuştur. Bu metodla uygulamalı bilimlerde seri çözümleri tam

olarak hesaplamak mümkündür. Cui [8], kitabında çekirdek üreten metod ile alakalı geniş bilgilere yer vermiştir. Bu metodun etkinliği birçok bilim adamı tarafından araştırılmıştır. Geng ve Cui [11], bu metodu ikinci mertebeden sınır değer problemlerine uygulamışlardır. Yao ve Cui [12], Wang ve diğerleri [13], bu metodu tekil sınır değer problemleri için uygulamışlardır. Zhou [14], bu metodu etkili bir şekilde ikinci mertebeden sınır değer problemlerine uygulamıştır. Bu metod aynı zamanda lineer olmayan sonsuz gecikmeli diferansiyel denklemlere de uygulanmıştır [15]. Wang ve Chao [16], Li ve Cui [17], Zhou ve Cui [18], bağımsız bir şekilde bu metodu değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlere uygulamışlardır. Geng ve Cui [19], Du ve Cui [20], integral şartlı forced Duffing denklemlerinin yaklaşık çözümlerini homotopi pertürbasyon yöntemi ile çekirdek üretme yöntemini birleştirerek incelemişlerdir. Lv ve Cui [21], bu metodu lineer 5. mertebeden sınır değer problemlerine uygulamışlardır. Cui ve Du [22], lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denklemlerinin analitik çözümünü çekirdek üreten metod yardımıyla incelemişlerdir. Wu ve Li [29], bu metodu lineer olmayan salınımlar için uygulamışlardır. Yakın zamanda bu metod kesirli kısmi diferansiyel denklemlere ve çok noktalı sınır değer problemlerine uygulanmıştır [22 – 31]. Yang ve diğerleri [32] bu metodu değişken katsayılı Volterra integral denklemler sisteminin çözümü için kullanmışlardır. Tekil integral denklem bu metod ile çözülmüştür [33]. Barbieri ve Meo [34] bu metod için integral terimlerinin değerlendirilmesi üzerine çalışmışlardır. Üçüncü mertebeden üç noktalı sınır değer problemleri de bu metod ile çözülmüştür [35]. Chen ve Chen [36], çekirdek üreten uzaylarda lineer operatör denklemler sisteminin analitik çözümünü araştırmışlardır. Çekirdek üreten metod ile alakalı ve bu metodun etkililiği ile ilgili olarak [11 – 36] nolu referanslara bakılabilir.

Tezimizde çekirdek üreten uzay metodu ile dört farklı problem ele aldık. Bu problemlerin bu metod ile çözümü için çekirdek üreten uzaylar tanımlayıp bu uzaylarda üretilen çekirdekleri bulduk. Elde edilen çözümlerin yakınsak olduğunu gösterdik. Bu yöntemle elde edilen sonuçları literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırdık. Bulunan sonuçları tablolar ve şekillerle ifade ettik.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. (Vektör uzayı) E boş olmayan bir küme olsun.

$(x, y) \rightarrow x + y$, $E \times E$ den E 'ye toplanabilirlik,

$(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$, $F \times E$ den E 'ye skaler ile çarpma,

olmak üzere,

$x, y, z \in E$, $\alpha, \beta \in F$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$),

için

a) $x + y = y + x$,

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

c) Her $x, y \in E$ için

$x + z = y$,

olacak şekilde bir $z \in E$ mevcuttur,

d) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

e) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

f) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

g) $1x = x$,

şartları sağlanacak şekilde E cümlesine vektör uzayı, elemanlarına ise vektör denir. Eğer

$F = \mathbb{R}$,

ise E 'ye reel vektör uzayı eğer

$F = \mathbb{C}$,

ise E 'ye kompleks vektör uzayı denir [37].

Tanım 2.2. (İç çarpım uzayı) E bir kompleks vektör uzayı olsun. Eğer

$x, y, z \in E$, $\alpha, \beta \in F$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$),

için

a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (Kompleks eşlenik)

b) $\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, y \rangle$,

c) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

d) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

şartları sağlanırsa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C},$$

dönüşümü E de bir iç çarpım tanımlar. Bir vektör uzayına iç çarpım ile birlikte iç çarpım uzayı denir [37].

Tanım 2.3. $C[a, b]$ uzayında $[a, b]$ aralığı üzerinde tüm sürekli kompleks değerli fonksiyonlar için iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

şeklinde tanımlanır [37].

Tanım 2.4. Tam olan iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [37].

Teorem 2.1. (Riesz gösterimi) f fonksiyoneli H –Hilbert uzayında sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. Tüm $x \in H$ için,

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle$$

olacak şekilde bir $x_0 \in H$ ve $\|f\| = \|x_0\|$ eşitliği mevcuttur [37].

Tanım 2.5. (Cauchy dizisi) Her $\varepsilon > 0$ için eğer her $m, n > M$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir M sayısı var ise bu taktirde normlu bir uzayda vektörlerin bir dizisi olan (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [37].

Tanım 2.6. (Norm)

$$x \rightarrow \|x\|,$$

E vektör uzayından $\mathbb{R}$ 'ye bir dönüşüm olmak üzere eğer

$$\mathbf{a)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\mathbf{b)} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in E \text{ ve } \lambda \in F,$$

$$\mathbf{c)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E,$$

şartları sağlanırsa bu dönüşüm norm olarak adlandırılır [37].

Tanım 2.7. Aynı F skaler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzaylarını göz önüne alalım. Bir $A : U \rightarrow V$ fonksiyonu,

$$(i) \quad \forall u_1, u_2 \in U, \quad A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2) \text{ (Toplanabilirlik),}$$

$$(ii) \quad \forall u \in U \text{ ve } \forall \alpha \in F, \quad A(\alpha u) = \alpha A(u) \text{ (Homogenlik),}$$

koşullarını sağlıyorsa bir lineer dönüşüm ya da lineer operatör adını alır [38].

Teorem 2.2. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Her $u \in U$ için

$$\|Au\|_V \leq K \|u\|_U$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa A operatörüne sınırlıdır denir [38].

Teorem 2.3. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. A operatörü ancak ve ancak sınırlı ise süreklidir [38].

Teorem 2.4. H , bir iç çarpım uzayı olsun. Her $u \in H$ vektörü için

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

fonksiyonu H üzerinde bir doğal norm olur [38].

Teorem 2.5. H , bir Hilbert uzayı ve

$$S = \{\Phi_i\},$$

sayılabilir bir ortonormal alt küme olsun. $\{a_i\}$ skaler dizisi ile oluşturulan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i$ serisi ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty,$$

koşulu sağlanırsa yakınsaktır [38].

Tanım 2.8.

$$H = \left\{ \begin{array}{l} f \mid f \text{ reel veya kompleks değerli bir fonksiyon,} \\ x \in X, X \text{ herhangi bir cümle,} \end{array} \right\}$$

olsun.

$$\langle f, g \rangle_H \quad (f, g \in H),$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayı tanımlar. Eğer R_y fonksiyonu her bir $y \in X$ için mevcutsa, bu taktirde $R_y \in H$ olur ve her bir $f \in H$ için

$$\langle f, R_y \rangle_H = f(y),$$

sağlanıyorsa R_y fonksiyonuna H 'ın üretilen çekirdek fonksiyonu ve H -Hilbert uzayına da çekirdek üreten Hilbert uzayı denir [8].

Tanım 2.9. X bir iç çarpım uzayı olsun. Bu taktirde tüm $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

eşitsizliği mevcuttur ve bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [39].

Tanım 2.10. E cümlesi Ω topolojik uzayının bir alt cümlesi olsun. Eğer $\overline{E} = \Omega$ oluyorsa bu taktirde E cümlesine Ω uzayında yoğundur denir [40].

Tanım 2.11. X uzayı $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ile birlikte $D(A)$ cümlesi X uzayında yoğun olacak şekilde bir Hilbert uzayı olsun. Bu taktirde A 'nın adjointi A^* ile belirtilir ve

$$D(A^*) = \left\{ \begin{array}{l} y \in X \mid \text{tüm } x \in D(A) \text{ için } \langle Ax, y \rangle = \langle x, w \rangle \\ \text{eşitliğini sağlayacak } w \in X \text{ mevcuttur} \end{array} \right\}$$

ve

$$A^*y = w$$

şeklinde ifade edilir [41].

Tanım 2.12. $L(X)$ sınırlı operatörler uzayı olmak üzere $A \in L(X)$ olsun. I birim operatör olmak üzere eğer $BA = I$ ve $AB = I$ olacak şekilde bir B operatörü varsa bu taktirde bu B operatörüne A operatörünün tersi denir ve $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir [42].

Hatırlatma 2.1. H –Hilbert uzayı çekirdek üreten Hilbert uzayı ve R_y fonksiyonu da X üzerinde üretilen çekirdek fonksiyon olsun. Bu taktirde tüm $x, y \in X$ için,

$$(i) R_y(y) \geq 0,$$

$$(ii) R_y(x) = \overline{R_x(y)},$$

$$(iii) |R_y(x)|^2 \leq R_x(x)R_y(y), \text{ (Cauchy-Schwarz esitsizliđi)},$$

$$(iv) x_0 \in X \text{ olsun. Bu taktirde aşağıdaki üç durum birbirine eřdeđerdir.}$$

$$(a) R_{x_0}(x_0) = 0,$$

$$(b) \text{ Tüm } y \in X \text{ için } R_y(x_0) = 0,$$

$$(c) \text{ Tüm } f \in H \text{ için } f(x_0) = 0,$$

yazılabilir [43].

Örnek 2.1. n boyutlu R^n Öklid uzayı çekirdek üreten bir uzaydır.

$$\mathbb{R}^n = \{a \mid a = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}\},$$

olmak üzere

$$e_m(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m, \\ 1, & i = m, \end{cases} \quad (0 \leq i, m \leq n)$$

çekirdeği $\mathbb{R}^n$ nin üretilen çekirdeđidir [8].

Örnek 2.2. H , n -boyutlu bir Hilbert uzayı, $\{e_i\}_{i=1}^n$ normal ortogonal baz olsun. Yani

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle_H = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

olmak üzere

$$R_s(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t) \overline{e_i(s)},$$

H 'ın üretilen bir çekirdeği olur. Gerçekten her $f(t) \in H$ için

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(t), \quad (a_i \text{ kompleks sayılar}),$$

olmak üzere

$$\langle f(t), R_s(t) \rangle_H = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)} \right\rangle_H = \sum_{i=1}^n a_i e_i(s) = f(s),$$

eşitliği sağlanır [8].

Tanım 2.13. u bir diferansiyel denklemin analitik çözümü, u_n ise bu denklemin yaklaşık çözümü olsun. $|u - u_n|$ farkına yaklaşımın mutlak hatası ve $\frac{|u-u_n|}{|u|}$ oramına ise yaklaşımın bağıl hatası adı verilir [44].

3. BÖLÜM

ÇEKİRDEK ÜRETEK UZAYLAR VE ÜRETİLEN ÇEKİRDEKLERİN ÖZELLİKLERİ

3.1. Üretilen Çekirdeğin Temel Özellikleri

Özellik 3.1. Eğer H , çekirdek üreten bir uzay ise bu taktirde H 'taki R_y üretilen çekirdeği eşlenik simetrik olur. Yani

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)},$$

eşitliği sağlar [8].

Özellik 3.2. Eğer H , çekirdek üreten bir uzay ise bu taktirde H 'taki R_y üretilen çekirdek fonksiyonu tektir [8].

Özellik 3.3. Eğer R_y fonksiyonu, H 'ta üretilen bir çekirdek ise bu taktirde her bir $x \in X$ için $R_x(x) \geq 0$ olur. $R_x(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $H = \{0\}$ olmasıdır [8].

Özellik 3.4. R_y üretilen çekirdeği pozitif tanımlı bir çekirdektir, yani ξ_i, ξ_j ($i, j = 1, \dots, n$) herhangi kompleks sayılar olmak üzere her $x_i \in X$ için

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \overline{\xi_i} \xi_j \geq 0,$$

eşitsizliği mevcuttur [8].

Özellik 3.5. H - Hilbert fonksiyon uzayının çekirdek üreten bir uzay olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir sabit $x \in X$ için $\mathbf{I}(f) = f(x)$ lineer fonksiyonelinin sınırlı olmasıdır [8].

3.2. $W_2^m[a, b]$ Çekirdek Üreten Uzay ve Onun Üretilen Çekirdek Fonksiyonu

Tanım 3.1. $[a, b]$ aralığı üzerinde bir f fonksiyonu verilsin. $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ cümlesi ikişer ikişer ayrık açık $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ aralıkların bir cümlesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

olduğunda

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

olacak şekilde n 'e bağlı olmayan en az bir δ mevcutsa, bu taktirde f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak süreklidir denir [8].

Önerme 3.1. Bir f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ise aynı zamanda süreklidir [8].

Önerme 3.2. $[a, b]$ aralığı üzerinde verilen bir f fonksiyonu için eğer $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|f'(x)| \leq M,$$

eşitsizliği mevcutsa bu taktirde f fonksiyonu mutlak sürekli olur [8].

Sonuç 3.1. Eğer f' fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ise bu taktirde f fonksiyonu bu aralık üzerinde mutlak sürekli olur [8].

Önerme 3.3. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ise bu taktirde,

$$\int_a^x f(t)dt,$$

fonksiyonu bu aralık üzerinde mutlak sürekli olur [8].

3.3. $W_2^m[a, b]$ Fonksiyon Uzayı

$W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı

$$W_2^m[a, b] = \left\{ f \mid f^{(m-1)} \text{ mutlak sürekli, } f^{(m)} \in L^2[a, b], x \in [a, b] \right\}$$

olarak tanımlanır. $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayında iç çarpım ve norm herhangi $f, g \in W_2^m[a, b]$ fonksiyonları için, sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx \quad (3.1)$$

ve

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}}, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Teorem 3.1. $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı bir Hilbert Uzayıdır [8].

Teorem 3.2. $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı çekirdek üreten bir uzaydır [8].

$W_2^m[a, b]$ uzayında R_y üretilen çekirdek fonksiyonunun nasıl elde edildiğini inceleyelim. R_y 'nin $W_2^m[a, b]$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu olduğunu farz edelim. Bu taktirde herhangi sabit bir $y \in [a, b]$ ve herhangi $f \in W_2^m[a, b]$ için R_y fonksiyonu,

$$\langle f, R_y \rangle_{W_2^m} = f(y), \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlamalıdır. (3.3) eşitliğine çekirdek üretme özelliği adı verilir. Bu özellik (3.1)'de kullanılırsa,

$$\langle f, R_y \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx = f(y), \quad (3.4)$$

bulunur ve kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^b \\ &\quad + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Değişken değiştirilmesiyle

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{(m-i-1)} f^{(i)}(x) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}, \quad (3.6)$$

yazılabilir. (3.5) ve (3.6) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle f, R_y \rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ &\quad + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \\ &= f(y), \end{aligned}$$

bulunur. Bundan dolayı R_y fonksiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

genelleştirilmiş diferansiyel denkleminin çözümüdür. Böylece,

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \quad (3.8)$$

denklemini,

$$\lambda^{2m} = 0,$$

karakteristik denklemine ve $2m$ katlı,

$$\lambda = 0,$$

öz değerine sahiptir. $x \neq y$ iken biliyoruz ki R_y fonksiyonu $2m$ mertebeli sabit katsayılı homogen (3.8) diferansiyel denkleminin,

$$\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.10)$$

sınır şartlarını sağlayan bir çözümüdür. Bu nedenle (3.7)'nin genel çözümü,

$$R_y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

olur.

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y),$$

olduğundan,

$$\frac{\partial^i R_y(y^-)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i R_y(y^+)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2, \quad (3.12)$$

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} R_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} R_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1, \quad (3.13)$$

yazılabilir. $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, 2m$) katsayıları (3.9), (3.10), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden elde edilir [8].

Önerme 3.4. R_y fonksiyonu, $W_2^m[a, b]$ uzayının üretilen çekirdeği olsun. Bu taktirde x ve y 'ye göre,

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^2[a, b], \quad i + j = 2m - 1,$$

olur [8].

Sonuç 3.2.

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i + j \leq 2m - 2,$$

fonskiyonu x ve y 'ye göre $[a, b]$ aralığında mutlak sürekl bir fonskiyondur [8].

Teorem 3.3. R_y fonksiyonu, $W_2^m[a, b]$ uzayının üretilen çekirdeği olsun. Bu taktirde x ve y 'ye göre

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_2^m[a, b], \quad i + j = m - 1,$$

olur [8].

Teorem 3.4. $W_2^m[a, b]$ çekirdek üreten bir uzay ve

$$f_n, f \in W_2^m[a, b], \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun. Eğer f_n, f 'e $\|\cdot\|_{W_2^m}$ normunda yakınsıyorsa bu taktirde,

$$0 \leq k \leq m - 1,$$

olmak üzere $f_n^{(k)}, f^{(k)}$ 'ya düzgün yakınsar [8].

3.4. $W_2^{(m,n)}(D)$ İkili (Binary) Çekirdek Üreten Uzay

$D, [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlı bir dikdörtgensel bölge olsun.

Tanım 3.2. D bölgesinde verilen bir $f(x, y)$ fonskiyonu için,

$$\{\mathbf{I}_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n,$$

cümlesi ikişer ikişer ayrık $\mathbf{I}_k \subset D$ bölgelerinin bir cümlesi olsun. Eğer,

$$f(\mathbf{I}_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i),$$

olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^n |\mathbf{I}_i| < \delta,$$

olduğunda,

$$\sum_{i=1}^n |f(\mathbf{I}_i)| < \varepsilon,$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa ve $f(x, c)$, $g(a, y)$ fonksiyonları, sırasıyla, x ve y 'ye göre mutlak sürekli fonksiyonlar ise bu taktirde $f(x, y)$ fonksiyonuna D bölgesinde tamamen sürekli dir denir [8].

Önerme 3.5. Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde her bir sabit $y \in [c, d]$ için x 'in bir fonksiyonu olarak $f(x, y)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olur. Benzer şekilde her bir sabit $x \in [a, b]$ için y 'nin bir fonksiyonu olarak $f(x, y)$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olur [8].

Önerme 3.6. Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde tamamen sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde $f(x, y)$ fonksiyonu bu bölge üzerinde aynı zamanda sürekli bir fonksiyondur [8].

Önerme 3.7. Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde integrallenebilir ise bu taktirde,

$$\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds, \quad (x, y) \in D,$$

fonskiyonu D bölgesinde tamamen sürekli bir fonskiyon olur [8].

Önerme 3.8. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde bu fonksiyon bu bölgede tamamen sürekli bir fonksiyondur [8].

Önerme 3.9. Eğer $f(x)$ ve $g(y)$ fonksiyonları sırasıyla $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralıklarında mutlak sürekli fonksiyonlar ise bu taktirde $f(x)g(y)$ fonksiyonu D bölgesinde tamamen sürekli dir [8].

Tanım 3.3. İkili fonksiyon uzayı

$$W_2^{(m,n)}(D) = \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n-2} f(x, y)}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \text{ fonksiyonu } D \text{ bölgesinde tamamen sürekli,} \\ \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \in L^2(D), \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaydaki iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{W_2^{(m,n)}(D)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(\cdot, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(\cdot, c) \right\rangle_{W_2^m} \\ &+ \int_D \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) dx dy \end{aligned}$$

ve

$$\|f\|_{W_2^{(m,n)}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^{(m,n)}}}, \quad f \in W_2^{(m,n)}(D),$$

bağıntıları ile verilir [8].

Teorem 3.5. $W_2^{(m,n)}(D)$ fonksiyon uzayı bir Hilbert uzayıdır [8].

Teorem 3.6.

$$f(x, y), g_1(x)g_2(y) \in W_2^{(m,n)}(D),$$

olsun, bu taktirde,

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \left\langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{W_2^m}, g_2(y) \right\rangle_{W_2^n},$$

eşitliği sağlar [8].

Sonuç 3.3.

$$f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \in W_2^{(m,n)}(D),$$

olsun. Bu taktirde,

$$\langle f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m,n)}} = \langle f_1(x), g_1(x)g \rangle_{W_2^m} \langle f_2(y), g_2(y) \rangle_{W_2^n},$$

olur [8].

Sonuç 3.4. Eğer $f \in W_2^m[a, b]$ ise bu taktirde $n \in N$ için,

$$\|f\|_{W_2^m} = \|f\|_{W_2^{(m,n)}},$$

yazılabilir [8].

Teorem 3.7. $W_2^{(m,n)}(D)$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdeği $K_{(\xi,\eta)}$; R_ξ, Q_η çekirdekleri sırasıyla $W_2^m[a, b], W_2^n[c, d]$ uzaylarının üretilen çekirdekleri olmak üzere,

$$K_{(\xi,\eta)}(x, y) = R_\xi(x)Q_\eta(y),$$

şeklindedir [8].

4. BÖLÜM

SİNE-GORDON DENKLEMİ

Bağımsız dalgalar (solitary waves) ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kütesinin şeklinde bir değişiklik ve hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott Russel [45] tarafından gözlenmesi ile kayda geçmiştir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Scott Russel tarafından bu dalgalara "Bağımsız dalgalar" adı verilmiştir. 1847 yılında Stokes [46] ve 1872 yılında Boussinesq [47] gibi bir çok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardaki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russel'den sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Kortoweg-de Vries'e aittir. Kortoweg-de Vries [48] sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken KdV denklemini bulmuşlardır.

l : kanalın derinliği

$l + \eta$: (η küçük olmak üzere) yüzeyin dipten itibaren yüksekliği

α : sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük bir sabit

σ : $\frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ (bir parametre)

T : yüzey gerilimi

g : yerçekim ivmesi

ρ : sıvının yoğunluğu

olmak üzere dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem

$$\eta_\tau = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right],$$

biçimindedir.

$$\eta = \beta \alpha u, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}} x, \quad \tau = \sqrt{\frac{2g\mu\alpha^3}{\sigma l}} t,$$

dönüşümleri ile bu denklem, bugün iyi bilinen KdV denklemine

$$u_\tau + u_\xi + \epsilon u u_\xi + \mu u_{\xi\xi\xi} = 0,$$

dönüştür. Burada,

$$\epsilon = \frac{3}{2} \beta,$$

olup μ bilinen bir parametredir [49].

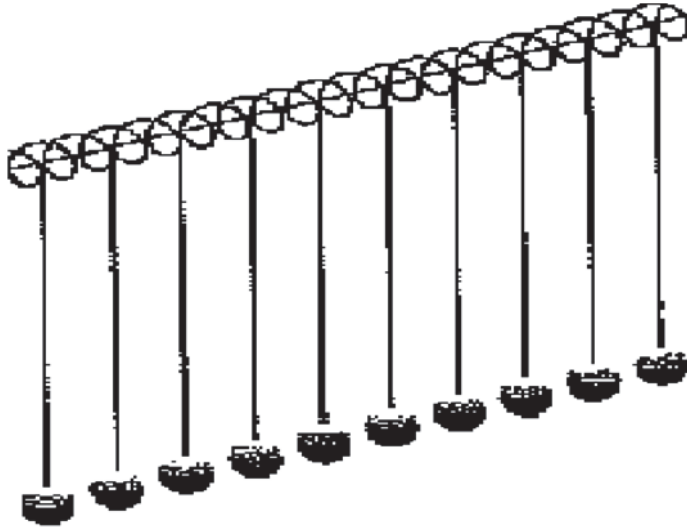
Soliton tipi çözümlere sahip pek çok denklem mevcuttur. Bu denklemlerin ortak özelliklerinden biri enerjisini ve biçimini koruyan çözümlere sahip olmasıdır. Sine-Gordon denklemi de bu denklemlerden biridir. Sine-Gordon denklemini

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0, \quad (4.1)$$

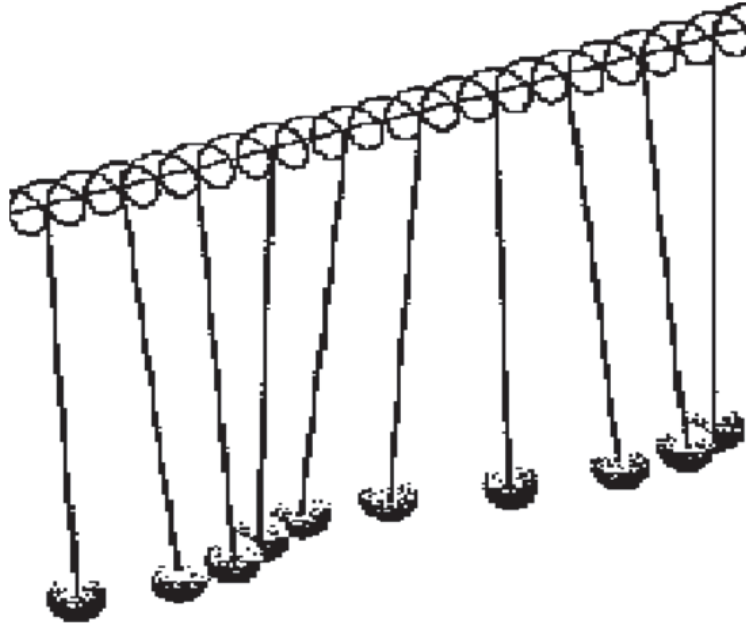
mekanik iletim sisteminin tarifi olarak türetelim.

4.1. Mekanik İletim Sistemi

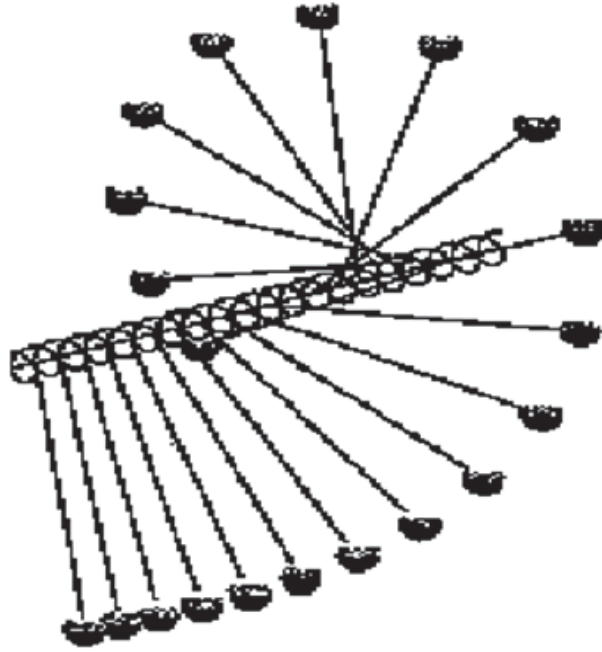
Scott 1960'ların sonlarında elektrik iletim sisteminin bir benzeri olarak mekaniksel bir sistem oluşturmuştur. Bu sistem Şekil 4.1'de görülebileceği gibi ince bir tel ile yatay olarak desteklenen ve çelik bir yay ile bağlanmış sarkaçların bir serisini içermektedir. Her bir sarkaç tel boyunca düşey düzlemde sallanmak için bağımsız olarak bırakılmıştır. Yay dolandığında iki komşu sarkacın üzerinde bir dönme momenti oluşur. Bu iki bitişik sarkaç arasındaki iletişim makinenin bir kısmında bir harekete izin vererek mekaniksel olarak sinyal iletiminin sarkacın alt tarafına yayılmasını sağlar. Eğer makinenin bir ucundaki sarkaç hafifçe hareket ettirilirse Şekil 4.2'de görüldüğü gibi iletilmiş hareketler küçük titreşimlerle sonuçlanır. Eğer makinenin bir ucundaki sarkaç hızlıca tel etrafında bir tam dolanım yapıp dönerse Şekil 4.3'te görüldüğü gibi daha hareketli bir etki meydana gelir.



Şekil 4.1. Yatay bir yaya tutturulmuş sarkaçlar [50]



Şekil 4.2. Sarkaçlarda meydana gelen küçük titreşimler [50]



Şekil 4.3. Sarkaçlarda meydana gelen hareketli titreşimler [50]

4.2. Sine-Gordon Denkleminin Türetilmesi

(4.1) denklemi ile belirtilen sine-Gordon denklemi sarkacın hareketlerinin tarifi için sürekli bir model olarak türetilmiştir [51]. $u(x, t)$, x konumunda ve t anında sarkacın rotasyon açısını belirtir. Bu denklem süper iletken iletim sistemlerinde, kristallerde ve yüzeylerin geometrisinde ortaya çıkmaktadır [51]. Scott'un bu denklemi sarkacın rotasyon açılarını modelleyen diferansiyel denklemlerin bir sisteminden nasıl türettiğini inceleyelim. Burada herbir sarkacın m kütlelerine ve l uzunluğuna sahip olduğunu ve iki sarkaç arasındaki mesafenin eşit bir şekilde olup Δx olduğunu kabul edelim. $u_i(t)$, i . sarkacın t anında rotasyon açısının ölçümü olsun. $u_i = 0$, Şekil 4.4'te sarkacın alt durumunu belirtsin. Sarkacın hareketi için matematiksel model, Newton'nun ikinci kanunu baz alınarak ifade edilmiştir. Newton'nun ikinci kanunu

$$I \frac{d^2 u_i}{dt^2} = i. \text{ sarkaç üzerine etki eden net dönme momenti}, \quad (4.2)$$

formunda ifade edilir. Burada I sarkacın eylemsizlik momenti, $I = ml^2$ ve dönme momenti ise dönme gücünün etkisinin ölçümüdür. Bu durumda üç tür dönme momenti dikkate alınacaktır. Bunlar yerçekiminden dolayı oluşan dönme momenti, i . ve $(i - 1)$. sarkaçlar arasındaki sarmal yayın büküm noktasından dolayı oluşan dönme momenti ile i . ve $(i + 1)$. sarkaçlar arasındaki yaydan dolayı oluşan dönme momentidir. İlk olarak yerçekiminden dolayı oluşan dönme momentine bakılırsa yerçekimsel güç i . sarkaç üzerine etki ederek sarkacı aşağı doğru döndürmeyi dener. Şekil 4.5'te görüldüğü gibi elde edilen dönme momenti

$$\pm(mg \sin u_i)(l),$$

şeklindedir. Burada $mg \sin(u_i)$ sarkaçta dikey yerçekimsel gücün miktarını, l kütleinin dönme noktasına olan uzaklığını ve g ise yerçekim ivmesini belirtir. Eğer sarkaç sağa doğru sallanırsa $(0 < u_i < \frac{\pi}{2})$ bu taktirde $\sin(u_i) > 0$ olur. Yerçekimsel moment sarkacı negatif u_i yönünde geriye ve sola doğru döndürmeyi dener. Şekil 4.5 aynı zamanda dönme momentinin yönünü de belirtir. Eğer sarkaç sola doğru sallanırsa $(-\frac{\pi}{2} < u_i < \frac{\pi}{2})$ bu taktirde $\sin(u_i) < 0$ olur. Yerçekimsel moment bununla beraber sarkacı pozitif u_i yönünde geriye ve sağa doğru döndürür. Net dönme momentinin bir kısmı yerçekiminden dolayı $-mg \sin(u_i)$ miktarındadır. i . ve $(i + 1)$. sarkaçlar arasında kalan yayın bir kısmından dolayı oluşan dönme etkisi için hesaplanacak olan bir diğer dönme momentini inceleyelim. Dönme etkisiyle oluşan gücün üç büyük faktöre bağlı olduğu söylenebilir. Bunlar yayın

büküm miktarı, yayın uzunluğu ve yayın eğilmezliğidir. Bu dönme momenti için bir model

$$\text{yayın dönme momenti} = K \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x},$$

şeklinde verilir. Burada $u_{i+1} - u_i$, i . ve $(i+1)$. sarkaçlar arasındaki yayın büküm miktarını, Δx yay uzunluğunu ve $K > 0$ yayın maddesine bağlı yay sabitini ifade eder. Eğer

$$u_{i+1} - u_i = 0,$$

olursa bu taktirde yayın her iki ucu aynı miktarda çevrilir ve böylelikle i . ve $(i+1)$. sarkaçlar arasında büküm noktası oluşmaz. Diğerinden çok daha fazla çevrilmiş olan yayın bir ucuna karşılık gelen $u_{i+1} - u_i$ 'nin geniş değerleri yay sarmallandığından geniş bir dönme momenti ile i . sarkaç üzerinde sonuçlanır. Yayın bükümünü emen sarmallar mevcut olduğundan yayın geniş bölümleri (geniş Δx) daha küçük dönme momentleri ile sonuçlanır. Benzer bir şekilde i . ve $(i-1)$. sarkaçlar arasındaki yayın bükümünden dolayı i . sarkaca uygulanan dönme momentinin

$$K \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x},$$

olacağı farz edilir. Yerçekim ve yayın dönme momentleri Newton'nun ikinci kanunu olan (4.2) formülünde yerine yazılırsa

$$ml^2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} = K \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x} - mgl \sin(u_i), \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{m}{\Delta x} \rightarrow M \text{ iken } \Delta x \rightarrow 0,$$

olacak şekilde sarkaçların kütleleri azaldığı anda sayılarının artacağını farz edelim. Bu, maddenin M kütle yoğunluğuyla sürekli bir tabaka oluşturur. $u(x, t)$ bu sürekli tabakanın x durumunda ve t anında rotasyon açısını belirtsin. (4.3) denkleminin her iki tarafını Δx 'e bölersek

$$\frac{ml^2}{\Delta x} \frac{d^2 u_i}{dt^2} = K \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{mgl \sin(u_i)}{\Delta x},$$

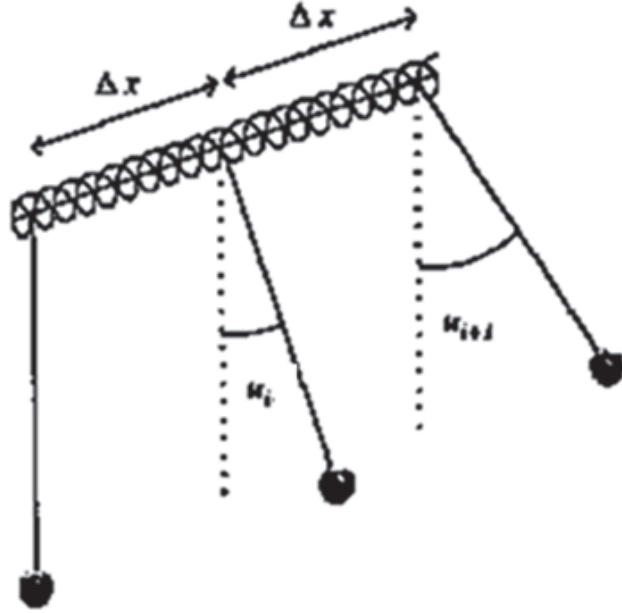
bulunur ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken limit alındığında

$$ml^2 u_{tt} = K u_{xx} - mgl \sin(u),$$

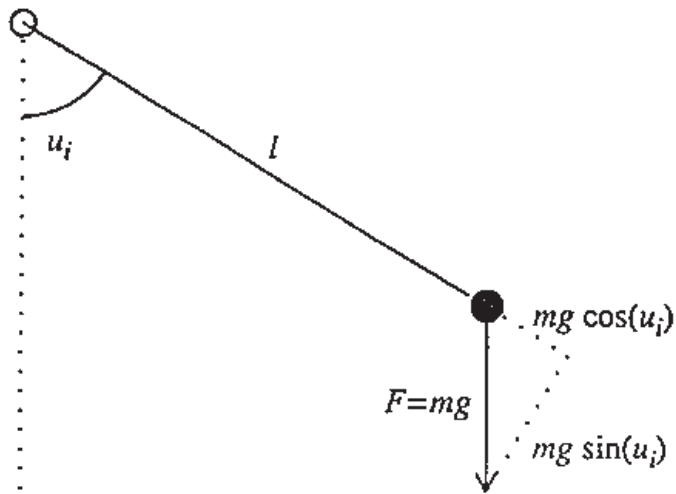
elde edilir. $A = ml^2$ ve $T = mgl$ olarak alınırsa sine-Gordon denklemi

$$A u_{tt} = K u_{xx} - T \sin(u), \quad (4.4)$$

bulunur [50].



Şekil 4.4. Eşit mesafede konumlanmış şarkaçlar [50]



Şekil 4.5. Dönme momentinin açısı [50].

Sine-Gordon denklemi çok önemli lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemin diferansiyel geometride ortaya çıkması bu denkleme ayrıca önem kazandırmıştır. Solitonların çarpımsal davranışları bu tür denklemlerden ortaya çıkmaktadır. Bu denklem 1970'lerde soliton çözümlerinin varlığından dolayı cezbedici bir dikkat çekmiştir [52, 53]. Bu denklemin analitik çözümü sadece özel durumlarda bulunabildiğinden bu denklemi çözmek için bir çok sayısal metod kullanılmıştır. Özellikle son yıllarda bu metodlar daha geniş incelenmiştir. Bu denklemi çözmek için kompakt sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır [54]. Khaliq sayısal bir yöntem uygulayarak bu denklemi çözmeye çalışmıştır [55]. Dehghan radyal bazlı fonksiyonları kullanarak bu denklemi çözmüştür [56]. Biz ise bu denklemi son yıllarda gittikçe önemi artan çekirdek üreten uzay metodu ile çözmeye çalıştık.

4.3. Sine-Gordon Denkleminin Çekirdek Üreten Uzay Metodu ile Çözümü

Bu bölümde çekirdek üreten uzay metodu ile sine-Gordon denklemi çözülecektir. Bu denklemin bu metod ile çözümü için çekirdek üreten uzaylar tanımlanıp bu uzaylarda üretilen çekirdekler bulunacaktır. Bu yöntemle elde edilen sayısal sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Bulunan değerler tablolar halinde verilip bunların grafikleri çizilecektir.

Bir boyutlu lineer olmayan sine-Gordon denklemini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \sin(u(x, t)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

başlangıç koşulları

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

ve sınır koşulları ile birlikte

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t), \quad t \geq 0, \quad (4.7)$$

göz önüne alalım.

4.3.1. Çekirdek Üreten Uzaylar

Tanım 4.1. (Üretilen Çekirdek Fonksiyon) $E \neq \emptyset$ olsun. Eğer

a) $K(., t) \in H, \quad \forall t \in E$ için

b) $\langle \varphi, K(., t) \rangle = \varphi(t), \quad \forall t \in E$ ve $\forall \varphi \in H$ için

koşulları sağlanırsa $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna Hilbert uzayının *üretilen çekirdek fonksiyonu* denir [8].

Tanım 4.2. (Çekirdek Üreten Hilbert Uzayı) Boş olmayan E kümesi üzerinde tanımlanan H -Hilbert uzayı eğer üretilen $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ çekirdek fonksiyonuna sahipse bu uzaya *çekirdek üreten Hilbert uzayı* denir [8].

Tanım 4.3. $H_2^1[0, T]$ uzayı

$$H_2^1[0, T] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u \text{ fonksiyonu } [0, T] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli bir fonksiyon,} \\ \\ u' \in L^2[0, T], \quad t \in [0, T], \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $H_2^1[0, T]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{H_2^1} = u(0)g(0) + \int_0^T u'(t)g'(t)dt, \quad u, g \in H_2^1[0, T]$$

ve

$$\|u\|_{H_2^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_2^1}}, \quad u \in H_2^1[0, T],$$

ile ifade edilir [8].

Lemma 4.1. $H_2^1[0, T]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır ve bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu q_s

$$q_s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + t, & t \leq s, \\ 1 + s, & t > s, \end{array} \right.$$

şeklinde verilir [8].

Tanım 4.4. $G_2^1[0, 1]$ uzayı

$$G_2^1[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u \text{ fonksiyonu } [0, 1] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli bir fonksiyon,} \\ \\ u' \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $G_2^1[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{G_2^1} = u(0)g(0) + \int_0^1 u'(x)g'(x)dx, \quad u, g \in G_2^1[0, 1]$$

ve

$$\|u\|_{G_2^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{G_2^1}}, \quad u \in G_2^1[0, 1],$$

ile ifade edilir [8].

Lemma 4.2. $G_2^1[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır ve bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu Q_y

$$Q_y(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq y, \\ 1+y, & x > y, \end{cases}$$

şeklinde verilir [8].

Tanım 4.5. $F_2^3[0, T]$ uzayı

$$F_2^3[0, T] = \left\{ \begin{array}{c} u \mid u, u', u'' \text{ fonksiyonları } [0, T] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ u^{(3)} \in L^2[0, T], \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u'(0) = 0, \end{array} \right\}$$

olsun. $F_2^3[0, T]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{F_2^3} = \sum_{i=0}^2 u^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + \int_0^T u^{(3)}(t)g^{(3)}(t)dt, \quad u, g \in F_2^3[0, T]$$

ve

$$\|u\|_{F_2^3} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{F_2^3}}, \quad u \in F_2^3[0, T],$$

formundadır [8].

Lemma 4.3. $F_2^3[0, T]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır ve bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu r_s

$$r_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}s^2t^2 + \frac{1}{12}s^2t^3 - \frac{1}{24}st^4 + \frac{1}{120}t^5, & t \leq s, \\ \frac{1}{4}s^2t^2 + \frac{1}{12}s^3t^2 - \frac{1}{24}ts^4 + \frac{1}{120}s^5, & t > s, \end{cases}$$

şeklinde verilir [8].

Tanım 4.6. $P_2^3[0, 1]$ uzayı

$$P_2^3[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \mid u, u', u'' \text{ fonksiyonları } [0, 1] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ u^{(3)} \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0, \end{array} \right\}$$

olsun. $P_2^3[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{P_2^3} = u(0)g(0) + u'(0)g'(0) + u'(1)g'(1) + \int_0^1 u^{(3)}(x)g^{(3)}(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_2^3} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^3}}, \quad u, g \in P_2^3[0, 1],$$

olarak tanımlanabilir.

Teorem 4.1. $P_2^3[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu

$$B_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklinde olup c_i ve d_i katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$c_1(y) = 0,$$

$$c_2(y) = -\frac{1}{122}y^5 + \frac{5}{244}y^4 - \frac{127}{244}y^2 + \frac{31}{61}y,$$

$$c_3(y) = -\frac{1}{2928}y^5 + \frac{127}{5856}y^4 - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1137}{1952}y^2 - \frac{127}{244}y,$$

$$c_4(y) = 0,$$

$$c_5(y) = \frac{1}{2938}y^5 - \frac{5}{5856}y^4 + \frac{127}{5856}y^2 - \frac{31}{1464}y,$$

$$c_6(y) = -\frac{1}{7320}y^5 + \frac{1}{2928}y^4 - \frac{1}{2928}y^2 - \frac{1}{122}y + \frac{1}{120},$$

$$d_1(y) = \frac{1}{120}y^5,$$

$$d_2(y) = -\frac{1}{122}y^5 - \frac{31}{1464}y^4 - \frac{127}{244}y^2 + \frac{31}{61}y,$$

$$d_3(y) = -\frac{1}{2928}y^5 + \frac{127}{5856}y^4 + \frac{1137}{1952}y^2 - \frac{127}{244}y,$$

$$d_4(y) = -\frac{1}{12}y^2,$$

$$d_5(y) = \frac{1}{2928}y^5 - \frac{5}{5856}y^4 + \frac{127}{5856}y^2 + \frac{5}{244}y,$$

$$d_6(y) = -\frac{1}{7320}y^5 + \frac{1}{2928}y^4 - \frac{1}{2928}y^2 - \frac{1}{122}y.$$

İspat: $u \in P_2^3[0, 1]$ ve $0 \leq y \leq 1$ olsun. B_y üretilen çekirdeği (4.8) ile verilmiş olup türevleri

$$B'_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^5 i c_{i+1}(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^5 i d_{i+1}(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

$$B''_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 i(i+1) c_{i+2}(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^4 i(i+1) d_{i+2}(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

$$B_y^{(3)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 i(i+1)(i+2) c_{i+3}(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^3 i(i+1)(i+2) d_{i+3}(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

$$B_y^{(4)}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 i(i+1)(i+2)(i+3) c_{i+4}(y) x^{i-1}, & x < y, \\ \sum_{i=1}^2 i(i+1)(i+2)(i+3) d_{i+4}(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

$$B_y^{(5)}(x) = \begin{cases} 120 c_6(y), & x < y, \\ 120 d_6(y), & x > y, \end{cases}$$

şeklindedir. $P_2^3[0, 1]$ uzayındaki iç çarpımdan

$$\begin{aligned}
\langle u(x), B_y(x) \rangle_{w_2^3} &= u(0)B_y(0) + u'(0)B_y'(0) + u'(1)B_y'(1) + u''(1)B_y^{(3)}(1) \\
&\quad - u''(0)B_y^{(3)}(0) - u'(1)B_y^{(4)}(1) + u'(0)B_y^{(4)}(0) \\
&\quad + \int_0^1 u'(x)B_y^{(5)}(x)dx \\
&= u'(0)(B_y'(0) + B_y^{(4)}(0)) + u'(1)(B_y'(1) - B_y^{(4)}(1)) \\
&\quad + u''(1)B_y^{(3)}(1) - u''(0)B_y^{(3)}(0) \\
&\quad + \int_0^y B_y^{(5)}(x)u'(x)dx + \int_y^1 B_y^{(5)}(x)u'(x)dx \\
&= u'(0)(c_2(y) + 24c_5(y)) - u''(0)(6c_4(y)) \\
&\quad + u'(1)(d_2(y) + 2d_3(y) + 3d_4(y) - 20d_5(y) - 115d_6(y)) \\
&\quad + u''(1)(6d_4(y) + 24d_5(y) + 60d_6(y)) \\
&\quad + \int_0^y 120c_6(y)u(x)dx + \int_y^1 120d_6(y)u(x)dx \\
&= 120u(y)\left(\frac{1}{120}\right) = u(y),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Tanım 4.7. İkili çekirdek üreten $W(\Omega)$ uzayı

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \mid \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}, \Omega = [0, 1] \times [0, T] \text{ bölgesinde tamamen sürekli,} \\ \frac{\partial^6 v}{\partial x^3 \partial t^3} \in L^2(\Omega), u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanır. $W(\Omega)$ uzayındaki iç çarpım ve norm $u, g \in W(\Omega)$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\langle u, g \rangle_W &= \sum_{i=0}^2 \int_0^T \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(0, t) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(0, t) \right] dt \\
&\quad + \sum_{j=0}^2 \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(., 0), \frac{\partial^j}{\partial t^j} g(., 0) \right\rangle_{P_2^3} \\
&\quad + \int_0^T \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} g(x, t) \right] dx dt
\end{aligned}$$

ve

$$\|u\|_W = \sqrt{\langle u, u \rangle_W}, \quad u \in W(\Omega),$$

şeklindedir [8].

Lemma 4.4. $W(\Omega)$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdeği; B_y, r_s üretilen çekirdek fonksiyonları, sırasıyla, $P_2^3[0, 1]$ ve $F_2^3[0, T]$ uzaylarının üretilen çekirdek fonksiyonları olmak üzere,

$$K_{(y,s)} = B_y r_s,$$

yazılabilir. Herhangi $u \in W(\Omega)$ için,

$$u(y, s) = \langle u, K_{(y,s)} \rangle_W,$$

ve

$$K_{(y,s)}(x, t) = K_{(x,t)}(y, s),$$

eşitlikleri mevcuttur [8].

Tanım 4.8. İkili çekirdek üreten $\widehat{W}(\Omega)$ uzayı

$$\widehat{W}(\Omega) = \left\{ u \mid u, \Omega = [0, 1] \times [0, T] \text{ bölgesinde tamamen sürekli, } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(\Omega), \right\}$$

olsun. $\widehat{W}(\Omega)$ uzayındaki iç çarpım ve norm $u, g \in \widehat{W}(\Omega)$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \langle u, g \rangle_{\widehat{W}} &= \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t} u(0, t) \frac{\partial}{\partial t} g(0, t) \right] dt \\ &+ \langle u(\cdot, 0), g(\cdot, 0) \rangle_{G_2^1} \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right] dx dt \end{aligned}$$

ve

$$\|u\|_{\widehat{W}} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\widehat{W}}}, \quad u \in \widehat{W}(\Omega),$$

şeklindedir [8].

Lemma 4.5. $\widehat{W}(\Omega)$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen çekirdeği; Q_y, q_s çekirdekleri sırasıyla $G_2^1[0, 1]$ ve $H_2^1[0, T]$ uzaylarının üretilen çekirdek fonksiyonları olup

$$G_{(y,s)} = Q_y q_s,$$

dir [8].

4.3.2. $W(\Omega)$ Uzayında Çözümün Sunumu

Seçilen operatör lineer ve sınırlı olması gerektiğinden,

$$\Omega = [0, 1] \times [0, T]$$

olmak üzere L lineer operatörü,

$$L : W(\Omega) \rightarrow \widehat{W}(\Omega),$$

şeklinde olup, (4.5) denkleminde

$$Lv = v_{tt} - v_{xx},$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} M(x, t) = & \frac{(x-1)f(x)h_1''(t)}{h_1(0)} - xh_2''(t) - \frac{2f'(x)h_1(t)}{h_1(0)} - \frac{(x-1)f''(x)h_1(t)}{h_1(0)} \\ & + 2f'(x) + xf''(x) + t \left(g''(x) + \frac{2g(0)f'(x)}{h_1(0)} + \frac{(x-1)f''(x)g(0)}{h_1(0)} \right) \\ & - \sin \left[\begin{aligned} & v(x, t) - \frac{(x-1)f(x)h_1(t)}{h_1(0)} + xh_2(t) + xf(x) - xh_2(0) \\ & + t \left(g(x) + \frac{(x-1)f(x)g(0)}{h_1(0)} - xg(1) \right) \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

olarak alınırsa $h_1(0) \neq 0$ olmak üzere (4.5)–(4.7) denklemleri

$$\begin{cases} Lv(x, t) = M(x, t), & (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2, \\ v(x, 0) = v_t(x, 0) = v(0, t) = v(1, t) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

halini alır. Burada başlangıç ve sınır şartlarının homogenleştirilmesi için

$$\begin{aligned} v(x, t) = & u(x, t) + \frac{(x-1)f(x)h_1(t)}{h_1(0)} - xh_2(t) - xf(x) + xh_2(0) \\ & - t \left(g(x) + \frac{(x-1)f(x)g(0)}{h_1(0)} - xg(1) \right), \end{aligned}$$

dönüşümü kullanılmıştır. Notasyon karışıklığını önlemek bakımından (4.9) da $v(x, t)$ yerine uygun olması için tekrar $u(x, t)$ yazalım.

Lemma 4.6. Lineer L operatörü sınırlı bir operatördür.

İspat: $u \in W(\Omega)$ ve $(x, t) \in \Omega$ olsun. Lemma 4.4'ten

$$u(x, t) = \langle u, K_{(x,t)} \rangle_W,$$

ve böylece

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= \langle u, LK_{(x,t)} \rangle_W, \quad \frac{\partial}{\partial x} Lu(x, t) = \left\langle u, \frac{\partial}{\partial x} LK_{(x,t)} \right\rangle_W, \\ \frac{\partial}{\partial t} Lu(x, t) &= \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} LK_{(x,t)} \right\rangle_W, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} Lu(x, t) = \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} LK_{(x,t)} \right\rangle_W, \end{aligned}$$

yazılabilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $a, b, c, d > 0$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} |Lu(x, t)| &\leq a \|u\|_W, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} Lu(x, t) \right| \leq c \|u\|_W, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} Lu(x, t) \right| &\leq b \|u\|_W, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} Lu(x, t) \right| \leq d \|u\|_W, \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \|Lu\|_W^2 &= \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t} Lu(0, t) \right]^2 dt + \langle Lu(., 0), Lu(., 0) \rangle_{G_2^1} \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} Lu(x, t) \right]^2 dt dx \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial t} Lu(0, t) \right]^2 dt + [Lu(0, 0)]^2 \\ &\quad + \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} Lu(x, 0) \right]^2 dx + \int_0^1 \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} Lu(x, t) \right]^2 dt dx \\ &\leq (a^2 + c^2 + T(b^2 + d^2)) \|u\|_W^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Hatırlatma 4.1. $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ cümlesinin sayılabilir yoğun $\{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\}$ alt cümlesini seçelim. L^* operatörü L operatörünün adjoint operatörü olmak üzere,

$$\varphi_i(x, t) = G_{(x_i, t_i)}(x, t),$$

$\Psi_i = L^* \varphi_i$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $W(\Omega)$ uzayının $\{\widehat{\Psi}_i\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sistemi, $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ ifadesinin Gram-Schmidt ortogonalleştirme sürecinden yararlanılırsa

$$\widehat{\Psi}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \Psi_k,$$

olarak bulunur [57]. Burada β_{ik} 'lar ortogonal katsayılarıdır.

Teorem 4.2 $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$, Ω 'da yoğun olsun. Bu taktirde $\{\Psi_i\}_{i=1}^\infty$, $W(\Omega)$ uzayında bir tam sistem olur ve

$$\Psi_i(x, t) = LK_{(x_i, t_i)}(x, t),$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $(x, t) \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \Psi_i(x, t) &= (L^* \varphi_i)(x, t) = \langle L^* \varphi_i, K_{(x, t)} \rangle_W = \langle \varphi_i, LK_{(x, t)} \rangle_{\widehat{W}} \\ &= \langle LK_{(x, t)}, \varphi_i \rangle_{\widehat{W}} = \langle LK_{(x, t)}, G_{(x_i, t_i)} \rangle_{\widehat{W}} = LK_{(x, t)}(x_i, t_i) \\ &= LK_{(x_i, t_i)}(x, t), \end{aligned}$$

yazılabildiğinden $\Psi_i(x, t) \in W(\Omega)$ olduğu aşıkardır. Herbir sabit $u \in W(\Omega)$ için eğer,

$$\langle u, \Psi_i \rangle_W = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

olursa bu taktirde,

$$\langle u, L^* \varphi_i \rangle_W = \langle Lu, \varphi_i \rangle_{\widehat{W}} = \langle Lu, G_{(x_i, t_i)} \rangle_{\widehat{W}} = Lu(x_i, t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

bulunur. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$, dizisi Ω da yoğun olduğundan,

$$Lu(x, t) = 0,$$

yazılabilir. L^{-1} in varlığından,

$$u = 0,$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 4.3. Eğer $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$, Ω 'da yoğun ise bu taktirde (4.9)'un çözümü,

$$u = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, t_k) \widehat{\Psi}_i, \quad (4.10)$$

bağıntısını sağlar.

İspat: u fonksiyonu (4.9)'un çözümü olsun. Teorem 4.2'den $\{\widehat{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $W(\Omega)$ 'da bir tam sistemdir. Böylece

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \widehat{\Psi}_i \rangle_W \widehat{\Psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u, \Psi_k \rangle_W \widehat{\Psi}_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u, L^* \varphi_k \rangle_W \widehat{\Psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu, \varphi_k \rangle_{\widehat{W}} \widehat{\Psi}_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu, G_{(x_k, t_k)} \rangle_{\widehat{W}} \widehat{\Psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} Lu(x_k, t_k) \widehat{\Psi}_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, t_k) \widehat{\Psi}_i,
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

u_n yaklaşık çözümü u analitik çözümünün n teriminin göz önüne alınmasıyla elde edilir.

Yani, yaklaşık çözüm

$$u_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, t_k) \widehat{\Psi}_i,$$

olarak bulunur. Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ olur.

4.3.3. Metodun Uygulanması

Eğer M lineer ise bu taktirde (4.9)'un analitik çözümü (4.10) ile bulunabilir. Eğer M lineer değilse bu taktirde (4.9)'un analitik çözümü (4.10) ya da

$$\begin{cases} \text{Herhangi sabit } u_0 \in W(\Omega), \\ u_n = \sum_{i=1}^n A_i \widehat{\Psi}_i, \end{cases} \quad (4.11)$$

bağıntısıyla bulunabilir, burada

$$\begin{cases} A_1 = \beta_{11} M(x_1, t_1), \\ A_2 = \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} M(x_k, t_k), \\ \dots \\ A_n = \sum_{k=1}^n \beta_{nk} M(x_k, t_k), \end{cases} \quad (4.12)$$

dir. Şimdi (4.12) ile verilen u_n yaklaşık çözümünün analitik çözüme yakınsadığını göstere-
lim.

Lemma 4.7. Eğer,

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \widehat{u}, \quad \|u_n\| \text{ sınırlı, } (x_n, t_n) \rightarrow (y, s) \text{ ve } M(x, t) \text{ sürekli,}$$

şartları sağlanırsa bu taktirde,

$$M(x_n, t_n) \rightarrow M(y, s),$$

yazılabilir.

İspat: Üretilen çekirdeğin temel özelliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \langle u(y, s), K_{(x,t)}(y, s) \rangle_W \right| \\ &\leq \|u(y, s)\|_W \|K_{(x,t)}(y, s)\|_W = N_1 \|u(y, s)\|_W, \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| &= \left| \left\langle u(y, s), \frac{\partial K_{(x,t)}(y, s)}{\partial x} \right\rangle_W \right| \\ &\leq \|u(y, s)\|_W \left\| \frac{\partial K_{(x,t)}(y, s)}{\partial x} \right\|_W = N_2 \|u(y, s)\|_W \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| &= \left| \left\langle u(y, s), \frac{\partial K_{(x,t)}(y, s)}{\partial t} \right\rangle_W \right| \\ &\leq \|u(y, s)\|_W \left\| \frac{\partial K_{(x,t)}(y, s)}{\partial t} \right\|_W = N_3 \|u(y, s)\|_W, \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bir taraftan

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(y, s) - \widehat{u}(y, s)| &= \left| \langle u_{n-1}(x, t) - \widehat{u}(x, t), K_{(y,s)}(x, t) \rangle_W \right| \\ &\leq \|u_{n-1}(x, t) - \widehat{u}(x, t)\|_W \|K_{(x,t)}(y, s)\|_W \\ &= N_4 \|u_{n-1}(x, t) - \widehat{u}(x, t)\|_W, \end{aligned}$$

mevcut iken diğer taraftan

$$\begin{aligned} |u_{n-1}(x_n, t_n) - \widehat{u}(y, s)| &= |u_{n-1}(x_n, t_n) - u_{n-1}(y, s) + u_{n-1}(y, s) - \widehat{u}(y, s)| \\ &\leq |\nabla u_{n-1}(\xi, \eta)| |(x_n, t_n) - (y, s)| + |u_{n-1}(y, s) - \widehat{u}(y, s)|, \end{aligned}$$

mevcuttur. Yukarıdaki eşitsizliklerden ve

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \widehat{u}$$

ifadesinden

$$|u_{n-1}(y, s) - \widehat{u}(y, s)| \rightarrow 0, \quad |\nabla u_{n-1}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \|u\|_W,$$

yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ iken, $\|u_n\|$ sınırlı olacağından

$$|u_{n-1}(x_n, t_n) - \widehat{u}(y, s)| \rightarrow 0,$$

olur. $M(x, t)$ 'nin sürekliliğinden $n \rightarrow \infty$ iken,

$$M(x_n, t_n) \rightarrow M(y, s),$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 4.4. (4.11)'deki $\|u_n\|$ 'nin sınırlı olduğunu ve (4.9)'un tek bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. Eğer $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty, \Omega$ 'da yoğun ise bu taktirde u_n yaklaşık çözümü u analitik çözümüne yakınsar ve

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \widehat{\Psi}_i,$$

yazılabilir.

İspat: Öncelikle u_n 'nin yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için (4.11)'den,

$$u_{n+1} = u_n + A_{n+1} \widehat{\Psi}_{n+1},$$

bulunur. $\{\widehat{\Psi}_i\}_{i=1}^\infty$ nin ortonormallığından,

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 + A_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} A_i^2, \quad (4.13)$$

olur. (4.13)'ten ise,

$$\|u_{n+1}\| > \|u_n\|,$$

elde edilir. Bu ise $\|u_n\|$ 'nin monoton artan olduğunu gösterir. $\|u_n\|$ sınırlı da olduğundan $\|u_n\|$ yakınsaktır ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^2 = d,$$

olacak şekilde sonlu bir d sayısı mevcuttur. Böylece,

$$\{A_i\}_{i=1}^\infty \in l^2,$$

olduğu görülür. Eğer $m > n$ ise bu taktirde,

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|^2 &= \|u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \dots + u_{n+1} - u_n\|^2 \\ &\leq \|u_m - u_{m-1}\|^2 + \|u_{m-1} - u_{m-2}\|^2 + \dots + \|u_{n+1} - u_n\|^2,\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\|u_m - u_{m-1}\|^2 = A_m^2,$$

olduğundan sonuç olarak $n, m \rightarrow \infty$ iken,

$$\|u_m - u_n\|^2 = \sum_{l=n+1}^m A_l^2 \rightarrow 0,$$

bulunur. $W(\Omega)$ 'nın tamlığından $n \rightarrow \infty$ iken $u_n \rightarrow \hat{u}$ olur. Şimdi $\hat{u}$ 'nin (4.9)'un çözümü olduğunu gösterelim. (4.11) ifadesinde her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \hat{\Psi}_i,$$

bulunur. Böylece,

$$L\hat{u} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i L\hat{\Psi}_i,$$

ve

$$\begin{aligned}L\hat{u}(x_k, t_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i L\hat{\Psi}_i(x_k, t_k) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle L\hat{\Psi}_i(x, t), \varphi_k(x, t) \right\rangle_{\widehat{W}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle \hat{\Psi}_i(x, t), L^* \varphi_k(x, t) \right\rangle_W = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle \hat{\Psi}_i(x, t), \Psi_k(x, t) \right\rangle_W,\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^i \beta_{ik} L\hat{u}(x_k, t_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle \hat{\Psi}_i(x, t), \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \Psi_k(x, t) \right\rangle_W \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle \hat{\Psi}_i(x, t), \hat{\Psi}_k(x, t) \right\rangle_W = A_k,\end{aligned}$$

elde edilir. (4.12)'den,

$$L\hat{u}(x_k, t_k) = M(x_k, t_k),$$

yazılabilir. $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$, Ω da yoğun olduğundan her bir $(y, s) \in \Omega$ için $j \rightarrow \infty$ iken,

$$(x_{n_j}, t_{n_j}) \rightarrow (y, s),$$

olacak şekilde bir $\{(x_{n_j}, t_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi mevcuttur. Böylece,

$$L\hat{u}(x_{n_j}, t_{n_j}) = M(x_{n_j}, t_{n_j}),$$

bulunur. $j \rightarrow \infty$ iken M 'nin sürekliliğinden ve Lemma 4.7'den

$$L\hat{u}(y, s) = M(y, s),$$

yazılabilir. Bu da $\hat{u}$ 'nın (4.9)'u sağladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

Hatırlatma 4.2.

$$\{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\} \in \Omega = [0, 1] \times [0, T],$$

formundaki yoğun cümleyi göz önüne alalım.

$$\varphi_i(x, t) = G_{(x_i, t_i)}(x, t), \quad \Psi_i(x, t) = L^* \varphi_i(x, t),$$

$$\hat{\Psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \Psi_k(x, t),$$

olmak üzere β_{ik} ortogonal katsayıları

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{1}{\|\Psi_1\|}, \quad \beta_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2}}, \\ \beta_{ij} &= \frac{-\sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} \beta_{kj}}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2}}, \quad c_{ik} = \langle \Psi_i, \hat{\Psi}_k \rangle, \end{aligned}$$

bağıntıları yardımıyla bulunur [8].

4.3.4. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde çekirdek üreten metod yardımıyla iki örnek çözüldü. Bulunan sayısal değerler tablolar ve grafikler halinde gösterildi.

Örnek 4.1. Bu örnekte (4.5) ile belirtilen sine-Gordon denklemini lineer olmayan $\sin(u)$ terimi olmaksızın Ω bölgesinde

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

başlangıç şartları ile göz önüne alalım. Bu problemin analitik çözümü [58]

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\sin(\pi(x + t)) + \sin(\pi(x - t))),$$

şeklinededir. Başlangıç koşulları homogen hale getirilip çekirdek üreten metod uygulandığında aşağıdaki tablolar ve grafikler elde edilir.

Tablo 4.1. Örnek 4.1 için elde edilen sayısal sonuçlar

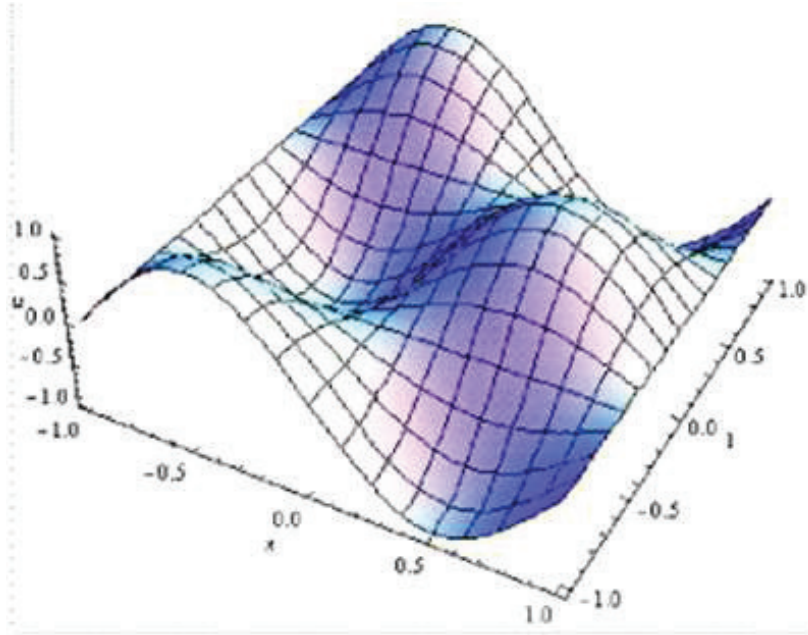
x	t	AÇ	YÇ	MH
0.1	0.1	0.2938926262	0.2938930965	4.703×10^{-7}
0.2	0.2	0.4755282582	0.4755313577	3.0995×10^{-6}
0.3	0.3	0.4755282582	0.4755183355	9.9227×10^{-6}
0.4	0.4	0.2938926261	0.2939007109	8.0848×10^{-6}
0.5	0.5	0.0	0.0000282140	2.82140×10^{-5}
0.6	0.6	-0.2938926264	-0.2939063137	1.36873×10^{-5}
0.7	0.7	-0.4755282583	-0.4755305759	2.3176×10^{-6}
0.8	0.8	-0.4755282581	-0.4755277748	4.833×10^{-7}
0.9	0.9	-0.2938926260	-0.2938966580	4.0320×10^{-6}
1.0	1.0	0.0	-3.69×10^{-7}	3.69×10^{-7}

Tablo 4.2. Örnek 4.1 için $t = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

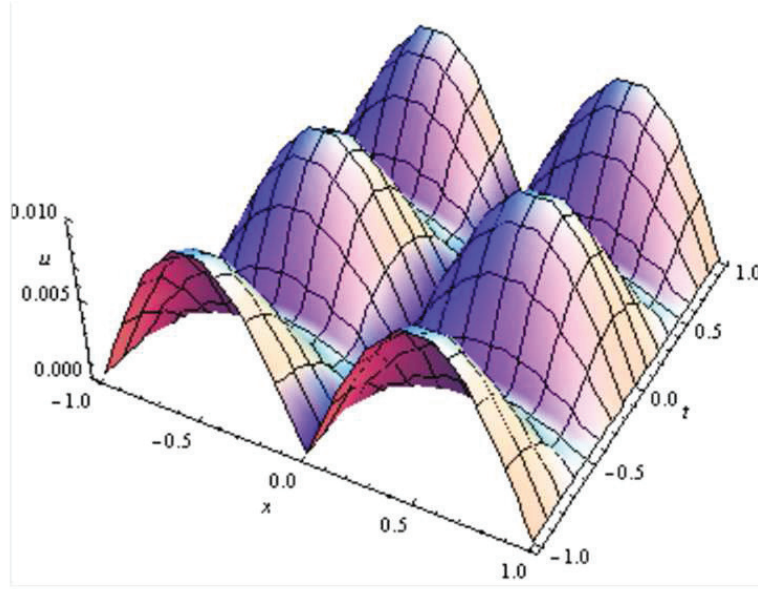
x	AÇ	YÇ	MH	BH
-0.80	0.5877852522	0.5877854278	1.7×10^{-7}	2.9×10^{-7}
-0.40	0.9510565165	0.9510565935	7.7×10^{-8}	$8. \times 10^{-8}$
0.40	-0.9510565165	-0.9510565935	7.7×10^{-8}	$8. \times 10^{-8}$
0.80	-0.5877852522	-0.5877854278	1.7×10^{-7}	2.9×10^{-7}

Tablo 4.3. Örnek 4.1 için mutlak ve bağıl hataların karşılaştırılması

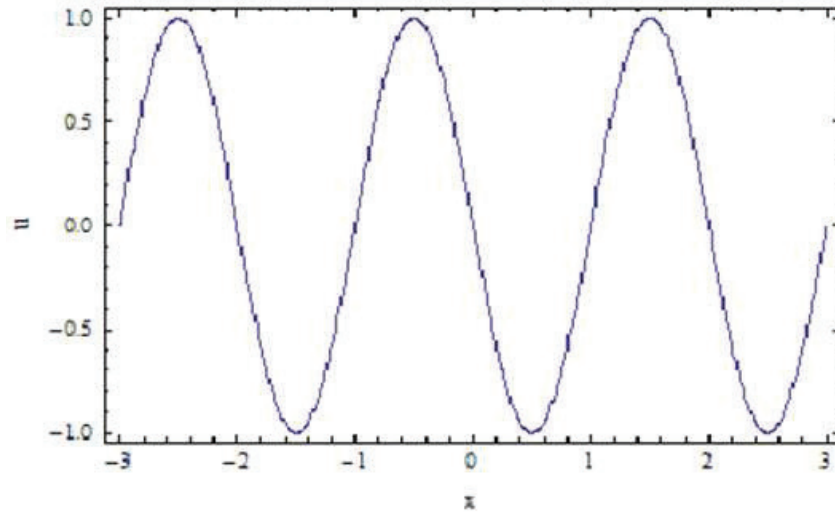
x	MH [59]	MH [RKHSM]	BH [59]	BH [RKHSM]
-0.80	$1.94E-05$	$1.756E-07$	$3.29E-05$	$2.987E-7$
-0.40	$2.84E-07$	$7.700E-08$	$2.98E-07$	$8.096E-8$
0.40	$2.84E-07$	$7.700E-08$	$2.98E-07$	$8.096E-8$
0.80	$1.94E-05$	$1.756E-07$	$3.29E-05$	$2.987E-7$



Şekil 4.6. Örnek 4.1 için çekirdek üreten metodun çözümü



Şekil 4.7. Örnek 4.1 için mutlak hatayı veren grafik



Şekil 4.8. Örnek 4.1 için iki boyutlu çekirdek üreten metodun çözümü

Örnek 4.2. Bu örnekte (4.5) ile belirtilen sine-Gordon denklemini Ω bölgesinde

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 4 \sec h(x),$$

başlangıç şartları ile göz önüne alalım. Problemin analitik çözümü [58]

$$u(x, t) = 4 \arctan(\sec h(x)t),$$

şeklindeir. Başlangıç koşulları homogen hale getirilip çekirdek üreten metod kullanıldığında aşağıdaki tablolar elde edilir.

Tablo 4.4. Örnek 4.2 için elde edilen MH ve BH

x	t	MH	BH	Süre (s)
0.1	0.1	9.4×10^{-17}	2.3×10^{-16}	0.874
0.2	0.2	3.2×10^{-16}	4.1×10^{-16}	0.843
0.3	0.3	4.2×10^{-16}	3.8×10^{-16}	0.874
0.4	0.4	2.6×10^{-16}	1.8×10^{-16}	0.952
0.5	0.5	3.3×10^{-16}	1.9×10^{-16}	0.874
0.6	0.6	4.5×10^{-16}	2.4×10^{-16}	0.904
0.7	0.7	9.4×10^{-16}	4.6×10^{-16}	0.921
0.8	0.8	9.6×10^{-16}	4.4×10^{-16}	0.967
0.9	0.9	1.8×10^{-16}	8.3×10^{-17}	0.999
1.0	1.0	8.6×10^{-17}	3.7×10^{-17}	0.967

Tablo 4.5. Örnek 4.2 için $t = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

x	AÇ	YÇ	MH	BH
-0.80	2.56810972212	2.568109722086	4.2×10^{-11}	1.6×10^{-11}
-0.40	2.98584334452	2.985843344528	6.8×10^{-13}	2.3×10^{-13}
0.00	3.14159265358	3.141592653590	7.4×10^{-13}	2.3×10^{-13}
0.40	2.98584334452	2.985843344528	6.8×10^{-13}	2.3×10^{-13}
0.80	2.56810972212	2.568109722086	4.2×10^{-11}	1.6×10^{-11}

Tablo 4.6. Örnek 4.2 için mutlak ve bağıl hataların karşılaştırılması

x	MH [59]	MH [RKHSM]	BH [59]	BH [RKHSM]
-0.80	$1.53E - 08$	$4.23359E - 11$	$5.96E - 09$	$1.64852E - 11$
-0.40	$3.54E - 10$	$6.89217E - 13$	$1.18E - 10$	$2.30828E - 13$
0.00	$1.62E - 10$	$7.40285E - 13$	$5.15E - 11$	$2.35640E - 13$
0.40	$3.54E - 10$	$6.89217E - 13$	$1.18E - 10$	$2.30828E - 13$
0.80	$1.53E - 08$	$4.23359E - 11$	$5.96E - 09$	$1.64852E - 11$

Tablo 4.7. Örnek 4.2 için $x = 2.5$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

t	AÇ	YÇ
0.02	0.013045652299470337726	0.013045652299470429228
0.04	0.026091027076458045383	0.026091027076458055762
0.06	0.039135846843901571207	0.039135846843901591760
0.08	0.05217983418557021854	0.052179834185570326022
0.1	0.065222711791451326376	0.06522271179145110938
0.3	0.19552959072837645953	0.19552959072837616718

Tablo 4.8. Örnek 4.2 için $x = 5.0$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

t	AÇ	YÇ
0.02	0.0010780225516042560299	0.0010780225516046950169
0.04	0.0021560449466078880312	0.0021560449466103154491
0.06	0.003234067028410408468	0.0032340670284064571408
0.08	0.0043120886404116027904	0.0043120886404125186434
0.1	0.0053901096260116659256	0.0053901096260170153463
0.3	0.016170250578558993341	0.016170250578577492240

Tablo 4.9. Örnek 4.2 için $x = 7.5$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

t	AÇ	YÇ
0.02	0.0000884934721388573766	0.0000884934721392853003
0.04	0.0001769869441910896592	0.0001769869441950110056
0.06	0.0002654804160700717544	0.0002654804160796786727
0.08	0.0003539738876891785695	0.0003539738876799533295
0.1	0.0004424673589617850136	0.0004424673589703796322
0.3	0.0013274020335728111501	0.0013274020333220852196

Tablo 4.10. Örnek 4.2 için $x = 10.0$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

t	AÇ	YÇ
0.02	0.00000726398874701739435	0.0000072639887470122372
0.04	0.00001452797749398687768	0.0000145279774939233104
0.06	0.00002179196624086053894	0.0000217919662408353413
0.08	0.00002905595498759046712	0.0000290559549867947262
0.1	0.00003631994373412875118	0.000036319943734399877
0.3	0.00010895983117843073892	0.0001089598311794268356

Tablo 4.11. Örnek 4.2 için $x = 2.5$ (birinci sıra) ve $x = 5.0$ (ikinci sıra) iken mutlak hataların karşılaştırılması

t	RKHSM	MHPM [60]	ADM [60]
0.02	$9.15E - 17$	$9.25104E - 8$	$9.25104E - 8$
	$4.3E - 16$	$5.22002E - 11$	$5.22002E - 11$
0.04	$1.03E - 17$	$7.40084E - 7$	$7.40084E - 7$
	$2.4E - 15$	$4.17602E - 10$	$4.17602E - 10$
0.06	$2.E - 17$	$2.49778E - 6$	$2.49778E - 6$
	$3.9E - 15$	$1.40941E - 9$	$1.40941E - 9$
0.08	$1.07E - 16$	$5.92068E - 6$	$5.92068E - 6$
	$9.1E - 16$	$3.34082E - 9$	$3.34082E - 9$
0.1	$2.16E - 16$	$1.15638E - 5$	$1.15638E - 5$
	$5.3E - 15$	$6.52506E - 9$	$6.52506E - 9$
0.3	$2.9E - 16$	$3.12304E - 4$	$3.12304E - 4$
	$1.8E - 14$	$1.76230E - 7$	$1.76230E - 7$

Tablo 4.12. Örnek 4.2 için $x = 7.5$ (birinci sıra) ve $x = 10.0$ (ikinci sıra) iken mutlak hataların karşılaştırılması

t	RKHSM	MHPM [60]	ADM [60]
0.02	$4.2E - 16$	$2.887E - 14$	$2.887E - 14$
	$5.1E - 18$	$1.597E - 17$	$1.597E - 17$
0.04	$3.9E - 15$	$2.310E - 13$	$2.31E - 13$
	$6.3E - 17$	$1.277E - 16$	$1.277E - 16$
0.06	$9.6E - 15$	$7.796E - 13$	$7.796E - 13$
	$2.5E - 17$	$4.312E - 16$	$4.312E - 16$
0.08	$9.2E - 15$	$1.848E - 12$	$1.848E - 12$
	$7.9E - 16$	$1.022E - 15$	$1.022E - 15$
0.1	$8.5E - 15$	$3.609E - 12$	$3.609E - 12$
	$2.7E - 16$	$1.996E - 15$	$1.996E - 15$
0.3	$2.5E - 13$	$9.748E - 11$	$9.748E - 11$
	$9.9E - 16$	$5.391E - 14$	$5.391E - 14$

Tablo 4.13. Örnek 4.2 için $x = 0.06$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

t	AÇ	YÇ
0.02	0.07984560896434381352	0.079845608964343853426
0.04	0.15962763841261813303	0.15962763841261815794
0.06	0.23928281206851416623	0.23928281206851423765
0.08	0.31874845652859878735	0.31874845652859888367
0.1	0.39796279376194770105	0.39796279376194771082

Tablo 4.14. Örnek 4.2 için $x = 0.08$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

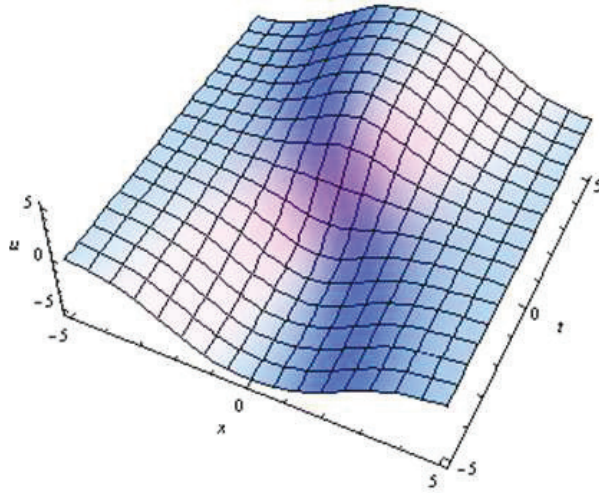
t	AÇ	YÇ
0.02	0.079734118548588251664	0.079734118548588199339
0.04	0.15940492340173257962	0.15940492340173286314
0.06	0.23894940199533129661	0.23894940199533120491
0.08	0.31830514045634341908	0.31830514045634405770
0.1	0.39741061409807554739	0.39741061409807569743

Tablo 4.15. Örnek 4.2 için $x = 0.1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

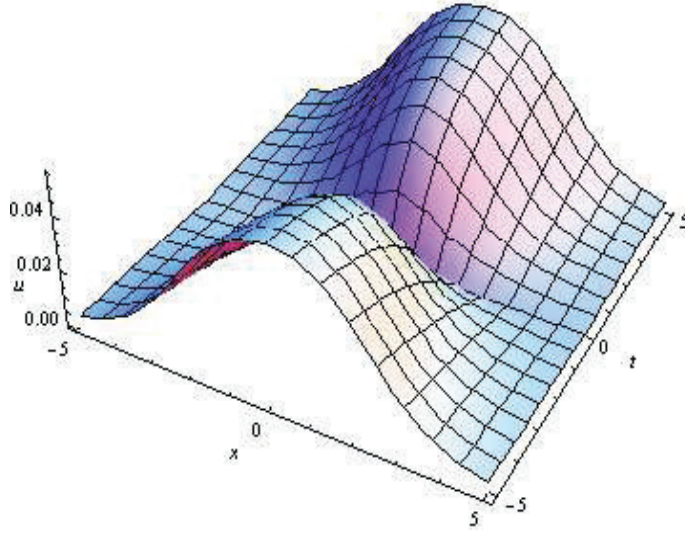
t	AÇ	YÇ
0.02	0.079591154289758679228	0.079591154289759560107
0.04	0.15911933466140392832	0.15911933466140305331
0.06	0.23852186564169922344	0.23852186564169936963
0.08	0.31773666512002042948	0.31773666512002071579
0.1	0.396702532289366215	0.39670253228936612

Tablo 4.16. Örnek 4.2 için mutlak hataların karşılaştırılması

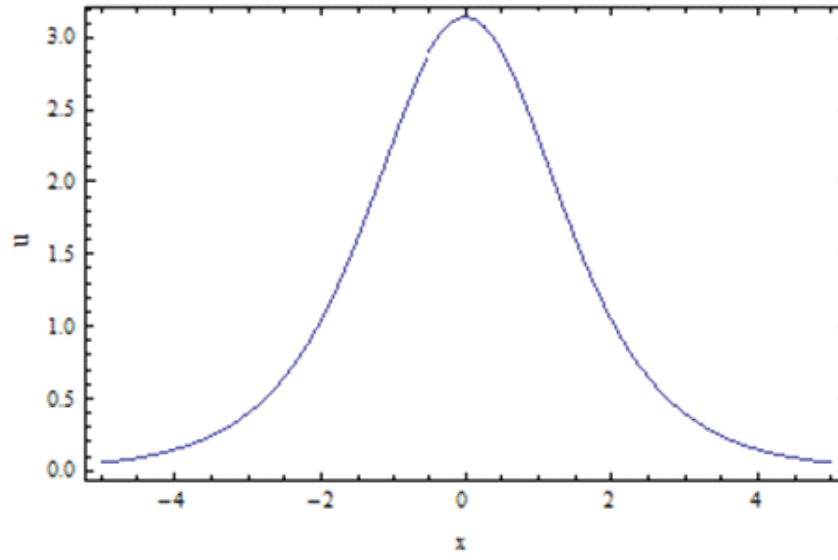
t	RKHSM	[61]	RKHSM	[61]	RKHSM	[61]
	$x = 0.06$	MDM $x = 0.06$	$x = 0.08$	MDM $x = 0.08$	$x = 0.1$	MDM $x = 0.1$
0.02	$3.9E - 17$	$2.2E - 16$	$5.23E - 17$	$4.4E - 15$	$8.8E - 16$	$4.4E - 14$
0.04	$2.4E - 17$	$2.2E - 16$	$2.83E - 16$	$4.4E - 15$	$8.75E - 16$	$4.4E - 14$
0.06	$7.1E - 17$	$1.9E - 16$	$9.17E - 17$	$4.3E - 15$	$1.46E - 16$	$4.4E - 14$
0.08	$9.6E - 17$	$1.9E - 16$	$6.38E - 16$	$4.3E - 15$	$2.86E - 16$	$4.3E - 14$
0.1	$9.7E - 18$	$1.9E - 16$	$1.5E - 16$	$4.3E - 15$	$9.43E - 17$	$4.2E - 14$



Şekil 4.9. Örnek 4.2 için çekirdek üreten metodun çözümü



Şekil 4.10. Örnek 4.2 için mutlak hatayı veren grafik



Şekil 4.11. Örnek 4.2 için iki boyutlu, çekirdek üreten metodun çözümü

4.3.5. SONUÇ

Biz bu bölümde mekanik iletim sistemiyle türetilen başlangıç ve sınır şartlı sine-Gordon denklemini RKHSM yardımıyla çözdük. Lineer ve lineer olmayan iki örnek göz önüne aldık ve bulunan sonuçları literatürde var olan altıncı basamaktan kompakt sonlu farklar [59], genişletilmiş HPM [60] ve genişletilmiş Ayrışım [61] yöntemleriyle karşılaştırdık. Sonuçları Örnek 4.1 için Tablo 4.1-4.3 ve Şekil 4.6-4.8 ile Örnek 4.2 için ise Tablo 4.4-4.16 ve Şekil 4.9-4.11 ile verdik. Tablo 4.1’de Örnek 4.1 için $0.1 \leq x, t \leq 1.0$ aralığında analitik, yaklaşık çözümler ve mutlak hata verildi. Tablo 4.2’de $t = 1.0$ ve $x = -0.8, -0.4, 0.4, 0.8$ değerleri için YÇ, MH ve BH verildi. Tablo 4.3’te aynı değerler için kompakt sonlu farklar ve RKHSM ile elde edilen MH ve BH’lar sunuldu. Şekil 4.7 ve 4.8’de sırasıyla RKHSM ile bulunan mutlak hatanın üç boyutlu ve iki boyutlu görünümü verildi. Tablo 4.4’te Örnek 4.2 için $0.1 \leq x, t \leq 1.0$ olması halinde RKHSM ile elde edilen MH, BH ve hesaplama süresi verildi. Tablo 4.5’te $t = 1.0$ ve $x = -0.8, -0.4, 0.0, 0.4, 0.8$ değerleri için AÇ, YÇ, MH, BH ve Tablo 4.6’da aynı değerler için kompakt sonlu farklar yöntemi ve RKHSM ile bulunan MH ve BH’lar sunuldu. Tablo 4.7-4.10’da sırasıyla, $x = 2.5, 5.0, 7.5, 10.0$ ve $t = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.3$ değerlerine karşılık gelen AÇ ve YÇ ifade edildi. Tablo 4.11’de t ’nin aynı değerleri için $x = 2.5$ ve $x = 5.0$, Tablo 4.12’de $x = 7.5$ ve $x = 10.0$ olması halinde ADM, RKHSM ve MHPM [60] ile bulunan mutlak hatalar karşılaştırıldı. Tablo 4.13-4.15’te ise $x = 0.06, 0.08, 0.1$ için AÇ ve YÇ verildi. Tablo 4.16’da t ’nin farklı değerleri için RKHSM ve MDM [61] ile elde edilen mutlak hatalar sunuldu. Şekil 4.9’da RKHSM ile bulunan yaklaşık çözümün ve Şekil 4.10’da kullandığımız yöntemle oluşturulan mutlak hatanın üç boyutlu resimleri verildi. Şekil 4.11’de yaklaşık çözümün iki boyutlu resmi sunuldu. Yukarıda bahsedilen tablolar ve şekillerden de görüldüğü gibi her iki problem için de literatürde var olan sonuçlardan daha iyi sonuçlar bulduk.

5. BÖLÜM

BRATU PROBLEMİ

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

biçimindeki klasik Bratu problemini göz önüne alalım [62, 63].

(5.1) ile belirtilen standart Bratu problemi yanma olayını modellemek için kullanılmıştır [63]. Bu sınır değer probleminin analitik çözümü,

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{\theta}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\theta}{4} \right)} \right], \quad (5.2)$$

şeklinde ve θ , $\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh(\theta/4)$ denkleminin çözümüdür [63]. Bratu problemi $\lambda > \lambda_c$, $\lambda = \lambda_c$ ve $\lambda < \lambda_c$ durumlarına göre sıfır çözüme, tek çözüme ve iki çözüme sahiptir. Kritik λ_c değeri $\lambda_c = 3,513830719$ şeklinde verilir. Analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak Bratu problemi bir çok bilim adamı tarafından incelenmiştir. Wazwaz [63] Adomian ayrışım metodunu kullanarak bu problemi çözmüştür. Aregbesola [64] ağırlıklı artıklar yöntemini kullanarak bu problemin çözümlerinin varlığını ve çokluğunu incelemiştir. Deeba ve diğerleri [65] Adomian ayrışım metodunu kullanarak Troesch ve Bratu problemlerini incelemişlerdir. Khuri [66], Syam ve Hamdan [67], Laplace ayrışım metodunu, Li ve Liao [68] homotopi analiz metodunu, Çağlar ve diğerleri [69] B-spline metodunu kullanarak Bratu problemini incelemişlerdir. Bratu problemi ile ilgili [62 – 69] makalelerine ve bu makalelerdeki referanslara bakılabilir.

Biz ise çekirdek üreten uzay metodu ile Bratu problemini inceleyeceğiz.

5.1. Bratu Probleminin Çekirdek Üreten Uzay Metodu ile Çözümü

Bu bölümde çekirdek üreten uzay metodu ile Bratu problemi çözülecektir. Bunun için çekirdek üreten uzaylar tanımlanıp bu uzaylarda üretilen çekirdekler bulunacaktır. Bu yöntemle elde edilen sayısal sonuçların tabloları ve grafikleri oluşturulup literatürde var olan metodlarla karşılaştırılacaktır [24].

5.1.1. Çekirdek Üreten Uzaylar

Tanım 5.1. $W_2^3[0, 1]$ uzayı

$$W_2^3[0, 1] = \left\{ \begin{array}{c} u \mid u, u', u'' \text{ fonksiyonları } [0, 1] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ u^{(3)} \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0, \end{array} \right\}$$

olsun. $W_2^3[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{W_2^3} = u(0)g(0) + u'(0)g'(0) + u(1)g(1) + \int_0^1 u^{(3)}(x)g^{(3)}(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_2^3} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^3}}, \quad u, g \in W_2^3[0, 1],$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.2. $W_2^1[0, 1]$ uzayı

$$W_2^1[0, 1] = \left\{ \begin{array}{c} u \mid u \text{ fonksiyonu } [0, 1] \text{ aralığında} \\ \text{mutlak sürekli bir fonksiyon,} \\ u'(x) \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \end{array} \right\}$$

olsun. $W_2^1[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, g \rangle_{W_2^1} = \int_0^1 u(x)g(x) + u'(x)g'(x)dx, \quad u, g \in W_2^1[0, 1]$$

ve

$$\|u\|_{W_2^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1}}, \quad u \in W_2^1[0, 1],$$

ile ifade edilir. $W_2^1[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup üretilen çekirdek fonksiyonu

T_x ,

$$T_x(y) = \frac{1}{2 \sinh(1)} [\cosh(x + y - 1) + \cosh(|x - y| - 1)] \quad (5.3)$$

şeklinde verilir [8].

Teorem 5.1. $W_2^3[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten Hilbert uzayı olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu R_y ,

$$R_y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^6 c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{array} \right.$$

şeklinde verilir. Burada, katsayılar aşağıdaki gibidir [24]:

$$c_1(y) = 0, c_2(y) = -y^2 + y,$$

$$c_3(y) = \frac{-1}{120}y^5 + \frac{21}{20}y^2 + \frac{1}{24}y^4 - y - \frac{1}{12}y^3,$$

$$c_4(y) = 0, c_5(y) = \frac{1}{24}y^2 - \frac{1}{24}y, c_6(y) = -\frac{1}{120}y^2 + \frac{1}{120},$$

$$d_1(y) = \frac{1}{120}y^5, d_2(y) = -\frac{1}{24}y^4 + y - y^2,$$

$$d_3(y) = -\frac{1}{120}y^5 + \frac{21}{20}y^2 + \frac{1}{24}y^4 - y,$$

$$d_4(y) = -\frac{1}{12}y^2, d_5(y) = \frac{1}{24}y^2, d_6(y) = -\frac{1}{120}y^2.$$

İspat: $W_2^3[0, 1]$ uzayında tanımlanan iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_2^3} &= u(0)R_y(0) + u'(0)R_y'(0) + u(1)R_y(1) \\ &+ \int_0^1 u^{(3)}(x)R_y^{(3)}(x)dx, \end{aligned} \quad (5.4)$$

göz önüne alıp ve üç kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_2^3} &= u(0)R_y(0) + u'(0)R_y'(0) + u(1)R_y(1) \\ &+ R_y^{(3)}(1)u''(1) - R_y^{(3)}(0)u''(0) - R_y^{(4)}(1)u'(1) \\ &+ R_y^{(4)}(0)u'(0) + R_y^{(5)}(1)u(1) - R_y^{(5)}(0)u(0) \\ &- \int_0^1 u(x)R_y^{(6)}(x)dx, \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. Çekirdek üretme özelliği

$$\langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_2^3} = u(y)$$

olduğundan

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y^{(3)}(0) = 0, \\ R_y'(0) + R_y^{(4)}(0) = 0, \\ R_y^{(3)}(1) = 0, \\ R_y^{(4)}(1) = 0, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

olur ve (5.5) bağıntısından

$$-R_y^{(6)}(x) = \delta(x - y),$$

elde edilir. $x \neq y$ iken

$$R_y^{(6)}(x) = 0,$$

olur. Bu yüzden

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^6 d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$-R_y^{(6)}(x) = \delta(x - y),$$

ifadesinden

$$\partial^k R_{y+}(y) = \partial^k R_{y-}(y), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5.7)$$

ve

$$\partial^5 R_{y+}(y) - \partial^5 R_{y-}(y) = -1, \quad (5.8)$$

yazılabilir. $R_y \in W_2^3[0, 1]$ olduğundan

$$R_y(0) = 0, \quad R_y(1) = 0, \quad (5.9)$$

olur. (5.6)-(5.9) denklemlerinden $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) katsayıları bulunabilir.

Böylece R_y üretilen çekirdek fonksiyonu

$$R_y(x) = \begin{cases} -xy^2 + xy - \frac{1}{120}x^2y^5 + \frac{21}{20}x^2y^2 \\ + \frac{1}{24}x^4y^2 - x^2y - \frac{1}{12}x^2y^3 + \frac{1}{24}x^4y^2 \\ - \frac{1}{24}x^4y - \frac{1}{120}x^5y^2 + \frac{x^5}{120}, & x \leq y, \\ -yx^2 + yx - \frac{1}{120}y^2x^5 + \frac{21}{20}y^2x^2 \\ + \frac{1}{24}y^2x^4 - y^2x - \frac{1}{12}y^2x^3 + \frac{1}{24}y^4x^2 \\ - \frac{1}{24}y^4x - \frac{1}{120}y^5x^2 + \frac{y^5}{120}, & x > y, \end{cases}$$

olur. $\square$

5.1.2. $W_2^3[0, 1]$ Uzayında Çözümün Sunumu

Bu bölümde (5.1) denkleminin çözümü çekirdek üreten $W_2^3[0, 1]$ uzayında göz önüne alınacaktır. L lineer operatörü $L : W_2^3[0, 1] \rightarrow W_2^1[0, 1]$ şeklinde tanımlanıp

$$(Lu)(x) = u''(x), \quad (5.10)$$

olarak ele alınırsa model problem (5.1)

$$\begin{cases} Lu = f(x, u), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

formunu alır. Burada $f(x, u) = -\lambda e^u$ dur.

Teorem 5.2. (5.10) ile tanımlanan L lineer operatörü sınırlı lineer bir operatördür.

İspat: $M > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere $\|Lu\|_{W_2^1}^2 \leq M \|u\|_{W_2^3}^2$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir. Tanım 5.2'den

$$\|Lu\|_{W_2^1}^2 = \langle Lu, Lu \rangle_{W_2^1} = \int_0^1 \left([(Lu)(x)]^2 + [(Lu)'(x)]^2 \right) dx,$$

yazılabilir. Çekirdek üretme özelliğinden ise

$$(Lu)(x) = \langle u(\cdot), (LR_x)(\cdot) \rangle_{W_2^3},$$

mevcuttur. $M_1 > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$|(Lu)(x)| \leq \|u\|_{W_2^3} \|LR_x\|_{W_2^3} = M_1 \|u\|_{W_2^3},$$

bulunur, böylece

$$\int_0^1 [(Lu)(x)]^2 dx \leq M_1^2 \|u\|_{W_2^3}^2,$$

olur.

$$(Lu)'(x) = \langle u(\cdot), (LR_x)'(\cdot) \rangle_{W_2^3},$$

olduğundan $M_2 > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$|(Lu)'(x)| \leq \|u\|_{W_2^3} \|(LR_x)'\|_{W_2^3} = M_2 \|u\|_{W_2^3},$$

elde edilir. Bu son ifadeden ise

$$[(Lu)'(t)]^2 \leq M_2^2 \|u\|_{W_2^3}^2$$

ve

$$\int_0^1 [(Lu)'(x)]^2 dx \leq M_2^2 \|u\|_{W_2^3}^2,$$

bulunur. Yani $M = M_1^2 + M_2^2 > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{W_2^1}^2 &\leq \int_0^1 \left([(Lu)(x)]^2 + [(Lu)'(x)]^2 \right) dx \\ &\leq (M_1^2 + M_2^2) \|u\|_{W_2^3}^2 = M \|u\|_{W_2^3}^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

5.1.3. Çözümün Yapısı ve Temel Sonuçlar

$\varphi_i(x) = T_{x_i}(x)$ ve $\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x)$ olsun. Burada L^* operatörü L operatörünün eşlenik operatörüdür. $W_2^3[0, 1]$ uzayının $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ ortonormal sistemi, $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ ifadesinin Gram-Schmidt ortogonalleştirme sürecinden,

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x), \quad (\beta_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots), \quad (5.12)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 5.3. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, $[0, 1]$ de yoğun olsun ve $\psi_i(x) = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$ eşitliği sağlansın. Bu taktirde $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ dizisi $W_2^3[0, 1]$ uzayında bir tam sistem oluşturur.

İspat: Çekirdek üretme özelliğinden

$$\psi_i(x) = (L^* \varphi_i)(x) = \langle (L^* \varphi_i)(y), R_x(y) \rangle = \langle (\varphi_i)(y), L_y R_x(y) \rangle = L_y R_x(y)|_{y=x_i},$$

eşitliği yazılabilir. L operatörünün y alt indisi bu operatörün y fonksiyonuna uygulandığını gösterir. $\psi_i \in W_2^3[0, 1]$ olduğu açıktır. Her bir $u \in W_2^3[0, 1]$ için, $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle = 0$, ($i = 1, 2, \dots$) olsun. Böylece

$$\langle u(x), (L^* \varphi_i)(x) \rangle = \langle Lu(\cdot), \varphi_i(\cdot) \rangle = (Lu)(x_i) = 0,$$

elde edilir.

$\{x_i\}_{i=1}^\infty$, $[0, 1]$ aralığında yoğun olduğundan $(Lu)(x) = 0$ olur. Ters operatörün varlığından $u = 0$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 5.4. Eğer u , (5.11)'in bir çözümü ise bu taktirde

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\Psi}_i(x), \quad (5.13)$$

yazılabilir. Burada $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $[0, 1]$ aralığında yoğundur.

İspat: (5.11)'in çözümünün tekliği ve (5.12)'den

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle_{W_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), L^* \varphi_k(x) \rangle_{W_2^3} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu(x), \varphi_k(x) \rangle_{W_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle f(x, u), T_{x_k}(x) \rangle_{W_2^1} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\psi}_i(x), \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

u_n yaklaşık çözümü u analitik çözümünün n teriminin göz önüne alınmasıyla

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\psi}_i(x), \quad (5.14)$$

olarak yazılır.

Lemma 5.1. Eğer $\|u_n - u\|_{W_2^3} \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x$, $(n \rightarrow \infty)$ olup $f(x, u)$ fonksiyonu $x \in [0, 1]$ için sürekli bir fonksiyon olursa bu taktirde $n \rightarrow \infty$ iken

$$f(x_n, u_{n-1}(x_n)) \rightarrow f(x, u(x)),$$

olur [11].

Teorem 5.5. Herhangi $u_0(x) \in W_2^3[0, 1]$ için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

$$(i) \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^n A_i \bar{\psi}_i(x), \quad (5.15)$$

$$A_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_{k-1}(x_k)), \quad (5.16)$$

(ii) $\|u_n\|_{W_2^3}$ sınırlı;

(iii) $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, $[0, 1]$ aralığında yoğun;

(iv) Herhangi $u \in W_2^3[0, 1]$ için $f(x, u) \in W_2^1[0, 1]$.

Bu taktirde (5.15)'teki u_n , (5.13)'teki analitik çözüme $W_2^3[0, 1]$ uzayında yakınsar ve A_i , (5.16) ile tanımlanmak üzere

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x),$$

olur.

İspat: (i) İlk olarak u_n fonksiyonunun yakınsak olduğunu ispatlayalım. (5.15) bağıntısından

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + A_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(x),$$

yazılabilir. $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ ifadesinin ortonormalliğinden

$$\|u_{n+1}\|_{W_2^3}^2 = \|u_n\|_{W_2^3}^2 + (A_{n+1})^2 = \|u_{n-1}\|_{W_2^3}^2 + (A_n)^2 + (A_{n+1})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} (A_i)^2,$$

elde edilir. $\|u_n\|_{W_2^3}$ normunun sınırlılığından

$$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i)^2 < \infty,$$

yazılabilir. Yani,

$$\{A_i\} \in l^2 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

olur.

$m > n$ olsun. Bu taktirde $(u_m - u_{m-1}) \perp (u_{m-1} - u_{m-2}) \perp \dots \perp (u_{n+1} - u_n)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{W_2^3}^2 &= \|u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \dots + u_{n+1} - u_n\|_{W_2^3}^2 \\ &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_{W_2^3}^2 + \dots + \|u_{n+1} - u_n\|_{W_2^3}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^m (A_i)^2 \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

elde edilir. $W_2^3[0, 1]$ uzayının tamlığından

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^3}} u, \quad n \rightarrow \infty,$$

olacak şekilde $u \in W_2^3[0, 1]$ mevcuttur.

(ii) Şimdi de u 'nun, (5.11)'in çözümü olduğunu ispatlayalım. (5.15)'te limit alınırsa

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x),$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (Lu)(x_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \langle L\bar{\psi}_i(x), \varphi_j(x) \rangle_{W_2^1} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \langle \bar{\psi}_i(x), L^* \varphi_j(x) \rangle_{W_2^3} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \langle \bar{\psi}_i(x), \psi_j(x) \rangle_{W_2^3}, \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \beta_{nj} (Lu)(x_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\langle \bar{\psi}_i(x), \sum_{j=1}^n \beta_{nj} \psi_j(x) \right\rangle_{W_2^3} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \langle \bar{\psi}_i(x), \bar{\psi}_n(x) \rangle_{W_2^3} = A_n, \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $n = 1$ olarak alınırsa bu taktirde

$$(Lu)(x_1) = f(x_1, u_0(x_1)), \quad (5.17)$$

elde edilir.

Eğer $n = 2$ olarak alınırsa bu taktirde

$$\beta_{21} (Lu)(x_1) + \beta_{22} (Lu)(x_2) = \beta_{21} f(x_1, u_0(x_1)) + \beta_{22} f(x_2, u_1(x_2)), \quad (5.18)$$

bulunur. (5.17) ve (5.18) denklemlerinden

$$(Lu)(x_2) = f(x_2, u_1(x_2)),$$

olduğu açıkça görülebilir.

Tümevarım metoduyla

$$(Lu)(x_j) = f(x_j, u_{j-1}(x_j)), \quad (5.19)$$

elde edilir.

$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olduğundan herhangi $y \in [0, 1]$ için $j \rightarrow \infty$ iken $x_{n_j} \rightarrow y$ olacak şekilde $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi mevcuttur. Bu nedenle (5.19) da $j \rightarrow \infty$ olsun. u_n 'nin yakınsaklığından ve Lemma 5.1'den

$$(Lu)(y) = f(y, u(y)),$$

yazılabilir. Yani u , (5.11)'in çözümüdür ve A_i , (5.16) ile tanımlanmak üzere

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i,$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 5.6. Eğer $u \in W_2^3[0, 1]$ ise bu taktirde $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{W_2^3} \rightarrow 0,$$

olur. Üstelik $\|u_n - u\|_{W_2^3}$ monoton azalandır [24].

İspat: (5.13) ve (5.14) denklemlerinden

$$\|u_n - u\|_{W_2^3} = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\psi}_i(x) \right\|_{W_2^3}, \quad (5.20)$$

yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|u_n - u\|_{W_2^3} \rightarrow 0,$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{W_2^3}^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\psi}_i(x) \right\|_{W_2^3}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_k) \bar{\psi}_i(x) \right)^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\|u_n - u\|_{W_2^3}^2$ nin monoton azalan olduğunu gösterir.

5.1.4. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, $\lambda=1, 2$ ve 3.51 olması durumunda RKHSM ile elde edilen sayısal sonuçlarla literatürde var olan bazı sonuçları karşılaştırdık. Sayısal hesaplamalar için Maple 16 programını kullandık. λ 'nın bu değerlerine karşılık gelen sonuçları analitik çözüm (AÇ), Lie grup metodu (LGM) [62], Adomian ayrışım metodu (ADM) [63], Laplace ayrışım metodu

(LDM) [66], B-spline metodu (BSM) [69] ve çok terimli olmayan eğri metodu (NSM) [70] ile karşılaştırdık.

Örnek 5.1. Şimdi Bratu problemini

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (5.21)$$

göz önüne alalım. Başlangıç yaklaşımını $u_0(x) = 0$ olarak seçelim. (5.21) problemine RKHSM uygulanırsa aşağıdaki tablolar ve λ 'nın bazı değerleri için oluşturulan şekil elde edilir [24].

Tablo 5.1. $\lambda = 1$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

x	AÇ	YÇ	BH
0.1	0.04984679002	0.04984679003	2×10^{-10}
0.2	0.08918993502	0.0891899350	2.2×10^{-10}
0.3	0.1176090956	0.1176090956	0.0
0.4	0.1347902526	0.1347902526	0.0
0.5	0.1405392142	0.1405392141	7.1×10^{-10}
0.6	0.1347902526	0.1347902526	0.0
0.7	0.1176090956	0.1176090956	0.0
0.8	0.08918993502	0.0891899350	2.2×10^{-10}
0.9	0.04984679002	0.04984679003	2×10^{-10}

Tablo 5.2. $\lambda = 2$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

x	AÇ	YÇ	BH
0.1	0.1144107440	0.1144107440	0.0
0.2	0.2064191156	0.2064191157	4.8×10^{-10}
0.3	0.2738793116	0.2738793116	0.0
0.4	0.3150893646	0.3150893646	0.0
0.5	0.3289524216	0.3289524215	3×10^{-10}
0.6	0.3150893646	0.3150893646	0.0
0.7	0.2738793116	0.2738793116	0.0
0.8	0.2064191156	0.2064191157	4.8×10^{-10}
0.9	0.1144107440	0.1144107440	0.0

Tablo 5.3. $\lambda = 3.51$ durumunda elde edilen sayısal sonuçlar

x	AÇ	YÇ	BH
0.1	0.3958056702	0.3958056762	1.5×10^{-8}
0.2	0.7390973562	0.7390973508	7.3×10^{-9}
0.3	1.008758182	1.008758182	0.0
0.4	1.182536568	1.182536573	4.2×10^{-9}
0.5	1.242742593	1.242742592	8×10^{-10}
0.6	1.182536568	1.182536573	4.2×10^{-9}
0.7	1.008758182	1.008758182	0.0
0.8	0.7390973562	0.7390973508	7.3×10^{-9}
0.9	0.3958056702	0.3958056762	1.5×10^{-8}

Tablo 5.4. $\lambda = 1$ durumunda Adomian ayrışım metodu, Laplace ayrışım metodu, B-spline metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar

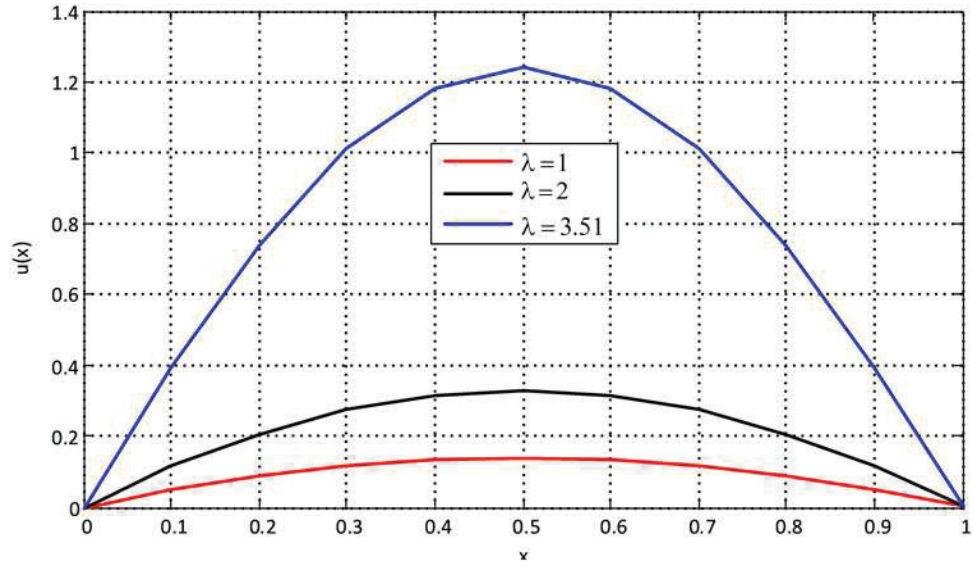
x	LDM [66]	ADM [63]	BSM [69]	RKHSM
0.1	$1.9788e - 6$	$2.68e - 3$	$2.979e - 6$	$1.0e - 11$
0.2	$3.9393e - 6$	$2.02e - 3$	$5.465e - 6$	$2.0e - 11$
0.3	$5.8548e - 6$	$1.52e - 4$	$7.335e - 6$	0.0
0.4	$7.7037e - 6$	$2.2e - 3$	$8.496e - 6$	0.0
0.5	$9.4664e - 6$	$3.01e - 3$	$8.892e - 6$	$1.0e - 10$
0.6	$1.1111e - 5$	$2.2e - 3$	$8.496e - 6$	0.0
0.7	$1.2571e - 5$	$1.52e - 4$	$7.335e - 6$	0.0
0.8	$1.3475e - 5$	$2.02e - 3$	$5.465e - 6$	$2.0e - 11$
0.9	$1.1967e - 5$	$2.68e - 3$	$2.979e - 6$	$1.0e - 11$

Tablo 5.5. $\lambda = 2$ durumunda Laplace ayrışım metodu, Adomian ayrışım metodu, B-spline metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar

x	LDM [66]	ADM [63]	BSM [69]	RKHSM
0.1	$2.129e-3$	$1.521e-2$	$1.71e-5$	0.0
0.2	$4.209e-3$	$1.467e-2$	$3.25e-5$	$1.0e-10$
0.3	$6.186e-3$	$5.887e-3$	$4.48e-5$	0.0
0.4	$8.001e-3$	$3.246e-3$	$5.28e-5$	0.0
0.5	$9.599e-3$	$6.985e-3$	$5.56e-5$	$1.0e-10$
0.6	$1.092e-2$	$3.246e-3$	$5.28e-5$	0.0
0.7	$1.193e-2$	$5.887e-3$	$4.48e-5$	0.0
0.8	$1.237e-2$	$1.467e-2$	$3.25e-5$	$1.0e-10$
0.9	$1.087e-2$	$1.521e-2$	$1.71e-5$	0.0

Tablo 5.6. $\lambda = 3.51$ durumunda B-spline metodu, çok terimli olmayan eğri metodu, Lie-grup çekim metodu ve çekirdek üreten uzay metodu ile elde edilen mutlak hatalar

x	BSM [69]	NSM [70]	LGM [62]	RKHSM
0.1	$3.841e-2$	$6.61e-6$	$4.45e-5$	$6.0e-9$
0.2	$7.481e-2$	$5.83e-6$	$7.12e-5$	$5.4e-9$
0.3	$1.058e-1$	$6.19e-6$	$7.3e-5$	0.0
0.4	$1.271e-1$	$6.89e-6$	$4.46e-5$	$5.0e-9$
0.5	$1.347e-1$	$7.31e-6$	$6.75e-7$	$1.0e-9$
0.6	$1.271e-1$	$6.89e-6$	$4.56e-5$	$5.0e-9$
0.7	$1.058e-1$	$6.19e-6$	$7.2e-5$	0.0
0.8	$7.481e-2$	$5.83e-6$	$7.05e-5$	$5.4e-9$
0.9	$3.841e-2$	$6.61e-6$	$4.41e-5$	$6.0e-9$



Şekil 5.1. λ 'nın farklı değerleri için yaklaşık çözümlerin grafiği

5.1.5. Sonuç

Yanma olayını modellemek için kullanılan sınır şartlı Bratu problemini göz önüne aldık. Bu problemi çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemi ile çözdük. Elde edilen sonuçları literatürde var olan bazı yarı-analitik yöntemlerle karşılaştırdık. Bulunan sonuçları Tablo 5.1–5.6 ve Şekil 5.1 ile gösterdik. Tablo 5.1–5.3’de, sırasıyla, $\lambda = 1, 2$ ve 3.51 değerlerine karşılık gelen analitik çözüm, yaklaşık çözüm ve bağıl hatalar verildi. Şekil 5.1’de λ 'nın $1, 2$ ve 3.51 değerleri için $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki yaklaşık çözümlerin grafiği çizildi.

6. BÖLÜM

MAGNETOHİDRODİNAMİK (MHD) SIKIŞAN AKIŞKAN PROBLEMLERİNE RKHSM'NUN UYGULANMASI

Bu bölümde iki boyutlu sıkışmaz sabit-eksensel simetrik magnetohidrodinamik akışkan akışı incelendi. Çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu indirgenmiş dördüncü mertebeden sınır değer problemine uygulandı. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde var olan Runge–Kutta (RK-4) metodu ve Optimal Homotopi Asimptotik metodu (OHAM) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Sıkışan akışkanların gıda endüstrisi ve kimya endüstrisinde bir çok uygulamaları mevcuttur [71 – 74]. Bu akışkanların pratik örnekleri polimer işleme, sıkıştırma ve enjeksiyon dökümünü içerir. Grimm [75] sayısal olarak iki plaka arasında sıkışan ince Newton sıvı filmlerini incelemiştir. Manyetik alan ile çiftleştirilmiş sıkışan akışkanlar geniş bir şekilde sıvı metal yağlama ile taşınmak için kullanılmıştır [72, 76 – 78]. Bu bölümde sınırsız iki düzlemsel levha arasında sıkışan MHD akışkan akışını çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile ele aldık.

6.1. Problemin Formülasyonu

Şekil 6.1’de gösterildiği gibi birbirlerine düşük sabit bir V hızıyla yaklaşan düzlemleri, aralarında $2H$ uzunluğunda mesafe olacak şekilde μ akışmaz, ρ sabit yoğunluğuyla manyetik alanının varlığında sıkışmayan Newton akışıyla göz önüne alalım. Akış yarı kararlı olarak düşünülebilir [71 – 73, 79]. Manyetik alanların varlığında bu tür akışları yöneten Navier-Stokes denklemleri [73, 74] akışkanda eylemsizlik terimleri tutulduğunda aşağıdaki şekilde verilir [80].

$$\nabla V \cdot u = 0 \quad (6.1)$$

ve

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = \nabla \cdot T + J \times B + \rho f, \quad (6.2)$$

burada u vektörün hızını, ∇ materyal zaman türevini belirtir. T Cauchy vurgu tensörü,

$$T = -pI + \mu A_1$$

ve

$$A_1 = \nabla u + u^T,$$

J elektrik akım yoğunluğu, B toplam manyetik alan

$$B = B_0 + b,$$

olmak üzere B_0 uygulanan manyetik alanı ve b indüklenen manyetik alanı belirtir. Yerdeğiştirme akımlarının yokluğunda değiştirilmiş Ohm yasası ve Maxwell denklemleri, sırasıyla, aşağıdaki şekilde verilir [80, 81].

$$J = \sigma [E + u \times B] \quad (6.3)$$

ve

$$\text{div } B = 0, \quad \nabla \times B = \mu_m J, \quad \text{curl } E = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (6.4)$$

burada σ elektrik iletkenliğini, E elektrik alanını ve μ_m manyetik geçirgenliği belirtir.

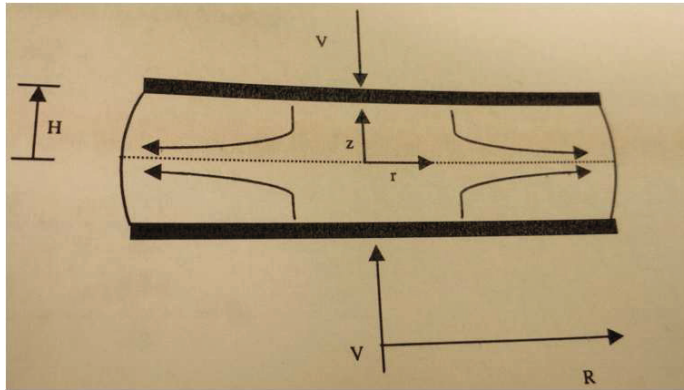
Aşağıdaki varsayımlar gerekmektedir [80]:

a) ρ yoğunluğu, μ_m manyetik geçirgenliği ve σ elektrik alan iletkenliğinin akış alanı bölgesi boyunca sabit oldukları varsayılır.

b) Akışın elektrik iletkenliği σ 'nın sonlu olduğu düşünülür.

c) B toplam manyetik alanı V hız alanına dik ve b indüklenen manyetik alanı B_0 manyetik alanla karşılaştırıldığında manyetik Reynolds sayısı düşük olacak şekilde ihmal edilebilir.

d) Elektrik alanı tarafından akışkandan enerjinin eklenip çıkarılmadığı durumda akışkan, akış bölgesinde elektrik alanının mevcut olmadığını ima eder.



Şekil 6.1. İki paralel plaka arasındaki durağan, sıkışan, eksensel simetrik bir akışkan [80]

Bu varsayımlar altında (6.2) ile belirtilen magnetohidrodinamik güç

$$J \times B = -\sigma B_0^2 u, \quad (6.5)$$

ile ifade edilebilir.

z -ekseniyle r, θ, z silindirik koordinatlarda eksensel simetrik bir akışkan plakalara dik olup bu plakalarda $z = \pm H$ ile belirtilir. Eksensel simetri mevcut olduğundan u aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$u = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z)).$$

Küresel koordinatlardaki Navier-Stokes denklemleri teğetsel hız ($u_\theta = 0$) olmadan p basınç olmak üzere [80]

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) + \sigma B_0^2 u \quad (6.6)$$

ve

$$\rho \left(u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (6.7)$$

şeklinde belirtilir. Süreklilik denklemi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (6.8)$$

ile ifade edilir. Sınır şartları

$$\begin{aligned} z = H \text{ iken } u_r &= 0, \quad u_z = -V, \\ z = 0 \text{ iken } \frac{\partial u_r}{\partial z} &= 0, \quad u_z = 0, \end{aligned}$$

ile verilir. Eksensel simetrik Stokes akım fonksiyonu Ψ

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (6.10)$$

denklemlerini sağlar. Süreklilik denklemi, (6.10) denkleminin kullanımı gerektirir. (6.3)-(6.5) denklemlerini ve (6.10) denklemini (6.7)-(6.8) denklemlerinde yerine yazarsak

$$-\frac{\rho}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} E^2 \Psi = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial E^2 \Psi}{\partial z} - \frac{\sigma B_0^2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (6.11)$$

ve

$$-\frac{\rho}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} E^2 \Psi = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial E^2 \Psi}{\partial r}, \quad (6.12)$$

elde edilir. (6.11) ve (6.12) denklemlerinden

$$-\rho \left[\frac{\partial \left(\Psi, \frac{E^2 \Psi}{r^2} \right)}{\partial(r, z)} \right] = \frac{\mu}{r} E^2 \Psi - \frac{\sigma B_0^2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \quad (6.13)$$

yazılabilir, burada

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

dir. Akım fonksiyonu

$$\Psi(r, z) = r^2 F(z), \quad (6.14)$$

ile ifade edilebilir [71, 73]. (6.4) ve (6.13) denklemleri ile (6.9) sınır şartlarından bu akış

$$F^{(iv)}(z) - \frac{\sigma B_0^2}{r} F''(z) + 2 \frac{\rho}{\mu} F(z) F'''(z) = 0, \quad (6.15)$$

ve

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, & F''(0) &= 0, \\ F(H) &= \frac{V}{2}, & F'(H) &= 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

ile verilir. Boyutsuz parametreler [80],

$$F^* = 2 \frac{F}{V}, \quad z^* = \frac{z}{H}, \quad \text{Re} = \frac{\rho H V}{\mu}, \quad m = B_0 H \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},$$

olmak üzere uygun olması açısından * sembolü hariç tutularak (6.15)–(6.16) sınır değer problemi [80]

$$F^{(iv)}(z) - m^2 F''(z) + \text{Re} F(z) F'''(z) = 0, \quad (6.17)$$

sınır şartlarıyla

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, & F''(0) &= 0, \\ F(1) &= 1, & F'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

denklemlerine döndüür. Burada Re Reynolds sayısını ve m ise Hartmann sayısını belirtir.

6.2. Çekirdek Üreten Uzaylar

Bu kısımda (6.17) ve (6.18) probleminin RKHSM ile çözümünde gerekli olan bazı çekirdek üreten uzayları tanımlayalım.

Tanım 6.1. $W_2^5[0, 1]$ uzayı

$$W_2^5[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \Big| u, u', u'', u''', u^{(4)} \text{ fonksiyonları } [0, 1] \\ \text{aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ u^{(5)} \in L^2[0, 1], x \in [0, 1], u(0) = u(1) = u'(1) = u''(0) = 0, \end{array} \right\}$$

olsun.

u fonksiyonunun beşinci mertebeden türevi hemen hemen her yerde mevcut olduğundan $u^{(4)}$ fonksiyonu mutlak sürekli bir fonksiyondur. $W_2^5[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, v \rangle_{W_2^5} = \sum_{i=0}^4 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(5)}(x)v^{(5)}(x)dx, \quad u, v \in W_2^5[0, 1],$$

$$\|u\|_{W_2^5} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^5}}, \quad u \in W_2^5[0, 1],$$

ile belirtilir. $W_2^5[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır. Yani her bir sabit $y \in [0, 1]$ ve herhangi $u \in W_2^5[0, 1]$ için

$$u(y) = \langle u, R_y \rangle_{W_2^5},$$

olacak şekilde R_y fonksiyonu mevcuttur [26].

Tanım 6.2. $W_2^4[0, 1]$ uzayı

$$W_2^4[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} u \Big| u, u', u'', u''' \text{ fonksiyonları } [0, 1] \\ \text{aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar,} \\ u^{(4)} \in L^2[0, 1], x \in [0, 1], \end{array} \right\}$$

olsun. $W_2^4[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle u, v \rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^3 u^{(i)}(0)v^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(4)}(x)v^{(4)}(x)dx, \quad u, v \in W_2^4[0, 1],$$

$$\|u\|_{W_2^4} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^4}}, \quad u \in W_2^4[0, 1],$$

ile verilir. $W_2^4[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzaydır. Yani her bir sabit $y \in [0, 1]$ ve herhangi $u \in W_2^4[0, 1]$ için

$$u(y) = \langle u, r_y \rangle_{W_2^4},$$

olacak şekilde r_y fonksiyonu mevcuttur [26].

Teorem 6.1. $W_2^5[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten Hilbert uzayı olup bu uzayın üretilen çekirdek fonksiyonu

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{10} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ katsayıları Maple 16 kullanılarak hesaplanmıştır.

İspat: $u \in W_2^5[0, 1]$ olsun. Tanım 6.1'den

$$\langle u, R_y \rangle_{W_2^5} = \sum_{i=0}^4 u^{(i)}(0) R_y^{(i)}(0) + \int_0^1 u^{(5)}(x) R_y^{(5)}(x) dx, \quad (6.19)$$

yazılabilir. (6.19) denkleminde kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \langle u, R_y \rangle_{W_2^5} &= \sum_{i=0}^4 u^{(i)}(0) \left[R_y^{(i)}(0) - (-1)^{(4-i)} R_y^{(9-i)}(0) \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^4 (-1)^{(4-i)} u^{(i)}(1) R_y^{(9-i)}(1) - \int_0^1 u(x) R_y^{(10)}(x) dx. \end{aligned} \quad (6.20)$$

elde edilir. Çekirdek üretme özelliğinden

$$\langle u, R_y \rangle_{W_2^5} = u(y),$$

yazılabilir. Eğer

$$\begin{cases} R_y'(0) + R_y^{(8)}(0) = 0, \\ R_y^{(3)}(0) + R_y^{(6)}(0) = 0, \\ R_y^{(4)}(0) - R_y^{(5)}(0) = 0, \\ R_y^{(5)}(1) = 0, \\ R_y^{(6)}(1) = 0, \\ R_y^{(7)}(1) = 0, \end{cases} \quad (6.21)$$

denklemleri sağlanırsa bu taktirde (6.20) denkleminde

$$R_y^{(10)}(x) = -\delta(x - y),$$

elde edilir. $x \neq y$ iken

$$R_y^{(10)}(x) = 0,$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{10} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

bulunur.

$$R_y^{(10)}(x) = -\delta(x - y),$$

olduğundan

$$R_{y+}^{(k)}(y) = R_{y-}^{(k)}(y), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (6.22)$$

ve

$$R_{y+}^{(9)}(y) - R_{y-}^{(9)}(y) = -1, \quad (6.23)$$

yazılabilir. $R_y \in W_2^5[0, 1]$ olduğundan

$$R_y(0) = 0, \quad R_y(1) = 0, \quad R'_y(1) = 0, \quad R''_y(0) = 0, \quad (6.24)$$

mevcuttur. (6.21)–(6.24) denklemlerinden $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) katsayıları elde edilebilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Hatırlatma 6.1. $W_2^4[0, 1]$ uzayının üretilen çekirdek fonksiyonu

$$r_y(x) = \begin{cases} 1 + xy + \frac{1}{4}y^2x^2 + \frac{1}{36}y^3x^3 + \frac{1}{144}y^3x^4 \\ -\frac{1}{240}y^2x^5 + \frac{1}{720}yx^6 - \frac{1}{5040}x^7, & x \leq y, \\ 1 + yx + \frac{1}{4}y^2x^2 + \frac{1}{36}y^3x^3 + \frac{1}{144}x^3y^4 \\ -\frac{1}{240}x^2y^5 + \frac{1}{720}xy^6 - \frac{1}{5040}y^7, & x > y, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Teorem 6.1'in ispatına benzer olarak bu fonksiyonun nasıl elde edildiği kolayca hesaplanabilir.

6.3. $W_2^5[0, 1]$ Uzayında Sınırlı Lineer Operatör

(6.17) ve (6.18) ile verilen problemin çözümünü çekirdek üreten $W_2^5[0, 1]$ uzayında ele alalım. L lineer operatörü

$$L : W_2^5[0, 1] \rightarrow W_2^4[0, 1]$$

olmak üzere

$$Lu = u^{(4)}(x) + \operatorname{Re} \frac{e^x}{e} (x^3 - 4x^2 + 4x) u^{(3)}(x) - m^2 u''(x) + \operatorname{Re} \frac{e^x}{e} (x^3 + 5x^2 - 2x - 6) u(x),$$

olsun. Böylece (6.17)–(6.18) model problemi

$$\begin{cases} Lu = M(x, u, u^{(3)}), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad u''(0) = 0, \end{cases} \quad (6.25)$$

formuna dönüşür. Burada

$$F(x) = u(x) + \frac{e^x}{e} (x^3 - 4x^2 + 4x)$$

ve

$$\begin{aligned} M(x, u, u^{(3)}) &= -\operatorname{Re} u^{(3)}(x) u(x) - \operatorname{Re} \left(\frac{e^x}{e} \right)^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) (x^3 + 5x^2 - 2x - 6) \\ &\quad - \frac{e^x}{e} (x^3 + 8x^2 + 8x - 2) + m^2 \frac{e^x}{e} (x^3 + 2x^2 - 6x), \end{aligned}$$

dir [26].

Teorem 6.2. (6.25) ile belirtilen L operatörü sınırlı lineer bir operatördür.

İspat: P pozitif bir sabit olmak üzere teoremin ispatı için

$$\|Lu\|_{W_2^4}^2 \leq P \|Lu\|_{W_2^5}^2,$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Tanım 6.2'den

$$\|u\|_{W_2^4}^2 = \langle u, u \rangle_{W_2^4} = \sum_{i=0}^3 \left[u^{(i)}(0) \right]^2 + \int_0^1 \left[u^{(4)}(x) \right]^2 dx, \quad u \in W_2^4[0, 1]$$

ve

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{W_2^4}^2 &= \langle Lu, Lu \rangle_{W_2^4} = [(Lu)(0)]^2 + [(Lu)'(0)]^2 + [(Lu)''(0)]^2 \\ &\quad + \left[(Lu)^{(3)}(0) \right]^2 + \int_0^1 \left[(Lu)^{(4)}(x) \right]^2 dx, \end{aligned}$$

yazılabilir. Çekirdek üretme özelliğinden ise

$$u(x) = \langle u, R_x \rangle_{W_2^5},$$

ve

$$(Lu)(x) = \langle u, (LR_x) \rangle_{W_2^5}, \quad (Lu)'(x) = \langle u, (LR_x)' \rangle_{W_2^5},$$

$$(Lu)''(x) = \langle u, (LR_x)'' \rangle_{W_2^5}, \quad (Lu)^{(3)}(x) = \langle u, (LR_x)^{(3)} \rangle_{W_2^5},$$

$$(Lu)^{(4)}(x) = \langle u, (LR_x)^{(4)} \rangle_{W_2^5},$$

mevcuttur. Bu denklemlerde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak

$$|(Lu)(x)| \leq \|u\|_{W_2^5} \|LR_x\|_{W_2^5} = a_1 \|u\|_{W_2^5}, \quad (a_1 > 0 \text{ pozitif bir sabit}),$$

$$|(Lu)'(x)| \leq \|u\|_{W_2^5} \|(LR_x)'\|_{W_2^5} = a_2 \|u\|_{W_2^5}, \quad (a_2 > 0 \text{ pozitif bir sabit}),$$

$$|(Lu)''(x)| \leq \|u\|_{W_2^5} \|(LR_x)''\|_{W_2^5} = a_3 \|u\|_{W_2^5}, \quad (a_3 > 0 \text{ pozitif bir sabit}),$$

$$|(Lu)^{(3)}(x)| \leq \|u\|_{W_2^5} \|(LR_x)^{(3)}\|_{W_2^5} = a_4 \|u\|_{W_2^5}, \quad (a_4 > 0 \text{ pozitif bir sabit}),$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & [(Lu)(0)]^2 + [(Lu)'(0)]^2 + [(Lu)''(0)]^2 + [(Lu)^{(3)}(0)]^2 \\ & \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \|u\|_{W_2^5}^2 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$(Lu)^{(4)} = \langle u, (LR_x)^{(4)} \rangle_{W_2^5},$$

olduğundan

$$|(Lu)^{(4)}| \leq \|u\|_{W_2^5} \|(LR_x)^{(4)}\|_{W_2^5} = a_5 \|u\|_{W_2^5}, \quad (a_5 > 0 \text{ pozitif bir sabit}).$$

elde edilir. Bu ifadeden ise

$$[(Lu)^{(4)}]^2 \leq a_5^2 \|u\|_{W_2^5}^2,$$

ve

$$\int_0^1 \left[(Lu)^{(4)}(x) \right]^2 dx \leq a_5^2 \|u\|_{W_2^5}^2,$$

bulunur. Yani

$$P = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) > 0$$

pozitif bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{W_2^4}^2 &= [(Lu)(0)]^2 + [(Lu)'(0)]^2 + [(Lu)''(0)]^2 \\ &\quad + [(Lu)^{(3)}(0)]^2 + \int_0^1 \left[(Lu)^{(4)}(x) \right]^2 dx \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \|u\|_{W_2^5}^2 = P \|u\|_{W_2^4}^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

6.4. Sistemin Çözümünün Analiz Edilmesi

$\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun herhangi bir küme olsun ve L^* operatörü L operatörünün adjoint operatörü olmak üzere

$$\Psi_x(y) = L^* r_x(y)$$

eşitliği sağlansın. Üretilen r_y çekirdek fonksiyonu Hatırlatma 6.1'de verilmek üzere

$$\Psi_i(x) = \Psi_{x_i}(x) = L^* r_{x_i}(x)$$

eşitliğini tanımlayalım.

Lemma 6.1. $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ dizisi $W_2^5[0, 1]$ uzayında bir tam sistem oluşturur.

İspat: $u \in W_2^5[0, 1]$ için

$$\langle u, \Psi_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

olsun. Yani

$$\langle u, L^* r_{x_i} \rangle = (Lu)(x_i) = 0,$$

olur. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ kümesinde yoğun olduğundan

$$(Lu)(x) = 0,$$

yazılabilir. L operatörünün tersinden

$$u(x) = 0,$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Lemma 6.2. Aşağıdaki eşitlikte η indisi L operatörünün bu indisin fonksiyonuna uygulandığını göstermek üzere

$$\Psi_i(x) = (L_\eta R_x(\eta))(x_i),$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: Çekirdek üretme özelliğinden

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= \langle \Psi_i(\xi), R_x(\xi) \rangle_{W_2^5[0,1]} = \langle L^* r_{x_i}(\xi), R_x(\xi) \rangle_{W_2^5[0,1]} \\ &= \langle (r_{x_i})(\xi), (L_\eta R_x(\eta))(\xi) \rangle_{W_2^4[0,1]} = (L_\eta R_x(\eta))(x_i), \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Hatırlatma 6.2. $W_2^5[0, 1]$ uzayının ortonormal sistemi $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty, \{\Psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ dizisinin Gram-Schmidt ortogonalleştirme sürecinden β_{ik} ortogonal katsayılar olmak üzere

$$\bar{\Psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \Psi_k(x), \quad (\beta_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots), \quad (6.26)$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.3. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olmak üzere (6.25) homogen sınır şartlı problemin analitik çözümü

$$u = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k), u^{(3)}(x_k)) \bar{\Psi}_i(x),$$

şeklinde dir.

İspat: (6.26) denkleminde ve (6.25) denkleminin çözümünün tekliğinden

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^\infty \langle u, \bar{\Psi}_i \rangle_{W_2^5} \bar{\Psi}_i = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u, L^* r_{x_k} \rangle_{W_2^5} \bar{\Psi}_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu, r_{x_k} \rangle_{W_2^4} \bar{\Psi}_i = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle M(x, u, u^{(3)}), r_{x_k} \rangle_{W_2^4} \bar{\Psi}_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k), u^{(3)}(x_k)) \bar{\Psi}_i(x), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

u_n yaklaşık çözümü ise u analitik çözümünün n teriminin ele alınmasıyla

$$u_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k), u^{(3)}(x_k)) \bar{\Psi}_i(x),$$

bulunur.

6.5. Sayısal Sonuçlar

Çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemi kullanılarak elde edilen tablolar ve şekiller aşağıdaki gibidir [26].

Tablo 6.1. $m = 1$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar

x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.150265	0.150294	0.1502940007	7×10^{-10}	4×10^{-9}
0.2	0.297424	0.297481	0.2974809994	5×10^{-10}	1×10^{-9}
0.3	0.438387	0.438467	0.4384669993	6×10^{-10}	1×10^{-9}
0.4	0.570093	0.570189	0.5701889998	1×10^{-10}	2×10^{-10}
0.5	0.68952	0.689624	0.6896239993	6×10^{-10}	9×10^{-10}
0.6	0.793695	0.793796	0.7937960005	5×10^{-10}	6×10^{-10}
0.7	0.879695	0.879779	0.8797790003	3×10^{-10}	3×10^{-10}
0.8	0.944641	0.944696	0.9446960002	2×10^{-10}	2×10^{-10}
0.9	0.985687	0.985707	0.9857069994	5×10^{-10}	5×10^{-10}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tablo 6.2. $m = 3$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar

x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.13709	0.137044	0.13704399	7×10^{-10}	5×10^{-9}
0.2	0.272583	0.272494	0.2724940004	4×10^{-10}	1×10^{-9}
0.3	0.404759	0.404637	0.4046369993	6×10^{-10}	1×10^{-9}
0.4	0.531649	0.531508	0.5315079998	1×10^{-10}	3×10^{-10}
0.5	0.650894	0.650756	0.650755999	9×10^{-10}	1×10^{-9}
0.6	0.759591	0.759478	0.7594779997	2×10^{-10}	2×10^{-10}
0.7	0.854106	0.854035	0.8540349992	7×10^{-10}	8×10^{-10}
0.8	0.929845	0.929817	0.9298170008	8×10^{-10}	8×10^{-10}
0.9	0.980966	0.980963	0.9809629996	3×10^{-10}	3×10^{-10}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tablo 6.3. $m = 8$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar

x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.11507	0.114976	0.11497599	9×10^{-9}	7.86×10^{-8}
0.2	0.230068	0.229882	0.22988199	7.31×10^{-9}	3.18×10^{-8}
0.3	0.344866	0.344604	0.344604005	5.84×10^{-9}	1.69×10^{-8}
0.4	0.459205	0.458904	0.458903991	8.67×10^{-9}	1.88×10^{-8}
0.5	0.572545	0.572276	0.572275999	3.19×10^{-11}	5.58×10^{-11}
0.6	0.683769	0.683628	0.683627991	8.44×10^{-9}	1.23×10^{-8}
0.7	0.790543	0.790607	0.790607007	7.83×10^{-9}	9.91×10^{-9}
0.8	0.887936	0.888173	0.888173004	4.66×10^{-9}	5.25×10^{-9}
0.9	0.965381	0.965578	0.965578002	2.2×10^{-9}	2.28×10^{-9}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tablo 6.4. $m = 20$ ve $Re = 1$ için elde edilen sayısal sonuçlar

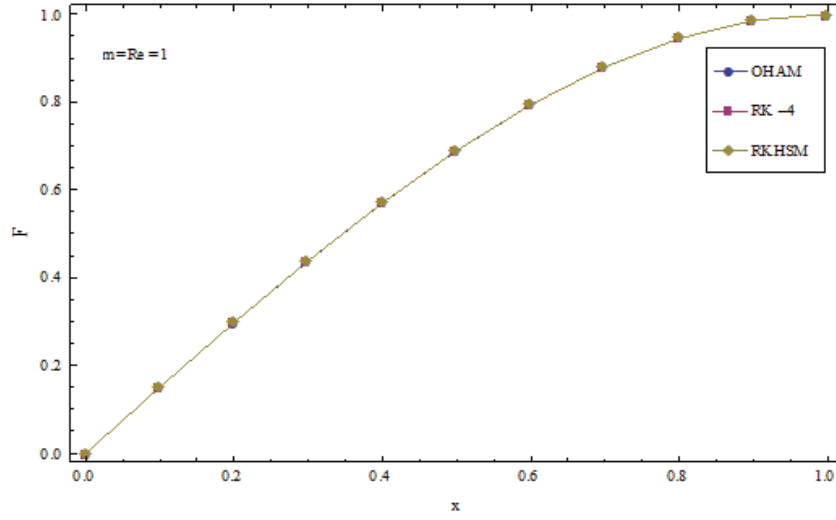
x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.105312	0.105391	0.105390989	1×10^{-8}	9×10^{-8}
0.2	0.210625	0.210782	0.210781993	6×10^{-9}	3×10^{-8}
0.3	0.315938	0.316173	0.316172919	8×10^{-8}	2×10^{-7}
0.4	0.421249	0.421563	0.421562991	8×10^{-9}	1×10^{-8}
0.5	0.526551	0.526952	0.526951947	5×10^{-8}	9×10^{-8}
0.6	0.631824	0.632324	0.632323981	1×10^{-8}	2×10^{-8}
0.7	0.736971	0.737586	0.737586057	5×10^{-8}	7×10^{-8}
0.8	0.841352	0.842051	0.842051034	3×10^{-8}	4×10^{-8}
0.9	0.94035	0.940861	0.940861018	1×10^{-8}	1×10^{-8}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tablo 6.5. $m = 1$ ve $Re = 4$ için elde edilen sayısal sonuçlar

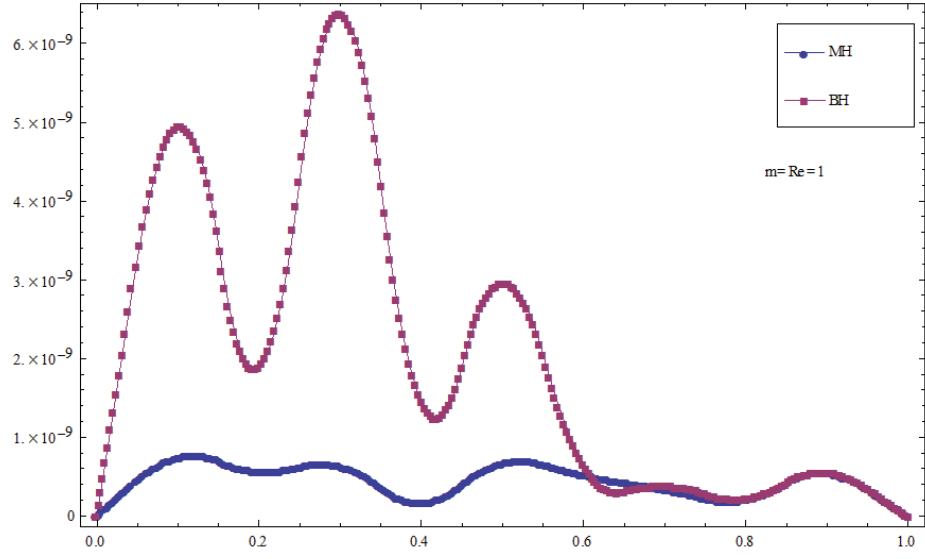
x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.156218	0.158104	0.1581040001	1×10^{-10}	7×10^{-10}
0.2	0.308363	0.311962	0.3119620005	5×10^{-10}	1×10^{-9}
0.3	0.452557	0.457539	0.45753900003	3×10^{-11}	6×10^{-11}
0.4	0.585287	0.591193	0.59119300033	3×10^{-10}	5×10^{-10}
0.5	0.703518	0.709771	0.70977100026	2×10^{-10}	3×10^{-10}
0.6	0.804726	0.810642	0.81064200064	6×10^{-10}	7×10^{-10}
0.7	0.886838	0.891666	0.89166599939	6×10^{-10}	6×10^{-10}
0.8	0.948051	0.95112	0.95112000044	4×10^{-10}	4×10^{-10}
0.9	0.986529	0.987612	0.98761199979	2×10^{-10}	2×10^{-10}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0

Tablo 6.6. $m = 1$ ve $Re = 10$ için elde edilen sayısal sonuçlar

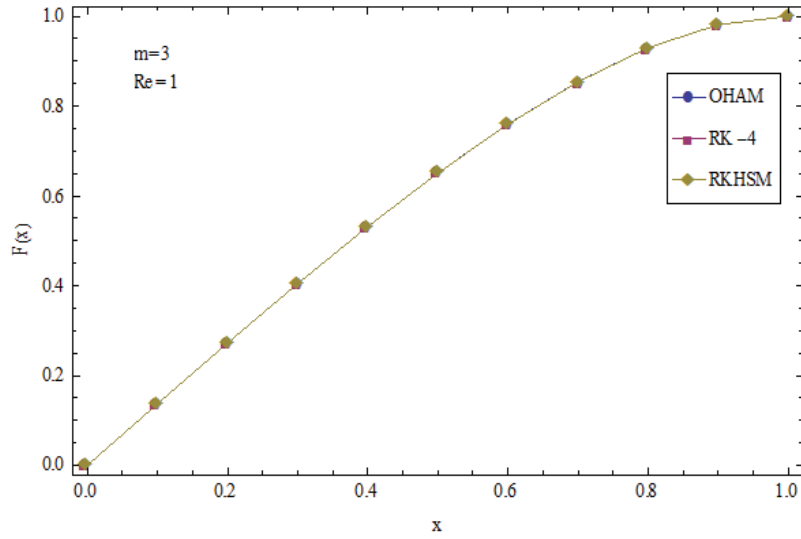
x	OHAM [80]	Sayısal Çözüm ($RK - 4$)	Yaklaşık Çözüm RKHSM	Mutlak Hata	Bağıl Hata
0.1	0.175911	0.167616	0.1676160001	1×10^{-10}	8×10^{-10}
0.2	0.344336	0.329031	0.3290310022	2×10^{-9}	6×10^{-9}
0.3	0.498671	0.478907	0.4789069979	2×10^{-9}	4×10^{-9}
0.4	0.633941	0.613252	0.6132519955	4×10^{-9}	7×10^{-9}
0.5	0.747277	0.729428	0.7294279984	1×10^{-9}	2×10^{-9}
0.6	0.838004	0.825843	0.8258430069	6×10^{-9}	8×10^{-9}
0.7	0.907244	0.901576	0.9015760084	8×10^{-9}	9×10^{-9}
0.8	0.956954	0.901576	0.9015751838	8×10^{-7}	9×10^{-7}
0.9	0.988387	0.988978	0.9889779999	2×10^{-11}	2×10^{-11}
1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0



Şekil 6.2. $m = Re = 1$ için RKHSM, OHAM ve RK-4 çözümlerinin karşılaştırılması

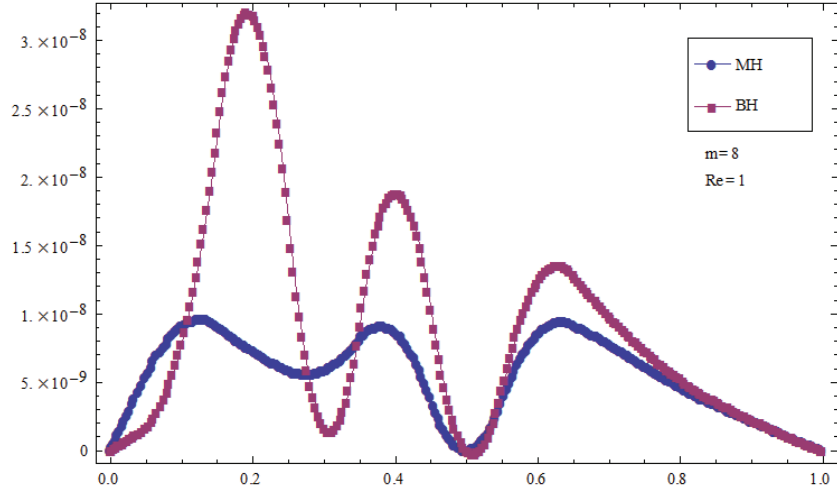


Şekil 6.3. $m = \text{Re} = 1$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)

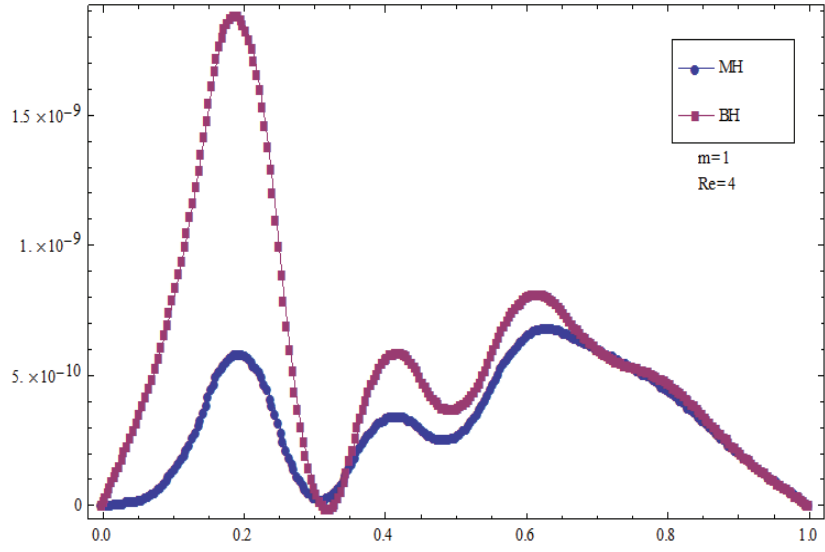


Şekil 6.4. $m = 3$ ve $\text{Re} = 1$ için RKHSM, OHAM ve RK-4 çözümlerinin karşılaştırıl-

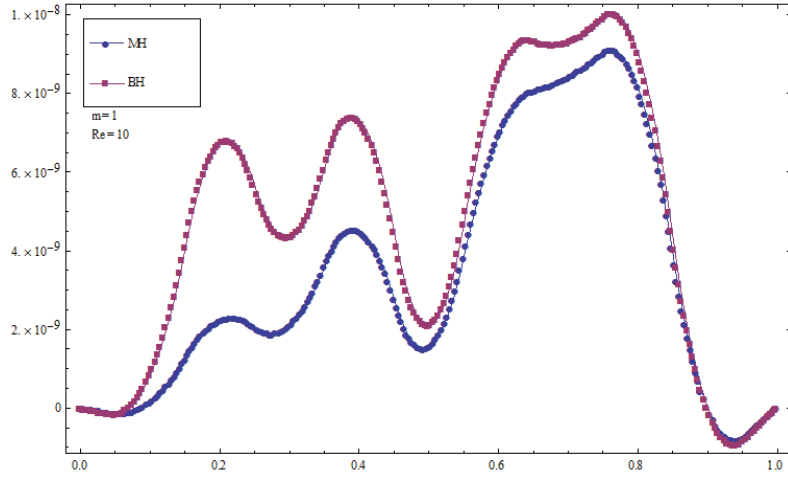
ması



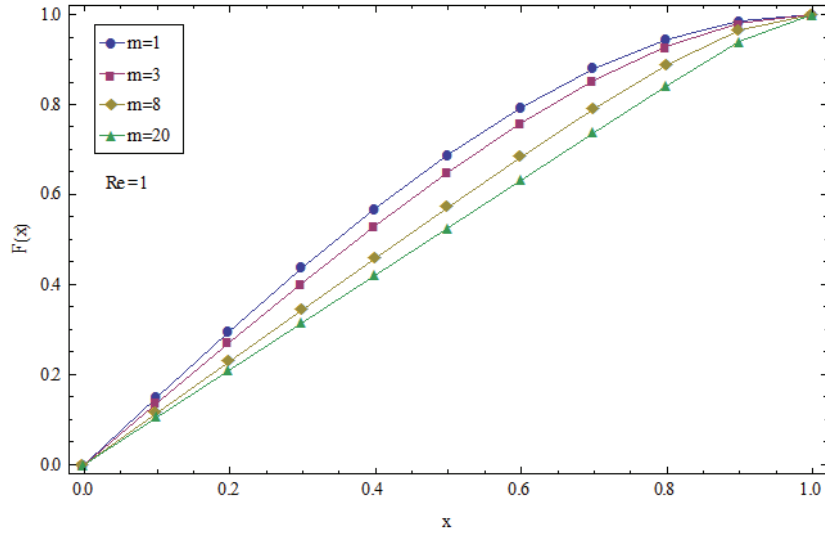
Şekil 6.5. $m = 8$ ve $Re = 1$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)



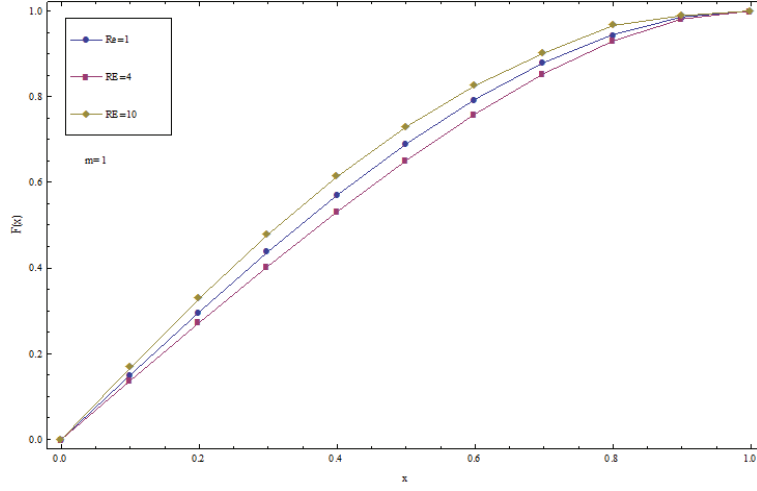
Şekil 6.6. $m = 1$ ve $Re = 4$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)



Şekil 6.7. $m = 1$ ve $Re = 10$ için mutlak hata (MH) ve bağıl hata (BH)



Şekil 6.8. Sabit bir Reynolds sayısı $Re = 1$ ve artan manyetik alan etkisi $m = 1, 3, 8, 20$ için RKHSM çözümünün karşılaştırılması



Şekil 6.9. Sabit bir manyetik alan etkisi $m = 1$ ve artan Reynolds sayısı $Re = 1, 4, 10$ için RKHSM çözümünün karşılaştırılması

6.6. Sonuç

Bu bölümde iki paralel plaka arasındaki sıvı akışını modelleyen dördüncü basamaktan lineer olmayan sınır-değer problemini çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemi ile çözdük. Elde edilen sonuçları Tablo 6.1–6.6 ve Şekil 6.2–6.9 ile verdik. Bu tablo ve şekillerde farklı Reynolds ve Hartmann sabitleri kullanıldı. Tablo 6.1–6.4’de, sırasıyla, $m = 1, 3, 8, 10$ ve $Re = 1$ için $0 \leq x \leq 1.0$ aralığındaki değerlerle OHAM [80], RK-4 [80] ve RKHSM arasında bir karşılaştırma yapıldı. Bu tablolarda mutlak hata ve bağıl hata verildi. Tablo 6.5 ve Tablo 6.6’da ise, sırasıyla $Re = 4, 10$ ve $m = 1$ alınarak hesaplamalar yapıldı. Tablolardan görüldüğü gibi $Re = 1$ ve m ’nin farklı değerleri için elde edilen mutlak ve bağıl hata 10^{-9} civarındadır. Şekil 6.2 ve Şekil 6.4’te OHAM [80], RK-4 [80] ve RKHSM ile elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırıldı. Bu şekillerden de görüldüğü gibi üç çözüm de ayırt edilmeyecek kadar birbirine yakındır. Şekil 6.3, 6.5 ve 6.7’de ise farklı Reynolds ve Hartmann sabitleri kullanılarak $0.1 \leq x \leq 1.0$ aralığında elde edilen mutlak ve bağıl hataların grafiği çizildi. Şekil 6.8’de $m = 1, 3, 8, 20$ ve $Re = 1$ olması durumunda, Şekil 6.9’da ise $Re = 1, 4, 10$ ve $m = 1$ iken RKHSM ile elde edilen çözümün nasıl değiştiği incelendi.

Bulunan tablo ve şekillerden de görüldüğü gibi RKHSM akışkanlar mekaniğinde ortaya çıkan problemlerin çözümü için kullanabilecek uygun bir yöntem olup modellenen problemin doğasına uyan ve literatürde var olan çalışmalarla örtüşen sonuçlar elde edildi.

7. BÖLÜM

YEDİNCİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN RKHSM İLE ÇÖZÜMÜ

Yüksek mertebeden sınır-değer problemlerinin analitik ve sayısal çözümleri literatürde azdır. Bununla birlikte bazı yarı-analitik yöntemlerle (7.1)–(7.2) problemi göz önüne alınmıştır. Bunlar arasında Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) [82], Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) [83], Adomian ayrıştırma metodu (ADM) [84], Varyasyonel parametreler metodu (VPM) [85] ve Homotopi analiz metodu (HAM) [86] sayılabilir. Biz bu bölümde çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemi yardımıyla yedinci mertebeden sınır-değer problemi çözüp yukarıda saydığımız yarı-analitik yöntemlerle karşılaştıracacağız.

Yedinci mertebeden sınır değer problemini

$$u^{(7)}(x) = N(x, u(x)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} u^{(i)}(0) &= A_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\ u^{(j)}(1) &= B_j, \quad j = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

sınır koşulları ile ele alalım.

7.1. Çekirdek Üreten Uzaylar

(7.1)–(7.2) problemini çözmek için gerekli olan bazı çekirdek üreten uzaylar tanımlayalım.

Tanım 7.1. $H_2^1[0, 1]$ uzayı

$$H_2^1[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} f \Big| f \text{ fonksiyonu } [0, 1] \text{ aralığında mutlak sürekli} \\ \text{bir fonksiyon ve } f'(x) \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \end{array} \right\}$$

olsun. $H_2^1[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{H_2^1} = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx, \quad u, f \in H_2^1[0, 1]$$

ve

$$\|f\|_{H_2^1} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H_2^1}}, \quad f \in H_2^1[0, 1],$$

şeklinde tanımlanır. $H_2^1[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup üretilen çekirdek fonksiyonunu r_x ile gösterirsek

$$r_x(y) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq y, \\ 1 + y, & x > y, \end{cases} \quad (7.3)$$

olur.

Tanım 7.2. $T_2^8[0, 1]$ uzayı

$$T_2^8[0, 1] = \left\{ \begin{array}{l} f \mid f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, f^{(7)} \text{ fonksiyonları } [0, 1] \\ \text{aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar, } f^{(8)} \in L^2[0, 1], \quad x \in [0, 1], \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f(1) = f'(1) = f''(1) = 0, \end{array} \right\}$$

olsun. $T_2^8[0, 1]$ uzayında iç çarpım ve norm, sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{T_2^8} = \sum_{i=0}^7 f^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(8)}(x)g^{(8)}(x)dx, \quad f, g \in T_2^8[0, 1]$$

ve

$$\|f\|_{T_2^8} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{T_2^8}}, \quad f \in T_2^8[0, 1],$$

şeklinde ifade edilir. $T_2^8[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup herbir sabit $y \in [0, 1]$ ve herhangi $f \in T_2^8[0, 1]$ için

$$f(y) = \langle f, R_y \rangle_{T_2^8},$$

olacak şekilde üretilen R_y çekirdeği mevcuttur.

Teorem 7.1. $T_2^8[0, 1]$ uzayı çekirdek üreten bir uzay olup bu uzayın üretilen R_y çekirdek fonksiyonu

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{16} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{16} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ katsayıları Maple 16 kullanılarak hesaplanmıştır [87].

İspat: $f \in T_2^8[0, 1]$ olsun. Tanım 7.2'den

$$\langle f, R_y \rangle_{T_2^8} = \sum_{i=0}^7 f^{(i)}(0)R_y^{(i)}(0) + \int_0^1 f^{(8)}(x)R_y^{(8)}(x)dx, \quad (7.4)$$

elde edilir. (7.4) için birkaç kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \langle f, R_y \rangle_{T_2^8} &= \sum_{i=0}^7 u^{(i)}(0) \left[R_y^{(i)}(0) - (-1)^{(7-i)} R_y^{(15-i)}(0) \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^7 (-1)^{(7-i)} u^{(i)}(1) R_y^{(15-i)}(1) + \int_0^1 u(x) R_y^{(16)}(x) dx, \end{aligned} \quad (7.5)$$

bulunur. Üretilen çekirdeğin temel özelliğinden

$$\langle u, R_y \rangle_{T_2^8} = u(y),$$

yazılabilir. Eğer

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y^{(4)}(0) + R_y^{(11)}(0) = 0, \\ R_y^{(5)}(0) - R_y^{(10)}(0) = 0, \\ R_y^{(6)}(0) + R_y^{(9)}(0) = 0, \\ R_y^{(7)}(0) - R_y^{(8)}(0) = 0, \\ R_y^{(8)}(1) = 0, \\ R_y^{(9)}(1) = 0, \\ R_y^{(10)}(1) = 0, \\ R_y^{(11)}(1) = 0, \\ R_y^{(12)}(1) = 0, \end{array} \right. \quad (7.6)$$

olursa bu taktirde (7.5)'ten

$$R_y^{(16)}(x) = \delta(x - y),$$

elde edilir. $x \neq y$ iken

$$R_y^{(16)}(x) = 0,$$

bulunur. Bundan dolayı

$$R_y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{16} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{16} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{array} \right.$$

olarak bulunur.

$$R_y^{(16)}(x) = \delta(x - y),$$

olduğundan

$$R_{y^+}^{(k)}(y) = R_{y^-}^{(k)}(y), \quad k = 0, \dots, 14, \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (7.7)$$

ve

$$R_{y^+}^{(15)}(y) - R_{y^-}^{(15)}(y) = 1, \quad (7.8)$$

yazılabilir. $R_y \in T_2^8[0, 1]$ olduğundan

$$R_y(0) = R'_y(0) = R''_y(0) = R_y^{(3)}(0) = R_y(1) = R'_y(1) = R''_y(1) = 0, \quad (7.9)$$

elde edilir. (7.6)–(7.9) denklemlerinden $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, 16$) katsayıları bulunabilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

7.2. Problemin $T_2^8[0, 1]$ Uzayında Analitik ve Yaklaşık Çözümleri

L operatörü

$$L : T_2^8[0, 1] \rightarrow H_2^1[0, 1]$$

sınırlı lineer bir operatördür. (7.2) sınır koşullarını homogenleştirirsek

$$\begin{cases} Lv = M(x, v(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ v^{(i)}(0) = 0, & i = 0, 1, 2, 3, \\ v^{(j)}(1) = 0, & j = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (7.10)$$

elde edilir. Notasyon karışıklığını önlemek bakımından (7.10)'da v yerine tekrar u yazalım.

Sayılabılır yoğun $P = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ alt kümesini $[0, 1]$ aralığında ele alalım ve

$$\Psi_x(y) = L^* r_x(y),$$

olsun. Burada L^* operatörü L operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere üretilen r_x çekirdek fonksiyonu (7.3) ile verilir. Ayrıca $\Psi_i(x) = \Psi_{x_i}(x)$ olsun. Yani

$$\Psi_i(x) = \Psi_{x_i}(x) = L^* r_{x_i}(x),$$

eşitliği sağlansın.

Lemma 7.1. $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ dizisi $T_2^8[0, 1]$ uzayında bir tam sistem oluşturur [87].

İspat: $f \in T_2^8[0, 1]$ için $\langle f, \Psi_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) ve

$$\langle f, L^* r_{x_i} \rangle = (Lf)(x_i) = 0,$$

olsun. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0, 1]$ aralığında yoğun olduğundan

$$(Lf)(x) = 0,$$

yazılabilir. L^{-1} ters operatörünün varlığından

$$f(x) = 0,$$

elde edilir. $\square$

Lemma 7.2. $T_2^8[0, 1]$ uzayında

$$\Psi_i(x) = (L_\nu R_x(\nu))(x_i),$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Çekirdek üretme özelliğinden

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= \langle \Psi_i(\xi), R_x(\xi) \rangle_{T_2^8} = \langle L^* r_{x_i}(\xi), R_x(\xi) \rangle_{T_2^8} \\ &= \langle (r_{x_i})(\xi), (L_\nu R_x(\nu))(\xi) \rangle_{H_2^1} \\ &= (L_\nu R_x(\nu))(x_i), \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Hatırlatma 7.1. $T_2^8[0, 1]$ uzayının $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ nin Gram-Schmidt ortogonalleştirme sürecinden

$$\bar{\Psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \Psi_k(x), \quad (\beta_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots), \quad (7.11)$$

elde edilir. Burada β_{ik} katsayıları ortogonal katsayılarıdır.

Teorem 7.2. Eğer u fonksiyonu (7.10)'nun çözümü ise bu çözüm

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x), \quad (7.12)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ kümesi $[0, 1]$ aralığında yoğun bir kümedir [87].

İspat: (7.10)'nun çözümünün tekliği ve (7.11) bağıntısından

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \bar{\Psi}_i \rangle_{T_2^8} \bar{\Psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u, L^* r_{x_k} \rangle_{T_2^8} \bar{\Psi}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu, r_{x_k} \rangle_{H_2^1} \bar{\Psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle M(x, u), r_{x_k} \rangle_{H_2^1} \bar{\Psi}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x), \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Şimdi u_n yaklaşık çözümü, (7.12) çözümünün n -teriminin göz önüne alınmasıyla

$$u_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x), \quad (7.13)$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 7.3. r_n 'nin u analitik çözümü ve u_n yaklaşık çözümü arasındaki hata miktarı olduğunu varsayalım. Bu taktirde r_n dizisi $\|\cdot\|_{T_2^8}$ normunda monoton azalan bir dizi olup $\|r_n(x)\|_{T_2^8} \rightarrow 0$ dır [87].

İspat: (7.12) ve (7.13)'ten

$$\|u - u_n\|_{T_2^8} = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x) \right\|_{T_2^8},$$

elde edilir. Böylece

$$\|u - u_n\|_{T_2^8} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{T_2^8}^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x) \right\|_{T_2^8}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^i \beta_{ik} M(x_k, u(x_k)) \bar{\Psi}_i(x) \right)_{T_2^8}^2, \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu taktirde $\|u - u_n\|_{T_2^8}$ monoton olarak azalan olur.

7.3. Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, metodun etkinliğini göstermek için bir lineer ve iki lineer olmayan örnek göz önüne alındı. Ayrıca hesaplamalar yapılırken Maple 16 programı kullanıldı.

Örnek 7.1. İlk olarak aşağıdaki lineer olmayan yedinci mertebeden sınır değer problemi

$$\begin{cases} u^{(7)}(x) = e^{-x} u^2(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u^{(3)}(0) = 1, \\ u(1) = u'(1) = u''(1) = e, \end{cases} \quad (7.14)$$

göz önüne alalım. (7.14)'ün analitik çözümü [82]

$$u(x) = e^x,$$

ile verilir.

(7.14)'ün sınır şartlarını homogenleştirirsek

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(7)}(x) = e^{-x} \left[v(x) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 \left(\frac{21}{2}e - \frac{57}{2} \right) \right. \\ \quad \left. + x^5 \left(\frac{87}{2} - 16e \right) + x^6 \left(\frac{13}{2}e - \frac{53}{3} \right) \right]^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \\ v(0) = v'(0) = v''(0) = v^{(3)}(0) = 0, \\ \\ v(1) = v'(1) = v''(1) = 0, \end{array} \right.$$

elde edilir. Sınır şartlarını homogenleştirmek için

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^4 \left(\frac{21}{2}e - \frac{57}{2} \right) \\ &\quad - x^5 \left(\frac{87}{2} - 16e \right) - x^6 \left(\frac{13}{2}e - \frac{53}{3} \right), \end{aligned}$$

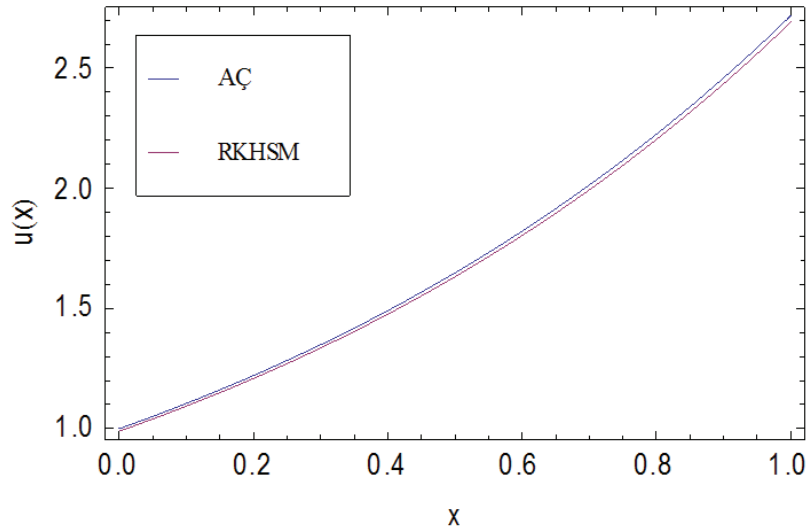
dönüşümü kullanılmıştır. Bu probleme RKHSM uygulanırsa aşağıdaki tablolar ve şekiller bulunur.

Tablo 7.1. Örnek 7.1 için elde edilen sayısal sonuçlar

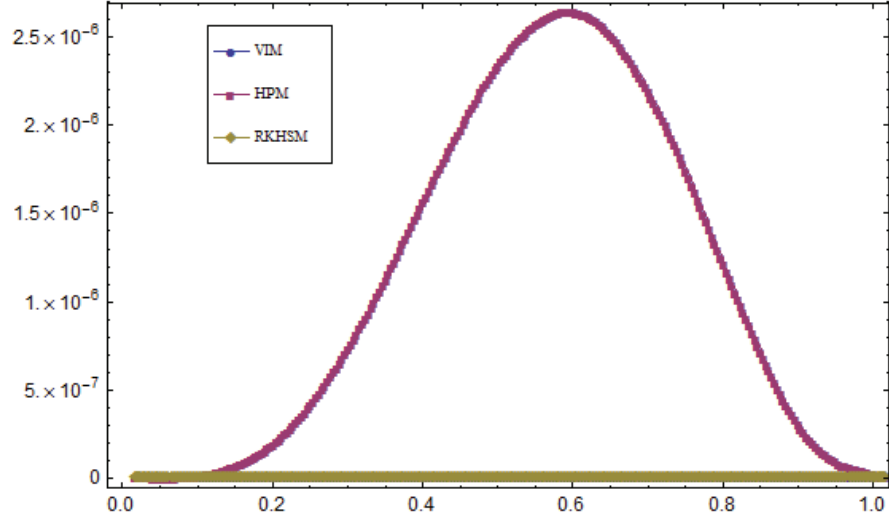
x	AÇ	YÇ	BH
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	1.1051709180756476248	1.1051709180727538232	2.618×10^{-12}
0.2	1.2214027581601698339	1.2214027581330885422	2.217×10^{-11}
0.3	1.3498588075760031040	1.3498588075089984856	4.963×10^{-11}
0.4	1.4918246976412703178	1.4918246975765762858	4.336×10^{-11}
0.5	1.6487212707001281468	1.6487212707474912552	2.872×10^{-11}
0.6	1.8221188003905089749	1.8221188006600701498	1.479×10^{-10}
0.7	2.0137527074704765216	2.0137527079512967073	2.387×10^{-10}
0.8	2.2255409284924676046	2.2255409289689961077	2.141×10^{-10}
0.9	2.4596031111569496638	2.4596031113394646558	7.420×10^{-11}
1.0	2.7182818284590452354	2.7182818284590452354	0.0

Tablo 7.2. Örnek 7.1 için HPM, VIM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

x	HPM [83]	VIM [82]	[RKHSM]
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	2.15×10^{-8}	3.8478×10^{-12}	$2.8938016 \times 10^{-12}$
0.2	2.45×10^{-7}	1.2366×10^{-10}	$2.70812917 \times 10^{-11}$
0.3	8.42×10^{-7}	2.7788×10^{-10}	$6.70046184 \times 10^{-11}$
0.4	1.69×10^{-6}	7.5864×10^{-10}	$6.46940320 \times 10^{-11}$
0.5	2.42×10^{-6}	1.1571×10^{-9}	$4.73631084 \times 10^{-11}$
0.6	2.62×10^{-6}	1.3132×10^{-9}	$2.695611749 \times 10^{-10}$
0.7	2.06×10^{-6}	1.2228×10^{-9}	$4.808201857 \times 10^{-10}$
0.8	1.05×10^{-6}	6.6023×10^{-10}	$4.765285031 \times 10^{-10}$
0.9	2.14×10^{-7}	1.6534×10^{-10}	$1.825149920 \times 10^{-10}$
1.0	4.44×10^{-16}	1.3265×10^{-11}	0.0



Şekil 7.1. Örnek 7.1 için analitik çözüm (AÇ) ve RKHSM ile elde edilen çözümün karşılaştırılması



Şekil 7.2. Örnek 7.1 için VIM, HPM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Örnek 7.2. Bu örnekte ise yedinci mertebeden lineer sınır değer problemini

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(7)}(x) = -u(x) - e^x (35 + 12x + 2x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 0, \quad u^{(3)}(0) = -3, \\ u(1) = 0, \quad u'(1) = -e, \quad u''(1) = -4e, \end{array} \right. \quad (7.15)$$

ele aldık. (7.15)'in analitik çözümü [84]:

$$u(x) = x(1-x)e^x,$$

ile verilmektedir.

(7.15)'in sınır şartları homogenleştirilirse

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(7)}(x) + v(x) = -e^x (35 + 12x + 2x^2) - x + \frac{x^3}{2} - x^4 \left(3e - \frac{17}{2}\right) \\ \quad - x^5 \left(\frac{27}{2} - 5e\right) - x^6 \left(2e - \frac{11}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ v(0) = v'(0) = v''(0) = v^{(3)}(0) = 0, \\ v(1) = v'(1) = v''(1) = 0, \end{array} \right.$$

elde edilir. Sınır şartlarını homogen hale getirmek için

$$v(x) = u(x) - x + \frac{x^3}{2} - x^4 \left(3e - \frac{17}{2}\right) - x^5 \left(\frac{27}{2} - 5e\right) - x^6 \left(2e - \frac{11}{2}\right),$$

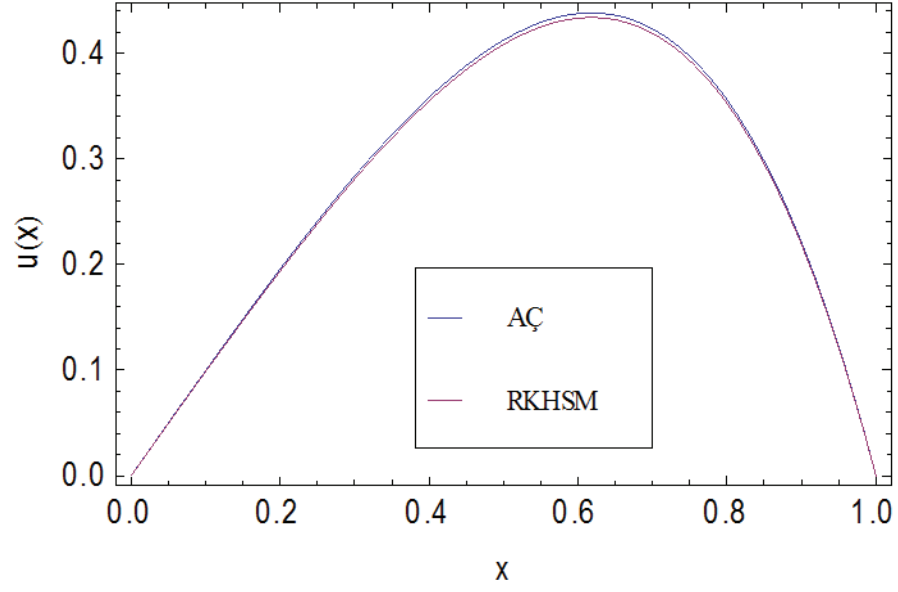
dönüşümü kullanılmıştır.

Tablo 7.3. Örnek 7.2 için elde edilen sayısal sonuçlar

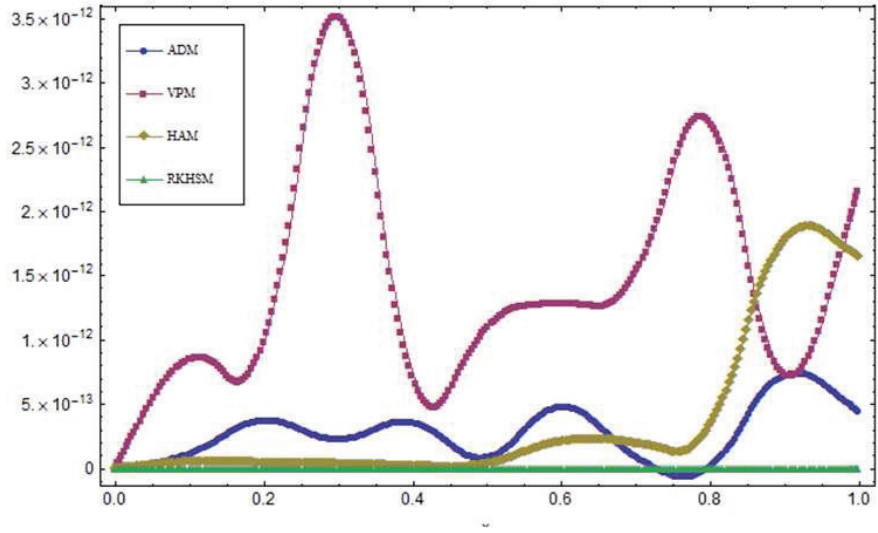
x	AÇ	YÇ
0.0	0.0	0.0
0.1	0.099465382626808286232	0.099465382626808285898
0.2	0.19542444130562717342	0.19542444130562716451
0.3	0.28347034959096065184	0.28347034959096048526
0.4	0.35803792743390487627	0.35803792743390483786
0.5	0.41218031767503203670	0.41218031767503200826
0.6	0.43730851209372215398	0.43730851209372205668
0.7	0.42288806856880006954	0.42288806856879998460
0.8	0.35608654855879481674	0.35608654855879479280
0.9	0.22136428000412546974	0.22136428000412540564
1.0	0.0	$1.24053E - 20$

Tablo 7.4. Örnek 7.2 için VPM, ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

x	VPM [85]	ADM [84]	HAM[86]	[RKHSM]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	$8.55607E - 13$	$1.23082E - 13$	$5.39291E - 14$	$3.34E - 19$
0.2	$9.94041E - 12$	$3.7792E - 13$	$4.85167E - 14$	$8.91E - 18$
0.3	$3.52244E - 11$	$2.37421E - 13$	$3.92464E - 14$	$1.6658E - 16$
0.4	$7.3224E - 10$	$3.62099E - 13$	$2.21489E - 14$	$3.841E - 17$
0.5	$1.08769E - 10$	$9.39249E - 14$	$3.84137E - 14$	$2.844E - 17$
0.6	$1.29035E - 10$	$4.82947E - 13$	$2.10831E - 13$	$9.730E - 17$
0.7	$1.51466E - 10$	$1.09135E - 13$	$1.99785E - 13$	$8.494E - 17$
0.8	$2.717974E - 10$	$1.64868E - 14$	$3.29736E - 13$	$2.394E - 17$
0.9	$7.48179E - 10$	$7.25975E - 13$	$1.77622E - 12$	$6.410E - 17$
1.0	$2.1729E - 09$	$4.54747E - 13$	$1.65159E - 12$	$1.24053E - 20$



Şekil 7.3. Örnek 7.2 için analitik çözümü ve RKHSM çözümünü gösteren grafik



Şekil 7.4. Örnek 7.2 için ADM, VPM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması.

Örnek 7.3. Son olarak lineer olmayan yedinci mertebeden sınır değer problemini

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(7)}(x) = u(x)u'(x) + e^{-2x} (2 + e^x (x - 8) - 3x + x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -2, \quad u''(0) = 3, \quad u^{(3)}(0) = -4, \\ u(1) = 0, \quad u'(1) = \frac{-1}{e}, \quad u''(1) = \frac{2}{e}, \end{array} \right. \quad (7.16)$$

göz önüne alalım. (7.16)'nın analitik çözümü [84]:

$$u(x) = (1 - x)e^{-x},$$

ile verilir.

(7.16) sınır şartları homogen hale getirilirse

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(7)}(x) - (-2 + 3x - 2x^2 + 4x^3 \left(\frac{6}{e} - 2\right) + 5x^4 \left(4 - \frac{11}{e}\right) + 6x^5 \left(\frac{5}{e} - \frac{11}{6}\right)) v(x) \\ - \left(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^4 \left(\frac{6}{e} - 2\right) + x^5 \left(4 - \frac{11}{e}\right) + x^6 \left(\frac{5}{e} - \frac{11}{6}\right)\right) v'(x) \\ = \left[\begin{array}{l} \left(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^4 \left(\frac{6}{e} - 2\right) + x^5 \left(4 - \frac{11}{e}\right) + x^6 \left(\frac{5}{e} - \frac{11}{6}\right)\right) \\ \left(-2 + 3x - 2x^2 + 4x^3 \left(\frac{6}{e} - 2\right) + 5x^4 \left(4 - \frac{11}{e}\right) + 6x^5 \left(\frac{5}{e} - \frac{11}{6}\right)\right) \end{array} \right] \\ + v(x)v'(x) + e^{-2x} (2 + e^x (x - 8) - 3x + x^2), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \\ v(0) = v'(0) = v''(0) = v^{(3)}(0) = 0, \\ v(1) = v'(1) = v''(1) = 0, \end{array} \right.$$

bulunur. Bunun için

$$u(x) = v(x) + 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^4 \left(\frac{6}{e} - 2\right) + x^5 \left(4 - \frac{11}{e}\right) + x^6 \left(\frac{5}{e} - \frac{11}{6}\right),$$

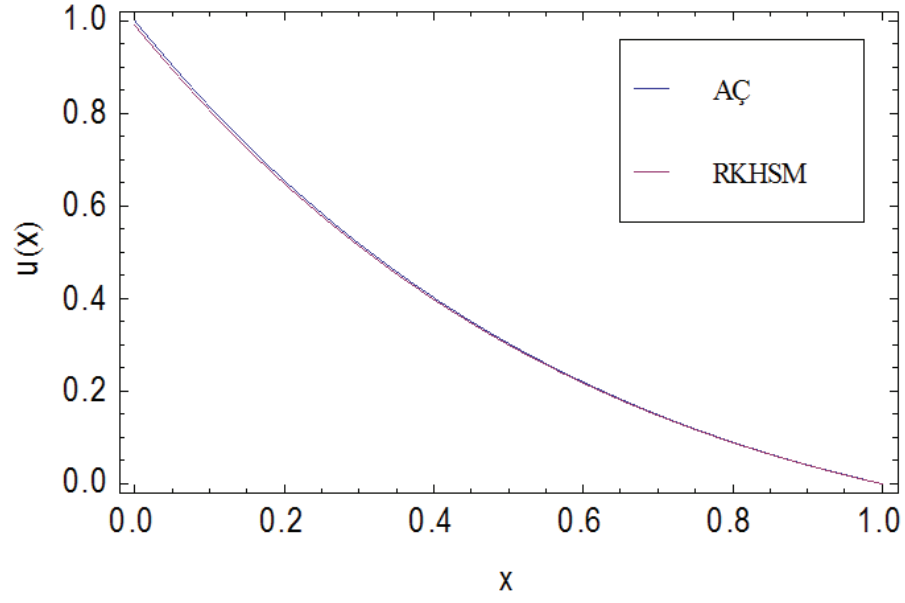
dönüşümü kullanıldı.

Tablo 7.5. Örnek 7.3 için elde edilen sayısal sonuçlar

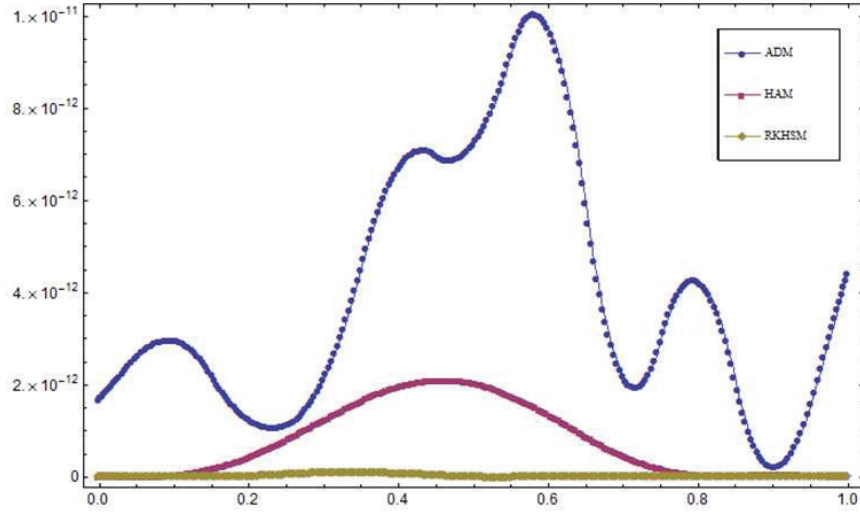
x	AÇ	YÇ	MH
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	0.81435367623236361584	0.81435367623236697064	3.35480×10^{-15}
0.2	0.65498460246238548694	0.65498460246237032242	1.516452×10^{-14}
0.3	0.51857275447720250625	0.51857275447711724998	8.525627×10^{-14}
0.4	0.40219202762138358044	0.40219202762145521926	7.163882×10^{-14}
0.5	0.30326532985631671180	0.30326532985631655134	1.6046×10^{-16}
0.6	0.21952465443761057305	0.21952465443760682026	3.75279×10^{-15}
0.7	0.14897559113742285441	0.14897559113743255406	9.69965×10^{-15}
0.8	0.089865792823444318286	0.089865792823449635588	5.317302×10^{-15}
0.9	0.040656965974059911188	0.040656965974059021714	8.89474×10^{-16}
1.0	0.0	2.708848×10^{-22}	2.708848×10^{-22}

Tablo 7.6. Örnek 7.3 için ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

x	ADM [84]	HAM [86]	[RKHSM]
0.0	$1.67932E - 12$	0.0	0.0
0.1	$2.96696E - 12$	$4.15223E - 14$	$3.3548E - 15$
0.2	$1.26055E - 12$	$4.18332E - 13$	$1.516452E - 14$
0.3	$2.10898E - 12$	$1.21736E - 12$	$8.525627E - 14$
0.4	$6.68926E - 12$	$1.95471E - 12$	$7.163882E - 14$
0.5	$7.21923E - 12$	$2.03731E - 12$	$1.6046E - 16$
0.6	$9.75339E - 12$	$1.37063E - 12$	$3.75279E - 15$
0.7	$2.19552E - 12$	$4.66988E - 13$	$9.69965E - 15$
0.8	$4.24917E - 12$	$4.8378E - 14$	$5.317302E - 15$
0.9	$2.27311E - 13$	$6.00561E - 14$	$8.89474E - 16$
1.0	$4.42298E - 12$	$1.29172E - 15$	$2.708848E - 22$



Şekil 7.5. Örnek 7.3 için analitik çözüm (AÇ) ve RKHSM çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 7.6. Örnek 7.3 için ADM, HAM ve RKHSM ile elde edilen mutlak hataların karşılaştırılması

Hatırlatma 7.2. Bu çalışmada $[0, 1]$ aralığında 36 nokta seçilerek RKHSM uygulandı. Tablolarda $\{(x_i) : x_i = i, i = 0.0, 0.1, \dots, 1.0\}$ noktalarında $|u(x, t) - u_n(x, t)|$ mutlak hatalar hesaplandı. VIM [82], HPM [83], ADM [84], VPM [85] ve HAM [86] ile elde edilen sonuçlarla çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu karşılaştırıldı. Tablolardan ve grafiklerden bu karşılaştırmalar görülebilir.

7.4. Sonuç

Bu bölümde inşaat mühendisliğinde kiriş-kolon teorisinde ve kimyasal tepkimelerde ortaya çıkan yedinci mertebeden sınır-değer problemlerinin çözümü için çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemini kullandık. Yedinci basamaktan problemler için üretilen çekirdek fonksiyonu ilk kez bu çalışmada hesaplandı. Bir lineer ve iki lineer olmayan problem göz önüne alındı. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan VIM [82], HPM [83], ADM [84], VPM [85] ve HAM [86] ile $0 \leq x \leq 1$ aralığında karşılaştırıldı. Bu karşılaştırmalar için Tablo 7.2, 7.4 ve 7.6'ya bakılabilir. Tablo 7.1, 7.3 ve 7.5'te ise $0 \leq x \leq 1$ aralığında analitik çözüm, yaklaşık çözüm, mutlak hata ve bağıl hata verildi. Şekil 7.1, 7.3 ve 7.5 ile sırasıyla Örnek 7.1, 7.2 ve 7.3 için $0 \leq x \leq 1$ aralığında analitik çözüm ve yaklaşık çözüm arasında karşılaştırma yapıldı. Bu şekillerden de görüldüğü gibi analitik çözüm ve RKHSM ile elde edilen yaklaşık çözüm ayırt edilememektedir. Bu ise yöntemin güvenilir ve hassas bir yaklaşım olduğunu gösterir. Şekil 7.2, 7.4 ve 7.6'da sırasıyla Örnek 7.1 için VIM, HPM, RKHSM; Örnek 7.2 için ADM, VPM, HAM, RKHSM ve Örnek 7.3 için ADM, HAM, RKHSM yöntemleriyle elde edilen mutlak hataların grafikleri çizildi. Görüldüğü gibi RKHSM ile diğer yarı analitik yöntemlere göre çok daha iyi sonuçlar bulundu. Mutlak hatalar Örnek 7.1 için 10^{-10} , Örnek 7.2 için 10^{-17} ve Örnek 7.3 için 10^{-15} civarındadır. Bu değerler ise yaklaşık bir yöntem için iyi sonuçlardır.

8. BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

Doğadaki fiziksel olayların matematiksel modellerle ifade edilerek yaklaşık ve analitik çözümlerinin bulunması önemlidir. Çünkü bu çözümler yardımıyla modellenen olay hakkında daha detaylı bilgiler elde edilebilir. Bu nedenle lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem ve sistemlerin çözümlerinin bulunması fen ve mühendislikte önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda bilim adamları başlangıç ve sınır şartlı kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için pek çok yöntem geliştirdiler.

Bu tezde dört farklı problem çekirdek üreten uzay yöntemi ile çözüldü. Bu problemler mekanik iletim sistemini ifade etmek için kullanılan başlangıç ve sınır şartlı sine-Gordon (SG) denklemi, yanma olayını modellemek için kullanılan Bratu problemi, sınırsız iki düzlem levha arasında sıkışan MHD akışkanı tanımlamak için kullanılan dördüncü mertebeden başlangıç ve sınır şartlı lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem ve inşaat mühendisliğinde kiriş-kolon teorisinde ortaya çıkan yedinci basamaktan sınır-değer problemleridir. Her bir problem için kullanılan lineer operatörün sınırlı olduğu ve bulunan sonuçların yakınsak olduğu teorik ve sayısal olarak gösterildi. Ayrıca göz önüne alınan problemler daha önce literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu problemlerin literatürde yarı-analitik yöntem olarak adlandırılan ADM, HPM, VIM, DTM ve HAM yöntemleriyle elde edilmiş sonuçları mevcuttur, bizim çekirdek üreten Hilbert uzayı metodu ile elde ettiğimiz sonuçlar daha hassas ve güvenilirlerdir. Yedinci basamaktan denklemler için üretilen çekirdek ilk kez bu çalışmada bulunmuştur.

Ayrıca lineer olmayan denklem veya sistemler yarı-analitik metotlarla çözümlerken denklemdaki lineer olmayan terimin sayısı ve lineer olmayanların kuvvetliliği çözüm sırasında bazı zorlukların ortaya çıkmasına ve hesaplamaların karmaşık olmasına neden olmaktadır. RKHSM yardımıyla bu tür zorluklarla karşılaşmadan yakınsak ve hassas sonuçlara ulaşmak mümkündür. Kullandığımız yöntemin uygulanabilir olması için başlangıç ve sınır şartlarının homogen olması gerekir. Bunu sağlayacak genel bir fonksiyon bu çalışmada elde edildi.

Yarı analitik yöntemler özellikle başlangıç şartlı problemlere uygulanmasına rağmen çekirdek üreten uzay yöntemi ile başlangıç, sınır ve integral şartlı problemleri çözmek mümkündür. Ayrıca çekirdek üreten uzay yöntemi ile adi, kısmi, fark, kesirli, inverse problemleri ve integral denklemlerini çözmek mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1] **Bergman, S.**, 1922. Über die entwicklung der harmonischen funcktionen der Ebene und des raumes nach orthogonal funcktionen, Math. Ann. **86**, 238-271.
- [2] **Bergman, S.**, 1930. Über Kurvenintegale von Funktionen zweier komplexen Veranderlichen, die Differentialgleichungen befriedigen, Math. Z. **32**, 386-406.
- [3] **Bergman, S.**, 1936. Über ein verfahren zur konstruktion der näherungslösungs lösungen der gleichung $\Delta u + \tau^2 u = 0$, Prikl. Mat. Meh., 97-107.
- [4] **Bergman, S.**, 1937. Zur theorie der funktion, die eine linear partielle diffeerentialgleichung befriedigen, Mat. Sb. **44**, 1169-1198.
- [5] **Bergman, S.**, 1937. Zur theorie der funktion, die eine linear partielle diffeerentialgleichung befriedigen, Soviet. Math. Dokl. **15**, 227-230.
- [6] **Bergman, S.**, 1937. Sur un lien entre lal theorie des equations aux derives partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe, C.R. Acad. Sci., Paris **205**, 1198-1200.
- [7] **Bergman, S.**, 1940. The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation, Duke Math. J. **6**, 537-561.
- [8] **Cui, M., Lin, Y.**, 2009. Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space, Nova Science Pub. Inc.
- [9] **Mercer, J.**, 1909. Function of positive and negative type and their connection with the theory of integral equation. Philos. Trans. Roy. Soe. London Ser. A **209**, 415-446.
- [10] **Aronszajn, N.**, 1950. Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337-404.
- [11] **Geng, F., Cui, M.**, 2007. Solving a nonlinear system of second order boundary value problems. J. Math. Anal. Appl., **327(2)**, 1167–1181.
- [12] **Yao, H., Cui, M.**, **2007**. A new algorithm for a class of singular boundary value problems. Appl. Math. Comput., **186(2)**, 1183–1191.

- [13] **Wang, W., Cui, M., Han, B.**, 2008. A new method for solving a class of singular two-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, **206(2)**, 721–727.
- [14] **Zhou, Y., Lin, Y., Cui, M.**, 2007. An efficient computational method for second order boundary value problems of nonlinear differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **194(2)**, 354–365.
- [15] **Lü, X., Cui, M.**, 2008. Analytic solutions to a class of nonlinear infinite delay-differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **343(2)**, 724–732.
- [16] **Wang, Y., Chao, L.**, 2008. Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients. *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, **29(1)**, 129–137.
- [17] **Li, F., Cui, M.**, 2009. A best approximation for the solution of one-dimensional variable-coefficient Burgers equation. *Numer Methods Partial Differential Equations*, **25(6)**, 1353–1365.
- [18] **Zhou, S., Cui, M.**, 2009. Approximate solution for a variable-coefficient semilinear heat equation with nonlocal boundary conditions. *Int. J. Comput. Math.*, **86(12)**, 2248–2258.
- [19] **Geng, F., Cui, M.**, 2009. New method based on the HPM and RKHSM for solving forced Duffing equations with integral boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.*, **233(2)**, 165–172.
- [20] **Du, J., Cui, M.**, 2010. Solving the forced Duffing equation with integral boundary conditions in the reproducing kernel space. *Int. J. Comput. Math.*, **87(9)**, 2088–2100.
- [21] **Lv, X., Cui, M.**, 2010. An efficient computational method for linear fifth order two-point boundary value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, **234(5)**, 1551–1558.
- [22] **Cui, M., Du, H.**, 2006. Representation of exact solution for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Appl. Math. Comput.*, **182(2)**, 1795–1802.
- [23] **Inc., M., Akgül, A.**, 2013. The reproducing kernel Hilbert space method for solving Troesch problem, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, **14**, 19–27.

- [24] **Inc., M., Akgül, A., Geng, F.**, 2014. Reproducing kernel Hilbert space method for solving Bratu's problem, B. Malays. Math. Sci. Soc., in press.
- [25] **Inc., M., Akgül, A., Kilicman, A.**, 2012. Explicit solution of telegraph equation based on reproducing kernel method, J. Funct. Space Appl., Article ID 984682, 23 pages.
- [26] **Inc., M., Akgül, A.**, 2014. Approximate solutions for MHD squeezing fluid flow by a novel method, Boundary Value Problems, 17 pages.
- [27] **Inc., M., Akgül, A., Kilicman, A.**, 2013. A new application of the reproducing kernel Hilbert space method to solve MHD Jeffery-Hamel flows problem in non-parallel walls, Abstr. Appl. Anal., Article ID 239454, 12 pages.
- [28] **Inc., M., Akgül, A., Kilicman, A.**, 2013. On solving KdV equation using reproducing kernel Hilbert space method. Abstr. Appl. Anal., Article ID 578942, 11 pages.
- [29] **Wu, B., Li, X.**, 2010. Iterative reproducing kernel method for nonlinear oscillator with discontinuity. Appl. Math. Lett., **23(10)**, 1301–1304.
- [30] **Geng, F., Cui, M.**, 2012. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. Appl. Math. Lett., **25(5)**, 818–823.
- [31] **Jiang, W., Lin, Y.**, 2011. Representation of exact solution for the time fractional telegraph equation in the reproducing kernel space. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **16(9)**, 3639–3645.
- [32] **Yang, L. H., Shen, J. H., Wang, Y.**, 2012. The reproducing kernel method for solving the system of the linear Volterra integral equations with variable coefficients. J. Comput. Appl. Math., **236(9)**, 2398–2405.
- [33] **Du, H., Shen, J.**, 2008. Reproducing kernel method of solving singular integral equation with cosecant kernel. J. Math. Anal. Appl., **348(1)**, 308–314.
- [34] **Barbieri, E., Meo, M.**, 2012. A fast object-oriented Matlab implementation of the reproducing kernel particle method. Comput. Mech., **49(5)**, 581–602.
- [35] **Wu, B., Li, X.**, 2010. Application of reproducing kernel method to third order three-point boundary value problems. Appl. Math. Comput., **217(7)**, 3425–3428.

- [36] **Chen, Z., Chen, Z.J.**, 2008. The exact solution of system of linear operator equations in reproducing kernel spaces. *Appl. Math. Comput.*, **203(1)**, 56–61.
- [37] **Debnath, L., Mikusinski, P.**, 2005. *Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, London.
- [38] **Şuhubi, E.S.**, 2001. *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, **38**, İstanbul.
- [39] **McDonald, J. N., Weiss, N. A.**, 2013. *A Course in Real Analysis*, Boston, Mass. ; Amsterdam : Academic Press/Elsevier.
- [40] **Boyd, J. P.**, 2003. Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, *Appl. Math. Comput.*, **143**, 189–200.
- [41] **Banks, H. T.**, 2012. *A Functional Analysis Framework for Modeling, Estimation and Control in Science and Engineering*, North Carolina State University, Raleigh, USA.
- [42] **Eidelman, Y., Milman, V., Tzolomitis, A.**, 2004. *Functional Analysis, An Introduction*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [43] **Okutmuştur, B.**, 2005. *Reproducing Kernel Hilbert Space*, Bilkent Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
- [44] **Inc., M., Akgül, A., Kilicman, A.**, 2013. Numerical solutions of the second-order one-dimensional telegraph equation based on reproducing kernel Hilbert space method. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 768963, 13 pages.
- [45] **Russell, J. S.**, 1844. Report on waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science , John Murray, London 311-390.
- [46] **Stokes, G. G.**, 1847. On the theory of oscillatory waves, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **8**: 441-473.
- [47] **Boussinesq, J.**, 1872. Theorie des ondes et des remous quise propagent le long d Run canal rectangularie horizontal, en communiquant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *J. Math. Pures Appl.* **17**, 55-108.

- [48] **Korteweg, D. J., Vries de, G.**, 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag.* **39**, 442-443.
- [49] **Ali, A. H. A.**, 1989. Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation , PhD Thesis, University College of North Wales, Bangor UK. 1-2.
- [50] **Knobel, R.**, 2000. An Introduction to the Mathematical Theory of Waves, American Mathematical Society, Institute for Advanced Study.
- [51] **Scott A.**, 1970. Active and nonlinear wave propagation in electronics, John Wiley and Sons.
- [52] **Polyanin, A. D., Zaitsev, V. Z.**, 2004. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla, USA.
- [53] **Rajaraman, R.**, 1982. Solitons and Instantons, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- [54] **Dehghan, M., Mohebbi, A.**, 2010. High-order solution of one-dimensional sine-Gordon equation using compact finite difference and DIRKN methods, *Mathematical and Computer Modelling*, **51**, 537–549.
- [55] **Khaliq, A. Q. M., Abukhodair, B.**, 2000. A predictor-corrector scheme for the sine-Gordon equation, *Numer Methods Partial Differential Equations* **16**, 133–146.
- [56] **Dehghan, M., Shokri, A.** 2008. A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using collocation and radial basis functions, *Numer Methods Partial Differential Equations*, **24**, 687–698.
- [57] **Yao, H.**, 2011. Reproducing kernel method for the solution of nonlinear hyperbolic telegraph equation with an integral condition, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **27(4)**, 867-886.
- [58] **Jiang, Z. W., Wang, R. H.**, 2012. Numerical solution of one-dimensional sine-Gordon equation using high accuracy multiquadratic quasi-interpolation, *App. Math. Comput.*, **218**, 7711-7716.

- [59] **Sari, M., Gürarslan, G.**, 2011. A sixth-order compact finite difference method for the one-dimensional sine-Gordon equation, *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.*, **27**, 1126-1138.
- [60] **Lu, J.**, 2009. An analytical approach to the sine-Gordon equation using the modified homotopy perturbation method, *Computers and Mathematics with Applications* **58**, 2313-2319.
- [61] **Kaya, D.**, 2003. A numerical solution of the sine-Gordon equation using the modified decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, **143**, 309-317.
- [62] **Abbasbandy, S., Hashemi, M. S., Chein-Shan L.**, 2011. The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **16**, 4238-4249.
- [63] **Wazwaz, A. M.**, 2005. Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations. *Appl. Math. Comput.*, **166**, 652-663.
- [64] **Aregbesola, Y. A. S., Odejide, S. A.**, 2005. A note on the Bratu problem. *Math. Sci. Res. J.*, **9**, 236-243.
- [65] **Deeba, E., Khuri, S. A., Xie, S.**, 2000. An algorithm for solving boundary value problems. *J. Comput. Phys.*, **159**, 125-138.
- [66] **Khuri, S. A.**, 2004. A new approach to Bratu problem. *Appl. Math. Comput.*, **147**, 131-136.
- [67] **Syam, M. I., Hamdan, A.**, 2006. An efficient method for solving Bratu equations. *Appl. Math. Comput.*, **176(2)**, 704-713.
- [68] **Li, S., Liao, S. J.**, 2005. An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem. *Appl. Math. Comput.*, **169(2)**, 854-865.
- [69] **Caglar, H., Caglar, N., Özer, M., Valaristos, A., Anagnostopoulos, A. N.**, 2010. B-spline method for solving Bratu problem. *Int. J. Comput. Math.*, **87(8)**, 1885-1891.
- [70] **Jalilian, R.**, 2010. Non-polynomial spline method for solving Bratu problem. *Comput. Phys. Comm.*, **181(11)**, 1868-1872.

- [71] **Papanastasiou, T. C., Georgiou G. C., Alexandrou, A. N.**, 1994. Viscous Fluid Flow, CRC Press.
- [72] **Stefa, W. F., Elco, R. A.**, 1962. Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel rotating disks, J. Fluid Mech. **13**, 21-32.
- [73] **Ghori, Q. K., Ahmed, M., Siddiqui, A. M.**, 2007. Application of homotopy perturbation method to squeezing flow of a Newtonian fluid, Int. J. Nonlinear Sci. Num. Simul. **8**, 179-184.
- [74] **Ran, X. J., Zhu Q. Y., Li, Y.**, 2009. An explicit series solution of the squeezing flow between two infinite plates by means of the homotopy analysis method, Commun. Nonlinear Sci. Num. Sim., **14**, 119-132.
- [75] **Grimm, R. G.**, 1976. Squeezing flows of Newtonian liquid films an analysis include the fluid inertia, Appl. Sci. Res. **32**, 149-146.
- [76] **Kamiyama, S.**, 1969. Inertia effects in MHD hydrostatic thrust bearing, Trans. ASME, J. Lubrication Tech. **91**, 589-596.
- [77] **Hamza, E. A.**, 1988. The magnetohydrodynamic squeeze film, ASME, J. Tribology **110**, 375-377.
- [78] **Bhattacharya, S., Pal, A.**, 1997. Unsteady MHD squeezing flow between two parallel rotating discs, Mech. Research Commun. **24**, 615-623.
- [79] **Idrees, M., Islam, S., Sirajul Haq S., Islam, S.**, 2010. Application of optimal homotopy asymptotic method to squeezing flow, Computers and Mathematics with Applications, **59**, 3858-3866.
- [80] **Islam, S., Ullah, M., Zaman, G., Idrees, M.**, 2011. Approximate solutions to MHD squeezing fluid flow, J. Appl. Math. & Informatics **29**, 1081-1096.
- [81] **Mohyuddin M. R., Gotz, T.**, 2005. Resonance behavior of viscoelastic fluid in Poiseuille flow in the presence of a transversal magnetic field, Int. J. Numer. Meth. Fluid **49**, 837-847.
- [82] **Siddiqi, S. S., Akram, G., Iftikhar, M.**, 2012. Solution of seventh-order boundary value problems by variational iteration technique, App. Math. Sci., **6**, 4663-4672.

- [83] **Mabood, F., Idrees, M.**, 2013. Homotopy perturbation method and seventh-order boundary value problems, International Journal of Applied Mathematical Research, **2(1)**, 70-75.
- [84] **Siddiqi, S. S., Iftikhar, M.**, 2013. Solutions of seventh-order boundary value problems using Adomian decomposition method, Arxiv: 1301.3603 [math.NA] 16 Jan.
- [85] **Siddiqi, S. S., Iftikhar, M.**, 2013. Solutions of seventh-order boundary value problems by variation of parameters method, Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology **5(1)**, 176-179.
- [86] **Siddiqi, S. S., Iftikhar, M.**, 2013. Numerical solution of higher order boundary value problems, Abstr. Appl. Anal., Article ID 427521, 12 pages.
- [87] **Inc., M., Akgül, A.**, 2014. Numerical solution of seventh order boundary-value problems by a novel method, Abstr. Appl. Anal., Article ID 745287, 9 pages.

ÖZGEÇMİŞ

1983 Mardin doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Hatay ili İskenderun ilçesinde tamamladım. 2001 yılında Dicle Üniversitesi Siirt Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliğini kazandım. Bir dönem burada okuduktan sonra Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği bölümüne geçiş yaptım. 2005 yılında mezun olup Diyarbakır ili Silvan ilçesine kadrolu öğretmen olarak atandım. 2007 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisansa başladım. 2010 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında doktora başladım. 01.09.2012–01.12.2013 tarihleri arasında Amerika’da Missouri University of Science and Technology ve Texas A&M University-Kingsville üniversitelerinde çekirdek üreten Hilbert uzayı yöntemi üzerine araştırmalarda bulundum. Halen Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesinde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.