

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI FARK DİZİ UZAYLARI

Çiğdem BEKTAŞ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON BİRLİĞİ**

114349

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

114349

**ELAZIĞ
2001**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI FARK DİZİ UZAYLARI

Çiğdem BEKTAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez , tarihinde, aşağıda belirtilen jüri tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız olarak değerlendirilmiştir.

.....

.....

.....

Danışman
Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	I
SUMMARY	II
TEŞEKKÜR	III
SİMGELER	IV
1. BÖLÜM	
TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	1
2. BÖLÜM	
$\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ DİZİ UZAYLARI ve BAZI ÖZELLİKLERİ	5
3. BÖLÜM	
DUAL UZAYLAR	28
4. BÖLÜM	
MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	45
KAYNAKLAR	53

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI FARK DİZİ UZAYLARI

Çiğdem BEKTAŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2001, Sayfa: 53

Dört bölümden oluşan bu çalışmada $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $r \in \mathbb{R}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ ve $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in \ell_\infty\}$, $c(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c\}$ ve $c_0(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c_0\}$ genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde konuya ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ dizi uzayları tanımlanıp, bu uzayların birer Banach uzayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca r 'nin durumuna göre bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiş ve bu uzayların sürekli dualleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ dizi uzaylarının α -, β - ve γ -dualleri bulunmuştur.

Dördüncü bölümde ise $X = \ell_\infty, c$ ve $Y = \ell_\infty$ olmak üzere $(X(\Delta_r^m), Y)$ ve $X = \ell_\infty, c$ ve $Y = \ell_\infty, c, c_0$ olmak üzere $(X, Y(\Delta_r^m))$ matris sınıfları karakterize edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Dizi uzayı, α -, β - ve γ -dualleri, matris dönüşümleri.

SUMMARY

Ph. D Thesis

SOME GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

Çiğdem BEKTAŞ

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2001, Pages: 53

In this study , which is prepared as four chapter, we define generalized difference sequence spaces $\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ and $c_0(\Delta_r^m)$, such as for example $\ell_{\infty}(\Delta_r^m) = \{ x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in \ell_{\infty} \}$, where $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$, $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ and $r \in \mathbb{R}$, and we examine some properties of these sequence spaces.

In the first chapter we give the fundamental definitions and theorems.

In the second chapter we define the sequence spaces $\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ and $c_0(\Delta_r^m)$. We show that these sequence spaces are Banach spaces, and also we give the continuous duals of the sequence spaces.

In the third chapter we give the α -, β - and γ - duals of these sequence spaces.

In the last chapter, we characterize the matrix classes $(X(\Delta_r^m), Y)$ where $X = \ell_{\infty}$ or c and $Y = \ell_{\infty}$ and $(X, Y(\Delta_r^m))$ where $X = \ell_{\infty}$ or c and $Y = \ell_{\infty}$, c or c_0 .

KEY WORDS: Sequence spaces, α -, β - and γ - duals, matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren ve bu çalışmanın düzenli bir şekilde yürütülmesini sağlayan Sayın Hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK ‘ a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Mikail Et ‘ e teşekkürü bir borç bilirim.

Çiğdem BEKTAŞ



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
w	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
ℓ_{∞}	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı
ℓ_1	: $\{ x = (x_k): \sum_k x_k < \infty \}$ dizi uzayı
X'	: X normlu uzayının sürekli dual uzayı
X^{α}	: X' in α - duali
X^{β}	: X' in β - duali
X^{γ}	: X' in γ - duali
(X, Y)	: X dizi uzayından Y dizi uzayı içine olan tüm matrislerin cümlesi
$\bar{X}$	: X cümlesinin kapanışı
$\sum_k x_k$	: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$
$\binom{n}{a}$	: Binom katsayısı
$x_k = O(k)$	: $(k^{-1}x_k)$ dizisinin sınırlı olduğunu ifade eder.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 1.1 (Maddox, 1970) X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. $+$: $X \times X \rightarrow X$ ve $\cdot$: $K \times X \rightarrow X$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. $\forall \alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

L 1) $x + y = y + x$

L 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L 3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L 4) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L 5) $1.x = x$

L 6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L 7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L 8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

dir.

Tanım 1.2 (Kreyszig, 1978) X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için,

N 1) $\|x\| \geq 0$

N 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (α skaler)

N 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Bu çalışmada kompleks terimli bütün $x = (x_k)$ dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz. w , $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad \alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.3 (Goes, G., Goes, S., 1970) X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\begin{aligned}\tau_k : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \tau_k(x) = x_k, \quad (k = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK-uzayı denir.

Tanım 1.4 (Kantorovich, L.V., Akilov, G.P, 1982) $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani $\forall x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alır.

Tanım 1.5 (Maddox, 1970) Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X 'den Y 'ye bir lineer izometri vardır.

Tanım 1.6 (Maddox, 1970) X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten, f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f 'e X 'den Y 'ye bir homeomorfizm denir.

$f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise, f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denk uzaylar olur.

Tanım 1.7 (Kreyszig, 1978) X normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonların cümlesi

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X 'in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 1.8 (Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981) X bir dizi uzayı olsun.

$$a) \quad X^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X \text{ için}\},$$

$$b) \quad X^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X \text{ için}\},$$

$$c) \quad X^\gamma = \{a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \forall x \in X \text{ için}\}.$$

X^α , X^β ve X^γ ya sırası ile X 'in α -, β - ve γ - duali denir. X^α , X^β ve X^γ birer dizi uzayı olup, $\emptyset \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ dir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere $X \subset Y$ ise $Y^\eta \subset X^\eta$ dir.

Teorem 1.9 (Kreyszig, 1978) Bir X Banach uzayının bir Y altuzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y 'nin X 'de kapalı olmasıdır.

Tanım 1.10 (Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981) $X \subset \omega$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_k) \in X$ ve $y = (y_k) \in X$ olmak üzere $x.y = (x_k y_k) \in X$ oluyorsa, yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X 'e bir dizi cebiri denir.

Tanım 1.11 (Choudhary, B., Nanda, S., 1989) $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$, ω dizi uzayının herhangi iki altcümlesi ve $A = (a_{nk})$, $(n, k = 1, 2, \dots)$ kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. Bir $x = (x_k) \in X$ dizisinin Ax dönüşüm dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak olmak üzere $Ax = (A_n(x)) \in Y$ dizisidir. A 'ya X 'den Y 'ye bir matris dönüşümü ve Ax 'e de x 'in A dönüşüm dizisi denir. (X, Y) ile X 'den Y içine olan bütün A matrislerinin sınıfını göstereceğiz.

Tanım 1.12 (Hardy, 1949) $\alpha \in \mathfrak{R}$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara binom katsayıları denir. Eğer n ve k birer doğal sayı ise $n \leq k$ için

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!}$$

ve $n > k$ ise

$$\binom{k}{n} = 0$$

dir.

Teorem 1.13 (Kreyszig, 1978) (X, d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\bar{M}$, M' nin kapanışını gösterebilir. $x \in \bar{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M' de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

Lemma 1.14 (Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981) X bir dizi uzayı olsun. Bu takdirde X 'e

- (i) $X = X^{\alpha\alpha}$ ise *perfect*,
- (ii) Enaz bir $x \in X$ için $|y_k| \leq |x_k|$, $k \geq 1$, iken $y \in X$ ise *normal*,
- (iii) X bütün basamak uzaylarının kanonik önresimlerini kapsıyorsa *monoton*

denir.

Lemma 1.15 (Kamthan, P.K., Gupta, M., 1981) X bir dizi uzayı olsun. Bu takdirde,

- (i) X perfect $\Rightarrow X$ normal $\Rightarrow X$ monoton
- (ii) X normal $\Rightarrow X^\alpha = X^\gamma$
- (iii) X monoton $\Rightarrow X^\alpha = X^\beta$

dir.

2. BÖLÜM

$\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ DİZİ UZAYLARI ve BAZI ÖZELLİKLERİ

ℓ_∞ , c ve c_0 , sırasıyla, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ pozitif tamsayıların cümlesi olmak üzere,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

ile normlu kompleks terimli sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin lineer uzayları olsunlar.

Kızmaz [8], $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile Banach uzayları olduğunu gösterdi.

Daha sonra Sarıgöl [11],

$$\ell_\infty(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q(x_k - x_{k+1}) \in \ell_\infty, \quad q < 1\}$$

$$c(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q(x_k - x_{k+1}) \in c, \quad q < 1\}$$

$$c_0(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q(x_k - x_{k+1}) \in c_0, \quad q < 1\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta_q} = |x_1| + \sup_k |k^q(x_k - x_{k+1})|$$

normu ile Banach uzayları olduğunu gösterdi.

Daha sonra Et ve Çolak, [2][3], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$,

$\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu dizi uzaylarının

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile Banach uzayları olduğunu gösterdiler.

Biz, $m \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c\}$$

$$c_0(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta^m x_k) \in c_0\}$$

dizi kümelerini tanımlayalım. Bunların $x + y = (x_k) + (y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ işlemleri altında birer lineer uzay olduğu açıktır.

Teorem 2.1 $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ lineer uzayları

$$\|x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \quad (1)$$

ile birer normlu uzaydır.

İspat. X , $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

$$\text{N1)} \|x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \geq 0.$$

$$\text{N2)} \|x\|_{\Delta_r} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m |x_i| = 0 \text{ ve } \sup_k k^r |\Delta^m x_k| = 0 \text{ dir.}$$

$\sum_{i=1}^m |x_i| = 0 \Rightarrow |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ dir. Yani $1 \leq i \leq m$ için $x_i = 0$ dir.

Ayrıca $\sup_k k^r |\Delta^m x_k| = 0$ ise $k^r |\Delta^m x_k| = 0$ dir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $k^r \neq 0$ olduğundan,

$$|\Delta^m x_k| = 0 \Rightarrow \left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki bu da $x = \theta$ demektir.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\|_{\Delta_r} = 0$ olduğu aşıkardır.

$$\begin{aligned} \text{N3)} \quad \|\alpha x\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |\alpha x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m(\alpha x_k)| \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \right) \\ &= |\alpha| \|x\|_{\Delta_r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{N4)} \quad \|x + y\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \sup_k k^r |\Delta^m(x_k + y_k)| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \right) + \left(\sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k k^r |\Delta^m y_k| \right) \\ &= \|x\|_{\Delta_r} + \|y\|_{\Delta_r} \end{aligned}$$

Teorem 2.2 $(\ell_\infty(\Delta_r^m), \|\cdot\|_{\Delta_r})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olmak üzere (x^s) , $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_k k^r |\Delta^m(x_k^s - x_k^t)| \rightarrow 0$$

olur. O halde $k \leq m$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için $|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $k^r \neq 0$ olduğundan $s, t \rightarrow \infty$ için $|\sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t)| \rightarrow 0$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^s - x_{k+m}^t| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^s - x_k^t) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^s - x_{k+m-1}^t) \right| \end{aligned}$$

olması nedeni ile her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0 \tag{2}$$

elde edilir. Buna göre $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin her sabit $k = 1, 2, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olduğu görülebilir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan $(x_k^s)_s$, $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$ ($k = 1, 2, \dots$) diyelim. $(x^s)_s$, $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan

$\forall \varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ oldukça $\|x^s - x^t\|_{\Delta_r} \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $\forall s, t \geq N$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon \quad \text{ve} \quad k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \leq \varepsilon$$

olur. Bu son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\forall s \geq N$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| &= \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon \\ \lim_{t \rightarrow \infty} k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| &= k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $s \geq N$ için,

$$\|x^s - x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| + \sup_k k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi de $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} k^r |\Delta^m x_k| &= k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \\ &= k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N) \right| \\ &\leq k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^N - x_{k+v}) \right| + k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}^N \right| \\ &\leq \|x^N - x\|_{\Delta_r} + k^r |\Delta^m x_k^N| = O(1) \end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ elde edilir. O halde $(\ell_\infty(\Delta_r^m), \|\cdot\|_{\Delta_r})$ bir Banach uzayıdır.

Lemma 2.3 $c(\Delta_r^m)$, $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat. $x \in c(\Delta_r^m)$ olsun. Bu taktirde $(k^r \Delta^m x_k) \in c \subset \ell_\infty$ dir. Buradan $c(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ elde edilir. $c(\Delta_r^m) = \overline{c(\Delta_r^m)}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\overline{c(\Delta_r^m)} \subset c(\Delta_r^m)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{c(\Delta_r^m)}$ olsun. Bu taktirde $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in c(\Delta_r^m)$ olmak üzere Teorem 1.13 gereğince $x^n \rightarrow x$ olacak şekilde $c(\Delta_r^m)$ de bir (x^n) dizisi vardır. Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \geq N$ için

$$\|x^n - x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m (x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan $n \geq N$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$k^r |\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (3)$$

elde edilir. $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \in c(\Delta_r^m)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(i^r \Delta^m x_i^n)_i = (1^r \Delta^m x_1^n, 2^r \Delta^m x_2^n, \dots) \in c$ dir. Demek ki $(i^r \Delta^m x_i^n)_i$ bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle her $n \in \mathbb{N}$ ve her $i, j \geq M$ için,

$$|i^r \Delta^m x_i^n - j^r \Delta^m x_j^n| \leq \varepsilon \quad (4)$$

olacak şekilde enaz bir M doğal sayısı vardır. Böylece $\forall i, j \geq M$ için (3) ve (4) gereğince,

$$\begin{aligned} |i^r \Delta^m x_i - j^r \Delta^m x_j| &\leq i^r |\Delta^m x_i^N - \Delta^m x_i| + j^r |\Delta^m x_j^N - \Delta^m x_j| + |i^r \Delta^m x_i^N - j^r \Delta^m x_j^N| \\ &= i^r |\Delta^m(x_i^N - x_i)| + j^r |\Delta^m(x_j^N - x_j)| + |i^r \Delta^m x_i^N - j^r \Delta^m x_j^N| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $(i^r \Delta^m x_i)$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Demek ki $(i^r \Delta^m x_i) \in c$, yani $x \in c(\Delta_r^m)$ dir. O halde $c(\Delta_r^m)$ kapalıdır.

Teorem 2.4 $(c(\Delta_r^m), \|\cdot\|_{\Delta_r})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. $c(\Delta_r^m)$, $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ uzayının kapalı bir altuzayı olduğundan Teorem 1.9 gereğince $c(\Delta_r^m)$ de bir Banach uzayıdır.

Lemma 2.5 $c_0(\Delta_r^m)$, $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

İspat. $x \in c_0(\Delta_r^m)$ olsun. Bu taktirde $(k^r \Delta^m x_k) \in c_0 \subset \ell_\infty$ olup $c_0(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir. Şimdi $c_0(\Delta_r^m) = \overline{c_0(\Delta_r^m)}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\overline{c_0(\Delta_r^m)} \subset c_0(\Delta_r^m)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x = (x_1, x_2, \dots) \in \overline{c_0(\Delta_r^m)}$ olsun. Bu taktirde $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ olmak üzere, Teorem 1.13 gereğince $x^n \rightarrow x$ olacak şekilde $c_0(\Delta_r^m)$ de bir (x^n) dizisi vardır. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ oldukça,

$$\|x^n - x\|_{\Delta_r} = \sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. Buradan $n \geq N$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$k^r |\Delta^m(x_k^n - x_k)| \leq \varepsilon \quad (5)$$

elde edilir. (x^n) dizisi $c_0(\Delta_r^m)$ de yakınsak olduğundan $(i^r \Delta^m x_i^n)_i = (1^r \Delta^m x_1^n, 2^r \Delta^m x_2^n, 3^r \Delta^m x_3^n, \dots) \in c_0$ ve dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için $i \geq M$ oldukça, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|i^r \Delta^m x_i^n| \leq \varepsilon \quad (6)$$

olacak şekilde bir M doğal sayısı vardır. Böylece $i \geq M$ için (5) ve (6) gereğince,

$$\begin{aligned} |i^r \Delta^m x_i| &\leq |i^r \Delta^m x_i^N - i^r \Delta^m x_i| + |i^r \Delta^m x_i^N| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $x = (x_i) \in c_0(\Delta_r^m)$ demektir. O halde $c_0(\Delta_r^m)$ kapalıdır.

Teorem 2.6 $(c_0(\Delta_r^m), \|\cdot\|_{\Delta_r})$ bir Banach uzayıdır.

İspat. Lemma 2.5 ve Teorem 1.13 gereğince $c_0(\Delta_r^m)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.7 $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ uzayları (1) deki norm ile birer BK-uzaylarıdır.

İspat. $\|x^n - x\|_{\Delta_r} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Bu taktirde $k \leq m$ ve $n \rightarrow \infty$ için,

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$$

ve $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\sup_k k^r \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

dir. Dolayısıyla, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^n - x_{k+m}| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \dots \\ &+ \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik gözönüne alınırsa $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi yukarıda tanımladığımız uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını verelim.

1) $c_0(\Delta_r^m) \subset c_0(\Delta_r^{m+1})$ ve $c_0(\Delta_r^m) \neq c_0(\Delta_r^{m+1})$ dir.

$x \in c_0(\Delta_r^m)$ olsun. Bu taktirde $k \rightarrow \infty$ için $k^r |\Delta^m x_k| \rightarrow 0$ dır.

$$\begin{aligned} (k+1)^r \Delta^m x_{k+1} &= (k+1)^r \Delta^m (x_{k+1} - x_k + x_k) \\ &= (k+1)^r \Delta^m (-\Delta x_k) + (k+1)^r \Delta^m x_k \\ &= -(k+1)^r \Delta^{m+1} x_k + (k+1)^r \Delta^m x_k \\ &= \frac{(k+1)^r}{k^r} (k^r \Delta^m x_k - k^r \Delta^{m+1} x_k) \end{aligned}$$

eşitliğini ve buradan da

$$\begin{aligned} (k+1)^r |\Delta^m x_{k+1}| &= \frac{(k+1)^r}{k^r} |k^r \Delta^{m+1} x_k - k^r \Delta^m x_k| \\ &\geq \frac{(k+1)^r}{k^r} |k^r \Delta^{m+1} x_k| - \frac{(k+1)^r}{k^r} |k^r \Delta^m x_k| \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu taktirde

$$\frac{(k+1)^r}{k^r} k^r |\Delta^{m+1} x_k| \leq (k+1)^r |\Delta^m x_{k+1}| + \frac{(k+1)^r}{k^r} k^r |\Delta^m x_k|$$

dir. Buradan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^r}{(k+1)^r} = 1$ olduğundan

$$k^r |\Delta^{m+1} x_k| \leq \frac{k^r}{(k+1)^r} (k+1)^r |\Delta^m x_{k+1}| + k^r |\Delta^m x_k| \rightarrow 0$$

bulunur. Yani $x \in c_0(\Delta_r^{m+1})$ dir.

$c_0(\Delta_r^m) \neq c_0(\Delta_r^{m+1})$ olduğunu bir örnek ile açıklayalım:

a) $r \geq 0$ iken; $x_k = k^m$ seçelim. $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$ olduğundan $(k^r \Delta^{m+1}(k^m)) = (0) \in c_0$ dir, fakat $\Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$ olduğundan $(k^r \Delta^m(k^m)) = ((-1)^m m! k^r) \notin c_0$ dir. Yani $(k^m) \in c_0(\Delta_r^{m+1}) - c_0(\Delta_r^m)$ dir.

b) $r < 0$ iken; $x_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$ seçersek, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^r \Delta^{m+1} x_k = 0$, yani $(k^r \Delta^{m+1} x_k) \in c_0$, fakat $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \notin c_0$ elde edilir. Demek ki $x \in c_0(\Delta_r^{m+1}) - c_0(\Delta_r^m)$ dir.

2) $c(\Delta_r^{m-1}) \subset c(\Delta_r^m)$ ve $c(\Delta_r^{m-1}) \neq c(\Delta_r^m)$ dir.

$x \in c(\Delta_r^{m-1})$ olsun. Bu taktirde enaz bir l için $|k^r \Delta^{m-1} x_k - l| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) dir. $(k+1)^r \Delta^{m-1} x_k$ ifadesini bir kez çıkarıp bir kez ekleyerek

$$\begin{aligned} (k+1)^r \Delta^{m-1} x_{k+1} - l &= (k+1)^r \Delta^{m-1} (x_{k+1} - x_k + x_k) - l \\ &= -(k+1)^r \Delta^m x_k + (k+1)^r \Delta^{m-1} x_k - l \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu taktirde

$$\begin{aligned} |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_{k+1} - l| &= |-(k+1)^r \Delta^m x_k + (k+1)^r \Delta^{m-1} x_k - l| \\ &\geq |(k+1)^r \Delta^m x_k| - |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_k - l| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$(k+1)^r |\Delta^m x_k| \leq |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_{k+1} - l| + |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_k - l|$$

ve iki tarafı $\frac{k^r}{(k+1)^r}$ ile çarpıp, $k \rightarrow \infty$ için limit alarak

$$\begin{aligned} k^r |\Delta^m x_k| &\leq \frac{k^r}{(k+1)^r} |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_{k+1} - l| + \frac{k^r}{(k+1)^r} |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_k - l| \\ &= \frac{k^r}{(k+1)^r} |(k+1)^r \Delta^{m-1} x_{k+1} - l| + |k^r \Delta^{m-1} x_k - \frac{k^r}{(k+1)^r} l| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu $x \in c_0(\Delta_r^m)$ olduğunu verir.

Şimdi $c(\Delta_r^{m-1}) \neq c(\Delta_r^m)$ olduğuna dair bir örnek verelim: $r > 0$ olmak üzere $x_k = \sum_{v=1}^{k-m} \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$ seçelim. Bu taktirde $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \in c$, fakat $(k^r \Delta^{m-1} x_k) \notin c$ dir.

3) $c_0(\Delta_r^m) \subset c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m) \neq c(\Delta_r^m)$ dir.

$x \in c_0(\Delta_r^m)$ olsun. Bu taktirde $(k^r \Delta^m x_k) \in c_0 \subset c$ olup $x \in c(\Delta_r^m)$ dir.

Şimdi $x_k = \sum_{v=1}^{k-m} \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$ seçelim. Bu taktirde $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \in c - c_0$, yani $x \in c(\Delta_r^m) - c_0(\Delta_r^m)$ olur. Demek ki $c_0(\Delta_r^{m-1}) \neq c_0(\Delta_r^m)$ dir.

4) $\ell_\infty(\Delta_r^{m-1}) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve $\ell_\infty(\Delta_r^{m-1}) \neq \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir.

$x \in \ell_\infty(\Delta_r^{m-1})$ olsun. Bu taktirde $k^r |\Delta^{m-1} x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.

$$|\Delta^{m-1} x_{k+1}| = |-\Delta^m x_k + \Delta^{m-1} x_k| \geq |\Delta^m x_k| - |\Delta^{m-1} x_k|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} k^r |\Delta^m x_k| &\leq k^r |\Delta^{m-1} x_{k+1}| + k^r |\Delta^{m-1} x_k| \\ &= \frac{k^r}{(k+1)^r} (k+1)^r |\Delta^{m-1} x_{k+1}| + k^r |\Delta^{m-1} x_k| \leq 2M \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğunu verir.

$\ell_\infty(\Delta_r^{m-1}) \neq \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir. Gerçekten,

- a) $r > 0$ iken; $x_k = k^{m-1}$ seçelim. $(k^r \Delta^m(k^{m-1})) = (0) \in \ell_\infty$, fakat $(k^r \Delta^{m-1}(k^{m-1})) = ((-1)^{m-1}(m-1)!k^r) \notin \ell_\infty$ dir.
- b) $r < 0$ iken; $x_k = \sum_{v=1}^{k-m+1} \binom{k-v-1}{m-2} v^{-r+1}$ seçersek, $(k^r \Delta^m x_k) \in \ell_\infty$, fakat $(k^r \Delta^{m-1} x_k) = (k) \notin \ell_\infty$ elde edilir.

5) $c(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve $c(\Delta_r^m) \neq \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir.

$c(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğu aşikardır. $c(\Delta_r^{m-1}) \neq \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğuna dair bir örnek verelim: $x_k = \sum_{v=1}^{k-m} \binom{k-v-1}{m-1} (-1)^v v^{-r}$ seçelim. Bu taktirde $\Delta^m x_k = (-1)^m (-1)^k k^{-r}$ elde edilir. Buradan $k^r \Delta^m x_k = (-1)^m (-1)^k$ elde edilir. Böylece $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m) - c(\Delta_r^m)$ bulunur.

Sonuç 2.8

- 1) $\cap_{m=1}^\infty c_0(\Delta_r^m) = c_0(\Delta_r^1) = \{x = (x_k) : (k^r \Delta x_k) \in c_0\} \subset c(\Delta_r^1)$
- 2) $\cap_{m=1}^\infty c(\Delta_r^m) = c(\Delta_r^1) \subset \ell_\infty(\Delta_r^1)$
- 3) $\cap_{m=1}^\infty \ell_\infty(\Delta_r^m) = \ell_\infty(\Delta_r^1)$.

Şimdi r 'nin durumuna göre kapsamaları inceleyelim.

a) $r = 0$ için $\ell_\infty(\Delta_r^m) = \ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta_r^m) = c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m) = c_0(\Delta^m)$ elde edilir.

b) $r > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\Delta^m x_k| \leq k^r |\Delta^m x_k|$$

olduğundan, $\ell_\infty(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m) \subset c_0(\Delta^m)$ kapsamaları aşikar olarak sağlanır.

Şimdi $c(\Delta_r^m) \subset c(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in c(\Delta_r^m)$ ise enaz bir $l \in \mathbb{C}$ için

$|k^r \Delta^m x_k - l| \rightarrow 0$ dir.

$$k^r |\Delta^m x_k| \leq |k^r \Delta^m x_k - l| + |l|$$

eşitsizliğinden,

$$|\Delta^m x_k| \leq k^{-r} |k^r \Delta^m x_k - l| + k^{-r} |l|$$

bulunur. $r > 0$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ için $k^{-r} \rightarrow 0$ ve bu nedenle $|\Delta^m x_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) bulunur. Yani $x \in c(\Delta^m)$ dir. Böylece $c(\Delta_r^m) \subset c(\Delta^m)$ olur.

Bu kapsamalar kesindir. Örneğin $x_k = k^m$ alırsak $\Delta^m(k^m) = (-1)^m m! \in \ell_\infty$, fakat $k^r \Delta^m(k^m) = k^r (-1)^m m! \notin \ell_\infty$ bulunur. Böylece $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$, fakat $x \notin \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olur.

$x_k = k^m$ seçersek $(\Delta^m(k^m)) = ((-1)^m m!) \in c$, yani $x \in c(\Delta^m)$ dir. Fakat $(k^r \Delta^m(k^m)) = (k^r (-1)^m m!) \notin c$, yani $x \notin c(\Delta_r^m)$ dir ve kapsama kesindir.

Benzer şekilde,

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$$

seçersek, $\Delta^m x_k = k^{-r}$ olur ve $r > 0$ olduğundan $(\Delta^m x_k) = (k^{-r}) \in c_0$ elde edilir. $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \notin c_0$ olduğundan, $c_0(\Delta_r^m) \subset c_0(\Delta^m)$ kapsamasının kesin olduğu görülür.

c) $r < 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$k^r |\Delta^m x_k| \leq |\Delta^m x_k|$$

olduğundan, $\ell_\infty(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta_r^m)$ dir.

Şimdi $c(\Delta^m) \subset c(\Delta_r^m)$ olduğunu gösterelim. $x \in c(\Delta^m)$ ise en az bir $l \in \mathbb{C}$ için $|\Delta^m x_k - l| \rightarrow 0$ dir.

$$|\Delta^m x_k| \leq |\Delta^m x_k - l| + |l|$$

eşitsizliğini kullanarak

$$k^r |\Delta^m x_k| \leq k^r |\Delta^m x_k - l| + k^r |l|$$

yazabiliriz. $r < 0$ olduğundan, $k \rightarrow \infty$ için $k^r \rightarrow 0$ ve bu nedenle $|k^r \Delta^m x_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) elde edilir. Yani $x \in c(\Delta_r^m)$ dir.

Bu kapsamalar kesindir. Gerçekten

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$$

seçersek, $\Delta^m x_k = k^{-r}$ ve $r < 0$ olduğundan $(\Delta^m x_k) = (k^{-r}) \notin \ell_\infty$, fakat $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \in \ell_\infty$ olur. Böylece $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$, fakat $x \notin \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir.

Şimdi $(x_k) = (k^m)$ seçelim. Bu taktirde $(\Delta^m(k^m)) = ((-1)^m m!) \notin c_0$, yani $x \notin c_0(\Delta^m)$ dir. Fakat $(k^r \Delta^m(k^m)) = (k^r (-1)^m m!) \in c_0$, yani $x \in c_0(\Delta_r^m)$ dir. Demek ki kapsama kesindir.

Benzer şekilde $c(\Delta^m) \subset c(\Delta_r^m)$ kapsamasının kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r}$$

seçelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_k = k^{-r}$ olup, $r < 0$ olduğundan $(\Delta^m x_k) = (k^{-r}) \notin c$, fakat $(k^r \Delta^m x_k) = (1) \in c$ olur. Böylece $x \in c(\Delta_r^m)$, fakat $x \notin c(\Delta^m)$ dir.

Sonuç 2.9 $r_1 < r_2$ ise $\ell_\infty(\Delta_{r_2}^m) \subset \ell_\infty(\Delta_{r_1}^m)$, $c_0(\Delta_{r_2}^m) \subset c_0(\Delta_{r_1}^m)$ ve $c(\Delta_{r_2}^m) \subset c_0(\Delta_{r_1}^m)$ dir.

İspat. $r_1 < r_2$ için $k^{r_1} < k^{r_2}$ olduğundan

$$k^{r_1} |\Delta^m x_k| < k^{r_2} |\Delta^m x_k|$$

eşitsizliğinden $\ell_\infty(\Delta_{r_2}^m) \subset \ell_\infty(\Delta_{r_1}^m)$ ve $c_0(\Delta_{r_2}^m) \subset c_0(\Delta_{r_1}^m)$ elde edilir. $c(\Delta_{r_2}^m) \subset c_0(\Delta_{r_1}^m)$ olduğunu göstermek için $x \in c(\Delta_{r_2}^m)$ alalım. Bu taktirde $|k^{r_2} \Delta^m x_k - l| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $l \in \mathbb{C}$ vardır. $k^{r_1} < k^{r_2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} k^{r_1} |\Delta^m x_k| &= k^{r_1} |\Delta^m x_k - k^{-r_2} l + k^{-r_2} l| \\ &\leq k^{r_1} |\Delta^m x_k - k^{-r_2} l| + k^{r_1-r_2} |l| \\ &\leq k^{r_2} |\Delta^m x_k - k^{-r_2} l| + k^{r_1-r_2} |l| \\ &= |k^{r_2} \Delta^m x_k - l| + k^{r_1-r_2} |l| \end{aligned}$$

elde edilir. $k^{r_1-r_2} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) olduğundan $k^{r_1}|\Delta^m x_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) elde edilir ki bu da $x \in c_0(\Delta_{r_1}^m)$ demektir.

Sonuç 2.10 $r_1 < r_2$ olsun. Bu takdirde

- 1) $c_0(\Delta_{r_2}^m) \subset c_0(\Delta_{r_1}^{m+1})$,
- 2) $c(\Delta_{r_2}^{m-1}) \subset c(\Delta_{r_1}^m)$,
- 3) $c_0(\Delta_{r_2}^m) \subset c(\Delta_{r_1}^m)$,
- 4) $\ell_\infty(\Delta_{r_2}^{m-1}) \subset \ell_\infty(\Delta_{r_1}^m)$,
- 5) $c(\Delta_{r_2}^m) \subset \ell_\infty(\Delta_{r_1}^m)$

dir.

İspat uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarından ve Sonuç 2.9 dan aşıkardır.

Uyarı: ℓ_∞ , c ve c_0 uzayları birer dizi cebiri oldukları halde $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ uzayları birer dizi cebiri değildir. Gerçekten $r > 0$ iken $x = (k)$ ve $y = (k^{m-1})$ seçersek $x, y \in c_0(\Delta_r^m)$ olduğu halde $x.y \notin c_0(\Delta_r^m)$ dir. $-1 < r < 0$ iken $x = (k)$ ve

$$y = \left(\sum_{v=1}^{k-m+1} \binom{k-v-1}{m-2} v^{-r} \right)$$

seçelim. $x, y \in c_0(\Delta_r^m)$ olduğu halde $x.y \notin c_0(\Delta_r^m)$ dir. $-1 < r < 0$ iken $x = (k)$ ve $y = (k^m)$ seçersek $x, y \in c(\Delta_r^m)$ ve $x, y \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğu halde $x.y \notin c(\Delta_r^m)$ ve $x.y \notin \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir. Çünkü $(k^r \Delta^m x_k) = (0) \in c \subset \ell_\infty$, $(k^r \Delta^m y_k) = ((-1)^m k^r m!) \in c \subset \ell_\infty$, fakat $(k^r \Delta^m (k^{m+1})) = ((-1)^{m+2} k^r (m+1)!(k + \frac{m}{2})) \notin \ell_\infty$ ve bu nedenle bu dizi c 'ye de ait değildir.

Şimdi D operatörünü

$$\begin{aligned} D : \ell_\infty(\Delta_r^m) &\longrightarrow \ell_\infty(\Delta_r^m) \\ x &\longrightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. D lineerdir. Gerçekten $x, y \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve α skaleri için,

$$\begin{aligned} 1) D(x+y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\ &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\ &= Dx + Dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\
&= \alpha(0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\
&= \alpha D x
\end{aligned}$$

dir. D sınırlıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\|Dx\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k k^r |\Delta^m y_k| \\
&= \sup\{1^r |\Delta^m y_1|, 2^r |\Delta^m y_2|, \dots, m^r |\Delta^m y_m|, (m+1)^r |\Delta^m y_{m+1}|, \dots\} \\
&= \sup\{1^r \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, 2^r \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots \\
&\quad, m^r \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, (m+2)^r |\Delta^m x_{m+2}|, \dots\}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \\
&= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup\{1^r |\Delta^m x_1|, 2^r |\Delta^m x_2|, \dots, m^r |\Delta^m x_m|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, \dots\}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\|Dx\|_{\Delta_r} \leq K \|x\|_{\Delta_r}$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$D[\ell_\infty(\Delta_r^m)] = D\ell_\infty(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : x \in \ell_\infty(\Delta_r^m) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$ kümesini tanımlayalım. Bu küme $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ nin bir altuzayı olup, $D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ üzerindeki norm,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_\infty = \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi,

$$\begin{aligned}
\Delta_r^m : D\ell_\infty(\Delta_r^m) &\rightarrow \ell_\infty \\
x = (x_k) &\rightarrow \Delta_r^m(x) = y = (y_k) = (k^r \Delta^m x_k)
\end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım. Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ_r^m nin lineerliği açıktır. Δ_r^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ_r^m birebirdir. $x, y \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ alalım ve $\Delta_r^m(x) = \Delta_r^m(y)$, yani her $k \in \mathbb{N}$ için $k^r \Delta^m x_k = k^r \Delta^m y_k$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m(x_k - y_k) = 0$ bulunur. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}\Delta^m(x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0} (x_k - y_k) - \binom{m}{1} (x_{k+1} - y_{k+1}) + \dots \\ &\quad + (-1)^m \binom{m}{m} (x_{k+m} - y_{k+m}) = 0\end{aligned}$$

olacağından, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ_r^m örtendir. $\forall y \in \ell_\infty$ için $y_k = k^r \Delta^m x_k$ olacak şekilde enaz bir $x \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r} y_v, & k > m \text{ ise} \end{cases} \quad (7)$$

olarak seçilirse $y_k = k^r \Delta^m x_k$ elde edilir.

3) Δ_r^m sınırlıdır.

$$\|\Delta_r^m\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m x\|_\infty}{\|x\|_{\Delta_r}} = 1$$

4) $(\Delta_r^m)^{-1}$ sınırlı ve

$$y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r} x_v$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\Delta_r^m)^{-1} : \ell_\infty &\rightarrow D\ell_\infty(\Delta_r^m) \\ x &\rightarrow ((\Delta_r^m)^{-1} x)_k = (y_k) = (\Delta^m)^{-1} (k^{-r} x_k)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\|(\Delta_r^m)^{-1}\| &= \sup_{x \neq \theta} \frac{\|y\|_{\Delta_r}}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m y\|_\infty}{\|x\|_\infty} \\ &= \sup_{x \neq \theta} \frac{\sup_k |k^r \Delta^m ((\Delta^m)^{-1} (k^{-r} x_k))|}{\sup_k |x_k|} = \sup_{x \neq \theta} \frac{\sup_k |x_k|}{\sup_k |x_k|} = 1\end{aligned}$$

dir. O halde Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ ile ℓ_∞ uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_\infty = \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

ve

$$\begin{aligned} \|(\Delta_r^m)^{-1}x\|_{\Delta_r} &= \|(\Delta^m)^{-1}(k^{-r}x_k)\|_{\Delta_r} = \sup_k |k^r \Delta^m((\Delta^m)^{-1}(k^{-r}x_k))| \\ &= \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty \end{aligned}$$

olduğundan Δ_r^m ve $(\Delta_r^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

$[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]'$ ve ℓ'_∞ , sırası ile, $D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve ℓ_∞ uzaylarının sürekli duallerini gösterebilirler.

$$\begin{aligned} T : [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]' &\rightarrow \ell'_\infty \\ f_\Delta &\rightarrow T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir lineer izometridir. Gerçekten $f_\Delta, g_\Delta \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]'$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} + g_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T(\alpha f_\Delta) &= (\alpha f_\Delta) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= \alpha(f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1}) \\ &= \alpha T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu, yani $\|f_\Delta\| = \|T(f_\Delta)\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta(x)|, \quad x \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$$

ve

$$\begin{aligned}
\|T(f_\Delta)\| = \|f\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1} |f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1}(x)|, \quad x \in \ell_\infty \\
&= \sup_{\|(\Delta_r^m)^{-1}(k^{-r}x_k)\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta((\Delta_r^m)^{-1}(x))| \\
&= \sup_{\|y\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta(y)| = \|f_\Delta\|
\end{aligned}$$

olduğundan, T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in \ell'_\infty$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde enaz bir $f_\Delta \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]'$ vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
T(f_\Delta) &= T(f \circ \Delta_r^m) \\
&= (f \circ \Delta_r^m) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\
&= f \circ (\Delta_r^m \circ (\Delta_r^m)^{-1}) = f
\end{aligned}$$

dir. Demek ki $T : [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]' \rightarrow \ell'_\infty$ bir lineer izometridir. O halde $D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ 'nin duali ℓ_∞ 'un dualine denktir.

Şimdi D operatörünü

$$\begin{aligned}
D : c(\Delta_r^m) &\longrightarrow c(\Delta_r^m) \\
x &\longrightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. D lineerdir. Gerçekten $x, y \in c(\Delta_r^m)$ ve α skaleri için,

$$\begin{aligned}
1) \quad D(x+y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\
&= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\
&= Dx + Dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\
&= \alpha(0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\
&= \alpha Dx
\end{aligned}$$

dir. D sınırlıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\|Dx\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k k^r |\Delta^m y_k| \\
&= \sup\{1^r |\Delta^m y_1|, 2^r |\Delta^m y_2|, \dots, m^r |\Delta^m y_m|, (m+1)^r |\Delta^m y_{m+1}|, \dots\} \\
&= \sup\{1^r \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, 2^r \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots \\
&\quad, m^r \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, (m+2)^r |\Delta^m x_{m+2}|, \dots\}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \\
&= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup\{1^r |\Delta^m x_1|, 2^r |\Delta^m x_2|, \dots, m^r |\Delta^m x_m|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, \dots\}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\|Dx\|_{\Delta_r} \leq K \|x\|_{\Delta_r}$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$D[c(\Delta_r^m)] = Dc(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : x \in c(\Delta_r^m) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$ kümesini tanımlayalım. Bu küme $c(\Delta_r^m)$ 'nin bir altuzayı olup, $Dc(\Delta_r^m)$ üzerindeki norm,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_{\infty} = \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi Δ_r^m operatörünü

$$\begin{aligned}
\Delta_r^m : Dc(\Delta_r^m) &\rightarrow c \\
x = (x_k) &\rightarrow \Delta_r^m(x) = y = (y_k) = (k^r \Delta^m x_k)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ_r^m nin lineerliği açıktır. Δ_r^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ_r^m birebirdir. $x, y \in Dc(\Delta_r^m)$ alalım ve $\Delta_r^m(x) = \Delta_r^m(y)$, yani her $k \in \mathbb{N}$ için $k^r \Delta^m x_k = k^r \Delta^m y_k$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m(x_k - y_k) = 0$ bulunur.

Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}\Delta^m(x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0} (x_k - y_k) - \binom{m}{1} (x_{k+1} - y_{k+1}) \\ &\quad + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} (x_{k+m} - y_{k+m}) = 0\end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ_r^m örtendir. $\forall y \in c$ için $y_k = k^r \Delta^m x_k$ olacak şekilde enaz bir $x \in Dc(\Delta_r^m)$ vardır. Gerçekten (x_k) , (7) deki gibi seçilirse $y_k = k^r \Delta^m x_k$ elde edilir.

3) Δ_r^m sınırlıdır.

$$\|\Delta_r^m\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m x\|_\infty}{\|x\|_{\Delta_r}} = 1$$

4) $(\Delta_r^m)^{-1}$ sınırlı ve

$$y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r} x_v$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\Delta_r^m)^{-1} : c &\rightarrow Dc(\Delta_r^m) \\ x &\rightarrow ((\Delta_r^m)^{-1} x)_k = (y_k) = (\Delta^m)^{-1} (k^{-r} x_k)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\|(\Delta_r^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|y\|_{\Delta_r}}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m y\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1$$

dir. O halde Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $Dc(\Delta_r^m)$ ile c uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_\infty = \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

ve

$$\begin{aligned}\|(\Delta_r^m)^{-1} x\|_{\Delta_r} &= \|(\Delta^m)^{-1} (k^{-r} x_k)\|_{\Delta_r} = \sup_k |k^r \Delta^m ((\Delta^m)^{-1} (k^{-r} x_k))| \\ &= \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty\end{aligned}$$

olduğundan Δ_r^m ve $(\Delta_r^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

Eğer T operatörünü

$$\begin{aligned} T : [Dc(\Delta_r^m)]' &\rightarrow c' \\ f_\Delta &\rightarrow T(f_\Delta) = f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak, T dönüşümü bir lineer izometridir. Gerçekten her $f_\Delta, g_\Delta \in [Dc(\Delta_r^m)]'$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad T(f_\Delta + g_\Delta) &= (f_\Delta + g_\Delta) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} + g_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= T(f_\Delta) + T(g_\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T(\alpha f_\Delta) &= (\alpha f_\Delta) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= \alpha(f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1}) \\ &= \alpha T(f_\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu, yani $\|f_\Delta\| = \|T(f_\Delta)\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta(x)|, \quad x \in Dc(\Delta_r^m)$$

ve

$$\begin{aligned} \|T(f_\Delta)\| = \|f\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1} |f_\Delta \circ (\Delta_r^m)^{-1}(x)|, \quad x \in c \\ &= \sup_{\|(\Delta_r^m)^{-1}(x)\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta((\Delta_r^m)^{-1}(x))| \\ &= \sup_{\|y\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta(y)| = \|f_\Delta\| \end{aligned}$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in c'$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde enaz bir $f_\Delta \in [Dc(\Delta_r^m)]'$ vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} T(f_\Delta) &= T(f \circ \Delta_r^m) \\ &= (f \circ \Delta_r^m) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= f \circ (\Delta_r^m \circ (\Delta_r^m)^{-1}) = f \end{aligned}$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[Dc(\Delta_r^m)]'$ ile c' uzayları denk topolojik uzaylardır. Böylece $\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ olmak üzere $[Dc(\Delta_r^m)]' \cong \ell_1$ dir.

Şimdi D operatörünü

$$\begin{aligned} D : c_0(\Delta_r^m) &\longrightarrow c_0(\Delta_r^m) \\ x &\longrightarrow Dx = y = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. $x, y \in c_0(\Delta_r^m)$ ve α skaleri için,

$$\begin{aligned} 1) \quad D(x + y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\ &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\ &= Dx + Dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha(0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha Dx \end{aligned}$$

olduğundan D lineerdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|Dx\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k k^r |\Delta^m y_k| \\ &= \sup\{1^r |\Delta^m y_1|, 2^r |\Delta^m y_2|, \dots, m^r |\Delta^m y_m|, (m+1)^r |\Delta^m y_{m+1}|, \dots\} \\ &= \sup\{1^r \left| \sum_{v=m}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+1} \right|, 2^r \left| \sum_{v=m-1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+2} \right|, \dots \\ &\quad, m^r \left| \sum_{v=1}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{v+m} \right|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, (m+2)^r |\Delta^m x_{m+2}|, \dots\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Delta_r} &= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k k^r |\Delta^m x_k| \\ &= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup\{1^r |\Delta^m x_1|, 2^r |\Delta^m x_2|, \dots, m^r |\Delta^m x_m|, (m+1)^r |\Delta^m x_{m+1}|, \dots\} \end{aligned}$$

olduğundan $\|Dx\|_{\Delta_r} \leq K \|x\|_{\Delta_r}$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. O halde D sınırlıdır.

$D[c_0(\Delta_r^m)] = Dc_0(\Delta_r^m) = \{x = (x_k) : x \in c_0(\Delta_r^m) \text{ ve } x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$
kümesi $c_0(\Delta_r^m)$ uzayının bir altuzayı olup, $Dc_0(\Delta_r^m)$ üzerindeki norm,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_{\infty} = \sup_k k^r |\Delta_r^m x_k|$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi,

$$\begin{aligned} \Delta_r^m : Dc_0(\Delta_r^m) &\rightarrow c_0 \\ x = (x_k) &\rightarrow \Delta_r^m(x) = y = (y_k) = (k^r \Delta_r^m x_k) \end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım. Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Δ_r^m nin lineerliği açıktır. Δ_r^m nin homeomorfizm olduğunu gösterelim.

1) Δ_r^m birebirdir. $x, y \in Dc_0(\Delta_r^m)$ alalım ve $\Delta_r^m(x) = \Delta_r^m(y)$, yani her $k \in \mathbb{N}$ için $k^r \Delta_r^m x_k = k^r \Delta_r^m y_k$ olsun. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta_r^m(x_k - y_k) = 0$ bulunur.

Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} \Delta_r^m(x_k - y_k) &= \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - y_{k+v}) \\ &= \binom{m}{0} (x_k - y_k) - \binom{m}{1} (x_{k+1} - y_{k+1}) + \dots \\ &\quad + (-1)^m \binom{m}{m} (x_{k+m} - y_{k+m}) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ elde edilir. O halde $x = y$ dir.

2) Δ_r^m örtendir. $\forall y \in c_0$ için $y_k = k^r \Delta_r^m x_k$ olacak şekilde enaz bir $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ vardır. Gerçekten (x_k) , (7) deki gibi seçilirse $y_k = k^r \Delta_r^m x_k$ elde edilir.

3) Δ_r^m sınırlıdır.

$$\|\Delta_r^m\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m x\|_{\infty}}{\|x\|_{\Delta_r}} = 1$$

4) $(\Delta_r^m)^{-1}$ sınırlı ve

$$y_k = \sum_{v=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-v-1}{m-1} v^{-r} x_v$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\Delta_r^m)^{-1} : c_0 &\rightarrow Dc_0(\Delta_r^m) \\ x &\rightarrow ((\Delta_r^m)^{-1}x)_k = (y_k) = (\Delta^m)^{-1}(k^{-r}x_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\|(\Delta_r^m)^{-1}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|y\|_{\Delta_r}}{\|x\|_{\infty}} = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\Delta_r^m y\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = 1$$

dir. O halde Δ_r^m bir lineer homeomorfizmdir. Buradan $Dc_0(\Delta_r^m)$ ile c_0 uzayları denk topolojik uzaylardır. Bundan başka,

$$\|x\|_{\Delta_r} = \|\Delta_r^m x\|_{\infty} = \sup_k k^r |\Delta^m x_k|$$

ve

$$\begin{aligned} \|(\Delta_r^m)^{-1}x\|_{\Delta_r} &= \|(\Delta^m)^{-1}(k^{-r}x_k)\|_{\Delta_r} = \sup_k |k^r \Delta^m((\Delta^m)^{-1}(k^{-r}x_k))| \\ &= \sup_k |x_k| = \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

olduğundan Δ_r^m ve $(\Delta_r^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

Eğer T operatörünü

$$\begin{aligned} T : [Dc_0(\Delta_r^m)]' &\rightarrow c_0' \\ f_{\Delta} &\rightarrow T(f_{\Delta}) = f_{\Delta} \circ (\Delta_r^m)^{-1} = f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak, T dönüşümü bir lineer izometri olur. Gerçekten $f_{\Delta}, g_{\Delta} \in [Dc_0(\Delta_r^m)]'$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

$$\begin{aligned} 1) \quad T(f_{\Delta} + g_{\Delta}) &= (f_{\Delta} + g_{\Delta}) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= f_{\Delta} \circ (\Delta_r^m)^{-1} + g_{\Delta} \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= T(f_{\Delta}) + T(g_{\Delta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T(\alpha f_{\Delta}) &= (\alpha f_{\Delta}) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= \alpha(f_{\Delta} \circ (\Delta_r^m)^{-1}) \\ &= \alpha T(f_{\Delta}) \end{aligned}$$

olduğundan T lineerdir. Şimdi T nin normu koruduğunu, yani $\|f_\Delta\| = \|T(f_\Delta)\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|f_\Delta\| = \sup_{\|x\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta(x)|, \quad x \in Dc_0(\Delta_r^m)$$

ve

$$\begin{aligned} \|T(f_\Delta)\| = \|f\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1} |f_\Delta \circ ((\Delta_r^m)^{-1}(x))|, \quad x \in c_0 \\ &= \sup_{\|(\Delta_r^m)^{-1}(k^{-r}x_k)\|_{\Delta_r}=1} |f_\Delta((\Delta_r^m)^{-1}(x))| \\ &= \sup_{\|y\|_{\Delta_r^{-1}}=1} |f_\Delta(y)| = \|f_\Delta\| \end{aligned}$$

olduğundan T normu korur. Buradan T bir lineer izometridir. T nin birebir olduğu açıktır. Diğer taraftan T örtendir. Çünkü her $f \in c'_0$ için $T(f_\Delta) = f$ olacak şekilde enaz bir $f_\Delta \in [Dc_0(\Delta_r^m)]'$ vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} T(f_\Delta) &= T(f \circ \Delta_r^m) \\ &= (f \circ \Delta_r^m) \circ (\Delta_r^m)^{-1} \\ &= f \circ (\Delta_r^m \circ (\Delta_r^m)^{-1}) = f \end{aligned}$$

dir. Buradan T bir lineer izomorfizmdir. O halde $[Dc_0(\Delta_r^m)]'$ ile c'_0 uzayları denk topolojik uzaylardır. Böylece $\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ olmak üzere $[Dc_0(\Delta_r^m)]' \cong \ell_1$ dir.

3. BÖLÜM

DUAL UZAYLAR

Bu bölümde $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ uzaylarının α -, β - ve γ - duallerini vereceğiz. Bu kısımda $k - m < 1$ için $\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} u_j = 0$ alınacaktır.

Lemma 3.1 (Kızmaz, 1981) (p_n) pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olsun.

i) Eğer $\sup_n |\sum_{v=1}^n p_v a_v| < \infty$ ise $\sup_n |p_n \sum_{k=n+1}^\infty a_k| < \infty$,

ii) Eğer $\sum_k p_k a_k$ yakınsak ise $\lim_n p_n \sum_{k=n+1}^\infty a_k = 0$

dir.

Teorem 3.2

$$M_\alpha(r) = \{a \in \omega : \sum_{k=1}^\infty |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} < \infty\}$$

olmak üzere

$$[c_0(\Delta_r^m)]^\alpha = [c(\Delta_r^m)]^\alpha = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha = M_\alpha(r)$$

dir.

İspat. $a \in M_\alpha(r)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} < \infty \quad (8)$$

dir. $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olsun. Buna göre $k^r |\Delta^m x_k| \leq M$ ($k = 1, 2, \dots$) olacak şekilde pozitif bir M sabiti vardır. Ayrıca

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} x_j$$

yazılabilir ve $k = 2m, 2m+1, \dots$ için aşıkarak

$$\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \geq \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} j^{-r} \quad (9)$$

dir. Enaz sabit bir N için $|\Delta^{m-j} x_j| \leq N j^{-r}$ ($1 \leq j \leq m$) olduğundan, $a \in M_\alpha(r)$ olması (9) gereğince

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty \quad (10)$$

olmasını gerektirir. Bu durumda (8) ve (10) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} x_j| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} |\Delta^m x_j| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| \\
&\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $M_\alpha(r) \subset [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha$ olur. Demek ki $M_\alpha(r) \subset [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha \subset [c(\Delta_r^m)]^\alpha \subset [c_0(\Delta_r^m)]^\alpha$ dır.

Tersine $a \in [c_0(\Delta_r^m)]^\alpha - M_\alpha(r)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \geq s+1 \quad (s=0,1,\dots) \quad (11)$$

olacak şekilde $1 = k(0) < k(1) < \dots$ şartına uyan bir $(k(s))_{s=0}^\infty$ pozitif tamsayılar dizisi vardır. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{l=0}^{s-1} \frac{1}{l+1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} + \frac{1}{s+1} \sum_{j=k(s)}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \\
(k(s) \leq k \leq k(s+1)-1; s=0,1,\dots)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$|k^r \Delta^m x_k| = \frac{1}{s+1} \quad (k(s) \leq k \leq k(s+1)-1; s=0,1,\dots)$$

yani $x \in c_0(\Delta_r^m)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k x_k| &= \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \left(\sum_{l=0}^{s-1} \frac{1}{l+1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s+1} \sum_{j=k(s)}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right) \\
&\geq \frac{1}{s+1} \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} > 1 \quad (s=0,1,\dots)
\end{aligned}$$

elde edilir, yani $ax \notin \ell_1$ dir. Böylece $[c_0(\Delta_r^m)]^\alpha \subset M_\alpha(r)$ olur. Buna göre $[\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha \subset [c(\Delta_r^m)]^\alpha \subset [c_0(\Delta_r^m)]^\alpha \subset M_\alpha(r)$ olacağından $[c_0(\Delta_r^m)]^\alpha = [c(\Delta_r^m)]^\alpha = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha = M_\alpha(r)$ elde edilir.

Teorem 3.3

$$M_{\alpha\alpha}(r) = \{a \in \omega : \sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} < \infty \}$$

olmak üzere,

$$[c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [c(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(r)$$

dir.

İspat. $[c_0(\Delta_r^m)]^\alpha = [c(\Delta_r^m)]^\alpha = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\alpha$ olduğundan $[c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [c(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha}$ dir. Bu nedenle $[c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(r)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in M_{\alpha\alpha}(r)$ ve $x \in [c_0(\Delta_r^m)]^\alpha = M_\alpha(r)$ olsun (Teorem 3.2). Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \\ &\leq \left(\sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} \right) \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \\ &< \infty \end{aligned}$$

dir. Yani $M_{\alpha\alpha}(r) \subset [c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha}$ dir.

Tersine $a \notin M_{\alpha\alpha}(r)$ olsun. Bu taktirde

$$\sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} = \infty$$

dir. Buradan,

$$|a_{k(s)}| \left[\sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} > s^{m+1} \quad (s = m+1, m+2, \dots)$$

olacak şekilde $k(s) \geq m+1$ şartına uyan, tamsayıların kesin artan bir $(k(s))$ dizisi mevcuttur. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} |a_{k(s)}|^{-1}, & k=k(s) \\ 0, & k \neq k(s), \quad (s=m+1, m+2, \dots) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} = \sum_{s=m+1}^{\infty} |a_{k(s)}|^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} j^{-r}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{-(m+1)} \left[\sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} j^{-r} \right]^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} j^{-r} \\
&= \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{-(m+1)} < \infty \quad (m \geq 1)
\end{aligned}$$

olup, buradan $x \in [c_0(\Delta_r^m)]^\alpha$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{s=1}^{\infty} |a_{k(s)}| |a_{k(s)}|^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} 1 = \infty$ bulunur. Bu $a \notin [c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha}$ olduğunu verir. Demek ki $[c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} \subset M_{\alpha\alpha}(r)$ dir. Dolayısıyla $[c_0(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [c(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(r)$ bulunur.

Teorem 3.4

$$\begin{aligned}
M_\beta(r) = \{a \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \text{ yakınsak, ve} \\
\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty \}
\end{aligned}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

$$[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta = M_\beta(r)$$

dir.

İspat. Eğer $x \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ ise, bu taktirde (7) gereğince yeterince büyük k 'lar, örneğin $k > m$ için

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \\
&= \sum_{j=1}^k (-1)^m \binom{k+m-j-1}{m-1} (j-m)^{-r} y_{j-m}
\end{aligned}$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olacak şekilde birtek $y = (y_k) \in \ell_\infty$ mevcuttur. $a \in M_\beta(r)$ olsun ve $\binom{-1}{-1} = 1$ olduğunu kabul edelim (n, r, k tamsayılar olmak üzere $k < 0$ için $\binom{r}{k} = 0$ ve $n < k$ ise $\binom{n}{k} = 0$ olarak alınacaktır). Bu durumda

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j - R_n \sum_{j=1}^{n-m} (-1)^m \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \\
&= (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j - R_n x_n \tag{12}
\end{aligned}$$

dir. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}$ yakınsak olduğundan Lemma 3.1(ii) de $p_k = \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}$ alırsak,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_n R_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (12) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $|y_j| \leq M$ ve $a \in M_\beta(r)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j| &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j \tag{13}$$

serisi mutlak yakınsaktır ve mutlak yakınsak her seri aynı zamanda yakınsak olacağından bu seri yakınsaktır. Ayrıca $\forall j \in \mathbb{N}$ için $|y_j| \leq M$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} = 0$ olduğundan,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} y_j| \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} = 0 \tag{14}$$

yani $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n x_n = 0$ bulunur. Böylece (12) de, (13) ve (14) gözönüne alınırsa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi her $x \in D\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ için yakınsak olur. Buradan $a \in [D\ell_{\infty}(\Delta_r^m)]^\beta$ elde edilir.

Tersine, $a \in [D\ell_{\infty}(\Delta_r^m)]^\beta$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her bir $x \in D\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $x = (x_k) \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olur. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}$ serisi yakınsak olur. Lemma 3.1(ii) gereğince $n \rightarrow \infty$ iken $R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} \rightarrow 0$ dir.

Şimdi $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta - M_\beta(r)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$ serisi ıraksaktır, yani $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ dir. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = 1$ olduğundan, açıkça $x = (x_k) \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olur. Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz. $((\sum_{v=1}^{n-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}) (\sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r})^{-1}) \in \ell_\infty$ olacağından, $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k &= - \sum_{k=1}^{\infty} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} = \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$ olması ile çelişir. Demek ki $a \notin M_\beta(r)$ kabulümüz doğru olmayıp $a \in M_\beta(r)$ dir.

Teorem 3.5

$$\begin{aligned} M_\gamma(r) = \{a \in \omega : \sup_n | \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} | < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty \} \end{aligned}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

$$[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma = M_\gamma(r)$$

dir.

İspat. Eğer $x \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ ise, bu taktirde (7) gereğince yeterince büyük k , örneğin $k > m$ için

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^m \binom{k+m-j-1}{m-1} (j-m)^{-r} y_{j-m} \end{aligned}$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olacak şekilde birtek $y = (y_k) \in \ell_\infty$ mevcuttur.

$a \in M_\gamma(r)$ olsun ve her k için $|y_k| \leq M$ ($M > 0$) alalım. Bu taktirde (12) eşitliği kullanılarak

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \leq M \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} + M |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r}$$

elde edilir. Lemma 3.1(i) gereğince

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right| < \infty$$

olması

$$\sup_n |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} < \infty \quad (15)$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $a \in M_\gamma(r)$ olması nedeniyle (15) gözönüne alınır

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty$$

olur ve böylece $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ elde edilir.

Tersine, $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her bir $x \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ için $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty$ dir. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $x = (x_k) \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olur. $n > m$ için

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \quad (16)$$

yazılabileceğinden,

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right| < \infty$$

elde edilir. Lemma 3.1(i) den $\sup_n |R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r}| < \infty$ dir.

Şimdi $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma - M_\gamma(r)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$ iraksaktır, yani $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ dir. Bu $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmadığını verir. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = 1$ olduğundan, açıkça $x = (x_k) \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olur. Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^m R_{k-1} \Delta x_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

olup $\sum_{k=1}^m R_{k-1} \Delta x_{k-1} = 0$ dir. Buradan $\forall n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} - R_n x_n$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $(R_n x_n)$ dizisi sınırlı fakat ilk terimi genel terim kabul eden dizi sınırlı olmadığından $(\sum_{k=1}^n a_k x_k)$ sınırlı değildir. Bu ise $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ olması ile çelişir. Çelişkiye $a \notin M_\gamma(r)$ olarak düştük, demek ki $a \in M_\gamma(r)$ dir.

Lemma 3.6 $\eta = \beta$ veya γ olmak üzere $[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\eta = [Dc(\Delta_r^m)]^\eta$ dir.

İspat. (i) $\eta = \beta$ alalım. $Dc(\Delta_r^m) \subset D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğundan $[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta \subset [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ dir. $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ olsun. Bu taktirde her $x \in Dc(\Delta_r^m)$ için $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$

yakınsaktır. Terimleri

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

elde edilir. Demek ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}$ yakınsaktır. Lemma 3.1(ii) gereğince $n \rightarrow \infty$ iken $R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} \rightarrow 0$ dir.

Şimdi $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta - [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$, yani $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta - M_\beta(r)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ olur. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = 1$ olduğundan $x = (x_k) \in Dc(\Delta_r^m)$ bulunur. Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz. $((\sum_{v=1}^{n-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}) (\sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r})^{-1}) \in \ell_\infty$ olacağından, $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} = \infty$$

elde ederiz. Bu ise $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ olması ile çelişir. O halde $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$ elde edilir.

ii) $\eta = \gamma$ alalım. $Dc(\Delta_r^m) \subset D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğundan $[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma \subset [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma$ dir. $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma$ olsun. Bu taktirde her $x \in Dc(\Delta_r^m)$ için $\sup_n |\sum_{k=1}^n a_k x_k| < \infty$ dir. Terimleri

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

yazılabileceğinden

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right| < \infty$$

elde edilir. Lemma 3.1(i) den $\sup_n |R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r}| < \infty$ dir.

Şimdi $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma - [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$, yani $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma - M_\gamma(r)$ olsun. Bu takdirde $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ dir. Buradan $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = 1$ olduğundan $x = (x_k) \in Dc(\Delta_r^m)$ bulunur. Bu takdirde $\forall n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} - R_n x_n$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $(R_n x_n)$ dizisi sınırlı fakat ilk terimi genel terim kabul eden dizi sınırlı olmadığından $(\sum_{k=1}^n a_k x_k)$ sınırlı değildir. Bu ise $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma$ olması ile çelişir. Çelişkiye $a \notin [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ olarak düştük, demek ki $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ dir.

Teorem 3.7 c_0^+ , c_0 daki bütün pozitif terimli dizilerin cümlesi ve $v \in c_0^+$ olsun.

$$M_{\beta,0}(r) = \{a \in \omega : \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \text{ yakınsak, ve} \\ \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+\}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^\infty a_v$ olmak üzere

$$[Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta = M_{\beta,0}(r)$$

dir.

İspat. Eğer $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ ise, yeterince büyük k , örneğin $k > m$ için

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^m \binom{k+m-j-1}{m-1} (j-m)^{-r} y_{j-m} \end{aligned}$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olacak şekilde birtek $y = (y_k) \in c_0$ mevcuttur. $a \in M_{\beta,0}(r)$ olsun. Bu taktirde $\forall v \in c_0^+$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j$$

yakınsak olduğundan Lemma 3.1(ii) de $p_k = \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j$ alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j = 0 \quad (17)$$

elde ederiz. Şimdi (12) de $n \rightarrow \infty$ için limit alalım. $|y_j| \leq v_j$ olacak şekilde bir $(v_j) \in c_0^+$ bulunabileceğinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} |y_j| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} v_j \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y_j$ serisi mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır. Yine $(y_j) \in c_0$ ve enaz bir $(v_j) \in c_0^+$ için $|y_j| \leq v_j$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} y_j| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} |y_j| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} y_j = 0$ elde edilir. Böylece her $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsak olur. Bu da $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta$ olması demektir.

Tersine, $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her bir $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır. $x = (x_k)$ dizisini, $v \in c_0^+$ herhangi bir dizi olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $x = (x_k) \in Dc_0(\Delta_r^m)$ olur.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

yazılabileceğinden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j$ serisi yakınsak olur. Lemma 3.1(ii) den $n \rightarrow \infty$ iken $R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \rightarrow 0$ dir.

Şimdi $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta - M_{\beta,0}(r)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j$ serisi enaz bir $(v_j) \in c_0^+$ için ıraksaktır. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r} v_j, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçersek $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = v_k$ ve $(v_k) \in c_0^+$ olduğundan,

$x = (x_k) \in Dc_0(\Delta_r^m)$ olduğu açıktır. Bu taktirde $\forall n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz. $((\sum_{v=1}^{n-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r} v_j) (\sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j)^{-1}) \in \ell_\infty$ olacağından, $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} v_j = \infty$$

elde edilir. Bu ise $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta$ olması ile çelişir.

Teorem 3.8 $v \in c_0^+$ olsun.

$$M_{\gamma,0}(r) = \{a \in \omega : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \right| < \infty \text{ ve} \\ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j < \infty, \forall v \in c_0^+ \}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

$$[Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma = M_{\gamma,0}(r)$$

dir.

İspat. $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ ise yeterince büyük her k , örneğin $k > m$ için

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} y_j \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^m \binom{k+m-j-1}{m-1} (j-m)^{-r} y_{j-m} \end{aligned}$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olacak şekilde birtek $y = (y_k) \in c_0$ mevcuttur. $a \in M_{\gamma,0}(r)$ olsun. Bu taktirde $|y_j| \leq v_j$ olacak şekilde bir $v = (v_j) \in c_0^+$ bulunabileceğinden (12) den

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} |y_j| + |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} |y_j| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} v_j + |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1(i) gereğince

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \right| < \infty$$

ise

$$\sup_n |R_n| \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j < \infty \quad (18)$$

bulunur. Dolayısıyla, $a \in M_{\gamma,0}(r)$ olması nedeniyle (18) den

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty$$

olur. Buradan $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ bulunur.

Tersine, $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $x \in Dc_0(\Delta_r^m)$ için $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty$ dir. $x = (x_k)$ dizisini $v = (v_j) \in c_0^+$ belli bir dizi olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde alalım. Böylece $x = (x_k) \in Dc_0(\Delta_r^m)$ olur. $n > m$ için

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right|$$

yazılabileceğinden,

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \right| < \infty$$

elde edilir. Lemma 3.1(i) den $\sup_n \left| R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \right| < \infty$ dir.

Şimdi $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma - M_{\gamma,0}(r)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j = \infty$ dir. O halde bu serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir. $x = (x_k)$ dizisini $\forall k$ için $a_k > 0$ veya $\forall k$ için $a_k < 0$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r} v_j, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçelim. $k > m$ için $k^r |\Delta^m x_k| = v_k$ ve $(v_k) \in c_0^+$ olduğundan $x = (x_k) \in Dc_0(\Delta_r^m)$ olduğu açıktır. Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz. Buradan $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^{n-m} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} v_j - R_n x_n$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki $(R_n x_n)$ dizisi sınırlı fakat ilk terimi genel terim kabul eden dizi sınırlı olmadığından $(\sum_{k=1}^n a_k x_k)$ sınırlı değildir. Bu ise $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ olması ile çelişir. Çelişkiye $a \notin M_{\gamma,0}(r)$ olarak düştük. Demek ki $a \in M_{\gamma,0}(r)$ dır.

Lemma 3.9 $\eta = \beta$ veya γ için

i) $[\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\eta = [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\eta$

ii) $[c(\Delta_r^m)]^\eta = [Dc(\Delta_r^m)]^\eta$

iii) $[c_0(\Delta_r^m)]^\eta = [Dc_0(\Delta_r^m)]^\eta$

dir.

İspat i) $\eta = \beta$ olsun. $D\ell_\infty(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğundan $[\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta \subset [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$ dir. Şimdi de $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$ olsun. Her $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ için $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ nın yakınsak olduğunu göstereceğiz. $x' = (x'_k) \in D\ell_\infty(\Delta_r^m)$ olmak üzere $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} x_k, & k \leq m \text{ ise} \\ x'_k, & k > m \text{ ise} \end{cases} \quad (19)$$

şeklinde tanımlayalım. $n > m$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k x_k &= \sum_{k=1}^m a_k x_k + \sum_{k=1}^n a_k x'_k \\ &= \sum_{k=1}^m a_k x_k + (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y'_j \\ &\quad - (-1)^m R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} j^{-r} y'_j \end{aligned} \quad (20)$$

olacak şekilde bir (y'_j) dizisi vardır. Lemma 3.1(ii), Teorem 3.4 ve (20) den $n \rightarrow \infty$ iken $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ serisinin yakınsak olduğu görülür. Buradan $a \in [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\beta$ elde edilir.

$[D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma = [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ olduğunu gösterelim.

$D\ell_\infty(\Delta_r^m) \subset \ell_\infty(\Delta_r^m)$ olduğundan $[\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma \subset [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ dir. $a \in [D\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ olsun. $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dizisini (19) daki gibi tanımlayalım. (20) gözönüne alınırsa

Lemma 3.1(i) ve Teorem 3.5 den

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty$$

elde edilir. Buradan $a \in [\ell_\infty(\Delta_r^m)]^\gamma$ bulunur.

ii) $\eta = \beta$ olsun. $Dc(\Delta_r^m) \subset c(\Delta_r^m)$ olduğundan $[c(\Delta_r^m)]^\beta \subset [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ dir. $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ olsun. $x' = (x'_k) \in Dc(\Delta_r^m)$ olmak üzere $x = (x_k) \in c(\Delta_r^m)$ dizisini (19) daki gibi tanımlarsak ve (20) yi gözönüne alırsak Lemma 3.1(ii), Teorem 3.4 ve Teorem 3.6 dan $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\beta$ elde edilir.

$\eta = \gamma$ olsun. $Dc(\Delta_r^m) \subset c(\Delta_r^m)$ olduğundan $[c(\Delta_r^m)]^\gamma \subset [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma$ dir. $a \in [Dc(\Delta_r^m)]^\gamma$ olsun. $x' = (x'_k) \in Dc(\Delta_r^m)$ olmak üzere $x = (x_k) \in c(\Delta_r^m)$ dizisini (19) daki gibi tanımlayıp, (20) yi gözönüne alırsak Lemma 3.1(i), Teorem 3.5 ve Lemma 3.6 dan $a \in [c(\Delta_r^m)]^\gamma$ elde edilir.

iii) $\eta = \beta$ olsun. $Dc_0(\Delta_r^m) \subset c_0(\Delta_r^m)$ olduğundan $[c_0(\Delta_r^m)]^\beta \subset [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta$ dir. $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\beta$ olsun. $x' = (x'_k) \in Dc_0(\Delta_r^m)$ olmak üzere $x = (x_k) \in c_0(\Delta_r^m)$ dizisini (19) daki gibi tanımlayıp, (20) yi gözönüne alırsak, Lemma 3.1(ii) ve Teorem 3.7 den $a \in [c_0(\Delta_r^m)]^\beta$ elde edilir.

$[Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma = [c_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ olduğunu gösterelim.

$Dc_0(\Delta_r^m) \subset c_0(\Delta_r^m)$ olduğundan $[c_0(\Delta_r^m)]^\gamma \subset [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ dir. $a \in [Dc_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ olsun. $x \in c_0(\Delta_r^m)$ dizisini (19) daki gibi tanımlarsak ve (20) yi gözönüne alırsak, Lemma 3.1(i) ve Teorem 3.8 den $a \in [c_0(\Delta_r^m)]^\gamma$ elde edilir.

Teorem 3.4, Teorem 3.5, Lemma 3.6 ve Lemma 3.9 gözönüne alındığında aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Teorem 3.10 $R_k = \sum_{v=k+1}^\infty a_v$ olmak üzere $X = \ell_\infty$ veya c için

i) $[X(\Delta_r^m)]^\beta = \{a \in \omega : \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \text{ yakınsak ve}$
 $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty \}$

ii) $[X(\Delta_r^m)]^\gamma = \{a \in \omega : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} \right| < \infty \text{ ve}$
 $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty \}$ dir.

Teorem 3.7, Teorem 3.8 ve Lemma 3.9 gözönüne alındığında aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Teorem 3.11 $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

- i) $[c_0(\Delta_r^m)]^\beta = \{a \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j \text{ yakınsak, ve}$
 $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \}$
- ii) $[c_0(\Delta_r^m)]^\gamma = \{a \in \omega : \sup_n |\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r} v_j| < \infty \text{ ve}$
 $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \}$

dir.

Sonuç 3.12 (i) $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ perfect değildir.

(ii) $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ normal değildir.

(iii) $\ell_\infty(\Delta_r^m)$, $c(\Delta_r^m)$ ve $c_0(\Delta_r^m)$ monoton değildir.

4. BÖLÜM

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $(\ell_\infty(\Delta_r^m), \ell_\infty)$, $(c(\Delta_r^m), \ell_\infty)$, $(\ell_\infty, \ell_\infty(\Delta_r^m))$, $(\ell_\infty, c(\Delta_r^m))$, $(c, \ell_\infty(\Delta_r^m))$, $(c, c(\Delta_r^m))$, $(\ell_\infty, c_0(\Delta_r^m))$ ve $(c, c_0(\Delta_r^m))$ matris sınıflarını karakterize edeceğiz.

Teorem 4.1 $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(\Delta_r^m), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$R_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}$ olmak üzere

- (i) $(a_{nj})_n \in \ell_\infty$ ($1 \leq j \leq m$),
- (ii) $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r})_n \in \ell_\infty$,
- (iii) $(R_{nk} \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$

olmasıdır.

İspat. (*Gerekliklik*) $A \in (\ell_\infty(\Delta_r^m), \ell_\infty)$ olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve her $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ için $(A_n(x)) \in \ell_\infty$ dir.

$x = (x_k) = (0, 0, \dots, 0, 1(j.yer), 0, \dots)$ ($1 \leq j \leq m$) alırsak $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k = a_{nj}$ ve $(a_{nj}) \in \ell_\infty$; $x = (x_k) = (\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r})$ alırsak $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ ve bu nedenle $(\sum_k a_{nk} x_k) \in \ell_\infty$ elde edilir. Şimdi $(R_{nk} \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}) \notin (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty \quad (21)$$

iken, $Ax \notin \ell_\infty$ olacak şekilde bir $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dizisinin varolduğunu göstermek istiyoruz.

Şimdi (21) in sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde ya

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ olacak şekilde bir k vardır; ya da
- (ii) Her k için $\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$ sonludur.

Ayrıca $A \in (\ell_\infty(\Delta_r^m), \ell_\infty)$ olduğundan her $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ için $\sum_k a_{nk} x_k$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) yakınsak ve $(A_n(x)) \in \ell_\infty$ dur. $\ell_\infty(\Delta_r^m)$ uzayının β -duali gözönüne alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}$$

yakınsak ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty$$

yazabiliriz.

Şimdi (i) hali için $\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_{nv}| \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $a_{nv} \neq 0$ olacak şekildeki sabit bir n için

$$x_k = \begin{cases} a_{nk}^{-1} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}, & k = v \text{ ise} \\ 0, & k \neq v \text{ ise} \end{cases}$$

seçersek $x \in c_0(\Delta_r^m) \subset \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ dir. Fakat

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = a_{nv} x_v = |R_{nv}| \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}$$

sınırsız olur.

(ii) halinde her s tamsayısı için ve her n için

$$\sum_{k=1}^s |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < M(s) \quad (22)$$

olacak şekilde bir $M(s)$ sayısı vardır. Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < \infty$, fakat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |R_{nk}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} = \infty$$

olduğundan aşağıdaki şekilde (n_i) ve (k_i) dizilerini seçebiliriz.

$$\sum_{k=k_i+1}^{\infty} |R_{1k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < 1$$

olacak şekilde $n_1 = 1$ ve k_1 alalım. Bu şekilde n_{i-1} ve k_{i-1} leri teşkil edelim ve en son

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} > (i+1)M(k_{i-1}) + i^2 + 1$$

olacak şekilde $n_i (> n_{i-1})$ ve

$$\sum_{k=k_i+1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} < 1 \quad (23)$$

olacak şekilde $k_i (> k_{i-1})$ seğıelim. Bu taktirde (n_i) ve (k_i) dizileri

$$\sum_{k=1}^{k_i} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} > (i+1)M(k_{i-1}) + i^2$$

olacak şekildedir ve böylece (22) den,

$$\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} > iM(k_{i-1}) + i^2 \quad (24)$$

olur. Şimdi her n ve her k için $a_{nk} > 0$ (veya her n ve her k için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_1 = 0$ ve $k > 1$ için

$$x_k = \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_{n_i v} \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} j^{-r}, \quad 1 \leq k \leq k_1 \quad \text{ve} \quad k_{i-1} < k \leq k_i \quad (i = 2, 3, \dots)$$

seğıersek $x \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ dir.

Diğ er yandan Lemma 3.1(ii) den $n \rightarrow \infty$ için $R_n x_n \rightarrow 0$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = - \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk} \Delta x_k \quad (25)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}$$

bulunur. Şimdi (22), (23) ve (24) den

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i k} x_k \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} \\ &= \sum_{k=1}^{k_{i-1}} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} + \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} \\ &\quad + \sum_{k=k_i+1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} \\ &\geq \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} - \sum_{k=1}^{k_{i-1}} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} \\ &\quad - \sum_{k=k_i+1}^{\infty} |R_{n_i k}| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r} \\ &> iM(k_{i-1}) + i^2 - M(k_{i-1}) - 1 \\ &> M(k_{i-1}) + i - M(k_{i-1}) - 1 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} x_k)_{n_k} \notin \ell_{\infty}$ olur.

(Yeterlilik) Şimdi (i)-(iii) sağlansın. $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ dizisini $x' = (x'_k) \in D\ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} x_k, & k \leq m \text{ ise} \\ x'_k, & k > m \text{ ise} \end{cases} \quad (26)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $m < t$ için

$$A_n(t, m, x) = \sum_{k=1}^t a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k + (-1)^m \sum_{k=1}^{t-m} (R_{n,k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r}) z_k - (-1)^m R_{nt} \sum_{j=1}^{t-m} \binom{t-j-1}{m-1} j^{-r} y'_j$$

olacak şekilde bir $(y'_j) \in \ell_{\infty}$ dizisi vardır. Burada

$$z = (z_k) = ((\sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r})^{-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} j^{-r} y'_j)$$

olup $z \in \ell_{\infty}$ dur. Buradan, (i)-(iii) şartlarından ve Lemma 3.1(i) den $Ax = (A_n(x))$ in mevcut olduğu görülür. Böylece $A \in (\ell_{\infty}(\Delta_r^m), \ell_{\infty})$ olur.

Teorem 4.2 $A = (a_{nk}) \in (c(\Delta_r^m), \ell_{\infty})$ olması için gerek ve yeter şart,

$R_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}$ olmak üzere

- (i) $(a_{nj})_n \in \ell_{\infty}$ ($1 \leq j \leq m$),
- (ii) $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r})_n \in \ell_{\infty}$,
- (iii) $(R_{nk} \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}) \in (c, \ell_{\infty})$

olmasıdır.

İspat. (Gereklilik) $A \in (c(\Delta_r^m), \ell_{\infty})$ olsun. Bu taktirde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsaktır ve her $x \in c(\Delta_r^m)$ için $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}$ dir.

Yine $x = (x_k)$ dizilerini Teorem 4.1 deki gibi seçersek (i) ve (ii) yi elde ederiz.

Teorem 4.1 e benzer bir yolla (iii) şartı kolaylıkla gösterilebilir.

(Yeterlilik) $x \in c(\Delta_r^m)$ olsun. $x' = (x'_k) \in Dc(\Delta_r^m)$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisini (26) daki gibi tanımlarsak (i)-(iii) şartlarından $A \in (c(\Delta_r^m), \ell_{\infty})$ bulunur.

Teorem 4.3 $A = (a_{nk}) \in (\ell_{\infty}, \ell_{\infty}(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,

$\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k}) n^r)$ olmak üzere

(i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) $C \in (\ell_{\infty}, \ell_{\infty})$

olmasıdır.

İspat. (Gereklilik) $A \in (\ell_{\infty}, \ell_{\infty}(\Delta_r^m))$ olsun. Bu taktirde her $x \in \ell_{\infty}$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ dir. Bu nedenle her n için

$$|A_n(x)| = \left| \sum_k a_{nk}x_k \right| < \infty \quad (27)$$

dir. Sabit bir n için $x_k = \text{sgn}a_{nk}$ seçersek $\sup_k |x_k| = \sup_k |\text{sgn}a_{nk}| \leq 1$ olacağından $x \in \ell_{\infty}$ olur. Bu durumda (27) den

$$\left| \sum_k a_{nk}x_k \right| = \left| \sum_k a_{nk} \text{sgn}a_{nk} \right| < \infty$$

ve buradan da herbir n için

$$\sum_k |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Yani (i) sağlanır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} n^r \Delta^m(A_n(x)) &= n^r \Delta^m\left(\sum_k a_{nk}x_k\right) \\ &= n^r \sum_k (\Delta^m a_{nk})x_k \\ &= n^r \sum_k (\Delta^{m-1}a_{nk} - \Delta^{m-1}a_{n+1,k})x_k \end{aligned} \quad (28)$$

eşitliğinden ve $x \in \ell_{\infty}$ iken $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ olacağından (ii) sağlanmış olur.

(Yeterlilik) (i) ve (ii) sağlansın. $x \in \ell_{\infty}$ olsun. Bu taktirde herbir n için

$$|A_n(x)| = \left| \sum_k a_{nk}x_k \right| \leq \sum_k |a_{nk}x_k| \leq \sup_k |x_k| \sum_k |a_{nk}|$$

ve (i) den $\sum_k |a_{nk}| < \infty$ olduğundan herbir n için $\sum_k a_{nk}x_k$ serisi yakınsak yani $(A_n(x))$ dizisi mevcut olur. Ayrıca (ii) den

$$n^r \Delta^m\left(\sum_k a_{nk}x_k\right) = n^r \sum_k (\Delta^{m-1}a_{nk} - \Delta^{m-1}a_{n+1,k})x_k$$

eşitliğinden $(A_n(x)) \in \ell_\infty(\Delta_r^m)$ elde edilir. Demek ki $A \in (\ell_\infty, \ell_\infty(\Delta_r^m))$ dur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,
 $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1}a_{nk} - \Delta^{m-1}a_{n+1,k})n^r)$ olmak üzere
 (i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,
 (ii) $C \in (\ell_\infty, c)$

olmasıdır.

İspat. (*Gerekliklik*) $A \in (\ell_\infty, c(\Delta_r^m))$ olsun. Bu taktirde her $x \in \ell_\infty$ için $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ dir. Yine her n ve her k için $a_{nk} > 0$ (veya her n ve her k için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_k = \text{sgn}a_{nk}$ seçersek, bu taktirde $x \in c$ olur ve (27) den (i) elde edilir.

$x \in \ell_\infty$ ise $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ olacağından, Teorem 4.3 e benzer bir yolla (ii) gösterilmiş olur.

(*Yeterlilik*) (i) ve (ii) sağlansın. $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu taktirde (i) den $A_n(x)$ yakınsak olur. (ii) den $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ elde edilir.

Teorem 4.5 $A = (a_{nk}) \in (c, c(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,
 $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1}a_{nk} - \Delta^{m-1}a_{n+1,k})n^r)$ olmak üzere
 (i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,
 (ii) $C \in (c, c)$

olmasıdır.

İspat. (*Gerekliklik*) $A \in (c, c(\Delta_r^m))$ olsun. Bu taktirde her $x \in c$ için $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ dir. Her n ve her k için $a_{nk} > 0$ (veya her n ve her k için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_k = \text{sgn}a_{nk}$ (sabit n) seçersek $x \in c$ dir. (27) den (i) elde edilir.

$x \in c$ ise $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ olacağından, Teorem 4.3 e benzer bir yolla (ii) gösterilmiş olur.

(*Yeterlilik*) (i) ve (ii) sağlansın. $x \in c$ olsun. Bu taktirde (i) den $A_n(x)$ yakınsak olur. (ii) den $(A_n(x)) \in c(\Delta_r^m)$ elde edilir.

Teorem 4.6 $A = (a_{nk}) \in (c, \ell_\infty(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,
 $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1}a_{nk} - \Delta^{m-1}a_{n+1,k})n^r)$ olmak üzere

(i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) $C \in (c, \ell_{\infty})$

olmasıdır.

İspat. (*Gereklilik*) $A \in (c, \ell_{\infty}(\Delta_r^m))$ olsun. Bu taktirde $x \in c$ ve $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ dir. Her n ve her k için $a_{nk} > 0$ (veya her n ve her k için $a_{nk} < 0$) olmak üzere $x_k = \text{sgn} a_{nk}$ seçersek (27) den (i) elde edilir. $x \in c$ ise $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ olacağından (ii) elde edilir.

(*Yeterlilik*) (i) ve (ii) sağlansın. $x \in c$ ise (i) den $A_n(x)$ yakınsak olur. (ii) den $(A_n(x)) \in \ell_{\infty}(\Delta_r^m)$ elde edilir.

Teorem 4.7 $A = (a_{nk}) \in (\ell_{\infty}, c_0(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,

$\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k})n^r)$ olmak üzere

(i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) $C \in (\ell_{\infty}, c_0)$

olmasıdır.

İspat. (*Gereklilik*) $A \in (\ell_{\infty}, c_0(\Delta_r^m))$ olsun. $x \in \ell_{\infty}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in c_0(\Delta_r^m)$ dir. $x_k = \text{sgn} a_{nk}$ seçersek $x \in \ell_{\infty}$ olur ve bu nedenle

$$\begin{aligned} |A_n(x)| &= \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| = \left| \sum_k a_{nk} \text{sgn} a_{nk} \right| \\ &= \sum_k |a_{nk}| < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani (i) sağlanır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} n^r \Delta^m(A_n(x)) &= n^r \Delta^m \left(\sum_k a_{nk} x_k \right) \\ &= n^r \sum_k (\Delta^m a_{nk}) x_k \\ &= n^r \sum_k (\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k}) x_k \end{aligned}$$

eşitliğinden ve $x \in \ell_{\infty}$ iken $(A_n(x)) \in c_0(\Delta_r^m)$ olacağından (ii) sağlanmış olur.

(*Yeterlilik*) (i) ve (ii) sağlansın. $x \in \ell_{\infty}$ ise (i) den

$$|A_n(x)| = \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| \leq \sup_k |x_k| \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Böylece $A_n(x)$ her n için mevcut olur. (ii) den

$$n^r \Delta^m \left(\sum_k a_{nk} x_k \right) = n^r \sum_k (\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k}) x_k$$

eşitliğinden $(A_n(x)) \in c_0(\Delta_r^m)$ elde edilir.

Teorem 4.8 $A = (a_{nk}) \in (c, c_0(\Delta_r^m))$ olması için gerek ve yeter şart,
 $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ ve $C = (c_{nk}) = ((\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k}) n^r)$ olmak üzere

(i) Herbir n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) $C \in (\ell_{\infty}, c_0)$

olmasıdır.

İspat. Teorem 4.7 ye benzer bir yolla yapılabilir.



KAYNAKLAR

1. Choudhary, B. and Nanda, S."Functional Analysis with Applications", John Willey and Sons, New York (1989).
2. Çolak, R. ve Et, M. "On Some Generalized Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations", Hokkaido Math. J. 26(3), 483-492 (1997).
3. Et, M. ve Çolak, R."On Some Generalized Difference Sequence Spaces", Soochow J. of Math. 21(4), 377-386 (1995).
4. Goes, G. ve Goes, S."Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I", Math. Z. 118, 93-102 (1970).
5. Hardy, G.H."Divergent Series", A the Clarendon Press, Oxford (1949).
6. Kamthan, P.K. ve Gupta, M."Sequence Spaces and Series", Marcel Dekker Inc. New York (1981).
7. Kantorovich, L.V. ve Akilov, G.P."Functional Analysis", Pergamon Press, Oxford (1982).
8. Kızılmaz, H."On Certain Sequence Spaces", Canad. Math. Bull. 24(2), 169-176 (1981).
9. Kreyszig, E."Introductory Functional Analysis with Applications", John Wiley and Sons, New York (1978).
10. Maddox, I.J."Elements of Functional Analysis", Cambridge Univ. Press (1970).
11. Sarıgöl, M.A."On Difference Sequence Spaces", J. Karadeniz Tech. Univ. Fac. Arts Sci. Ser. Math. Phys. 10, 63-71 (1987).