

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Murat KARAKAŞ

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Mikail ET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Murat KARAKAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez,15/08/2008..... tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun...../...../..... tarih ve..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e ve yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Murat KARAKAŞ

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
GİRİŞ	IV
1. Temel Tanım ve Teoremler	1
2. Fuzzy Kümeler	6
2.1 Fuzzy Küme Kavramı	6
2.2 De Morgan Kuralları	8
2.3 Konvekslik	10
2.4 Fuzzy Sayısı	12
2.4.1 Fuzzy Sayı Kavramı	12
2.5 Fuzzy Sayılarında Aritmetik İşlemler	13
2.5.1 Fuzzy Sayılarında Toplama İşlemi	13
2.5.2 Fuzzy Sayılarında Çıkarma İşlemi	15
2.5.3 Fuzzy Sayılarında Çarpma İşlemi	16
2.5.4 Fuzzy Sayılarında Bölme İşlemi	16
2.6 Fuzzy Sayı Dizileri	16
3. Fuzzy Topolojik Uzaylar	22
3.1 Fuzzy Küme Dizileri	24
3.2 Fuzzy Sürekli Fonksiyonlar	25
3.3 Fuzzy Kompakt Uzaylar	29
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Murat KARAKAŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa: 34

Bu tez üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, fuzzy küme kavramı ve bu kümelerin bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra, fuzzy sayısı tanımlanmış, fuzzy sayılarda aritmetik işlemler ve fuzzy sayı dizileri incelenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında fuzzy topolojik uzay ve özellikleri incelenmiş, fuzzy küme dizilerinden bahsedilmiştir. İkinci kısımda, süreklilik kavramını genelleştirerek fuzzy sürekli fonksiyonlar açıklanmıştır. Son kısımda, fuzzy topolojiyi temel alarak oluşturulan kompakt fuzzy uzaylar anlatılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Fuzzy küme, Fuzzy sayısı, Fuzzy topolojik uzay.

ABSTRACT

Master's Thesis

FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Murat KARAKAŞ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Pages: 34

This thesis is arranged in three chapters.

In the first chapter, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters.

In the second chapter, we give the concept of fuzzy set and some properties of this sets. Then, we define fuzzy number and examine arithmetical operations of fuzzy numbers and sequences of fuzzy number.

In the first section of third chapter, fuzzy topological space and its properties are observed, sequences of fuzzy sets are mentioned. In the second section, we explain fuzzy continuous function by generalizing continuity. In the last section, we convince compact fuzzy spaces which is constructed by depending on fuzzy topology.

Key Words: Fuzzy set, Fuzzy number, Fuzzy topological space.

GİRİŞ

C.L.Chang[1], 1968 yılında Zadeh[2], tarafından ortaya konulan fuzzy kümeleri kullanarak fuzzy topolojik uzay kavramını tanımladı. Daha sonra Goguen[3], Ming and Ming[4], Warren[5], Wong[6], Lowen[7], Azad[8] gibi birçok araştırmacı tarafından geniş bir fuzzy topolojik uzay çalışması gerçekleştirildi. Chang[1], fuzzy topoloji kavramı ve açık küme, kapalı küme, bir kümenin içi, komşuluk, süreklilik ve kompaktlık gibi en temel kavramları açıkladı ve adi topolojinin sonuçlarına benzer birçok sonuç saptadı. Ancak bir noktanın tam bulanıklığının eksikliğinden dolayı fuzzy topolojide bir noktada yakınsaklık ve süreklilik gibi özelliklerin çalışılmasında bir boşluk oluştu. C.K.Wang[9], Zadeh'in singleton kümesine dayanarak fuzzy noktalar kavramını ortaya koydu ve bu problemi çözdü.

Genel topolojinin komşuluk sisteminin sonuçları fuzzy topolojik uzaylarda, bu komşuluk sisteminde bulunan sonuçları yansıtamadı. Bunu düzeltmek için Ming ve Ming[4] adi noktaların, fuzzy noktanın özel durumları olarak verildiği bir yöntemle bir fuzzy nokta gösterdi. Aynı zamanda fuzzy noktalar ve fuzzy kümeler arasındaki yarım ilişki ve genel topolojideki komşuluk sistemi kavramına benzer bir Q-komşuluk sistemi tanımlandı. Komşuluk sistemi, fuzzy topolojiyi tanımlamaya eşdeğer bir metod oldu. R.H.Wareen[5], bir noktanın komşuluk sisteminin yardımıyla fuzzy topolojik uzaylar arasında sürekliliği tanımladı. Nehad N. Marsi[10], adi noktaların fuzzy komşuluk sistemine dayanarak tanımlanan fuzzy komşuluk uzayını çalıştı. 1981 yılında K.K.Azad[8] fuzzy topolojik uzaylarda fuzzy sürekliliğin daha zayıf bazı yapılarını ortaya koydu. Fuzzy yarı açık, fuzzy yarı kapalı, düzgün açık ve düzgün kapalı kümeleri tanıttı ve bunu fuzzy kümelerde yarı sürekli, yarı açık, yarı kapalı, hemen hemen sürekli ve zayıf sürekli dönüşümlere genelleştirdi. Aynı sene içinde fuzzy topolojik vektör uzaylar fikrini ortaya çıkardı. 1984 yılında bu konu üzerinde çalışmalarına devam etti ve fuzzy yarı normlu, fuzzy normlu, ve fuzzy bornological uzayları çalıştı.

1989 yılında A.P.Shostak[11] fuzzy topoloji sınıfıyla ilgili sonuçların temel fikir ve kavramlarını çalıştı.

Ayrılma aksiyomları, kompaktlık, metrize edilebilme, lineer bağımlı uzaylar ve fuzzy olasılığın bazı önemli özellikleri tartışıldı. K.C.Chattopadhyaya, R.N.Hazra ve S.K.Samanta[12]

fuzzy altkümelerin açıklığının derecesi yardımıyla topolojiyi tanımladı. Yazarlar, derece fonksiyonunun tanımını değiştirdi ve fuzzy topolojik uzayların alt uzaylarını çalıştı.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. Bir kümenin elemanlarının kendisi küme ise, bu kümeler kümesine kümeler ailesi veya kümeler sınıfı denir. Genellikle A, B gibi büyük harflerle gösterilir [13].

Tanım 1.2. $X \neq \emptyset$ kümesi, vektör uzayı, metrik uzay veya topolojik uzay gibi herhangi bir matematik yapıya sahipse bu kümeye uzay ve elemanlarına da nokta adı verilir [13].

Tanım 1.3. X bir küme, $\{A_i\}_{i \in I}$ de X 'in bir alt kümeler ailesi olsun. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X 'in bir örtüsü denir [13].

Tanım 1.4. X bir küme ve τ da $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa τ ya X üzerinde bir topoloji(topolojik yapı) denir:

- $X, \emptyset \in \tau$
- τ 'da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ 'ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ 'dır.
- τ 'da alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ 'ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i \in J} \subset \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ 'dır.

Tanım 1.5. τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X, τ) ikilisine topolojik uzay, X kümesinin her elemanına topolojik uzayın bir noktası denir [13].

Tanım 1.6. τ 'nın her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir açık küme denir [13].

Tanım 1.7. X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre kapalı küme denir. Yani $F \subset X$ kapalı $\Leftrightarrow F^c \in \tau$ (açık) dır [13].

Örnek 1.1. X herhangi bir küme olsun. $\tau = \{\emptyset, X\}$ sınıfı X üzerinde topolojidir. $\tau = \{\emptyset, X\}$ topolojisine X üzerindeki kaba(indiskret) topoloji denir.

Örnek 1.2. X 'in $P(X)$ kuvvet kümesi X üzerinde bir topolojidir. $\tau = P(X)$ topolojisine X üzerindeki ince(diskret) topoloji denir.

Tanım 1.8. Verilmiş bir (X, τ) topolojik uzayı için bu uzayı doğuran bir d metriği varsa bu X topolojik uzayına metrikleşebilir denir [13].

Örnek 1.3. Her $\tau = P(X)$ topolojik uzayı doğuran $d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ diskret metrik olduğundan diskret topolojik uzay metrize edilebilirdir.

Tanım 1.9. X topolojik uzayının bir noktası x olsun. x noktasını içeren bir U açık altkümesinin her N üst kümesine x noktasının komşuluğu(civarı) denir [13]. Sembolik olarak kısaca; $N, x \in X$ in komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists U \subset X$ açık : $x \in U \subset N$ şeklinde ifade ederiz.

x noktasını içeren U açık altkümesine de x noktasının açık komşuluğu denir.

Örnek 1.4. $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topolojiyi alalım. $\delta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $x \in U =]x - \delta, x + \delta[$ açık aralığı, x noktasının açık komşuluğu ve $x \in N = [x - \delta, x + \delta] \supset U$ da x noktasının bir komşuluğudur.

Tanım 1.10. X topolojik uzay ve $A, N \subset X$ olsun. Eğer $A \subset U \subset N$ koşulunu sağlayan bir U açık kümesi varsa N kümesine A kümesinin komşuluğu denir [13].

Teorem 1.1. X topolojik uzayının bir A altkümesinin açık olması için gerek ve yeter şart kendi içindeki her noktanın komşuluğu olmasıdır [13].

Tanım 1.11. Herhangi bir $x \in X$ için, x noktasının tüm komşuluklarının sınıfını $N(x)$ ile gösterelim; yani $N(x) = \{N \in P(X) \mid N, x \text{ in komşuluğu}\}$ olsun. $N(x)$ sınıfına x noktasının X topolojik uzayına göre komşuluklar ailesi denir [13].

Tanım 1.12. X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [1]. X topolojik uzayının tüm kapalı

kümelerinin sınıfı olan K 'nın A yı kapsayan elemanlarının kümesi $K^A = \{F \in K \mid A \subset F\}$ olduğuna göre $\overline{A} = \bigcap_{F \in K^A} F$ ve $A \subset \overline{A}$ dır.

Teorem 1.2. X topolojik uzayının bir A altkümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \overline{A}$ olmasıdır [13].

Tanım 1.13. X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tüm açık altkümelerinin birleşimine A kümesinin içi denir ve A° ile gösterilir. X topolojik uzayının tüm açık altkümelerinin sınıfı olan τ nun A tarafından kapsanan elemanlarının kümesi $\tau^A = \{W \in \tau \mid W \subset A\}$ olduğuna göre $A^\circ = \bigcup \{W \mid W \in \tau^A\}$ dır.

Teorem 1.3. X topolojik uzayının A gibi bir altkümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $A = A^\circ$ olmasıdır [13].

Tanım 1.14. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A° kümesinin noktalarına A kümesinin iç noktaları denir [13].

Tanım 1.15. (X, τ) ve (X', τ') herhangi iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow X'$ bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. X' uzayında $f(x_o)$ ın her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde, X uzayında x_o ın bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x_o noktasında τ ve τ' ye göre sürekli veya τ, τ' sürekli ya da kısaca süreklidir denir [13].

Teorem 1.4. $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ fonksiyonunun $x_o \in X$ de sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall N' \in \mathcal{N}(f(x_o))$ için $f^{-1}(N') \in \mathcal{N}(x_o)$ olmasıdır [13].

Tanım 1.16. X ve X' topolojik uzayları arasındaki f fonksiyonu bijektif(yani 1:1 ve örten), sürekli ve f^{-1} tersi de sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm(topolojik dönüşüm) denir. Bu halde X ve X' uzaylarına homeomorfiktirler(topolojik eşitler) denir [13].

Teorem 1.5. $f : X \rightarrow X'$ bijektif bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- f homeomorfizmdir.

- f açık sürekli fonksiyondur.
- f kapalı sürekli fonksiyondur.
- $\forall A \subset X$ için $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Örnek 1.5. $] -1, +1[$ aralığı ile $\mathbb{R}$ homeomorftur. Gerçekten bu iki uzay arasında $y = f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ homeomorfizması vardır.

Tanım 1.17. Bir X topolojik uzayının sahip olduğu bir özellik, X uzayının homeomorfik olduğu tüm uzaylarda da var ise bu özelliğe topolojik özellik denir [13].

Tanım 1.18. X bir topolojik uzay ve $\mathbb{N}$ de doğal sayılar kümesi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ şeklindeki her fonksiyona X uzayında bir nokta dizisi denir [13].

Tanım 1.19. X topolojik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x_o \in X$ olsun. x_o ın her N komşuluğuna karşılık $n \geq n_o$ olduğundan $x_n \in N$ olacak şekilde sadece N e bağlı bir $n_o \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ise, (x_n) dizisi x_o a yakınsıyor veya (x_n) dizisinin $n \rightarrow \infty$ için limiti x_o dır denir [13].

Tanım 1.20. X topolojik uzayının açık altkümelerinin bir sınıfı ρ olsun. Eğer $X = \bigcup_{G \in \rho} G$ ise ρ sınıfına X uzayının açık örtüsü denir. Eğer ρ nin bir altkütmesi X uzayını örterse bu altkümeye X in bir açık alt örtüsü denir [13].

Tanım 1.21. X topolojik uzayının her ρ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise X uzayına kompakt uzay denir. O halde sembolik olarak:

$$X \text{ uzayı kompakt} \Leftrightarrow \left(\forall \rho \subset \tau, X = \bigcup_{G \in \rho} G \right) (\exists H \subset \rho \text{ sonlu}) : \left(X = \bigcup_{H \in H} H \right)$$

$$X \text{ uzayı kompakt} \Leftrightarrow \left(\forall \rho = \{G_i\}_{i \in I} \subset \tau, X = \bigcup_{i \in I} G_i \right) (\exists J \subset I \text{ sonlu}) : \left(X = \bigcup_{i \in J} G_i \right)$$

yazarız.

Tanım 1.22. Bir A kümeler sınıfının sonlu altkümelerinin arakesiti boştan farklı ise, bu kümeler sınıfına sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir [13].

Örnek 1.6. X sonlu bir küme ise, X uzayı, üzerinde tanımlanabilen tüm topolojilere göre kompakt uzaydır.

2. FUZZY KÜMELER

2.1. FUZZY KÜME KAVRAMI :

χ , genel bir elemanı x ile gösterilmiş bir noktalar (nesneler) uzayı olsun. Buna göre $\chi = \{x\}$ olur.

χ 'de bir A fuzzy kümesi (sınıfı), χ 'deki her bir noktayı $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ üyelik (karakteristik) fonksiyonu ile karakterize edilir [2]. Burada $X_A(x)$ 'in değeri, A 'daki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre, $X_A(x)$ 'in 1 'e en yakın değeri, A 'da x 'in en yüksek üyelik derecesidir. A terimleri klasik anlamda küme olduğu zaman, üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 şeklinde iki değer alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya 0 olması x 'in A 'ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenir.

Örnek 2.1.1 $\chi, \mathbb{R}$ reel doğrusu olsun ve A da 1 'den çok daha büyük sayıların bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda, her ne kadar göreceli olsa da A 'nın doğru bir karakterizasyonu $\mathbb{R}$ 'de bir fonksiyon olarak $X_A(x)$ ile verilebilir. Böyle bir fonksiyonun gösterdiği değerler $X_A(0) = 0$; $X_A(1) = 0$; $X_A(5) = 0.01$; $X_A(10) = 0.2$; $X_A(100) = 0.95$; $X_A(500) = 1$ olabilir.

Şimdi fuzzy kümeleri ile ilgili bazı kavramları tanımlayalım. Bu tanımlar genelde klasik kümede bildiğimiz tanımların genelleştirilmesidir.

Bir fuzzy kümesinin boş olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonun χ üzerinde özdeş olarak sıfır olmasıdır.

A ve B fuzzy kümelerinin eşit olması (yani $A = B$ yazılması) için gerek ve yeter şart $\forall x \in \chi$ için $X_A(x) = X_B(x)$ olmasıdır (Bundan sonra, $\forall x \in \chi$ için $X_A(x) = X_B(x)$ yazmak yerine daha çok, benzer şey olan $X_A = X_B$ yazacağız).

Bir A fuzzy kümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve

$$X_{A'} = 1 - X_A$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik kümelerde olduğu gibi, kapsama kavramı fuzzy kümelerde merkezi bir rol oynar.

Bu kavram ve birleşim ile kesişim kavramlarıyla ilgili olan kavramlar aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1(Kapsama) A 'nın B 'de kapsanması (veya denk olarak, A 'nın B 'nin bir alt kümesi olması) için gerek ve yeter şart $X_A \leq X_B$ olmasıdır. Bu durum sembollerle de

$$A \subset B \Leftrightarrow X_A \leq X_B$$

şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.1.2(Birleşim) Sırasıyla, $X_A(x)$ ve $X_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümesinin birleşimi, üyelik fonksiyonu

$$X_C(x) = \max[X_A(x), X_B(x)], \quad x \in \chi \quad (1)$$

olan bir C fuzzy kümesidir. Bu işlem kısaca

$$X_C = X_A \vee X_B$$

şeklinde ifade edilir ve $C = A \cup B$ şeklinde yazılır [2].

A ve B 'nin birleşimi, A ve B 'nin her ikisini de kapsayan en küçük fuzzy kümedir. Daha kesin bir ifadeyle, eğer D , A ve B 'nin her ikisini de kapsayan herhangi bir fuzzy küme ise bu takdirde A ve B 'nin birleşimini de kapsar.

Bu tanım, (1) 'de verilen tanıma denktir.

Fuzzy kümelerin kesişimi kavramı da benzer yöntemle tanımlanabilir:

Tanım 2.1.3(Kesişim) Sırasıyla $X_A(x)$ ve $X_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümesinin kesişimi, üyelik fonksiyonu

$$X_C(x) = \min[X_A(x), X_B(x)], \quad x \in \chi$$

olan bir C fuzzy kümesidir. Bu işlem kısaca

$$X_C = X_A \wedge X_B$$

şeklinde ifade edilir ve $C = A \cap B$ şeklinde yazılır [2].

A ve B fuzzy kümelerinin kesişimleri hem A 'da hemde B 'de kapsanan en büyük fuzzy kümedir. Klasik kümelerde olduğu gibi eğer $A \cap B$ boş ise A ve B fuzzy kümeleri ayrıktır. $\mathbb{R}$ 'deki iki fuzzy kümenin kesişimi ve birleşimi Şekil-1'de gösterilmiştir. Birleşim kümesinin üyelik fonksiyonu 1 ve 2 eğri parçalarından; kesişim kümesinin üyelik fonksiyonu da 3 ve 4 parçalarından (koyu çizgiler) oluşur.

2.2. DE-MORGAN KURALLARI

Klasik kümelerde verilen bağıntıların birçoğu fuzzy kümeler için de sağlanır. Bunlardan birkaç tanesini sıralayalım.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$$

Üyelik fonksiyonunu göz önüne alarak bu bağıntıların sağlandığını kolayca gösterebiliriz.

$A = \chi$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in \chi$ için $X_A(x) = 1$ olmasıdır. Klasik kümelerde sağlanan $A \cap A' = \emptyset$ ve $A \cup A' = \chi$ özellikleri fuzzy kümelerde sağlanmaz. Yani

1. $A \cap A' \neq \emptyset$,

$$2. A \cup A' \neq \chi$$

dir.

Birleşim ve kesişim işlemlerine ilave olarak, fuzzy kümelerinin toplama ve çarpım işlemlerini tanımlayabiliriz:

Tanım 2.2.1(Cebirsel Çarpım) A ve B 'nin cebirsel çarpımı AB şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonuna bağlı olarak

$$X_{AB} = X_A X_B$$

şeklinde tanımlanır. Açıkça,

$$AB \subset A \cap B$$

dir [2].

Tanım 2.2.2(Cebirsel Toplam) A ve B 'nin cebirsel toplamı $A + B$ şeklinde gösterilir ve

$$X_{A+B} = X_A + X_B$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X_A + X_B$ toplamı 1 'e eşit veya daha küçüktür. Buna göre, cebirsel çarpıma benzememekle beraber cebirsel toplam sadece tüm x 'ler için $X_A(x) + X_B(x) \leq 1$ şartı sağlandığı zaman anlamlıdır [2].

Tanım 2.2.3(Mutlak Fark) A ve B 'nin mutlak farkı $|A - B|$ şeklinde gösterilir ve

$$X_{|A-B|} = |X_A - X_B|$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.2.4(Destek) A bir fuzzy kümesi olsun. A 'nın desteği, $\text{supp}(A)$, üyelik derecesi sıfır olmayan tüm noktaların kümesidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

Tanım 2.2.5(α - Kesiti) A bir fuzzy kümesi olsun ve $\alpha \in [0, 1]$ verilsin. A 'nın α -kesiti A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. KONVEKSLİK

Konvekslik düşüncesi, klasik kümelerdeki pek çok özelliğini koruyacak şekilde fuzzy kümelere kolaylıkla genişletilebilir.

Tanım 2.3.1(Konvekslik) χ , n boyutlu Öklid uzayı E^n ile gösterilsin. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $(0, 1]$ aralığındaki tüm α 'lar için

$$\Gamma_\alpha = \{x : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlı Γ_α kümelerinin konveks olmasıdır [4].

Konveksliğin diğer bir tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

A 'nın konveks olması için gerek yeter şart her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min[X_A(x_1), X_A(x_2)] \quad (2)$$

olmasıdır.

Yukarıdaki iki tanım denktir. A kümesi ilk tanımdaki anlamda konveks ve $\alpha = X_A(x_1) \leq X_A(x_2)$ olsun. Bu taktirde $x_2 \in \Gamma_\alpha$ 'dır. Γ_α konveks olduğundan $\lambda x_1 +$

$(1 - \lambda) x_2 \in \Gamma_\alpha$ 'dır. Böylece

$$X_A [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \alpha = X_A (x_1) = \min [X_A (x_1), X_A (x_2)]$$

dır.

Tersine, A ikinci tanımdaki anlamda konveks ve $\alpha = X_A (x_1)$ olsun. Γ_α kümesini $X_A (x_2) \geq X_A (x_1)$ eşitsizliğini sağlayan tüm x_2 noktalarının kümesi olarak düşünebiliriz.

(2) eşitsizliğinden dolayı, $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $(0 \leq \lambda \leq 1)$ biçimindeki her nokta Γ_α 'nin elemanıdır. Bu nedenle Γ_α konveks bir kümedir. Konveks fuzzy kümelerin temel bir özelliği aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 2.3.1. Eğer, A ve B konveks ise $A \cap B$ de konvekstir [2].

İspat. $C = A \cap B$ olsun. Bu takdirde,

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] = \min [X_A [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2], X_B [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2]]$$

olur. A ve B konveks fuzzy kümeler olduğundan

$$X_A [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_A (x_1), X_A (x_2)]$$

$$X_B [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_B (x_1), X_B (x_2)]$$

dır. Buradan

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [\min [X_A (x_1), X_A (x_2)], \min [X_B (x_1), X_B (x_2)]]$$

veya buna denk olarak

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [\min [X_A (x_1), X_B (x_1)], \min [X_A (x_2), X_B (x_2)]]$$

yazılabilir. Buna göre

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_C (x_1), X_C (x_2)]$$

olur.

2.4 FUZZY SAYISI

2.4.1. FUZZY SAYI KAVRAMI

Eğer bilgisayarları insanlar gibi düşünebilen makinalar durumuna getirmek istiyorsak gerçel sayıların günlük kullanımı önem kazanır. Günlük kullanımlarda 1000 kadar, yaklaşık -10 santigrad derece, saat 12 sularında gibi ifadelerle birer reel sayıyı açıklamaya çalışırız. Bu biçimdeki açıklamalarımız pratiktir, fakat biraz sisli, belirsiz ve kapalıdır. Bu tür sayılara fuzzy sayısı diyerek, yeni bir sayılar ailesine ulaşırlır. 8 dolaylarında dediğimizde 8 de olmayabilen bir gerçel sayılar topluluğu akla gelir. Böylece her bir fuzzy sayısı bir tek reel sayıyı kastetmek için kullanılır. Fuzzy kümeler ve fuzzy sayıları ile ilgili çalışmalar Kauffman ve Gupta[14], Goetschel ve Voxman[15], Dubois ve Prade[16], Vachnadze ve Markozashvili[17,18], Dijkman, Van Haeringen ve De Lange[19], tarafından ayrıntılı olarak verildi. Fuzzy sayıları farklı birkaç şekilde tanımlanabilir. Goetschel ve Voxman[15] fuzzy sayısının tanımını şöyle vermektedir.

Tanım 2.4.1 Bir X fuzzy sayısı $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ biçimindeki üyelik fonksiyonu olup aşağıdaki koşulları sağlar.

- a) X üst yarı süreklidir.
- b) Bir $[c, d]$ kapalı aralığı dışında $X(x) = 0$
- c) $c \leq a \leq b \leq d$ koşuluyla X fonksiyonun $[c, a]$ kapalı aralığı üzerinde artan, $[b, d]$ kapalı aralığı üzerinde azalan ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $X(x) = 1$ değerli olan a, b reel sayıları vardır [15].

Şekil 3' de 10 fuzzy sayısının bir kaba gösterimi verilmiştir. Doğal olarak 10 fuzzy sayısı için bir tek X fonksiyonu değil, fakat kişiden kişiye değişen birbirinden farklı X fonksiyonları vardır. Böylece her kişi için hem a, b, c, d değerleri, hem de grafiğin $[c, a]$ ve $[b, d]$ aralıkları üzerindeki şekiller farklı farklı olmaktadır.

2.5. FUZZY SAYILARINDA ARİTMETİK İŞLEMLER

2.5.1. Fuzzy Sayılarında Toplama işlemi:

$A, B \subset \mathbb{R}$ ise $\alpha \in [0, 1]$ için seviye kümeleri,

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

$$B^\alpha = \{x \in \chi : X_B(x) \geq \alpha\}$$

olsun

$A, B \subset \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$X_{A(+B)}(z) = \vee_{z=x+y} (X_A(x) \wedge X_B(y))$$

dır ya da $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} A^\alpha + B^\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]. \end{aligned}$$

Örnek 2.5.1. Üyelik fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$X_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -5 \\ x/3 + 5/3 & -5 \leq x \leq -2 \\ -x/3 + 1/3 & -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$X_B(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ x/7 + 3/7 & -3 \leq x \leq 4 \\ -x/8 + 12/8 & 4 \leq x \leq 12 \\ 0 & x \geq 12 \end{cases}$$

$$X_{(A+B)}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -8 \\ x/10 + 8/10 & -8 \leq x \leq 2 \\ -x/11 + 13/11 & 2 \leq x \leq 13 \\ 0 & x \geq 13 \end{cases}$$

A ve B fuzzy sayısı ise $A + B$ fuzzy sayısı mıdır? Diğer bir deyişle $A + B$ konveks ve normal midir? Bu sorunun cevabını aşağıdaki teoremlerde verebiliriz.

Teorem 2.5.1. A ve B , $\mathbb{R}$ de iki fuzzy sayısı ise $A + B$ de $\mathbb{R}$ de bir fuzzy alt kümedir yani bu toplam konvektir.

İspat: α ve α' seviyelerini düşünelim. Burada $\alpha' > \alpha$ için

$$\begin{aligned} A^\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \\ B^\alpha &= [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ A^{\alpha'} &= [a_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'}] \\ B^{\alpha'} &= [b_1^{\alpha'}, b_2^{\alpha'}] \end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}(\alpha' > \alpha) &\Rightarrow [a_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'}] \subset [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \\(\alpha' > \alpha) &\Rightarrow [b_1^{\alpha'}, b_2^{\alpha'}] \subset [b_1^\alpha, b_2^\alpha]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^\alpha (+) B^\alpha &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha] \\A^{\alpha'} (+) B^{\alpha'} &= [a_1^{\alpha'} + b_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'} + b_2^{\alpha'}]\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow [a_1^{\alpha'} + b_1^{\alpha'}, a_2^{\alpha'} + b_2^{\alpha'}] \subset [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$$

monotonluk ve konvekslik toplama işleminde korunmuş olur.

Teorem 2.5.2. A ve B , $\mathbb{R}$ de iki fuzzy sayısı ise $A + B$ de $\mathbb{R}$ de bir fuzzy alt kümedir ve normaldir[14]

İspat: $\alpha = 1$ seviyesinde

$$\begin{aligned}A^{\alpha=1} &= [a_1^{\alpha=1}, a_2^{\alpha=1}] \\B^{\alpha=1} &= [b_1^{\alpha=1}, b_2^{\alpha=1}]\end{aligned}$$

$$A^{\alpha=1} (+) B^{\alpha=1} = [a_1^{\alpha=1} + b_1^{\alpha=1}, a_2^{\alpha=1} + b_2^{\alpha=1}] \neq \emptyset$$

Böylece $A (+) B$ normaldir.

2.5.2. Fuzzy Sayılarında Çıkarma İşlemi:

$A, B \subset \mathbb{R}$ ise $\alpha \in [0, 1]$ için seviye kümeleri,

$$\begin{aligned}A^\alpha &= \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\} \\B^\alpha &= \{x \in \chi : X_B(x) \geq \alpha\}\end{aligned}$$

olsun.

$A, B \subset \mathbb{R}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$X_{A(-)B}(z) = \vee_{z=x-y} (X_A(x) \wedge X_B(y))$$

dır ya da $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} A^\alpha + B^\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]. \end{aligned}$$

2.5.3 Fuzzy Sayılarında Çarpma İşlemi:

Burada çarpma işlemini $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayılar kümesi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde alacağız. A ve B , $\mathbb{R}^+$ da iki bulanık sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} A^\alpha \cdot B^\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha] \end{aligned}$$

şeklinde. Ayrıca bu yine $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$X_{A \cdot B}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (X_A(x) \wedge X_B(y))$$

şeklinde de yazılabilir.

2.5.4 Fuzzy Sayılarında Bölme İşlemi:

İki bulanık sayının bölümü $\mathbb{R}^+$ da tanımlı olup $b_2^\alpha > 0$ ve $\forall \alpha \in [0, 1]$ için

$$A^\alpha / B^\alpha = [a_1^\alpha / b_2^\alpha, a_2^\alpha / b_1^\alpha]$$

ya da $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$X_{A/B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (X_A(x) \wedge X_B(y))$$

olacak şekilde tanımlanır.

2.6. FUZZY SAYI DİZİLERİ

Fuzzy sayı dizileri kavramı Matloka[20] tarafından verildi ve diziler ile ilgili aritmetik işlemler yine Matloka[20] tarafından geliştirildi.

Tanım 2.6.1. Bir $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi,

$$X : \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan bir X fonksiyonudur. X_k fuzzy sayısı fonksiyonun $k \in \mathbb{N}$ deki değerini gösterir ve dizinin k -yinci terimi olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.6.2. $\varepsilon > 0$ verilsin $k > N$ olduğunda $\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise $\{X_k\}$ dizisinin limiti X_0 'dır ve $\lim_k X_k = X_0$ şeklinde gösterilir [20].

$\lim X_k$ mevcut ise $\{X_k\}$ dizisi yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

Aşağıda bir fuzzy sayı dizisi örneği verilmiştir.

Örnek 2.6.3.

$$X_k(t) = \begin{cases} \frac{k}{2k-1}t, & t \in [0, \frac{2k-1}{k}] \\ 1, & t \in [\frac{2k-1}{k}, \frac{2k+1}{k}] \\ -\frac{k}{2k-1}(t-4), & t \in (\frac{2k+1}{k}, 4] \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

$$\lim_k X_k(t) = \begin{cases} \frac{k}{2k-1}t, & t \in [0, 2] \text{ ise} \\ \frac{-1}{2}(t-4) & t \in [2, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

Tanım 2.6.4. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir X_0 fuzzy sayısının ε - komşuluğu $L(\mathbb{R})$ 'de $\bar{d}(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde tüm X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğunu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterereceğiz [20].

Teorem 2.6.5. Bir X_0 fuzzy sayısının bir $\{X_k\}$ fuzzy sayı dizisinin limiti olması için gerek ve yeter şart X_0 'ın her bir komşuluğunun dizinin sonlu sayıdaki terimleri hariç, sonsuz çoklukta terimlerini kapsamasıdır [20].

Teorem 2.6.6. Eğer bir $\{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi yakınsak ise limiti tektir [20].

İspat. Kabul edelim ki $\lim_k X_k = X_0$ olsun. Y_0 , X_0 'dan farklı herhangi bir fuzzy sayısı olsun. $K \cap K' = \emptyset$ olacak şekilde X_0 'ın bir K komşuluğunu ve Y_0 'ın bir K' komşuluğunu alalım.

$\lim_k X_k = X_0$ olduğundan, $\{X_k\}$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç sonsuz terimi K 'nın içinde kalır. Bu sebepten dolayı, Y_0 'nın K' komşuluğu $\{X_k\}$ 'nın sonsuz çoklukta terimini içermez. Bu da gösterir ki Y_0 , $\{X_k\}$ dizisinin limiti olamaz.

Teorem 2.6.7. Eğer her $k > k_0$ sayıları için $X_k \leq Y_k \leq Z_k$ olacak şekilde k_0 sayısı mevcut ise ve $\lim_k X_k = B = \lim_k Z_k$ ise bu taktirde $\{Y_k\}$ yakınsaktır ve $\lim_k Y_k = B$ 'dir [20].

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_k X_k = B$ olduğundan $k > k_1$ iken $\bar{d}(X_k, B) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_1 sayısı mevcuttur. $\lim_k Z_k = B$ olduğundan, $k > k_2$ olduğunda $\bar{d}(Z_k, B) < \varepsilon$ olacak şekilde k_2 sayısı mevcuttur. $\bar{k} = \max(k, k_1, k_2)$ olsun. Bu taktirde $k > \bar{k}$ için

$$\begin{aligned} \bar{d}(Y_k, B) &\leq \bar{d}(Y_k, Z_k) + \bar{d}(Z_k, B) \\ &\leq \bar{d}(X_k, Z_k) + \bar{d}(Z_k, B) \\ &\leq \bar{d}(X_k, B) + \bar{d}(Z_k, B) + \bar{d}(Z_k, B) \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

ve bu nedenle $\lim_k Y_k = B$ 'dir.

Tanım 2.6.8. $\varepsilon > 0$ verilsin $\forall k > k_0$ için $\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı mevcut ise $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisi bir X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_k X_k = X_0$ şeklinde gösterilir [20].

$c(F)$ ile tüm yakınsak fuzzy sayı dizilerinin cümlesini göstereceğiz..

Tanım 2.6.9. $\varepsilon > 0$ ve $\forall k > k_0$ için $\bar{d}(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir k_0 tamsayısı mevcutsa $X = \{X_k\}$ fuzzy dizisine bir Cauchy dizisi denir [20].

$C(F)$ ile fuzzy sayı dizilerinin tüm Cauchy dizilerinin cümlesini göstereceğiz.

Tanım 2.6.10. Eğer $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ fuzzy sayılar cümlesi sınırlı ise bir $X = \{X_k\}$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir. Yani herhangi bir k sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde iki fuzzy sayısının mevcut olmasıdır [20].

$m(F)$ ile tüm sınırlı fuzzy sayı dizilerini göstereceğiz.

Teorem 2.6.11. Yakınsak herhangi bir fuzzy sayı dizisi sınırlıdır [20].

Tanım 2.6.12. $\{X_k\}$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\{k_n\}$ de doğal sayıların artan bir dizisi ise bu takdirde $\{X_{k_n}\}$ dizisine $\{X_k\}$ nin bir alt dizisi denir [20].

Teorem 2.6.13. Eğer $\{X_k\}$ yakınsak ise, $\{X_k\}$ nin herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsar [20].

Teorem 2.6.14. Eğer $\lim_k X_k = X_0$ ve $\lim_k Y_k = Y_0$ ise

- i) $\lim_k (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,
- ii) $\lim_k (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,
- iii) $\lim_k (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$,
- iv) $\lim_k \left(\frac{X_k}{Y_k}\right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer tüm k 'lar için $0 \notin \text{supp} Y_k$ ve $0 \notin \text{supp} Y_0$) [20].

İspat i) $\lim_k X_k = X_0$ ve $\lim_k Y_k = Y_0$ ise bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $k > K$ iken

$$\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon \text{ ve } \bar{d}(Y_k, Y_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir K sayısı mevcuttur. $\bar{d}$ 'nin tanımından herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için

$$d(X_k^\alpha, X_0^\alpha) = \max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha|)$$

ve

$$d(Y_k^\alpha, Y_0^\alpha) = \max(|\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|)$$

dir. Herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} d(X_k^\alpha + Y_k^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) &= d([\underline{X}_k^\alpha + \underline{Y}_k^\alpha, \overline{X}_k^\alpha + \overline{Y}_k^\alpha], [\underline{X}_0^\alpha + \underline{Y}_0^\alpha, \overline{X}_0^\alpha + \overline{Y}_0^\alpha]) \\ &= \max(|\underline{X}_k^\alpha + \underline{Y}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha + \overline{Y}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|) \\ &\leq \max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha| + |\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha| + |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|) \\ &\leq \max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha|) + \max(|\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|) \\ &\leq d(X_k^\alpha, X_0^\alpha) + d(Y_k^\alpha, Y_0^\alpha) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

olduğunu göz önüne alarak yani herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için $d(X_k^\alpha + Y_k^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) < 2\varepsilon$ olur ve buradan $\bar{d}(X_k + Y_k, X_0 + Y_0) < 2\varepsilon$ 'dir.

ii) İspat (i) 'nin benzeridir.

iii) $d(X_k^\alpha.Y_k^\alpha, X_0^\alpha.Y_0^\alpha)$ 'yi göz önüne alalım. $X_k^\alpha.Y_k^\alpha$ ve $X_0^\alpha.Y_0^\alpha$ 'nın uç noktaları X_k^α, Y_k^α ve X_0^α, Y_0^α 'nın uç noktalarının işaretlerine bağlıdır. İspatı sadece $\underline{X}_k^\alpha, \underline{Y}_k^\alpha, \underline{X}_0^\alpha, \underline{Y}_0^\alpha > 0$ durumu için ispatlayacağız. Diğer durumlarda ispat benzer şekildedir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} d(X_k^\alpha.Y_k^\alpha, X_0^\alpha.Y_0^\alpha) &= d([\underline{X}_k^\alpha.\underline{Y}_k^\alpha, \overline{X}_k^\alpha.\overline{Y}_k^\alpha], [\underline{X}_0^\alpha.\underline{Y}_0^\alpha, \overline{X}_0^\alpha.\overline{Y}_0^\alpha]) \\ &= \max(|\underline{X}_k^\alpha.\underline{Y}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha.\underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha.\overline{Y}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha.\overline{Y}_0^\alpha|) \\ &\leq \max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha| |\underline{Y}_k^\alpha| + |\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha| |\underline{X}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha| |\overline{Y}_k^\alpha| + |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha| |\overline{X}_0^\alpha|) \end{aligned}$$

dir. Çünkü $\{X_k\}$ ve $\{Y_k\}$ yakınsaktır ve dolayısıyla sınırlıdır. Bundan ise $|\underline{Y}_k^\alpha|, |\overline{Y}_k^\alpha|, |\underline{X}_k^\alpha|$ ve $|\overline{X}_k^\alpha|$ lar k_0 dan küçük olacak şekilde bir k_0 sayısının mevcut olduğu anlaşılır.

$$\begin{aligned} d(X_k^\alpha.Y_k^\alpha, X_0^\alpha.Y_0^\alpha) &\leq \max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha| k_0 + |\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha| k_0 + |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha| k_0 + |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha| k_0) \\ &\leq k_0 (\max(|\underline{X}_k^\alpha - \underline{X}_0^\alpha|, |\overline{X}_k^\alpha - \overline{X}_0^\alpha|) + \max(|\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|, |\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|)) \\ &\leq k_0 (d(X_k^\alpha, X_0^\alpha) + d(Y_k^\alpha, Y_0^\alpha)) \leq k_0 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2k_0}$ alınırsa $\bar{d}(X_k.Y_k, X_0.Y_0) < \varepsilon'$ elde edilir.

iv) $\lim Y_k = Y_0$ olsun. İlk olarak herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ için $d\left(\frac{1}{Y_k^\alpha}, \frac{1}{Y_0^\alpha}\right) < \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz. Yukarıdaki ispata benzer şekilde kabul edelim ki $\underline{Y}_k^\alpha, \overline{Y}_k^\alpha, \underline{Y}_0^\alpha, \overline{Y}_0^\alpha > 0$ olsun.

Bu taktirde

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{Y_k^\alpha}, \frac{1}{Y_0^\alpha}\right) &= d\left(\left[\frac{1}{\overline{Y}_k^\alpha}, \frac{1}{\underline{Y}_k^\alpha}\right], \left[\frac{1}{\overline{Y}_0^\alpha}, \frac{1}{\underline{Y}_0^\alpha}\right]\right) \\ &= \max\left(\left|\frac{1}{\overline{Y}_k^\alpha} - \frac{1}{\overline{Y}_0^\alpha}\right|, \left|\frac{1}{\underline{Y}_k^\alpha} - \frac{1}{\underline{Y}_0^\alpha}\right|\right) \\ &= \max(|(\overline{Y}_0^\alpha - \overline{Y}_k^\alpha) / \overline{Y}_k^\alpha.\overline{Y}_0^\alpha|, |(\underline{Y}_0^\alpha - \underline{Y}_k^\alpha) / \underline{Y}_k^\alpha.\underline{Y}_0^\alpha|) \end{aligned}$$

olur. $\lim Y_k = Y_0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{Y_k^\alpha}, \frac{1}{Y_0^\alpha}\right) &< \max(|\overline{Y}_k^\alpha - \overline{Y}_0^\alpha|, |\underline{Y}_k^\alpha - \underline{Y}_0^\alpha|) k_0 \\ &= d(Y_k^\alpha, Y_0^\alpha) k_0 < \varepsilon k_0 \end{aligned}$$

elde ederiz. $\varepsilon = \varepsilon' / k_0$ alınırsa

$$\bar{d}\left(\frac{1}{Y_k}, \frac{1}{Y_0}\right) < \varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$\lim \frac{1}{Y_k} = \frac{1}{Y_0}$$

olur. O halde (iii) den

$$\lim X_k/Y_k = \lim X_k \frac{1}{Y_k} = X_0 \frac{1}{Y_0} = \frac{X_0}{Y_0}$$

elde edilir.

3. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Fuzzy topolojik uzay kavramı Zadeh[2] tarafından tanımlanan fuzzy küme kavramı kullanılarak C.L.Chang[1] tarafından tanımlandı. Daha sonra Goguen[3], Ming ve Ming[4], Warren[5], Wong[6], Lowen[7], Azad[8], Katsaras[21,22], Malghan ve Benchalli[23], R.K.Misra[24] tarafından incelendi.

Tanım 3.1. $X \neq \emptyset$ ve T, X' deki fuzzy kümelerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde T' ye X üzerinde fuzzy topoloji adı verilir [1].

- $X, \emptyset \in T$
- $A, B \in T$ ise bu takdirde $A \cap B \in T$
- $\forall i \in I$ için $A_i \in T$ iken $\cup_i A_i \in T$.

(X, T) çiftine fuzzy topolojik uzay adı verilir. T nin her elemanına T -açık fuzzy küme denir. Bir fuzzy kümenin T -kapalı olması için gerek ve yeter şart tümleyeninin T -açık olmasıdır. Neticede, T -açık(T -kapalı) kümeye basitçe açık(kapalı) küme diyeceğiz. Kaba topoloji tüm fuzzy kümeleri içerirken, ince topoloji sadece $\emptyset$ ve X' i içerir.

U fuzzy topolojisi T den daha kabadır $\Leftrightarrow U \subset T$.

Örnek 3.2. $X = [0, 1]$ kümesi üzerinde $\{\emptyset, X\}$ topolojisi ince fuzzy topolojidir [21].

Örnek 3.3. X' deki tüm crisp fuzzy kümelerin koleksiyonu X için bir fuzzy topolojidir [21].

Örnek 3.4. X deki tüm sabit fuzzy kümelerin koleksiyonu X için bir fuzzy topolojidir [21].

Örnek 3.5. X üzerinde fuzzy topolojiler ailesinin herhangi arakesiti X için bir fuzzy topolojidir [21].

Tanım 3.6. (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir U fuzzy kümesi, A fuzzy kümesinin komşuluğudur $\Leftrightarrow A \subset O \subset U$ olacak şekilde bir O açık fuzzy kümesi mevcuttur. Burada bir noktanın komşuluğu yerine bir fuzzy kümenin komşuluğunu düşünelim [1].

Teorem 3.7. A fuzzy kümesi açıktır $\Leftrightarrow \forall B \subset A$ fuzzy kümesi için A, B nin komşuluğudur [1].

İspat. $(\Rightarrow)$ Aşıkardır.

$(\Leftarrow)$ $A \subset A$ olduğundan, $A \subset O \subset A$ şeklinde bir O açık fuzzy küme mevcuttur. Buradan $A = O$ ve A açıktır.

Bir fuzzy kümenin komşuluk sistemi, fuzzy kümenin tüm komşuluklarının ailesidir.

Teorem 3.8. U bir fuzzy kümenin komşuluk sistemiyse, bu takdirde U nun elemanlarının sonlu arakesitleri U ya aittir ve U nun bir elemanını kapsayan herbir fuzzy küme U ya aittir [11].

İspat. R ve S bir A fuzzy kümesinin komşulukları ise, sırasıyla R de ve S de kapsanan R_o ve S_o açık komşulukları vardır. Bu takdirde $R \cap S, R_o \cap S_o$ açık komşuluğunu içerir ve A nın bir komşuluğudur. Böylece U nun iki elemanının arakesiti U ya aittir. Bu takdirde bir R fuzzy kümesi A nın bir komşuluğunu kapsarsa A nın bir açık komşuluğunu kapsar ve dolayısıyla kendisi bir komşuluktur.

Tanım 3.9. A ve B , (X, T) fuzzy topolojik uzayında iki fuzzy küme ve $B \subset A$ olsun. Bu takdirde A, B nin komşuluğudur $\Leftrightarrow B$, A fuzzy kümesinin içidir denir. A nın tüm iç fuzzy kümelerinin birleşimine A nın içi denir ve A^o ile gösterilir [1].

Teorem 3.10. (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme A olsun. Bu takdirde A^o açıktır ve A da kapsanan en büyük açık fuzzy kümedir [1].

A fuzzy kümesi açıktır $\Leftrightarrow A = A^o$.

İspat. Yukarıdaki tanımdan açıkça A^o , A nın iç fuzzy kümesidir. Buradan $A^o \subset O \subset A$ şeklinde bir açık O fuzzy kümesi mevcuttur. Fakat O , A nın bir iç fuzzy kümesidir ve

böylece $O \subset A^\circ$ dir. Buradan $A^\circ = O$ dir. Bu takdirde A° açıktır ve A da kapsanan en büyük açık fuzzy kümedir. Eğer A açık ise; $A \subset A^\circ$, A için A nın bir iç fuzzy kümesidir. Böylece $A = A^\circ$ dir. Tersi açık bir şekilde doğrudur.

Tanım 3.11. (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme A olsun. A yı kapsayan en küçük kapalı fuzzy kümeye A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [10].

Tanım 3.12. (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme A olsun. $A = (\overline{A})^\circ$ ise A kümesine düzenli açık denir [1].

Tanım 3.13. (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy küme A olsun. $A = \overline{(A^\circ)}$ ise A kümesine düzenli kapalı denir [1].

3.1. FUZZY KÜME DİZİLERİ

Tanım 3.1.1. Bir $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ fuzzy kümeler dizisi bir A fuzzy kümesinde kapsanır $\Leftrightarrow$ bir $m \in \mathbb{Z}$ mevcuttur öyle ki $n \geq m$ ise bu takdirde $A_n \subset A$ dir. Dizi A da kapsamıyorsa $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $n \geq m$ ve $A_n \subset A$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Eğer dizi bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında ise, bu takdirde dizi A fuzzy kümesine yakınsar $\Leftrightarrow A$ nın her bir komşuluğunda kapsanır deriz [1].

Tanım 3.1.2. $N : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu takdirde $\{B_i, i = 1, 2, \dots\}$ dizisi $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisinin bir alt dizisidir $\Leftrightarrow B_i = A_{N(i)}$ şeklinde bir N dönüşümü vardır ve $\forall m \in \mathbb{Z}$ için bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $i \geq n$ olmak üzere $N(i) \geq m$ dir [1].

Tanım 3.1.3. Bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında bir A fuzzy kümesi bir fuzzy kümeler dizisinin fuzzy küme demetidir $\Leftrightarrow$ dizi A nın her komşuluğunda kapsanır [1].

Teorem 3.1.4. Bir (X, T) fuzzy topolojik uzayında her bir fuzzy kümenin komşuluk sistemi sayılabilir ise bu takdirde;

(a) A fuzzy kümesi açıktır $\Leftrightarrow B \subset A$ fuzzy kümesine yakınsayan $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ fuzzy küme dizilerinin herbiri A da kapsanır.

(b) Eğer A , bir $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ fuzzy küme dizisinin fuzzy küme demetiye bu takdirde A ya yakınsayan dizinin bir alt dizisi vardır.

İspat. (a) $\Rightarrow$: A açık olduğundan B nin bir komşuluğudur. Buradan $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisi A da kapsanır.

$\Leftarrow$: $\forall B \subset A$ için $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$ B' nin bir komşuluk sistemi olsun. $V_n = \cap_{i=1}^n \{U_i\}$ alalım. Bu takdirde $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ B nin herbir komşuluğunda kapsanan bir dizidir; yani $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ B' ye yakınsar. Buradan $n \geq m$ için $V_n \subset A$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır. V_n ler B nin komşuluklarıdır. Bu nedenle Teorem 3.7'den A açıktır.

(b) $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ A nın komşuluk sistemi olsun. $S_n = \cup_{i=1}^n \{R_i\}$ alalım. Bu takdirde $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $S_{n+1} \subset S_n$ şeklinde bir dizidir. $\forall i \geq 0$ için $N(i) \geq i$ ve $A_{N(i)} \subset S_i$ olacak şekilde $N(i)$ seçelim. O zaman elbette $\{A_{N(i)}, i = 1, 2, \dots\}$ dizisi $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisinin bir alt dizisidir. Açıkça bu alt dizi A ya yakınsar

3.2. FUZZY SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu kısımda, F -süreklili fonksiyonları adlandırmak için süreklilik kavramını genelleştireceğiz. İlk olarak, fuzzy kümelerin dönüşümlerle indirgenmiş birkaç özelliğini tespit edeceğiz.

Tanım 3.2.1. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $B, \mu_B(Y)$ üyelik fonksiyonuyla Y de bir fuzzy küme olsun. Bu takdirde B nin tersi $f^{-1}[B]$ X de bir fuzzy kümedir ve üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır [1].

Tersine; $A, \mu_A(X)$ üyelik fonksiyonuyla X de bir fuzzy küme olsun. A nın görüntüsü $f[A], Y$ de bir fuzzy kümedir ve üyelik fonksiyonu $\forall y \in Y$ için $f^{-1}[y] = \{x \mid f(x) = y\}$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{f[A]}(y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(z)\}, & f^{-1}[y] \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Teorem 3.2.2. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$(a) f^{-1}[B] = \{f^{-1}[B]\}'$$

- (b) $f[A] \supset \{f[A]\}'$
- (c) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2], \quad B_1, B_2 \in Y$
- (d) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2], \quad A_1, A_2 \in X$
- (e) $B \supset f[f^{-1}[B]], \quad B \in Y$
- (f) $A \subset f^{-1}[f[A]], \quad A \in X$
- (g) $f: X \rightarrow Y$ ve $\rho: Y \rightarrow Z$ olsun.

Bu takdirde $(\rho \circ f)^{-1}[c] = f^{-1}[\rho^{-1}[c]], c \in Z'$ dir. Burada $\rho \circ f$, f ve ρ nin bileşkesidir [1].

İspat.

(a) $\forall x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}[B]}(x) &= \mu_B[f(x)] = 1 - \mu_B[f(x)] \\ &= 1 - \mu_{f^{-1}[B]}(x) \\ &= \mu_{(f^{-1}[B])'}(x). \end{aligned}$$

(b) $\forall y \in Y$ için $f^{-1}[y] \neq \emptyset$ ise bu takdirde ,

$$\begin{aligned} \mu_{f[A]}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(z)\} = \sup_{x \in f^{-1}[y]} \{1 - \mu_A(z)\} \\ &= 1 - \inf_{x \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(z)\}, \end{aligned}$$

ve

$$\mu_{(f[A])'}(y) = 1 - \mu_{f[A]}(y) = 1 - \sup_{x \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(z)\}$$

dir. Böylece $\mu_{f[A]}(y) \geq \mu_{(f[A])'}(y)$ olur.

(c) $\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) = \mu_{B_1}[f(x)]$ ve $\mu_{f^{-1}[B_2]}(x) = \mu_{B_2}[f(x)], \forall x \in X$.

$B_1 \subset B_2$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\mu_{f^{-1}[B_1]}(x) \leq \mu_{f^{-1}[B_2]}(x)$ dir. Buradan $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$ olur.

$$\begin{aligned} (d) \quad \mu_{f[A_1]}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_1}(z)\} \\ \mu_{f[A_2]}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{A_2}(z)\} \end{aligned}$$

$A_1 \subset A_2$ olduğundan $\forall y \in Y$ için $\mu_{f[A_1]}(y) \leq \mu_{f[A_2]}(y)$ dir. Buradan $f[A_1] \subset f[A_2]$ olur.

(e) $f^{-1}[y] \neq \emptyset$ ise,

$$\begin{aligned}\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{f^{-1}[B]}(z) \right\} \\ &= \sup_{x \in f^{-1}[y]} \{ \mu_B(f(z)) \} = \mu_B(y).\end{aligned}$$

$f^{-1}[y] = \emptyset$ ise, $\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) = 0$ 'dır. Böylece $\forall y \in Y$ için $\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) \leq \mu_B(y)$ olur.

$$(f) \mu_{f^{-1}[f[A]]}(x) = \mu_{f[A]}(f(x)) = \sup_{x \in f^{-1}(f(x))} \{ \mu_A(z) \} \geq \mu_A(x).$$

$$\begin{aligned}(g) \forall x \in X \text{ için } \mu_{(gof)^{-1}[c]}(x) &= \mu_c[(gof)(x)] \\ &= \mu_c[g(f(x))] \\ &= \mu_{g^{-1}[c]}[f(x)] \\ &= \mu_{f^{-1}[g^{-1}[c]]}(x).\end{aligned}$$

Şimdi F -süreklilik tanımını verebiliriz.

Tanım 3.2.3. $f : (X, T) \rightarrow (Y, U)$ fonksiyonu fuzzy süreklidir $\Leftrightarrow$ her bir U -açık fuzzy kümenin tersi T -açıktır. Açıkça, $f : X \rightarrow Y$ bir F -sürekli fonksiyon ise ve $g : Y \rightarrow Z$ bir fuzzy sürekli fonksiyon ise bu takdirde $(gof) : X \rightarrow Z$ bir fuzzy sürekli fonksiyondur. $\forall v \in Z$ için $(gof)^{-1}[v] = f^{-1}[g^{-1}[v]]$ dir. f ve g nin fuzzy sürekliliğini kullanarak $(gof)^{-1}[v]$ nin açık olduğunu görürüz [4].

Teorem 3.2.4. X ve Y fuzzy topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

(a) f fonksiyonu F -süreklidir.

(b) Her kapalı fuzzy kümenin tersi kapalıdır.

(c) $\forall A \in X$ için $f[A]$ nin her komşuluğunun inversi A' nin bir komşuluğudur.

(d) $\forall A \in X$ ve $f[A]$ nin her V komşuluğu için $f[W] \subset V$ olacak şekilde A' nin bir W komşuluğu vardır.

(e) X' 'de bir A fuzzy kümesine yakınsayan her bir $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ fuzzy küme dizisi için $\{f[A_n], n = 1, 2, \dots\}$ dizisi $f[A]$ ya yakınsar, olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır [4].

(a) ve (b) denktir;

(c) ve (d) denktir;

(a) $\Rightarrow$ (c);

(d) $\Rightarrow$ (e).

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b) : $\forall B \in Y$ fuzzy kümesi için $f^{-1}[B'] = \{f^{-1}[B]\}'$ nin doğrudan bir sonucudur.

(a) $\Rightarrow$ (c) : f, F -süreklili ; A, X' 'de bir fuzzy küme ; $V, f[A]$ nın bir komşuluğu ise bu takdirde $V, f[A]$ nın bir W açık komşuluğunu kapsar. $f[A] \subset W \subset V$ olduğundan $f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[W] \subset f^{-1}[V]$ dir. Fakat $A \subset f^{-1}[f[A]]$ ve $f^{-1}[W]$ açıktır. Dolayısıyla $f^{-1}[V], A$ nın bir komşuluğudur.

(c) $\Rightarrow$ (d) : $f^{-1}[V], A$ nın bir komşuluğu olduğundan $W = f^{-1}[V]$ olmak üzere $f[W] = f[f^{-1}[V]] \subset V$ buluruz.

(d) $\Rightarrow$ (c) : $V, f[A]$ nın bir komşuluğu olsun. Bu takdirde $f[W] \subset V$ olacak şekilde A nın bir W komşuluğu vardır. Buradan, $f^{-1}[f[W]] \subset f^{-1}[V]$ dir. Böylece, $W \subset f^{-1}[f[W]]$ olduğundan $f^{-1}[V], A$ nın bir komşuluğudur.

(d) $\Rightarrow$ (e) : $V, f[A]$ nın komşuluğu ise $f[W] \subset V$ şeklinde A nın bir W komşuluğu vardır. $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}, V$ de kapsandığından; yani $n \geq m$ için $A_n \subset W$ olacak şekilde bir m varolduğundan $n \geq m$ için $f[A_n] \subset f[W] \subset V$ buluruz. Böylece $\{f[A_n], n = 1, 2, \dots\}$ dizisi $f[A]$ ya yakınsar.

Bir fuzzy homeomorfizm; X fuzzy topolojik uzayından Y üzerine aynı zamanda tersi de F -süreklili olan birebir, F -süreklili bir dönüşümdür. Bir fuzzy uzaydan diğerine bir fuzzy homeomorfizm mevcutsa bu uzaylara F -homeomorfik denir ve herbiri diğerinin F -homeomorfudur.

İki fuzzy topolojik uzay topolojik olarak F -denktir $\Leftrightarrow$ bu uzaylar homeomorfiktir.

3.3. FUZZY KOMPAKT UZAYLAR

Şimdi bir fuzzy topoloji çevresinde kurulan bir fuzzy kompakt uzay düşüneceğiz.

Tanım 3.3.1. Bir χ fuzzy kümeler ailesi B kümesinin örtüsüdür $\Leftrightarrow B \subset \bigcup \{A \mid A \in \chi\}$ dir. Bu bir açık örtüdür $\Leftrightarrow \chi$ nin her elemanı açık fuzzy kümedir. χ nin bir alt örtüsü χ nin bir alt ailesidir [7].

Tanım 3.3.2. X fuzzy topolojik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ her açık örtü bir sonlu alt örtüye sahiptir [7].

Tanım 3.3.3. χ fuzzy kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow \chi$ nin herbir sonlu alt ailesinin elemanlarının arakesiti boş değildir [7].

Teorem 3.3.4. Bir fuzzy topolojik uzay kompakt ise ancak ve ancak sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı fuzzy kümelerin her ailesi boş olmayan arakesite sahiptir [7].

İspat. $\chi, (X, T)$ fuzzy topolojik uzayında bir fuzzy kümeler ailesi ise bu takdirde χ, X in bir örtüsüdür $\Leftrightarrow \bigcup \{A \mid A \in \chi\} = X, \{\bigcup \{A \mid A \in \chi\}\}' = X' = \emptyset$ ya da $\bigcap \{A' \mid A \in \chi\} = \emptyset$ dir (*De Morgan Kuralları*). Buradan X fuzzy uzayı kompakt ise ancak ve ancak hiçbir sonlu alt küme X i örtmeyecek şekilde X deki açık fuzzy kümelerin her ailesi bir örtü olmaz. Bu ise ancak sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı fuzzy kümelerin herbir ailesi boş olmayan bir arakesite sahipse doğrudur.

Teorem 3.3.5. f, X kompakt fuzzy topolojik uzayını Y uzayı üzerine taşıyan bir F -süreklili fonksiyon olsun. Bu takdirde Y kompakttır [7].

İspat. β, Y nin bir açık örtüsü olsun. Bu takdirde $\forall x \in X$ için $\mu_{\bigcup_{B \in \beta} f^{-1}[B]}(x) = \sup_{B \in \beta} \left\{ \mu_{f^{-1}[B]}(x) \right\} = \sup_{B \in \beta} \{ \mu_B(f(x)) \} = 1$ olduğundan $f^{-1}[B]$ nin tüm fuzzy kümeler ailesi $B \in \beta$ için X in sonlu alt örtüye sahip olan bir açık örtüsüdür. Diğer taraftan; f

üzerine ise, bu takdirde Y deki herhangi bir B fuzzy kümesi için $f[f^{-1}[B]] = B$ olduğu kolayca görülür. Böylece alt örtütün elemanlarının görüntülerinin ailesi Y yi örten β nin bir sonlu alt ailesidir ve dolayısıyla Y kompakttır.

3.4. SONUÇ

Genel topolojideki temel kavramların birçoğunun fuzzy topolojik uzaylara kolaylıkla genişletilebileceğini gösterir. Fuzzy kümeler teorisi hala tam anlamıyla gelişmemiş bir aşamada olmasına rağmen geniş uygulamalara sahip olmasının umut verici olduğu görülür.

KAYNAKLAR

1. Chang, C.L.,1968, *Fuzzy Topological Spaces*, J. Math. Anal. Appl.,24, 182-190.
2. Zadeh, L.,1965, *Fuzzy Sets, Inform and Control*, 8, 338-353.
3. Gaguen, J.A.,1967, *L-fuzzy Sets*, J.Math. Anal. Appl.,18, 145-174
4. Ming, Pu Pao ve Ming, Liu Ying,1980, *Fuzzy Topology I. Neighbourhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence*, J. Math. Anal. Appl.,76, 571-599.
5. Warren, R.H.,1979, *Fuzzy Topologies Characterized by Neighbourhood Systems*, Rocky Mountain J. Math.,9, 761-764..
6. Wong, C.K.,1973, *Covering Properties of Fuzzy Topological Spaces*, J. Math. Anal. Appl.,43, 697-704.
7. Lowen, R.,1976, *Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness*, J. Math. Anal. Appl.,56, 621-633.
8. Azad, K.K.,1981, *On Fuzzy Semi Continuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy Weakly Continuity*, J. Math. Anal. Appl.,82, 14-32.
9. Wong, C.K.,1974, *Fuzzy Points and Local Properties of Fuzzy Topology*, J. Math. Anal. Appl.,46, 316-328.
10. Mashour, Alikhan and Morsi, Nehad, N.,1992, *Fuzzy Metric Neighbourhood Spaces, Fuzzy Sets and Systems*,45, 367-388.
11. Shostak, A.P.,1990, *On The Neighbourhood Structure of Fuzzy Topological Spaces*, Zb. Rad.,4, 7-14.
12. Chattopadhyaya, K.C., Hazra, R.N. and Samanta, S.K.,1992, *Gradation of Openness in Fuzzy Topology, Fuzzy Sets and Systems*,49, 237-242.
13. Ashm, G.,1988, *Genel Topoloji, Ege Üniversitesi, 229s.*

14. Kauffman, M. and Gupta, M.M,1991, *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications*, V.V.R New York.
15. Goetschel, J.R ve Voxman, W.,1983, *Topological Properties of Fuzzy Numbers*, *Fuzzy Sets and Systems*,10, 87-99.
16. Dubois, D ve Prade, H.,1978, *Operations On Fuzzy Numbers*, Internet, J. System Sc.,6, 613-626.
17. Vachnadze, R.G ve Markozashvilli, N.I,1982, *On The Definition of Fuzzy Numbers*, Soosbshch Akad. Nauk. Gruzin., SSR,1, 45-48.
18. Vachnadze, R.G ve Markozashvilli, N.I,1982, *Algebraic Operations Over Fuzzy Numbers*, Soosbshch Akad. Nauk. Gruzin., SSR,2, 313-315.
19. Dijkman, j.G, Van Haeringen, H. ve De Lange, S.J,1983, *Fuzzy Numbers*, J. Math. Anal. Appl.,2, 301-341.
20. Matloka, M.,1986, *Sequences of Fuzzy Numbers*, BUSEFAL 28, 28-37.
21. Katsaras, A.K,1981, *Fuzzy Topological vector Spaces I*, Fuzzy Sets and Systems,6, 85-95.
22. Katsaras, A.K,1984, *Fuzzy Topological vector Spaces II*, Fuzzy Sets and Systems,12, 143-154
23. Malghan, S.R ve Benchalli, S.S,1981, *On Fuzyy Topological Spaces*, Glasnic Matematicicki,16, 313-325.
24. Misra, R.K.,2006, *Some Aspects of Bilinear Mappings*, Phd Thesis, Gauhati University, Asam, India.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Mersin’de doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Mersin’de tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 2005 yılında matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Analiz ve Fonksiyonlar teorisi dalında yüksek lisans eğitimine başladım. Halen eğitimime devam etmekteyim.