

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN
NODAL NOKTALARA GÖRE
TERS PROBLEMLER ÜZERİNE**

Neslihan CEYLAN

Tez Yöneticisi
Prof.Dr. Etibar PENAHOV

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2006

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN
NODAL NOKTALARA GÖRE
TERS PROBLEMLER ÜZERİNE**

Neslihan CEYLAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği ile başarılı/başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Etibar PENAHOV

Üye: Prof.Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/.....
ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen saygıdeğer hocalarım ;

Prof.Dr. Etibar PENAHOV ‘ a ve Araş.Gör. Erdal BAŞ ‘a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir , saygılarımı sunarım.

Neslihan CEYLAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
GİRİŞ.....	1
1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	5
2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ	
2.1 Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler.....	9
2.2 Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemi.....	14
2.3 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller.....	14
2.4 Özfonksiyonların Sıfırları.....	23
3. TERS NODAL PROBLEMLER ÜZERİNE	
3.1 Ters Nodal Problemlerin Çözümleri.....	28
3.2 Yeni Ters Nodal Problem.....	30
3.3 Vektörel Ters Nodal Problem.....	34
4. YANG' A GÖRE TERS NODAL PROBLEM	
4.1 Ön Hazırlık.....	37
5. VEKTÖREL TERS NODAL PROBLEM	
5.1 Dirichlet Sınır Şartları.....	40
5.2 Diğer Sınır Şartları.....	48
5.3 Nodal Noktalara Göre Ters Problemin Tekliğine İlişkin Bazı Sonuçlar.....	56
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER

H	: Hilbert uzayı
$L^2[a, b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
L	: Lineer operatör
L^*	: L operatörünün adjointi
λ	: Özdeğer
$y(x, \lambda)$	: Özfonksiyon
α_n	: Normlaştırıcı Sayılar
$W(f, g)$	: Wronskian determinanı
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$	: Özdeğerlerin cümlesi
l_n^k	: Nodal uzunluk

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN NODAL NOKTALARA GÖRE TERS PROBLEM ÜZERİNE

Neslihan CEYLAN

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2006,Sayfa:69

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Diferensiyel operatörlerin Spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ;Sturm-Liouville operatörü için genel bilgiler , regüler ve singüler Sturm-Liouville problemi, özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller, özfonksiyonların sıfırları ve osilasyon teoremi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; Ters nodal problem ve vektörel ters nodal problem ile ilgili açıklamalar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; Yang'a göre ters nodal problem incelenerek açılım teoreminin ispatı yapılmıştır.

Beşinci bölümde;Vektörel Sturm-Liouville denklemi için Dirichlet ve diğer sınır şartları verilmiştir. Son kısımda ayrıca nodal noktalara göre ters problemin tekliğine ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:Sturm-Liouville operatörü,özdeğer,özfonksiyon,nodal nokta, osilasyon teoremi,ters nodal problem, spektrum, Dirichlet şartı, regüler ve singüler operatör.

ABSTRACT

Masters Thesis

ON SOME INVERSE PROBLEMS AS TO NODAL POINTS OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

Neslihan CEYLAN

Firat University

Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

2006, Page:69

This study is arranged in five chapters.

In the first chapter; Some fundamental definitions and theorems that use often in Spectral theory of Differential operators are given.

In the second chapter; General informations of Sturm-Liouville operators, regular and singular Sturm-Liouville operators, asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions, zeros of eigenfunctions and oscillation theorem are examined.

In the third chapter; Inverse nodal problem and vectorial inverse nodal problem are given.

In the fourth chapter; The inverse nodal problem due to Yang is examined and proof of main theorem is given.

In the fifth chapter; Dirichlet and other boundary conditions of vectorial Sturm-Liouville equation are examined. Separately, inverse spectral theory using nodal points as data a uniqueness result is examined.

Keywords: Sturm-Liouville Operators, eigenvalues , eigenfunctions, nodal points, oscillation theorem, inverse nodal problem, spectrum, dirichlet conditions, regular and singular operators

GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi , matematik,fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim problemleri arasındaki benzerliklerin tanımlanması çok eskilere dayanmaktadır. İntegral denklemler teorisine ilgili yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur.

Özellikle l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır ve özellikle XIX.-XX. Asırlarda bu konularda çalışan bir çok matematikçi tarafından söz konusu teori oldukça geliştirilerek üst seviyelere ulaşmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler , özfonksiyonlar , spektral fonksiyon , normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle veriler yardımıyla asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca spektral teori için önemli yere sahip olan açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış , bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler , tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D.Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektrumuna sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerinin özdeğerlerinin dağılımı , özellikle Kuantum mekaniğinde oldukça önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F.Riesz, J.von Neumann, K.O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi elde edilmiştir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E.C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyeli Schrödinger operatörü de denir. Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B.M.Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin , özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R.Courant , T.Carleman , M.S.Birman , M.Z.Salamyak , V.P.Maslov , M.V.Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferensiyel operatörler için ters problem şöyle tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak tanımlanmaktadır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç V.A. Ambarstsumyan tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörleri için ters probleme ilişkin aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem1. $q(x), [0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) = 0$ dır. Bu sonucu ilk İsveç matematikçi G.Borg bulmuştur. Borg , genel durumda Sturm-Liouville operatörünün tek spektrumla tanımlandığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm-Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiş ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem2. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ (1) diferensiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy'(0) = 0 \quad (3)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0 \quad (4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin , $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ ise (1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y'(0) = 0 \quad , \quad (h \neq h_1) \quad (5)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsunlar. O halde $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, ($n=0, 1, \dots$) dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve sonlu h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir.

Daha sonra potansiyelinin $q(x) = q(\pi - x)$ koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N.Levinson ispatlamıştır. Ayrıca negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda , saçılma fazının potansiyelini birebir olarak tanımladığı gösterilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biride ters problemin çözümünde önemli bir etken olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş öteleme teorisi J.Delsarte , J.Lions ve B.M.Levitan tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A.V.Povzner kendi çalışmalarında göstermiştir.

Bu çalışmalardan sonra ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemleriyle ilgili en önemli çalışmalar A.N.Tichnok ve V.A.Marchenko tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\phi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1) diferensiyel denkleminin

$$\phi(0, \lambda) = 0 \quad , \quad \phi'(0, \lambda) = h \quad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü , $\phi(x, \lambda_n) = \phi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu takdirde

$$\alpha_n = \int_0^\pi \phi_n^2(x, \lambda_n) dx$$

verilen operatörün normlaştırıcı sayıları ,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko yukarıda belirtilen çalışmasında Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla verilmiştir. Ayrıca söz konusu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun , Sturm-Liouville tipinde bir diferensiyel operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile eş zamanda M.G.Krein çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferensiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}, (n=0,1,\dots)$ dizilerine göre belirtmek için oldukça etkili bir yöntem vermiştir. Ancak bu çalışmalarda verilen gerek ve yeter koşul , $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil , bu dizilerden kurulan yardımcı fonksiyonlar kullanılarak verilmiştir.

Spektral analizin ters problemler teorisinde temel çalışma I.M.Gelfand ve B.M.Levitan tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-

Liouville operatörünün spektral fonksiyon olması için gerek yeter koşul tanımlanmış olup Sturm-Liouville operatörünün tanımlanması için önemli bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörleri için ters probleminin iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında B.M.Levitan ve M.G.Gasimov tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemler artmıştır. Örneğin 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçileri ve matematikçileri G.S.Gardner , J.M.Greene , M.D.Kruskal , R.M. Miura ve P.Lax tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlinear evalusyon denklemler ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde hem Matematikçiler hem de Fizikçiler tarafından çalışılmaktadır.

Spektral veriler olarak özfonksiyonların sıfırları yani nodal noktalar ele alınarak , Sturm-Liouville operatörü ve diğer diferensiyel operatörler için spektral teorisinin bazı problemleri son 20 yılda yoğun bir şekilde incelenmektedir.

Nodallara göre Sturm-Liouville operatörü için ters problem ilk olarak O.H. Hald , J.R.McLaughlin , P.J.Browne ,B.D.Sleeman tarafından farklı yöntemlerle incelenmiştir.

Daha sonra bir grup Yang, Shien ,Law ,Cheng çin matematikçileri vektörel Sturm-Liouville denklemi için Dirichlet, Neumann ve diğer sınır şartları sağlanacak şekilde teklik teoremleri , nodal noktaların ve nodal uzunluğun asimptotiği il ilgili bir çok çalışmalar yapılmıştır.

Dirac ve Laplace operatörleri için nodallara ait problemler ise C. Bör tarafından yapılmıştır. Ayrıca singüler Sturm-Liouville operatörleri için nodal noktalara göre teklik teoremleri E. Penahov ve H.Koyunbakan tarafından ispatlanmıştır.

Sonuç olarak ele alınan bu tezde de nodal noktalara göre benzer problemler incelenmiştir.

1.1.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım1.1.1 (İç Çarpım Uzayı , Hilbert Uzayı) C kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir H lineer vektör uzayını göz önüne alalım. H deki bir vektör çiftine bir sayı karşı getiren bir $\langle, \rangle: H \times H \rightarrow C$ fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı takdirde bir iç çarpım adını alır.

- i) Her $u, v \in H$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- ii) Her $u, v \in H$ ve $\alpha \in C$ için $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
- iii) Her $u, v, w \in H$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- iv) Her $u \in H$, $u \neq 0$ için $\langle u, v \rangle > 0$

Bu iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

metriğine göre tam bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. (Şuhubi 2001)

Tanım1.1.2 $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a, b]$ uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. (Kreyszig 1978)

Tanım1.1.3 (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir.

Tanım1.1.4 (Lineer Operatör) E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olsun.

$A: E_x \rightarrow E_y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

- i) $x_1, x_2 \in E_x$, $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$
- ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, $\lambda \in R$

A operatörüne lineerdir denir. (Kreyszig 1978)

Tanım1.1.5 (Süreklili Operatör) $A : S(x, \delta) \rightarrow S(Ax, \varepsilon)$ olsun.

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{için} \quad |Ax - Ax_0| < \varepsilon$$

ise A operatörüne süreklidir denir. (Kreyszig 1978)

Tanım1.1.6 X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer ,

$$\|L(x)\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir ve eşitsizliği sağlayan c sayılarının alt sınırına ise L operatörünün normu denir. (Liusternik ve Sobolev 1961)

Tanım1.1.7 (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer , $L^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir. (Kreyszig 1978)

Tanım1.1.8 L , $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir. (Kostyuchenko ve Sargsyan 1979)

Tanım1.1.9 $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x, \lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x, \lambda_n) dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir.

Tanım1.1.10 $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir. (Levitan ve Sargsyan 1991)

Tanım1.1.11 Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörünün tersi mevcut olacak biçimde $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \quad \text{veya} \quad (L - \lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir. (Liusternik ve Sobolev 1961)

Tanım1.1.12 (Dönüşüm Operatörü) E lineer topolojik uzay , A ve B operatörleri $A : E \rightarrow E$, $B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörüne ,

- i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir
- ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor.

şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir. (Levitan 1987)

Tanım1.1.13 $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyor ise $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitikdir denir. [Markushevich 1977]

Tanım1.1.14 $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir.

Tanım1.1.15 Bir $f(z)$ fonksiyonuna karşılık A ve a pozitif sayıları bulunabiliyorsa , öyle ki $r = |z| \rightarrow \infty$ iken

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise $f(z)$ fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur , a sayıların en küçüğü olan r ye ise tam fonksiyonun mertebesi denir.

Tanım1.1.16 $x \rightarrow 0$ (veya $x \rightarrow \infty$) iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve

$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir.

Teorem1.1.1 (Rouche) Γ - kapalı düzeltilebilir Jordan eğrisi üzerinde ve Γ 'nın iç noktalarında $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ analitik fonksiyonlar ve $z \in \Gamma$ için $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ olsun. Bu takdirde Γ 'nın içinde $f_1(z) + f_2(z)$ ve $f_1(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı aynıdır. [M.Idemen 1999]

2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

2.1 Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler

L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu λ ' ya ise özdeğeri denir.

Operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyondur.

L operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

1.tür sınır şartı: Bunlara ayırık sınır şartları denir ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şeklinde tanımlanır.

2.tür sınır şartı: bunlar periyodik ve antiperiyodik sınır şartları olarak bilinir ve sırası ile

$$\begin{array}{ll} y(a) = y(b) & \text{ve} \\ y'(a) = y'(b) & y(a) = -y(b) \\ & y'(a) = -y'(b) \end{array}$$

şeklinde yazılır.

3.tür sınır şartı: Bunlar uçları bağlı sınır şartları olarak bilinir ve

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{veya} \quad y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly(x) = -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (2.1.1)$$

$$\begin{array}{l} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0 \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0 \end{array} \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanan (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

$p(x)$, $l(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları reel ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim. $p(x)$ ve $r(x)$, $[a,b]$ aralığında pozitif fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denkleminin genel

$$L = -\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dy}{dx} \right\} + l(x)y = \lambda r(x)y \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.1.3)$$

ifadesini göz önüne alalım. $p(x)$ birinci mertebeden ve $p(x) \cdot r(x)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olacak şekilde

$$z = \frac{1}{c} \int_a^x \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{1/2} dx, \quad u = (r(x)p(x))^{1/4} y, \quad \mu = c\lambda$$

dönüşümlerini yaparsak (2.1.3) denklemi

$$c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{1/2} dx$$

$$q(z) = \frac{Q''(z)}{Q(z)} - c^2 \frac{l(x)}{r(x)}$$

$$Q(z) = (r(x)p(x))^{1/4}$$

olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

şeklinde yazılır.

Herhangi λ_1 için göz önüne alınan sınır değer probleminin $y(x, \lambda_1) \neq 0$ aşıkâr olmayan çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bu bölümün başlangıcında verilen tanımda (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer probleminin özdeğeri λ_1 ve buna karşılık gelen özfonksiyonu da $y(x, \lambda_1)$ olarak tanımlanır.

Lemma2.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$

özfonksiyonları ortogondur. Yani

$$\int_a^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

dir.

İspat. $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli ve iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

alalım.

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x)g(x) \\ f'(x)g'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere bu ifadeyi iki kez parçalı integrallersek

$$\int_0^{\pi} Lf \cdot g(x) dx = W_{\pi}\{f, g\} - W_0\{f, g\} + \int_0^{\pi} f(x) \cdot Lg dx \quad (2.1.4)$$

denkliğini elde ederiz. $f(x) = y(x, \lambda_1)$ ve $g(x) = y(x, \lambda_2)$ olsun. (2.1.2) sınır şartlarından $W_0\{f, g\} = W_{\pi}\{f, g\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı (2.1.4) denkleminde

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0$$

ve dolayısıyla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olur. Böylece lemma ispatlanmış oldu.

Lemma2.1.2. (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. $q(x)$ reel bir fonksiyon α ve β sayıları reel olduğundan dolayı $\overline{y}(x, \lambda_1)$ özfonksiyonu $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısına sahip bir özdeğer olur. Bu takdirde bir önceki lemmadan

$$\int_0^{\pi} |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0$$

elde ederiz ki buradan da $y(x, \lambda_1) = 0$ olduğu bulunur.

Teorem2.1.1. Eğer $q(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'_x(a, \lambda) = -\cos \alpha$$

başlangıç şartları sağlanırsa (1.1.1) denkleminin $a \leq x \leq b$ aralığında her α için bir tek $\varphi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Her $x \in [a, b]$ sabiti için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu λ ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat. $\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha$ alalım ve $n > 0$ için

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_{n-1}(t, \lambda) (x - t) dt$$

olsun. q sürekli bir fonksiyon olduğundan $a \leq x \leq b$ için $|q(x)| < M$ elde ederiz.

$|\lambda| \leq N$ olsun. O zaman $a \leq x \leq b$ için $|\varphi_0(x, \lambda)| \leq K$ olur. Bundan dolayı

$n=1$ için,

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x-t) dt$$

$$\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x-t) dt$$

$$|\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| \leq \int_a^x |q(t) - \lambda| |\varphi_0(t, \lambda)| |x-t| dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^x \{|q(t)| + |\lambda|\} |\varphi_0(t, \lambda)| |x-t| dt \\ &\leq \int_a^x (M + N) K (x-t) dt = \frac{1}{2} K (M + N) (x-a)^2 \end{aligned}$$

n = 2 için,

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_1(t, \lambda) (x-t) dt$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x-t) dt$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)\} (x-t) dt$$

elde ederiz . Buradan da $n \geq 2$ için

$$\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)\} (x-t) dt$$

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| \leq (M + N)(b-a) \int_a^x |\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)| dt$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| &\leq \int_a^b \{|q(t)| + |\lambda|\} |\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)| |x-t| dt \\ &\leq \int_a^b (M + N) \cdot \frac{1}{2} K (M + N) (t-a)^2 (x-t) dx \\ &= \frac{1}{2} K (M + N)^2 (b-a) \int_a^x (t-a)^2 dx \\ &= \frac{K (M + N)^2 (b-a)(x-a)^3}{3!} \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| \leq \frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)\} \quad (2.1.5)$$

$a \leq x \leq b$ için x 'e göre düzgün ve $|\lambda| \leq N$ için λ ya göre düzgün yakınsak bir seridir. $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x, \lambda) &= \varphi'_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_{n-1}(t, \lambda) dt \\ \varphi'_{n-1}(x, \lambda) &= \varphi'_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_{n-2}(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

olduğundan , bu ifadeleri taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)\} dt$$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi''_n(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-1}(x, \lambda) \\ \varphi''_{n-1}(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-2}(x, \lambda) \end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) = \{q(x) - \lambda\} \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\}$$

elde ederiz. (2.1.5) serisini bir veya iki kez diferansiyellersek

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} \\ &= \varphi''_1(x, \lambda) - \varphi''_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} \\ &= (q(x) - \lambda) \left(\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\} \right) \\ &= \{q(x) - \lambda\} \varphi(x, \lambda) \end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla $\varphi(x, \lambda)$, (2.1.1) denklemini sağlar. Ayrıca $\varphi_n(x, \lambda)$

fonksiyonunun yapısı ve (2.1.5) serisinin düzgün yakınsak olmasından dolayı $\varphi(x, \lambda)$, λ değişkenine göre tam fonksiyondur.

2.2.Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemi

Sturm-Liouville problemi için

$$Ly = -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere

(2.1.2) sınır şartlarını sırası ile $\sin \alpha$ ve $\sin \beta$ ifadelerin bölersek

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0 \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

elde ederiz. $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0 \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

yazılır. Böylece (2.1.1)-(2.2.2) probleminde eğer $q(x)$ sürekli reel değerli bir fonksiyon,

h ve H reel sayıları da sonlu ise bu probleme “Regüler Sturm-Liouville Problemi” denir.

Bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme “Singüler Sturm-Liouville Problemi” denir.

2.3 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller

1. $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville Problemini

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [0, \pi] \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

göz önüne alalım.(1.3.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (2.3.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\varphi(x, \lambda)$ ile gösterelim. Aynı denklemin

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1 \quad (2.3.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de $\psi(x, \lambda)$ ile gösterelim.

Lemma2.3.1. $\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \quad (2.3.5)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (2.3.6)$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle (2.3.5) eşitliğini ispatlayacağız. $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.1.1) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

Daha sonra sağdaki integrali iki kez parçalı integralleyelim ve (2.3.3) şartlarını göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau \text{ integralini hesaplayalım.}$$

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau =$$

$$= \varphi'(x, \lambda) \sin\{s(x-x)\} - \varphi'(0, \lambda) \sin\{s(x-0)\} + s \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau$$

$$= -h \sin sx + s \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau$$

$$= -h \sin sx + s \left\{ \varphi(x, \lambda) \cdot \cos\{s(x-x)\} - \varphi(0, \lambda) \cdot \cos\{s(x-0)\} - s \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right\}$$

$$= -h \sin sx + s \left\{ \varphi(x, \lambda) - \cos sx - s \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right\}$$

buluruz. Böylece

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$= -h \sin sx + s \{ \varphi(x, \lambda) - \cos sx \} - s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$= -h \sin sx + s \varphi(x, \lambda) - s \cos sx$$

elde ederiz. (2.3.6) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Lemma2.3.2. $s = \sigma + it$ olsun. Bu durumda öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x, \lambda) = O(e^{l|x|}) \quad , \quad \psi(x, \lambda) = O(|s|^{-1} e^{l|x|}) \quad (2.3.7)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{l|x|}) \quad (2.3.8)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{l|x|}}{|s|^2}\right) \quad (2.3.9)$$

$0 \leq x \leq \pi$ için x in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

2. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım.

(2.3.1)-(2.3.2) Sturm-Liouville Problemini göz önüne alalım. Lemma2.3.1 ve Lemma2.3.2 den dolayı

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + O(|s|^{-1} e^{l|x|}) \end{aligned}$$

dır.

$h \neq \infty$ ve $H \neq \infty$ olsun. $\varphi(x, \lambda)$, (2.3.1) denkleminin (2.3.2) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun π noktasındaki değerini (2.3.2) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma2.1.2 den dolayı özdeğerler reeldir. Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur. λ pozitif sayısı için $\text{Im}s=0$ dır. Bu sebeple (2.3.8) formülünden

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (2.3.10)$$

yazarız. Daha sonra (2.3.5) ifadesinin x ' e göre diferansiyelini alıp ve (2.3.10) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi'_x(x, \lambda) = -s \sin sx + h \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad (2.3.11)$$

ifadesini elde ederiz. (2.3.2) sınır şartlarının ikincisinde (2.3.8) ve (2.3.11) ifadelerini yerlerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s \sin s\pi + (h + H) \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0 \quad (2.3.12)$$

denklemini elde ederiz.

s ' nin büyük değerleri için (2.3.12) denkleminin tam doğal sayıların komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir

cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam n den başlayarak her n nin komşuluğunda (2.3.12) denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (2.3.12) denkleminin sol kısmının s ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s \cos s\pi - \sin s\pi - \pi(h+H)\sin s\pi + O(1) = 0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin s nin büyük tam değerlerin komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

s_n ile (2.3.12) denkleminin n .kökünü gösterelim. Sturm 'un osilasyon teoreminden ve (2.3.8) formülünden s_n için , s nin sıfırlarını yalnız tam n lerin komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm'un teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi(\pi, \lambda) + H\varphi'_x(\pi, \lambda) \equiv \omega(\lambda) = 0$$

denkleminin kökleri olduğu için $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$ dir. (2.3.5) ifadesinden dolayı $\omega_1(s)$, s ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (2.3.10) ve (2.3.11) formüllerinden $\sin s\pi \neq 0$ için $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$ ifadesinden

$$\omega_1(s) = -Hs \sin s\pi \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right\} \quad (2.3.13)$$

elde edilir.

s düzleminde $R = N + \frac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi orijinde olan D_R dairesini

göz önüne alalım. Rouché teoreminden ve (2.3.13) asimptotik formülünden D_R dairesinin içinde $\omega_1(s)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı $2n+2$ dir.

$\omega_1(s)$ fonksiyonu çift olduğundan onun sadece pozitif sıfırlarını göz önüne almak yeterlidir. $\omega_1(s)$ nin her pozitif sıfırına bir özdeğer karşılık gelir , yani $N + \frac{1}{2}$ den küçük olan s_k özdeğerinin sayısı $N+1$ olacaktır. s_n için asimptotik formül aşağıdaki gibi olur.

$$s_n = n + o(1) \quad (2.3.14)$$

$s_n = n + \delta_n$ olsun. O zaman (2.3.12) denklemini

$$n \sin \delta_n \pi + O(1) = 0$$

şeklinde olur. Buradan $\sin \delta_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right)$ yani $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olur. Buna göre (2.3.12)

denkleminin köklerini büyük n ler için

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3.15)$$

elde ederiz.

Eğer (2.1.1) denkleminde $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (2.3.15) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (2.3.5) eşitliğinin x 'e göre türevini alıp daha sonra $\varphi(x, \lambda)$ ve $\varphi'_x(x, \lambda)$ ifadelerinin (2.3.2) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A = h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos s\tau + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left\{ \sin s\tau + \frac{H}{s} \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

olacak şekilde

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0 \quad (2.3.16)$$

ifadesini elde ederiz. (2.3.10) ifadesinden dolayı A ve B için

$$A = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$B = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Hipotezimizden dolayı $q(x)$ potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınırsa

$$\int_0^\pi q(\tau) \cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right) \quad , \quad \int_0^\pi q(\tau) \sin 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla A ve B ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad , \quad h_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$$

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

elde edilir. Bu sebeple (2.3.16) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar $s_n = n + \delta_n$ alınırsa

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\tan \pi \delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz ve

$$c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.3.17)$$

elde ederiz. $q(x) \in C^2(0, \pi)$ olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz. c_1 sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (2.3.18)$$

olur.

Şimdi (2.3.17) formülünden faydalanarak $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (2.3.5) eşitliğinde $\varphi(x, \lambda)$ yerine (2.3.10) ifadesini yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x - \tau)\} \cos s\tau \cdot q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.3.17) formülünde s için her yerde s_n alınırsa

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_n(x) = \cos nx - \frac{cx}{n} \sin nx + \frac{h}{n} \sin nx + \frac{\sin nx}{2n} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\varphi_n(x)$, normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$a_n^2 = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx + \frac{1}{n} \int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne alalım. $\beta(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Bundan dolayı $a_n^2 = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dolayısıyla

$$\frac{1}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$\nu_n(x) = \frac{1}{a_n} \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.3.19)$$

şeklinde olur.

3. Şimdi $h=\infty$, $H \neq \infty$ olduğu durumu inceleyelim. (2.3.2) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0)=0 \quad (2.3.20)$$

olduğunu kabul edelim. $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.3.20) şartını sağlar. Bundan dolayı araştırdığımız durum için (2.3.2) sınır şartlarının ikincisinde $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonunu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (2.3.6) ifadesinin x 'e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi'_x(x, \lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (2.3.2) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned} & \cos s\pi + \int_0^\pi \cos\{s(\pi - \tau)\}q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \\ & + H \left\{ \frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin\{s(\pi - \tau)\}q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

elde ederiz.(2.3.9) ifadesinden dolayı (2.3.21) den

$$\cos s\pi + \frac{1}{s} \int_0^\pi \cos\{s(\pi - \tau)\}q(\tau)\sin s\tau d\tau + \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (2.3.22)$$

buluruz. $q(x)$ sınırlı türe ve sahip olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi q(\tau)\cos\{s(\pi - \tau)\}\sin s\tau d\tau &= \cos s\pi \int_0^\pi q(\tau)\cos s\tau \sin s\tau d\tau + \sin s\pi \int_0^\pi q(\tau)\sin^2 s\tau d\tau \\ &= \frac{\sin s\pi}{2} \int_0^\pi q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı (2.3.22) eşitliğinden

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s} \left\{ H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau)d\tau \right\} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \cos s\pi + H_1 \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (2.3.23)$$

olur.

$s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ olsun. O zaman (2.3.23) ifadesinden

$$\delta_n = \frac{H_1}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)\pi = -\tan \delta_n \pi = -\frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1 = H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

Şimdi (2.3.6) da s_n değerini yerleştirirsek $\psi(x, \lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \psi_n(x)$ normlu

özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3.24)$$

şeklinde olur.

4. Son olarak $h = \infty$ ve $H = \infty$ durumunu araştıralım. (2.3.2) sınır şartlarında $y(0) = y(\pi) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonu özel olarak $\psi(\pi, \lambda) = 0$ şartını sağlamalıdır. (2.3.6) ifadesinden

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin\{s(\pi - \tau)\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = 0$$

ya da

$$\sin s\pi \left\{ 1 + \int_0^\pi \cos s\tau q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \right\} - \cos s\pi \int_0^\pi \sin s\tau q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = 0$$

dır. (2.3.9) ifadesinden dolayı ($q(x)$ 'in sınırlı türevelere sahip olduğunu kabul ederiz.)

$$\sin s\pi - \frac{1}{2s} \cos s\pi \int_0^\pi q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s} \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \quad (2.3.25)$$

elde ederiz. Bu denklem (2.3.12) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (2.3.25)

denkleminin s_n kökleri $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^\pi q(\tau) d\tau$ olmak üzere

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.3.26)$$

şeklindedir.

(2.3.6) da s_n in değerini yerine yazarsak $\psi(x, \lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülünü elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot n \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right) \psi_n(x)$ normalleştirilmiş

özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3.27)$$

olur.

2.4. Özfonksiyonların Sıfırları (Nodal Noktalar)

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

basit sınır değer problemini göz önüne alalım.

Burada

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \cos x, \varphi_2(x) = \cos 2x, \dots, \varphi_n(x) = \cos nx, \dots, \text{özfonksiyonlardır.}$$

Bunlara karşılık gelen özdeğerler ise $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots,$

şeklindedir.

Özfonksiyonların sıfırlarının aşağıdaki iki özelliğe sahip olduğu açıktır.

- 1) n . özfonksiyon $(0, \pi)$ aralığında n tam sifıra sahiptir.
- 2) $(n+1)$ inci özfonksiyonun sıfırı n . özfonksiyonun herhangi iki sıfırı arasındadır.

Teorem 2.4.1.

$$u'' + g(x)u = 0, \quad (2.4.1)$$

$$v'' + h(x)v = 0. \quad (2.4.2)$$

şeklinde iki denklemi göz önüne alalım. Eğer tüm $[a,b]$ aralığında $g(x) < h(x)$ ise bu durumda birinci denklemin sıfır olmayan çözümünün iki ardışık sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı bulunacaktır.

İspat. (2.4.1) denklemini v ile (2.4.2) denklemini u ile çarpar ve birbirlerinden çıkarırsak

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx} \{u'v - v'u\} = \{h(x) - g(x)\}uv \quad (2.4.3)$$

elde ederiz. x_1 ve x_2 nin u 'nün iki sıfırı arasında olduğunu gösterelim. x_1 den x_2 ye kadar (2.4.3) eşitliğini integrallersek

$$\{u'v - v'u\}_{x_1}^{x_2} = u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \{h(x) - g(x)\}u(x)v(x)dx$$

elde ederiz.

(x_1, x_2) aralığında v 'nin her yerde sıfıra eşit olmadığını varsayalım. (x_1, x_2) aralığında genelliği bozmadan $u > 0$ ve $v > 0$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla denklemin sağ tarafı pozitifdir. $u \geq 0$ varsayımından dolayı x_1 noktasında u fonksiyonu artandır. Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ dır. Benzer şekilde $u'(x_2) < 0$ dır. Bundan dolayı

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$$

olur ve bu bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç. $y'' + g(x)y = 0 \quad (-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty)$

denkleminin çözümü $g(x) < -m^2 < 0$ olmak üzere birden fazla sıfıra sahip değildir.

Teorem 2.4.2. (Karşılaştırma- Mukayese Kriteri) (2.4.1) ve (2.4.2) denklemlerinin

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad \text{ve} \quad v(a) = \sin \alpha, \quad v'(a) = -\cos \alpha \quad (2.4.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri sırasıyla $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. Ayrıca tüm $[a,b]$ aralığında $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $a < x \leq b$ aralığında $u(x)$ fonksiyonu m tane sıfıra sahipse bu taktirde aynı aralıkta $v(x)$ in m den az olmayacak şekilde sıfırları mevcut olup $v(x)$ in k sıfırı $u(x)$ in k sıfırından küçüktür.

Lemma2.4.1. Eğer x_0 ($a < x_0 < b$) , $\varphi(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun sıfırı ise bu durumda herhangi yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısına $\exists \delta > 0$ sayısı karşılık gelir ve $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olacak şekilde $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ aralığında sadece bir sıfırı vardır.

Teorem2.4.3.(Osilasyon Teoremi). (2.1.1)-(2.1.2) sınır değer probleminin sınırsız artan $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerlerinin sınırsız bir dizisi var olsun. Bu durumda λ_m özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonun tam $a < x < b$ aralığında m tane sıfırı vardır.

İspat. (2.4.5) $u(a) = \sin \alpha$, $u'(a) = -\cos \alpha$ başlangıç şartlarını sağlayan (2.1.1) denkleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Teorem2.4.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalmıyor. $a \leq x \leq b$ için $|q(x)| < c$ olsun. (2.1.1) denklemini

$$y'' + (\lambda + c)y = 0$$

denklemini ile mukayese edelim.

Bu denklemin (2.4.5) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü

$$y = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left\{ (-\lambda - c)^{1/2} (x - a) \right\} - \frac{\cos \alpha}{(-\lambda - c)^{1/2}} \sinh \left\{ (-\lambda - c)^{1/2} (x - a) \right\}$$

şeklindedir.

λ nın negatif değerleri ile mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının olmadığı açıktır. ($a < x \leq b$ aralığında) Bu sebeple tekrar Teorem2.4.2 den faydalanırsak λ nın negatif değerlerinin yeterince büyük mutlak değerleri için $\varphi(x, \lambda)$ nın sıfırlarının mevcut olmadığı kanaatine varırız.

Mukayese için

$$y'' + (\lambda - c)y = 0$$

denklemini seçersek pozitif ve sınırsız artan λ lar için $\varphi(x, \lambda)$ çözümünün sıfırlarının sayısının $[a, b]$ aralığında sınırsız olarak arttığını görürüz.

$\varphi(x, \lambda) = 0$ denklemini göz önüne alalım.

Lemma2.4.1 den dolayı bu denklemin kökleri λ ya bağımlı sürekli fonksiyonlardır. Diğer bir yandan Teorem2.4.2 den dolayı λ artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur. Sıfırların sayısı azalmadığı için a noktasından dışarı sıfır çıkamaz. Lemma2.4.1 in sonucundan dolayı yeni sıfırlar b noktasından içeri

girer. $\varphi(b, \lambda) = 0$ olacak şekilde μ_0, λ parametresinin birinci değeri olsun. Böyle değerin bulunacağı aşıkardır. $\varphi(b, \lambda) = 0$ olacak şekilde μ_1, λ parametresinin ikinci değeri olsun. $\varphi(b, \mu_m) = 0$ olmak üzere $\varphi(x, \mu_m)$ fonksiyonu (a,b) aralığının içinde m tane sifıra sahip olacak şekilde $\mu_0, \mu_1, \dots$ sayı dizisi bu özelliklere sahiptir. Eğer $\sin \beta = 0$ ise bu takdirde (2.1.2) sınır şartlarından ikincisi sağlanıyor ve dolayısıyla μ_m sayıları özdeğerlerdir. ($\varphi(x, \lambda)$, (2.4.5) başlangıç koşulları sağladığı için (2.1.2) sınır koşullarının birincisini de sağlar.) Bu durumda teorem ispatlanmıştır.

Şimdi $\sin \beta \neq 0$, $u(x)$ ve $v(x)$ ise Teorem2.4.2 de göz önüne alınan fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\frac{d}{dx} \left\{ u^2 \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) \right\} = 2uu' \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) + u^2 \left(\frac{u''}{u} - \frac{v''}{v} \right) - u^2 \left(\frac{u'^2}{u^2} - \frac{v'^2}{v^2} \right) \quad (2.4.6)$$

$$= \frac{(u'v - v'u)^2}{v^2} + u^2 \{h(x) - g(x)\} > 0$$

olur. Bu sebeple v' 'nin sıfır olmadığı her aralıkta $u^2 \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right)$ fonksiyonu monoton artandır. $u(x)$ ve $v(x)$ in (a,b) aralığının içinde eşit sayıda sıfırlara sahip olduğunu varsayalım.

x ile $u(x)$ fonksiyonunun b noktasına en yakın sıfırını gösterelim. $x_v \leq x \leq b$ aralığında $v(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının olmadığını gösterelim. Gerçekten Teorem2.4.2 den dolayı a ve x_v arasında $v(x)$ fonksiyonunun en az v sayıda sıfırları bulunur. Eğer $v(x)$, $x_v \leq x \leq b$ aralığında sifıra sahip olursa bu takdirde (a,b) aralığının tamamında $v(x)$ fonksiyonunun bizim varsayımımıza rağmen $u(x)$ fonksiyonundan daha fazla sifıra sahip olur.

(2.4.6) bağıntısını x ve b arasında integrallersek

$$u^2(b) \left\{ \frac{u'(b)}{u(b)} - \frac{v'(b)}{v(b)} \right\} > u^2(x_v) \left\{ \frac{u'(x_v)}{u(x_v)} - \frac{v'(x_v)}{v(x_v)} \right\} = 0$$

bu itibarla

$$\frac{u'(b)}{u(b)} > \frac{v'(b)}{v(b)} \quad (2.4.7)$$

elde ederiz. $\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$ olmak üzere $u(x)$ için $\varphi(x, \lambda')$ ve $v(x)$ için $\varphi(x, \lambda'')$ ele alalım. (2.4.7) eşitsizliğine göre $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)}$ fonksiyonu (μ_m, μ_{m+1}) aralığında monoton azalır. $\varphi(b, \mu_m) = \varphi(b, \mu_{m+1})$ olduğu için $+\infty$ dan $-\infty$ 'a kadar azalması gerekir. Bu sebeple

$$\frac{\varphi'(b, \lambda_{m+1})}{\varphi(b, \lambda_{m+1})} = -\cot \beta$$

olmak üzere (μ_m, μ_{m+1}) aralığının içinde bir tane λ_{m+1} noktası bulunur yani (2.1.2) şartlarının ikincisi sağlanıyor. Demek ki λ_{m+1} özdeğerdir ve $\varphi(x, \lambda_{m+1})$ ise (a,b) aralığının içinde $\varphi(x, \mu_{m+1})$ fonksiyonunun sahip olduğu kadar sıfırı vardır yani m+1 tanedir.

3. TERS NODAL PROBLEMLER ÜZERİNE

3.1 Ters Nodal Problemlerin Çözümleri

Ters nodal problemler ilk olarak J.McLaughlin [34] incelenmiştir. Bu çalışmada sadece $\{x_n^k\}$ nodal noktalar cümlesinden faydalananarak $q(x)$ potansiyeli ve sınır koşulları (α ve β sayıları) tanımlanır. Daha sonra nodal noktalar cümlesini kullanarak farklı yöntemlerle (q, α, β) üçlüsünün tanımlanması [4,9,19,20,43] çalışmalarında yapılmıştır.

$q \in L^1(0,1)$ ve $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} -\phi'' + q(x)\phi &= \lambda\phi \\ \begin{cases} \phi(0)\cos\alpha + \phi'(0)\sin\alpha = 0 \\ \phi(1)\cos\beta + \phi'(1)\sin\beta = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin

$$\lambda_1(q, \alpha, \beta) < \lambda_2(q, \alpha, \beta) < \dots < \lambda_n(q, \alpha, \beta) < \dots \rightarrow \infty$$

özdeğerleri basit ve reeldir.

$$0 < x_n^1(q, \alpha, \beta) < x_n^2(q, \alpha, \beta) < \dots < x_n^{n-1}(q, \alpha, \beta) < 1$$

olmak üzere her bir özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar $n \geq 2$ için (n-1) tane nodal noktaya sahiptir. Tüm nodallar basittir ([2]). $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ ve $l_n^k = x_n^{k+1} - x_n^k$ nodal uzunluk olsun. Bu takdirde aşağıdaki problem söz konusudur.

Teorem3.1.1 ([20] ve [43])

Verilen nodal cümleden faydalananarak (q, α, β) nın tanımlanması için aşağıdaki formüller bulunur:

(a) (i) $\alpha = 0$ veya k/n sıfıra yaklaşırken ,

$$\cot\alpha = \begin{cases} \lim_{n \leftarrow \infty} n\pi^2(k - \frac{1}{2} - nx_n^k), & \beta \neq 0 \text{ ise} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \frac{1}{2})\pi^2(k - \frac{1}{2} - (n - \frac{1}{2})x_n^k), & \beta = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

(ii) $\beta = 0$ veya k/n sıfıra yaklaşırken,

$$\cot \beta = \begin{cases} \lim_{n \leftarrow \infty} n\pi^2 \left(n - \frac{1}{2} - nx_n^{n-k} \right) & , \alpha \neq 0 \text{ ise} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi^2 \left(n - k - \frac{1}{2} - \left(n - \frac{1}{2} \right) x_n^{n-k} \right) & , \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(b) (i) $(\alpha, \beta) \in \text{durum(I)}$ [43, Teorem 1.2] ise, o zaman hemen hemen her $x \in (0,1)$ için x_n^k , x e yakınsar,

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \pi^2 \left\{ nl_n^{k-1} + \frac{l_n^k}{n\pi^2} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 q - s \cot \alpha + s \cot \beta \right) \right\}. \quad (3.1.3)$$

(ii) $(\alpha, \beta) \in \text{durum (II)}$ ise o zaman hemen hemen her $x \in (0,1)$ için x_n^k , x e yakınsar,

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) l_n^k - 1 + \frac{l_n^k}{n\pi^2} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 q - s \cot \alpha + s \cot \beta \right) \right\}. \quad (3.1.4)$$

Burada $\gamma = 0$ ise bir başka şekilde $\cot \gamma = 0$ ise $s \cot \gamma = 0$ dir.

Lemma 3.1.1 ([20] ve [43])

$(q, \alpha, \beta) \in L^1(0,1) \times [0, \pi]^2$ olsun. $\alpha > 0$ ise $\alpha_0 = 1$ ve $\alpha = 0$ ise $\alpha_0 = -1$ olsun.

(a) Eğer $\alpha = \beta = 0$ veya $\alpha, \beta > 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken,

$$s_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} (-s \cot \alpha + s \cot \beta + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \alpha_0 \cos(2n\pi)) q(t) dt) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Eğer $\alpha = 0 < \beta$ veya $\alpha > 0 = \beta$ ise $n \rightarrow \infty$ iken,

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi} (-s \cot \alpha + s \cot \beta + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \alpha_0 \cos((2n-1)\pi)) q(t) dt) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Burada $\gamma = 0$ veya $\cot \gamma = 0$ ise $s \cot \gamma = 0$ dir.

3.2 Yeni Ters Nodal Problem

Bu paragrafta R^1 de ters nodal problemleri araştıracağız. Gesztesy-Simon'un sonuçlarını kullanarak X.F. Yang ters nodal problemler üzerine ilginç bir teorem ([44]) ispatladı. Kısaca $(0, b) \left(\frac{1}{2} < b \leq 1 \right)$ alt aralığındaki tüm nodal noktaların cümlesinin teklik için yeterliliği gösterildi. Aşağıdaki teorem Yang tarafından ispatlanmıştır.

Teorem3.2.1 ([44])

$\frac{1}{2} < b \leq 1$ ve $0 < \varepsilon < 2b - 1$ olsun. Kabul edelim ki $B(A)$, $(0, b)$ üzerinde S-yoğun ve tamdır, ve yeteri kadar büyük n için ,

$$\{n_j : n_j \leq n\} \geq (1 - \varepsilon)n + \frac{3\varepsilon}{2}$$

dir. Herhangi yeteri kadar büyük $j \in N$ için , burada tüm $k \in Z$ için

$$x_{n_j}^{k_j+k} = \bar{x}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j+k}$$

olmak üzere $(\bar{k}_j, \bar{n}_j)$ vardır ve $(k_j + k, n_j) \in A$ olacak şekilde $L^1(0,1) \times (0, \pi)^2$ de

$$\left(q - \int_0^1 q(t)dt, \alpha, \beta \right) = \left(\bar{q} - \int_0^1 \bar{q}(t)dt, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \right)$$

dır.

$0 < b \leq 1$ sabittir ve (q, α, β) ile tanımlanan Sturm-Liouville problemi ile bağlantılıdır. $S = \{n_j\}$ pozitif tamsayıların kesin azalan bir dizisi olsun.

$$T(S) = \{(k, n) : n \in S, k = 1, \dots, n-1\}$$

olduğunu kabul edelim. $A \subset T(S)$ olsun, herhangi bir $n_j \in S$ için $(k_j, n_j) \in A$ olacak şekilde bazı $k = k_j$ vardır. Dikkat edersek k_j tek olarak seçilmelidir. $(0, b)$ üzerinde bir alt nodal cümleyi $B(A)$ olarak tanımlarsak

$$B(A) = \{x_n^k \in (0, b) : (k, n) \in A\}$$

dır. Açıkça (q, α, β) problemine bağlı olan $B(A)$, $(0, b)$ aralığında S ve A kadar iyidir.

Tanım.

- (a) Her $j \geq 1$ için $B(A)$ da kapsanan komşu $x_{n_j}^{k_j}$ ve $x_{n_j}^{k_j+1}$ nodal noktalar çifti varsa, $B(A)$ cümlesi $(0,b)$ aralığında ikilidir.
- (b) $B(A)=[0,b]$ ise $B(A)$, $(0,b)$ üzerinde yoğundur.
- (c) Her $x \in (0,b)$ için $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{k_j} = x$ olacak şekilde $\{k_j\}$ mevcut olduğunda ve
- (d) $x_{n_j}^{k_j} \in B(A)$ olmak üzere S nin alt dizisi varsa (bunu $\{n_j\}$ ile gösterelim.) $B(A)$, $(0,b)$ üzerinde S-yoğundur.

$B(A)$, $(0,b)$ üzerinde S-yoğun ise yoğun olacağı açıktır.

Nodallarla göre Sturm-Liouville operatörü için ters problemin çözümüne ait aşağıdaki önemli teoremler sağlanır.

Teorem3.2.2 ([44])

$0 < b \leq 1$ olsun. $B(A)$, (q, α, β) ‘ya göre $[0,b]$ aralığında S-yoğun ve çift olsun.

$$x_{n_j}^{k_j+k}(q, \alpha, \beta) = x_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j+k}(\bar{q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

olmak üzere $\bar{k}_j$ ve $\bar{n}_j$ vardır öyle ki tüm $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(k_j + k, n_j) \in A$$

dır. Bu takdirde ancak sonlu j ‘ler için

$$n_j = \bar{n}_j$$

ve tüm büyük j için

$$\lambda_{n_j}(q, \alpha, \beta) = \lambda_{n_j}(\bar{q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) + C ,$$

ve $[0,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde

$$q = \bar{q} + C$$

dir.

Burada $C = C\left(\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \int_0^1 \bar{q} - q\right)$ bir sabittir.

Bu tezde $B(A)$, S-yoğun yerine yoğun olarak değerlendirildi.

Teorem3.2.3 $0 < b \leq 1$ alalım. $B(A)$ ‘nın (q, α, β) ile $(0,b)$ üzerinde yoğun ve çiftli olduğunu kabul edelim. Her $j \geq 1$ için $(\bar{k}_j, \bar{n}_j)$ vardır öyle ki

$$x_{n_j}^{k_j+k} = x_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j+k}$$

olmak üzere $(\bar{k}_j, \bar{n}_j)$ mevcut olduğunda ve tüm $k \in Z$ için $x_{n_j}^{k_j+k} \in B(A)$ olacak şekilde sonlu j 'ler hariç

$$(k_j, n_j) = (\bar{k}_j, \bar{n}_j), \quad \lambda_{n_j} = \bar{\lambda}_{n_j} + C$$

dir. Aynı zamanda $(0, b)$ üzerinde $\alpha = \bar{\alpha}$ ve $q = \bar{q} + C$ dir. Burada C bir reel sabittir.

İspat: Önce Lemma4.1.2 yi uygularsak ve (3.1.2) formülünü yeniden yapılandırırsak $\cot \alpha$ için doğrudan görürüz ki $\alpha = \bar{\alpha}$ dir.

O zaman görürüz ki $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ (Lemma3.1.1) 'nin asimptotik ifadelerinden

$$\lambda_n = \begin{cases} n^2 \pi^2 + 2s \cot \beta - 2s \cot \alpha + \int_0^1 q + o(1) & , (\alpha, \beta) \in \text{durum (I) ise} \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + 2s \cot \beta - 2s \cot \alpha + \int_0^1 q + o(1) & , (\alpha, \beta) \in \text{durum (II) ise} \end{cases}$$

elde ederiz.

Şimdi $\alpha = \bar{\alpha}$, j yeteri kadar büyük olmak üzere

$$C = 2(s \cot \beta - s \cot \bar{\beta}) + \int_0^1 (q - \bar{q})$$

olduğundan

$$\lambda_{n_j} - \bar{\lambda}_{n_j} = C + o(1)$$

elde ederiz.

φ_n ve $\bar{\varphi}_n$, (q, α, β) ve $(\bar{q}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ile tanımlanan Sturm-Liouville problemleri için normlaştırılmış özfonksiyonlar olsun öyle ki sırasıyla

$$\varphi_n(0) = \bar{\varphi}_n(0) = \sin \alpha, \quad \varphi'_n(0) = \bar{\varphi}'_n(0) = -\cos \alpha$$

dır. O zaman j büyük olmak üzere Lagrange özdeşliğinden

$$(\varphi'_{n_j}(x) \bar{\varphi}_{n_j}(x) - \varphi_{n_j}(x) \bar{\varphi}'_{n_j}(x))' = (q(x) - \bar{q}(x) + \bar{\lambda}_{n_j} - \lambda_{n_j}) \varphi_{n_j}(x) \bar{\varphi}_{n_j}(x) \quad (3.2.1)$$

elde ederiz.

$x \in (0, b)$ sabittir. $(0, b)$ aralığında $B(A)$ yoğun olduğundan , o zaman $x_{n_j}^{k_j} \in B(A)$ nodal

noktalarının bir dizisi ya $x \in B(A)$ ya veya x ' e yakınsaktır. Bundan dolayı 0 dan $x_{n_j}^{k_j}$

ye (veya son durum için x) 3.2.1 ifadesini integrallersek

$$0 = \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \left(\varphi'_{n_j}(t) \bar{\varphi}_{n_j}(t) - \varphi_{n_j}(t) \bar{\varphi}'_{n_j}(t) \right) dt = \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} (q(t) - \bar{q}(t) + C + o(1)) \varphi_{n_j}(t) \bar{\varphi}_{n_j}(t) dt \quad (3.2.2)$$

elde ederiz.

$$\text{Biliyoruz ki , [41] ve } \frac{1}{s_{n_j}} - \frac{1}{s_{\bar{n}_j}} = O\left(\frac{1}{n_j}\right) \text{ den}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n_j}(x) \bar{\varphi}_{n_j}(x) &= \begin{cases} \cos(s_{n_j} x) \cos(\bar{s}_{n_j} x) \sin^2 \alpha + O\left(\frac{1}{n_j}\right) , \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{n_j^2 \pi^2} \sin(s_{n_j} x) \sin(\bar{s}_{n_j} x) + O\left(\frac{1}{n_j^3}\right) , \alpha = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos(2s_{n_j} x)) \sin^2 \alpha + O\left(\frac{1}{n_j}\right) , \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{2n_j^2 \pi^2} (1 - \cos(2s_{n_j} x)) + O\left(\frac{1}{n_j^3}\right) , \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3.2.2) de $j \rightarrow \infty$ alırsak

$$\int_0^x (q - \bar{q} - C) = 0$$

elde ederiz. Bundan dolayı $(0, b)$ üzerinde $q = \bar{q} + C$ dir.

Sonuçta , j büyük olduğu zaman $(x_{n_j}^{k_j}, x_{n_j}^{k_j+1})$ nodal noktalarının alt aralıklarında arasında

$$\phi(x_{n_j}^{k_j}) = \phi(x_{n_j}^{k_j+1}) = 0$$

olacak şekilde

$$-\phi'' + q\phi = \lambda\phi \quad \text{ve} \quad -\phi'' + (\bar{q} + C)\phi = (\lambda + C)\phi$$

Sturm-Liouville problemlerini göz önüne alalım:

Bu problemin birinci özdeğerinin tekliliğinden dolayı $\lambda_{n_j} = \bar{\lambda}_{n_j} + C$ dir.

3.3 Vektörel Ters Nodal Problem

Bölüm 3 de vektörel Sturm-Liouville denklemi için sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases} -y''(x) + P(x)y(x) = \lambda y(x) \\ A_1 y(0) + A_2 y'(0) = 0 \\ B_1 y(1) + B_2 y'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Burada $P(x) = [p_{ij}(x)]_{i,j=1}^d$ olmak üzere $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli, simetrik, matris değerli bir fonksiyondur. A_i ve B_i ($i=1,2$) $d \times d$ reel matrislerdir.

$y(x)$, $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli d -boyutlu vektör- değerli bir fonksiyon olsun. $y(x_0) = 0$ ise $x_0 \in [0,1]$ noktasına $y(x)$ 'in bir nodal noktasıdır denir. $y(x)$, ayırık tekil sıfırlar olacak şekilde $y(x)$ 'e (CZ) cinsinden bir vektör- değerli fonksiyon diyeceğiz.

S matrisi sabit ve $U(x)$ diagonal matris-değerli bir fonksiyon olacak biçimde $P(x)$ matris değerli fonksiyonuna köşegensel denir .

$$P(x) = S^{-1}U(x)S$$

dir.

$d=2$ ise, $P(x)$ köşegenselidir ve $u_1(x) \leq u_2(x)$, $P(x)$ in karakteristik iki değeridir., o zaman $z(x)=Sy(x)$ olsun.(3.3.1) sınır değer problemini

$$-z''(x) + \begin{bmatrix} u_1(x) & 0 \\ 0 & u_2(x) \end{bmatrix} z(x) = \lambda z(x)$$

$$SA_1 S^{-1} z(0) + SA_2 S^{-1} z'(0) = 0$$

$$SB_1 S^{-1} z(1) + SB_2 S^{-1} z'(1) = 0$$

şekline indirgeyebiliriz.

Bundan dolayı $SA_i S^{-1}$ ve $SB_i S^{-1}$ ($i=1,2$) diagonal matrisler ise , iki boyutlu vektörel Sturm-Liouville denklemini , bir boyutlu Sturm-Liouville denklemleri şeklinde parçalayabiliriz.

$$i=1,2 \text{ için } SA_i S^{-1} = \begin{bmatrix} a_{i1} & 0 \\ 0 & a_{i2} \end{bmatrix} \text{ ve } SB_i S^{-1} = \begin{bmatrix} b_{i1} & 0 \\ 0 & b_{i2} \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman}$$

$$\begin{cases} -v''(x) + u_1(x)v(x) = \mu v(x) \\ a_{11}v(0) + a_{21}v'(0) = 0 \\ b_{11}v(1) + b_{21}v'(1) = 0 \end{cases}$$

probleminin $v(x, \mu_n)$ n. özfonksiyonu (CZ) sınıfından olmak üzere (3.3.1) ' in

$$S^{-1} \begin{bmatrix} v_n(x, \mu_n) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ özfonksiyonuna indirgeyebiliriz. Benzer şekilde}$$

$$\begin{cases} -w''(x) + u_2(x)w(x) = \rho w(x) \\ a_{12}w(0) + a_{22}w'(0) = 0 \\ b_{12}w(1) + b_{22}w'(1) = 0 \end{cases}$$

probleminin $w(x, \rho_m)$ m. özfonksiyonu (CZ) sınıfından olmak üzere (3.3.1) ' in

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w_m(x, \rho_m) \end{bmatrix} \text{ özfonksiyonuna indirgeyebiliriz.}$$

Bundan dolayı, Dirichlet sınır şartları $(A_1 = B_1 = I_2, A_2 = B_2 = 0)$ ve Neumann sınır şartları $(A_1 = B_1 = 0, A_2 = B_2 = I_2)$ için açıktır ki $P(x)$ diagonallaştırılabilir ise, o zaman (CZ) sınıfından olmak üzere bazı özfonksiyonlar sınırsızdır.

1999 yılında , C.L. Shen ve C.T. Shieh ([38]) d=2 için yaklaşık olarak ispatladı.:

(CZ) sınıfından $-\frac{d^2}{dx^2} + P(x)$ vektörel Sturm-Liouville operatörünün Dirichlet özfonksiyonları sonsuz sayıda ise o zaman $P(x)$ diagonallaştırılabilir.

$$\text{Dirichlet sınır şartlarını göz önüne alalım. } P(x) \quad , \quad U(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) & 0 \\ 0 & u_2(x) \end{bmatrix} \quad , \quad e$$

benzer ise yani $P(x)$ diagonallaşabilir ise o zaman iki boyutlu Dirichlet-Sturm Liouville sistemlerini alabiliriz.

$$\begin{cases} -v''(x) + u_1(x)v(x) = \mu v(x) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} -w''(x) + u_2(x)w(x) = \rho w(x) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

dir.

Bu takdirde $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ üzerinde McLaughlin' in teklik teoremini kullanabiliriz. Bundan başka (3.1.3) ü kullanırsak, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ ' i de yeniden

düzenleyebiliriz. Bir başka değişle , $P(x)$ hakkında dolaylı olarak bilgi edinebiliriz. Benzer sonuçlar Neumann sınır şartları için doğru olur.

Teorem3.3.1 ([38])

Aşağıdaki Dirichlet özdeğer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} -y''(x) + P(x)y = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$d=2$ olsun. Tamamı (CZ) sınıfından olmak üzere $\{y_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, (3.3.2) ‘nin

$\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ özfonksiyonlarının alt dizisinin varlığını kabul edelim. O zaman $P(x)$ diagonallaştırılabilir.

Bu tezde ,Shen ve Shieh Dirichlet sınır şartları tartışıldı. Nitekim , diğer sınır şartları sağlandığında özdeğerler için

$$\lambda_{2n-k} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) , \quad k=0,1 \quad (3.3.3)$$

asimptotik formülü geçerlidir.

Not edelim ki Neumann sınır şartı için benzer problem Carlson [5] tarafından incelenmiştir.

Teorem3.3.2

$$\begin{cases} -y'' + P(x)y = \lambda y \\ Ay(0) + I_2 y'(0) = 0 \\ By(1) + I_2 y'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

göz önüne alalım. $d=2$ olsun. (CZ) sınıfından olmak üzere (3.3.4) in $y(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarının alt dizisi $y(x, \lambda_{n_j})$ olsun ve yeteri kadar büyük n_j için λ_{n_j} özdeğerleri (3.3.3) bağıntısını sağlasın. O zaman $P(x)$ diagonallaştırılabilir.

4. YANG'A GÖRE TERS NODAL PROBLEM

4.1 Ön Hazırlık

Lemma4.1.1 $(q, \alpha, \beta) \in L^1(0,1) \times [0, \pi]^2$ olsun. Bu takdirde $n \rightarrow \infty$ iken $1 < k < n-1$ için,

$$(a) \quad l_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (I), \alpha = \beta = 0 \text{ veya } \alpha\beta > 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{n - \frac{1}{2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (II), \alpha = 0 < \beta \text{ veya } \beta = 0 < \alpha \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$(b) \quad x_n^k = \begin{cases} \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (Ia) \quad \alpha = \beta = 0 \text{ ise} \\ \frac{k - \frac{1}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (Ib) \quad \alpha\beta > 0 \text{ ise} \\ \frac{k}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (IIa) \quad \alpha = 0 < \beta \text{ ise} \\ \frac{k - \frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & , (IIb) \quad \beta = 0 < \alpha \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Bu lemmanın (a) kısmının ispatı [20], (b) kısmının ispatı [43] çalışmalarında verilmiştir. Şimdi Lemma4.1.1 ' den faydalananarak aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma4.1.2 $0 < b \leq 1$ olsun. $B(A)$, $(0, b)$ üzerinde çiftli ve tüm $j \geq 1$ için

$$x_{n_j}^{k_j} = \bar{x}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j} \quad \text{ve} \quad x_{n_j}^{k_j+1} = \bar{x}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j+1}$$

olmak üzere $(\bar{k}_j, \bar{n}_j)$ mevcut olduğunda sonlu j 'ler hariç

$$(k_j, n_j) = (\bar{k}_j, \bar{n}_j)$$

dır. Bundan başka , (α, β) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sınır şartları için (4.1.2) deki benzer alt durumlar söz konusudur.

İspat: (4.1.1) deki l_n^k nin asimptotik ifadelerinden , her iki durumda da

$$l_{n_j}^{k_j} = x_{n_j}^{k_j+1} - x_{n_j}^{k_j}$$

$$= \frac{1}{n_j} + O\left(\frac{1}{n_j^2}\right) = \frac{1}{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j}\right)$$

Benzer şekilde

$$\bar{l}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j} = \frac{1}{\bar{n}_j} + o\left(\frac{1}{\bar{n}_j}\right)$$

dir. Buna göre $\varepsilon > 0$ için , j yeteri kadar büyük olmak üzere

$$\frac{1-\varepsilon}{n_j} < l_{n_j}^{k_j} < \frac{1+\varepsilon}{n_j}$$

ve

$$\frac{1-\varepsilon}{\bar{n}_j} < \bar{l}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j} < \frac{1+\varepsilon}{\bar{n}_j}$$

olur. Dolayısıyla $l_{n_j}^{k_j} = \bar{l}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j}$,

$$\frac{1-\varepsilon}{n_j} < \frac{1+\varepsilon}{n_j} \quad \text{ve} \quad \frac{1-\varepsilon}{\bar{n}_j} < \frac{1+\varepsilon}{\bar{n}_j}$$

dir. Bundan dolayı

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{\bar{n}_j}{n_j} < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

dur. Bu her bir $\varepsilon > 0$ için geçerlidir. O halde

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}_j}{n_j} = 1 \quad (4.1.3)$$

dir.

Gelecekte , (4.1.1) de ki aynı duruma ait olan (α, β) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 'i göstereceğiz. $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ (II) durumuna ait iken (α, β) nın (I) durumuna ait olduğunu söyleyemeyiz. O zaman $j \rightarrow \infty$ iken (4.1.1) den ,

$$\frac{1}{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j^2}\right) = \frac{1}{\bar{n}_j - \frac{1}{2}} + o\left(\frac{1}{\bar{n}_j^2}\right)$$

dir. Buna göre (3.2.3) den ,

$$\frac{\bar{n}_j - n_j - \frac{1}{2}}{n_j \left(\bar{n}_j - \frac{1}{2} \right)} = o\left(\frac{1}{n_j^2} \right)$$

elde ederiz. Bu $n_j \bar{n}_j \cong n_j^2$ ve $n_j, \bar{n}_j \in N$ den dolayı mümkündür. Bundan dolayı

(α, β) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ aynı (I) durumuna ait olduğunu söyleriz. Öyleyse

$$n_j - \bar{n}_j = o(1)$$

önceki argümentlerinden

$$\frac{1}{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j^2} \right) = \frac{1}{\bar{n}_j} + o\left(\frac{1}{\bar{n}_j^2} \right)$$

sağlanır. Bundan dolayı j yeteri kadar büyük ise o zaman $n_j = \bar{n}_j$ dır.

Şimdi (3.1.2) de ki $x_{n_j}^{k_j}$ ve $\bar{x}_{\bar{n}_j}^{\bar{k}_j}$ için asimptotik ifadeleri karşılaştıralım, yeteri kadar büyük j için $k_j = \bar{k}_j$ ve (3.1.2) aynı alt duruma ait olan (α, β) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sonucuna varırız.

5. VEKTÖREL TERS NODAL PROBLEM

5.1 Dirichlet Sınır Şartları

d=2 için vektörel Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases} -y'' + P(x)y = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}, \quad (5.1.1)$$

Burada $P(x) = [p_{ij}(x)]_{i,j=1}^2$, $[0,1]$ aralığında tanımlı C^2 'de olmak üzere simetrik matris değerli bir fonksiyondur.

Teorem 5.1.1 $Y(x, \lambda)$, 2×2 tipinde matris değerli fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -Y'' + P(x)Y = \lambda Y \\ Y(0) = 0, Y'(0) = I_2 \end{cases}, \quad (5.1.2)$$

problemini göz önüne alalım. O zaman

$$Y(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} I_2 + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} P(t) Y(t, \lambda) dt$$

İfadesi (5.1.2) nin bir çözümüdür.

İspat : Son eşitliği x 'e göre diferensiyellersek

$$Y'(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x) I_2 + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) P(t) Y(t, \lambda) dt$$

elde ederiz. Tekrar son ifadeyi x 'e göre diferensiyellersek

$$\begin{aligned} Y''(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) I_2 + \int_0^x -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x-t)) P(t) Y(t, \lambda) dt + P(x) Y(x, \lambda) \\ &= -\lambda \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} I_2 + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} P(t) Y(t, \lambda) dt \right] + P(x) Y(x, \lambda) \\ &= -\lambda Y(x, \lambda) + P(x) Y(x, \lambda) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan ,

$$Y(0, \lambda) = 0, \quad Y'(0, \lambda) = I_2$$

dir. Bundan dolayı $Y(x, \lambda)$, (5.1.2) nin çözümüdür.

Problem(5.1.1) inceleyelim. (5.1.1) 'in ve buna karşılık gelen (5.1.2) matris diferansiyel denkleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarını göz önüne alalım ve

karşılaştıralım. $Y(x, \lambda)$, (5.1.2) nin çözümü olsun. O zaman yalnız ve yalnız $Y(1, \lambda^*)$ singüler ise λ^* reel sayısı (5.1.1) ' in özdeğeridir. Bu durumda $Y(1, \lambda^*)v^* = 0$ olmak üzere bazı $v^* \in R^2 - \{0\}$ vardır. Buna göre λ^* a karşılık gelen (5.1.1) in özfonksiyonu $Y(x, \lambda^*)v^*$ dır.

Lemma5.1.1 (5.1.1) in n. özdeğerini λ_n ile gösterelim. Bu takdirde yeteri kadar büyük n sayısı için

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_{2n-1}} &= n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sqrt{\lambda_{2n}} &= n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

dir.

İspat: P potansiyel fonksiyonu ile bağlantılı n. Dirichlet (Neumann) özdeğeri λ_n olsun.

P_0 ile ilişkili n. Dirichlet (Neumann) özdeğeri λ_n^0 ve $P_0 = \int_0^1 P(x)dx$ olsun. [5] den P,

C^2 sınıfından reel simetrik ve P_0 , Dirichlet (Neumann) sınır şartlarına karşılık gelen diagonal matris ise yeteri kadar büyük n ve k=0,1 için

$$|\lambda_{2n-k} - \lambda_{2n-k}^0| \leq \frac{C}{n+1}$$

olmak üzere C pozitif sayısı vardır.

Genelde , P_0 'ın diagonal matris olması gerekmez. P reel simetrik olduğundan ,

P_0 reel simetrikdir ve buna göre diagonallaştırılabilir. S, P_0 ' ın benzer matrisi olsun.

O zaman $S^{-1}P_0S$ diagonal matrisi

$$S^{-1}P_0S = \int_0^1 S^{-1}P(x)Sdx$$

ifadesini sağlar.

$P(x)$ ve $S^{-1}P(x)S$ potansiyel fonksiyonları için özdeğerler cümlesinin aynı

olacağı açıktır.

$$S^{-1}P_0S = \text{diag}\{q_1, q_2\}$$

ve

$$\lambda_{2n-k}^0 = n^2\pi^2 + q_{2-k}$$

olsun . Dolayısıyla

$$\lambda_{2n-k} = n^2 \pi^2 + q_{2-k} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Böylece

$$\sqrt{\lambda_{2n-k}} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir.

Lemma5.1.2 λ_n özdeğerine karşılık gelen (5.1.1) in çözümü $y(x, \lambda_n)$ ve (5.1.1) in nodal cümlesi $\{x_n^k\}$ olsun. Eğer $y(x, \lambda_n)$, (CZ) sınıfından ise yeteri kadar büyük n sayısı için

$$x_n^k = \frac{k}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

dır.

İspat: (5.1.2) nin çözümü $Y(x, \lambda)$ olsun ve $v_n = \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} \in R^2 - \{0\}$, $Y(x, \lambda_n)$ nin

birim vektörü olsun , öyle ki $y(x, \lambda_n) = Y(x, \lambda_n)v_n$, (CZ) sınıfından (5.1.1) ' in bir özfonksiyonudur. O zaman

$$Y(x, \lambda_n)v_n = \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}} I_2 + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x-t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t) Y(t, \lambda_n) dt \right] v_n$$

$$= \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}} I_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] v_n$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{v_{n_1} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{v_{n_2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{bmatrix}$$

Bundan dolayı,

$$Y\left(\frac{\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \lambda_n\right) v_n = \begin{bmatrix} \frac{v_{n_1} \sin\left(\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi\right)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{v_{n_2} \sin\left(\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi\right)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{bmatrix},$$

ve

$$Y\left(\frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \lambda_n\right) v_n = \begin{bmatrix} \frac{v_{n_1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{v_{n_2} \sin\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{bmatrix}$$

olur. Böylece tüm k için $\sin\left(\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi\right) \sin\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) < 0$,

$$Y(x_n^k, \lambda_n) v_n = 0$$

olmak üzere

$$x_n^k \in \left(\frac{\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \right)$$

dir.

$0 \leq |C_n^k| \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_n}}$ olmak üzere $x_n^k = \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + C_n^k$ olsun. O zaman

$$0 = Y(x_n^k, \lambda_n) v_n = \begin{bmatrix} \frac{v_{n1} \sin(k\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{v_{n2} \sin(k\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{bmatrix}$$

dir.

$$\sqrt{\lambda_n} = \left[\frac{n+1}{2} \right] \pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ iken}$$

$$0 = \sin(k\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k) + O\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^k \sin(\sqrt{\lambda_n} C_n^k) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. $C_n^k = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alırsak, dolayısıyla $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned} x_n^k &= \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + C_n^k \\ &= \frac{k\pi}{\left[\frac{n+1}{2} \right] \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{k}{\left[\frac{n+1}{2} \right]} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç5.1.1 Lemma5.1.2 deki aynı varsayımlar korunacak şekilde

$$(a) \quad l_n^k = x_n^{k+1} - x_n^k = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$(b) \quad \sqrt{\lambda_n} (x_n^{k+1} - x_n^k) = \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(c) \quad \sqrt{\lambda_n} x_n^k = k\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz.

Lemma5.1.3 (CZ) sınıfından olmak üzere, $\{x_n^k\}$ nodal cümlesine sahip (5.1.1) 'in özfonksiyonları $Y(x, \lambda_n) v_n$ olacak biçimde (5.1.1) 'in λ_n özdeğerine karşılık gelen (5.1.2) nin bir çözümü $Y(x, \lambda_n)$ olsun ve $Y(x, \lambda_n)$ nin birim vektörü v_n olsun. O zaman $n \rightarrow \infty$ iken

$$(a) \int_0^{x_n^k} [\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))] P(t) Y(t, \lambda_n) dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(b) her bir l, m için $\eta_{lm,n}^k \in [x_n^k, x_n^{k+1}]$, öyle ki

$$\int_0^{x_n^k} [\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t))] P(t) Y(t, \lambda_n) dt = \frac{-I_n^k \cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm}(\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

İspat:(a) Önce, Teorem 5.1.1 'den ve açıların toplamına ilişkin trigonometrik formüllerden ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_n^k} [\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))] P(t) Y(t, \lambda_n) dt \\ &= \int_0^{x_n^k} \left\{ 2 \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right)\right) P(t) \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} I_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right\} dt \\ &= \frac{2 \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2}\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{x_n^k} \left\{ \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right)\right) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) P(t) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} dt \end{aligned}$$

O zaman

$$\cos\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Riemann-Lebesgue lemmasından

$$\int_0^{x_n^k} \left\{ \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2} - t\right)\right) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) P(t) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} dt = o(1).$$

Dolayısıyla ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_n^k} [\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))] P(t) Y(t, \lambda_n) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} O\left(\frac{1}{n}\right) o(1) \\ &= o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur

(b) şıkkını ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
& \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) P(t) Y(t, \lambda_n) dt \\
&= \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \left\{ \left[\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1}) \cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1}) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right] P(t) \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} I_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right\} dt \\
&= \frac{-\cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t) P(t) dt + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \sin(2\sqrt{\lambda_n} t) P(t) dt + \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} O\left(\frac{1}{n^2}\right) dt \\
&= \frac{-\cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm} \eta_{lm,n}^k]_{l,m=1}^2 \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \sin^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} O(1) dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{-\cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm} (\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 \frac{l_n^k}{2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} O(1) dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{-l_n^k \cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm} (\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Böylece Lemma 5.1.3 ispatlanmıştır.

Teorem 5.1.2 (CZ) sınıfından (5.1.1) 'in özfonksiyonları $\{y(x, \lambda_{n_j})\}_{j=1}^\infty$ olsun. O zaman

$P(x)$ diagonalılabildir.

İspat: λ_{n_j} ye karşılık gelen (5.1.2) nin bir çözümü $Y(l, \lambda_{n_j})$ olmak üzere $Y(l, \lambda_{n_j})$ 'nin

birim vektörü v_{n_j} olsun. O zaman λ_{n_j} ye karşılık gelen (5.1.1) 'in özfonksiyonu

$Y(x, \lambda_{n_j}) v_{n_j}$ dir. $Y(x, \lambda_{n_j}) v_{n_j}$ 'nin (CZ) sınıfından bir özfonksiyon olduğunu kabul

edelim. $\left\{ x_{n_j}^k : j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \frac{n_j - 1}{2} \right\}$ nodal cümlesi, $(0, 1)$ aralığında yoğun

olsun. O zaman

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{k_j} = x_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{k_j+1}$$

olmak üzere $(x_{n_j}^{k_j}, x_{n_j}^{k_j+1})$ aralığı x_0 'ı içerir.

$$Y(x_{n_j}^{k_j}, \lambda_{n_j}) v_{n_j} = 0 = Y(x_{n_j}^{k_j+1}, \lambda_{n_j}) v_{n_j}$$

olduğundan

$$\left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} I_2 + \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} = 0$$

ve

$$\left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} I_2 + \int_0^{x_{n_j}^{k_j+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j+1} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} = 0$$

elde ederiz. Önceki iki denklemi de ilave edersek,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} I_2 + \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} + \\ & \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} I_2 + \int_0^{x_{n_j}^{k_j+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j+1} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & - \left[\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}) \right] v_{n_j} \\ & - \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \left[\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j} - t)) \right] P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \\ & = \left[\int_{x_{n_j}^{k_j}}^{x_{n_j}^{k_j+1}} \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}}(x_{n_j}^{k_j+1} - t)) P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} \end{aligned}$$

Lemma5.1.3 den dolayı

$$\begin{aligned} & - \left[\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}) \right] v_{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j^2}\right) v_{n_j} \\ & = \left[\frac{-l_{n_j}^{k_j} \cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})}{2\sqrt{\lambda_{n_j}}} [p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j})]_{l,m=1}^2 + O\left(\frac{1}{n_j^3}\right) \right] v_{n_j} \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu sebeple

$$[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j})]_{l,m=1}^2 v_{n_j} = \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} [\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})]}{l_{n_j}^{k_j} \cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})} v_{n_j} + o(1) .$$

P sürekli matris değerli bir fonksiyon olduğundan ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[p_{lm} \left(\eta_{lm,n_j}^{k_j} \right) \right]_{l,m=1}^2 = P(x_0)$$

dir. Diğer taraftan , tüm n_j için $\|v_{n_j}\| = 1$ ve kolaylık için v_{n_j} , v ye yakınsak

alt diziye sahiptir. Bundan dolayı

$$v_{n_j}^t \left[p_{lm} \left(\eta_{lm,n_j}^{k_j} \right) \right]_{l,m=1}^2 v_{n_j} = \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} \left[\sin \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j} \right) + \sin \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1} \right) \right]}{l_{n_j}^{k_j} \cos \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1} \right)} v_{n_j} + o(1)$$

$j \rightarrow \infty$ iken limit alırsak , L.H.S. , $v^t P(x_0) v$ 'ye yakınsaktır. Buna göre R.H.S. de

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} \left[\sin \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j} \right) + \sin \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1} \right) \right]}{l_{n_j}^{k_j} \cos \left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1} \right)} = c(x_0)$$

vardır ve $c(x_0)$ sabittir. Bundan dolayı

$$v^t P(x_0) v = c(x_0)$$

yani

$$P(x_0) v = c(x_0) v$$

dir.

(0,1) aralığında x_0 sabit olduğundan , (0,1) aralığında $x_1 \neq x_0$ seçebiliriz ve $P(x_1)$ in özvektörü v olacak şekilde x_1 için önceki argümenti kullanırız. Bu takdirde $P(x_0)$ ve $P(x_1)$ aynı v özvektöre sahiptir.

Diğer taraftan u , v ye ortogonal olacak biçimde $P(x)$ in özvektörü u ise her bir $P(x)$ diagonallaştırılabilir.

$$P(x) u = c(x) u$$

olmak üzere $c(x)$, x 'e bağlı diğer bir $c(x)$ sabiti vardır. Böylece P diagonallaştırılabilir.

5.2 Diğer Sınır Şartları

Bu bölümde Dirichlet sınır şartlarından farklı sınır şartlarını ele alacağız ve özdeğerler belirli bir şartları sağlamak üzere bir önceki bölümdeki sonuçların benzerlerini bulacağız.

$d=2$ için vektörel Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım:

$$P(x) = \left[p_{ij}(x) \right]_{i,j=1}^2, \quad [0,1] \text{ aralığında sürekli simetrik matris-değerli bir fonksiyon ve } I_2,$$

2×2 tipinde özdeş matris olmak üzere

$$\begin{cases} -y'' + P(x)y = \lambda y \\ Ay(0) + I_2 y'(0) = 0 \\ By(1) + I_2 y'(1) = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Bu problem non-Dirichlet sınır şartları ile ilgilidir. A=B=0 ise o zaman (5.2.1) tamamen Neumann sınır şartlarıdır.

Teorem 5.2.1 $Y(x, \lambda)$, 2×2 tipinde matris değerli fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} -Y'' + P(x)Y = \lambda Y \\ Y(0, \lambda) = I_2, Y'(0, \lambda) = -A \end{cases}, \quad (5.2.2)$$

problemini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$Y(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)I_2 - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}A + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}}P(t)Y(t, \lambda)dt$$

İfadesi (5.2.2) ün bir çözümüdür.

İspat: Son ifadenin x 'e göre ikinci mertebeden türevini hesaplırsak:

$$Y'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)I_2 - \cos(\sqrt{\lambda}x)A + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t))P(t)Y(t, \lambda)dt$$

ve

$$\begin{aligned} Y''(x, \lambda) &= -\lambda \cos(\sqrt{\lambda}x)I_2 + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)A + \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))P(t)Y(t, \lambda)dt + P(x)Y(x, \lambda) \\ &= -\lambda \left[\cos(\sqrt{\lambda}x)I_2 - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}A + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}}P(t)Y(t, \lambda)dt \right] \\ &= -\lambda Y(x, \lambda) + P(x)Y(x, \lambda) \end{aligned}$$

buluruz. Diğer taraftan , $Y(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonu

$$Y(0, \lambda) = I_2, \quad Y'(0, \lambda) = -A$$

şartlarını sağlar. Bundan dolayı (5.2.2) nin bir çözümü $Y(x, \lambda)$ dır.

Lemma 5.2.1 (5.2.1) ün (yani A=B=0) n. inci Neumann özdeğerini λ_n ile gösterelim.

O zaman yeteri kadar büyük n sayısı için

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{2n-1}} &= n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sqrt{\lambda_{2n}} &= n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

dir.

Lemma5.2.1 'in ispatı Lemma5.1.1 'nin ispatı ile aynıdır.

Lemma5.2.2 λ_n özdeğerine karşılık gelen (5.2.1) ün çözümü $y(x, \lambda_n)$ olsun ve (5.2.1) ün nodal cümlesi $\{x_n^k\}$ olsun. $y(x, \lambda_n)$, (CZ) sınıfından ise ve λ_n , (5.2.3) deki asimptotik ifadelerle sahip ise, o zaman yeteri kadar büyük n sayısı için,

$$x_n^k = \frac{k + \frac{1}{2}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

dır.

İspat (5.2.2) ün bir çözümü $Y(x, \lambda)$ ve (5.2.1) 'ün özfonksiyonu $Y(x, \lambda_n)v_n$, (CZ)

sınıfından olacak şekilde $v_n = \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} \in R^2 - \{0\}$, $Y(x, \lambda_n)$ nin birim vektörü olsun.

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \lambda_n\right) v_n &= \left[\cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) I_2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] v_n \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) & O\left(\frac{1}{n}\right) \\ O\left(\frac{1}{n}\right) & \cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{n1} \cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ v_{n2} \cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$Y\left(\frac{\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \lambda_n\right) v_n = \begin{bmatrix} v_{n1} \cos\left(\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ v_{n2} \cos\left(\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{bmatrix}$$

dir.

$$\cos\left(\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi\right) \cos\left(\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi\right) < 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

olduğundan $Y(x_n^k, \lambda_n)v_n = 0$ olacak biçimde $x_n^k \in \left(\frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}}, \frac{\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \right)$ dir.

$0 \leq |C_n^k| \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_n}}$ olmak üzere $x_n^k = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + C_n^k$ olsun. O zaman

$$0 = Y(x_n^k, \lambda_n)v_n = \begin{bmatrix} v_{n_1} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ v_{n_2} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{bmatrix}$$

dır. Bundan dolayı

$$0 = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \sqrt{\lambda_n} C_n^k\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\sqrt{\lambda_n} C_n^k\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur.. $C_n^k = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alırsak ,

$$x_n^k = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{\lambda_n}} + C_n^k = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left[\frac{n+1}{2}\right]\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{k + \frac{1}{2}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

Sonuç5.2.1 Lemma5.2.2 deki aynı varsayımlar sağlanacak şekilde

(a) $l_n^k = x_n^{k+1} - x_n^k = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(b) $\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - x_n^k) = \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$

(c) $\sqrt{\lambda_n}x_n^k = k\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$

elde ederiz.

Lemma 5.2.3 (5.2.1) 'ün λ_n özdeğerine karşılık gelen (5.2.2) nin çözümü $Y(x, \lambda_n)$ olsun ve λ_n , (5.2.3) de ki asimptotiklere sahiptir. $Y(x, \lambda_n) v_n$, (CZ) sınıfından $\{x_n^k\}$ nodal cümlesine sahip (5.2.1) in özfonksiyonu olmak üzere $Y(x, \lambda_n)$ nin birim vektörü v_n olsun. O zaman $n \rightarrow \infty$ iken

(a)

$$\int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t) Y(t, \lambda_n) dt = \frac{-l_n^k \sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm}(\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Her bir l, m için $\eta_{lm,n}^k \in [x_n^k, x_n^{k+1}]$ vardır.

(b)
$$\int_0^{x_n^1} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t) Y(t, \lambda_n) dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

İspat: (a) şikkını ispatlayalım.

$$\begin{aligned} & \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t) Y(t, \lambda_n) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \left\{ \left[\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1}) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) - \cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1}) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right] P(t) \left[\cos(\sqrt{\lambda_n} t) I_2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} dt \\ &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t) P(t) dt - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \sin(2\sqrt{\lambda_n} t) P(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} O\left(\frac{1}{n}\right) dt \\ &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm} \eta_{lm,n}^k]_{l,m=1}^2 \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} \cos^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x_n^k}^{x_n^{k+1}} O(1) dt + \frac{l_n^k O\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \\ &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm}(\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 \frac{l_n^k}{2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{l_n^k \cos(\sqrt{\lambda_n} x_n^{k+1})}{2\sqrt{\lambda_n}} [p_{lm}(\eta_{lm,n}^k)]_{l,m=1}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

(b) şikkını ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_n^k} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t)Y(t, \lambda_n) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{x_n^k} \left\{ 2 \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right) \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2}\right) P(t)Y(t, \lambda_n) dt \right\} dt \\
&= \frac{2 \cos\left(\sqrt{\lambda_n} \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{2}\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{x_n^k} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right)\right) P(t)Y(t, \lambda_n) dt \\
&= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{x_n^k} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right)\right) P(t)Y(t, \lambda_n) dt
\end{aligned}$$

Riemann-Lebesgue lemmasından , $n \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^{x_n^k} \sin\left(\sqrt{\lambda_n} \left(\frac{x_n^{k+1} + x_n^k}{2} - t\right)\right) P(t)Y(t, \lambda_n) dt \rightarrow 0$$

olduğunu elde ederiz.

Dolayısıyla , $n \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_n^k} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^{k+1} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_n}(x_n^k - t))}{\sqrt{\lambda_n}} P(t)Y(t, \lambda_n) dt \\
&= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{\lambda_n}} o(1) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} O\left(\frac{1}{n}\right) o(1) \\
&= o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Böylece (CZ) tipli özdeğerler ve diagonallaştırılabilir potansiyel fonksiyon arasındaki bağıntıda non-dirichlet sınır koşullarını sağlar.

Teorem5.2.2 (5.2.1) ün özfonksiyonları $y(x, \lambda_{n_j})$ (CZ) sınıfından olsun. λ_{n_j} , (5.2.3)

deki asimptotik ifadelere sahip ise $P(x)$ diagonallaştırılabilir.

İspat. (5.2.2) ‘ ün çözümü $Y(x, \lambda)$ ve (5.2.1) ün özdeğerleri $\{\lambda_{n_j}\}$ olsun. O zaman

$$BY(1, \lambda_{n_j}) + I_2 Y'(1, \lambda_{n_j})$$

singülerdir. Bundan dolayı λ_{n_j} 'ye karşılık gelen (5.2.1) 'ün özfonksiyonları $Y(x, \lambda_{n_j})v_{n_j}$

$Y(x, \lambda_{n_j})v_{n_j}$ olmak üzere $Y(1, \lambda_{n_j})$ nin $\{v_{n_j}\}$ birim vektörüdür. $Y(x, \lambda_{n_j})v_{n_j}$, (CZ)

sınıfından bir özfonksiyon olsun.

$$\left\{ x_{n_j}^k : j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \frac{n_j - 1}{2} \right\}, (0, 1) \text{ aralığında yoğun nodal cümle olsun. O}$$

zaman

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{k_j} = x_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}^{k_j+1}$$

olacak şekilde $(x_{n_j}^{k_j}, x_{n_j}^{k_j+1})$ aralığı x_0 'ı içerir.

olur.

$$Y(x_{n_j}^{k_j}, \lambda_{n_j})v_{n_j} = 0 = Y(x_{n_j}^{k_j+1}, \lambda_{n_j})v_{n_j}$$

olduğundan

$$\left[\cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) I_2 - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} A + \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} (x_{n_j}^{k_j} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} = 0$$

ve

$$\left[\cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}) I_2 - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} A + \int_0^{x_{n_j}^{k_j+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} (x_{n_j}^{k_j+1} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j} = 0$$

Önceki iki denklemleri ilave eder ve yeniden düzenlersek,

$$\left[\cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) + \cos(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}) \right] v_{n_j} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1})}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} A v_{n_j} +$$

$$\left\{ \int_0^{x_{n_j}^{k_j}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} (x_{n_j}^{k_j} - t)) + \sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} (x_{n_j}^{k_j+1} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right\} v_{n_j}$$

$$= \left[\int_{x_{n_j}^{k_j}}^{x_{n_j}^{k_j+1}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{n_j}} (x_{n_j}^{k_j+1} - t))}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} P(t) Y(t, \lambda_{n_j}) dt \right] v_{n_j}$$

elde ederiz.

Lemma 5.2.3 den dolayı

$$\begin{aligned} & \left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) \right] v_{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j^2}\right) v_{n_j} - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)}{\sqrt{\lambda_{n_j}}} A v_{n_j} + o\left(\frac{1}{n_j^2}\right) \\ &= \left[\frac{l_{n_j}^{k_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)}{2\sqrt{\lambda_{n_j}}} \left[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j}) \right]_{l,m=1}^2 \cdot v_{n_j} + O\left(\frac{1}{n_j^3}\right) \right] \end{aligned}$$

alabiliriz.

$$\begin{aligned} & \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) = 2 \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} \frac{x_{n_j}^{k_j} + x_{n_j}^{k_j+1}}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} \frac{x_{n_j}^{k_j} - x_{n_j}^{k_j+1}}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left((k_j + 1)\pi + O\left(\frac{1}{n_j^2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n_j}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n_j^2}\right) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) \right] v_{n_j} + O\left[\frac{1}{n_j^3}\right] o\left(\frac{1}{n_j^2}\right) = \\ &= \left[\frac{l_{n_j}^{k_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)}{2\sqrt{\lambda_{n_j}}} \left[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j}) \right]_{l,m=1}^2 \cdot v_{n_j} + O\left(\frac{1}{n_j^3}\right) \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bundan dolayı,

$$\left[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j}) \right]_{l,m=1}^2 v_{n_j} = \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} \left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) \right]}{l_{n_j}^{k_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)} v_{n_j} + o(1) .$$

P , matris-değerli sürekli bir fonksiyon olduğundan , $j \rightarrow \infty$ iken

$$\left[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j}) \right]_{l,m=1}^2 \rightarrow P(x_0)$$

dır. Diğer taraftan, tüm n_j için $\|v_{n_j}\| = 1$ ve v_{n_j} herhangi v ye yakınsar. Bu sebeple

$$v_{n_j}^t \left[p_{lm}(\eta_{lm,n_j}^{k_j}) \right]_{l,m=1}^2 v_{n_j} = \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} \left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) \right]}{l_{n_j}^{k_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)} v_{n_j} + o(1)$$

$j \rightarrow \infty$ iken limit alırsak , L.H.S. , $v^t P(x_0)v$ 'ye yakınsar. Buna göre R.H.S. de

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\lambda_{n_j}} \left[\cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right) \right]}{l_{n_j}^{k_j} \sin\left(\sqrt{\lambda_{n_j}} x_{n_j}^{k_j+1}\right)} = c(x_0)$$

vardır. Bundan dolayı $c(x_0)$ sabit olacak şekilde

$$P(x_0)v = c(x_0)v$$

dir.

$(0,1)$ aralığında x_0 keyfi olduğundan , $(0,1)$ aralığında $x_1 \neq x_0$ seçebiliriz ve x_1 için önceki argümenti kullanırız öyle ki $P(x_1)$ in özvektörü v dir. O zaman $P(x_0)$ ve $P(x_1)$ aynı v özvektörüne sahiptir.

Buna ilaveten , u ' v ye ortogonal birim vektörü olsun. Her bir $P(x)$ diagonallaştırılabilir olduğundan , u $P(x)$ için bir özvektör olur. Böylece $c(x)$, x 'e bağlı bir sabittir olacak şekilde

$$P(x)u = c(x)u$$

dir. Bu sebeple P diagonallaştırılabilir.

5.3 Nodal Noktalara Göre Ters Problemin Tekliğine İlişkin Bazı Sonuçlar

Bu kısımda spektral verilerin yeni bir çeşidi olan nodal noktalardan faydalanarak Sturm-Liouville denklemi için spektral teoremin ters problemleri ile ilgilendik. $q(x) \in L^2(0,1)$ olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q)y = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (5.3.1)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (5.3.2)$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Özfonksiyonların verilen nodal noktalarına göre q potansiyelini tanımlayalım. (5.3.1)-(5.3.2) problemi titreşim teorisinde meydana gelen

$$(pu_x)_x - qu + \lambda \rho u = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad , \quad p > 0 \quad , \quad \rho > 0$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

probleminin bir benzeri olduğunu hatırlatalım.

Sturm-Liouville operatörü için ters problemler incelenirken , özel olarak teklik teoremleri ispatlanırken genellikle spektral verilerin her bir cümlesi iki dizi ile

verilmektedir. Dolayısıyla potansiyel fonksiyonu bire-bir tanımlamak için spektral verileri için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- a) iki farklı özdeğerler cümlesi
- b) özdeğerler ve normlaştırıcı sabitler cümlesi
- c) kısmen çakışmayan iki spektrum
- d) özdeğerler ve özfonksiyonların sıfırları (nodal noktaların cümlesi)

(5.3.1)-(5.3.2) probleminin özdeğerleri $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ olsun. Bu takdirde $\lambda = \lambda_n(q)$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $y(x, q, \lambda_n)$ ise normlaştırıcı sabitlerin bir cümlesini

$$\rho_n(q) = \|y(1, q, \lambda_n)\|^2 / \|y'(0, q, \lambda_n)\|^2, \quad n=1,2,\dots$$

şeklinde ele alalım [13-37]. Normlaştırıcı sabitlerin cümlesi

$$k_n(q) = \log\left(\frac{y'(1, q, \lambda_n)}{y'(0, q, \lambda_n)}\right), \quad n=1,2,\dots$$

şeklinde olabilir [7]. Bu durumda veri cümlesindeki ikinci bir dizi olarak özdeğerlerin bir başka cümlesi $\mu_n(q)$, $n=1,2,\dots$, dir. Bu cümle

$$\begin{aligned} -y'' + (\lambda - q(x))y &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, y'(1) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

probleminin özdeğerlerinden oluşur.

Şimdi spektral veriler cümlesine göre farklı $q_1(x)$, $q_2(x)$ potansiyellerine sahip Sturm-Liouville problemleri için bilinen teklik teoremlerini ifade edelim.

Teorem 5.3.1 $q_1, q_2 \in L^2(0,1)$ olsun. (5.3.1)-(5.3.2) problemi için $\lambda_n(q_1) = \lambda_n(q_2)$, $\rho_n(q_1) = \rho_n(q_2)$ olacak biçimde $q_1 \equiv q_2$ dir.

Teorem 5.3.2 $q_1, q_2 \in L^2(0,1)$ olsun. (5.3.1)-(5.3.2) problemi için $\lambda_n(q_1) = \lambda_n(q_2)$, $k_n(q_1) = k_n(q_2)$, ($n=1,2,\dots$) olacak biçimde $q_1 \equiv q_2$ dir.

Teorem 5.3.3 $q_1, q_2 \in L^2(0,1)$ olsun. (5.3.1)-(5.3.3) problemi için $\mu_n(q_1) = \mu_n(q_2)$ ve (5.3.1)-(5.3.2) problemi için $\lambda_n(q_1) = \lambda_n(q_2)$ olmak üzere $q_1 \equiv q_2$ dir.

Şimdi (5.3.1)-(5.3.2) probleminin özfonksiyonları ve özdeğerleri için asimptotik formüller ile ilgili bilinen sonuçları verelim. Yoğunluk ve nodal noktalar için asimptotik formülleri ile ilgili iki problemi inceleyelim.

(5.3.1)-(5.3.2) problemi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olmak üzere $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$

özdeğerlerin bir dizisi ve λ_n ' e karşılık gelen her bir $y(x, q, \lambda_n)$ özfonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında tam $n-1$, ($n=1,2,\dots$) sayıda sıfıra sahip olsun.

(5.3.1)-(5.3.2) probleminin $y_1(x, q, \lambda)$, $y_2(x, q, \lambda)$ iki temel çözümleri sırasıyla $y_1(0, q, \lambda) = 1$, $y_1'(0, q, \lambda) = 0$ ve $y_2(0, q, \lambda) = 0$, $y_2'(0, q, \lambda) = 1$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde $y_1(x, q, \lambda)$ ve $y_2(x, q, \lambda)$ çözüm fonksiyonlarının sırası ile

$$y_1(x, q, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + O \left[\frac{\exp |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \sqrt{x}}{\sqrt{|\lambda|}} \right]$$

$$y_2(x, q, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + O \left[\frac{\exp |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \sqrt{x}}{|\lambda|} \right] ,$$

bağıntıları ve λ_n özdeğerleri ise $n=1,2,\dots$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n)^2 < \infty$ olmak üzere

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + c_0 + \alpha_n$$

ifadesi ile verildiği bilinmektedir. Yani $\{\alpha_n\} = \alpha \in l^2$ ve $c_0 = \int_0^1 q(x) dx$ dir. Buna

ilaveten her bir özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar lineer bağımsızdır ve $y_2(x, q, \lambda_n)$ nin herhangi bir sabit katsayısı $\lambda = \lambda_n$ ' e karşılık gelen (5.3.1)-(5.3.2) probleminin bir özfonksiyonudur.

$n \geq 2$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ için $0 < x_n^1 < x_n^2 < \dots < x_n^{n-1} < 1$ olmak üzere $y_2(x, q, \lambda_n)$ ' nin sıfırlarını $x_n^j(q)$ ile gösterelim.

$x_n^j(q)$, sıfırlarının durumları hakkında daha detaylı bir araştırma yapalım. $x_n^j(0)$ 'ın değerleri verilecek biçimde keyfi $q \in L^2$ için $x_n^j(q)$, noktalarının değerlerine yaklaşımın mümkün olabileceğini açıklayalım. Sonuçta $q \equiv 0$ olacak biçimde (5.3.1)-(5.3.2) 'nin özdeğerlerinin $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $n=1,2,\dots$ ve sıfırların $x_n^j(0) = j/n$, $j=1,\dots,n-1$, $n \geq 2$ bağıntılarını sağladığı bulunur. Şimdi $x_n^j(q) - x_n^j(0)$ farkının sınırlılığını araştıralım.

Burada $y_2(x, q, \lambda_n)$ n. özfonksiyonun j. inci sıfırı $x_n^j(q)$ nun durumunu inceleyelim. $L^2 \rightarrow IR$ dönüşümü lineer olmayan sürekli (Frechet) diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Gerçekten , $q \in L^2$ için ,

$$d_q x_n^j[w] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_n^j(q + \varepsilon w) - x_n^j(q)}{\varepsilon}$$

tanımlayalım ve aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma5.3.1 $q \in L^2(0,1)$ olsun ve $x_n^j(q)$, $j=1, \dots, n-1$, $n=2,3, \dots$ yukardaki gibi tanımlayalım. O zaman

$$\dot{y}_2(x_n^j, q, \lambda_n) = \frac{d}{d\lambda} y_2(x, q, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n, x=x_n^j} \quad \left(\dot{y}(x, \lambda) = \frac{dy}{d\lambda} \right)$$

ve

$$\dot{y}_2(1, q, \lambda_n) = \frac{d}{d\lambda} y_2(1, q, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n}$$

olmak üzere

$$d_q x_n^j[w] = \frac{1}{[y_2'(x_n^j, q, \lambda_n)]^2} \left\{ \int_0^{x_n^j} [y_2(t, q, \lambda_n)]^2 w(t) dt \right\} \\ - \frac{\dot{y}_2(x_n^j, q, \lambda_n)}{\dot{y}_2(1, q, \lambda_n)} \cdot \frac{1}{y_2'(x_n^j, q, \lambda_n) y_2'(1, q, \lambda_n)} \times \left\{ \int_0^1 [y_2(t, q, \lambda_n)]^2 w(t) dt \right\}$$

İspat. Lemmada ki formülün doğruluğunu göstermek için $j=1, \dots, n-1$ ve $n=2,3, \dots$ sabitleri ve tüm q ' lar için $y(1, q, \lambda_n) \equiv 0$ ve $y(x_n^j, q, \lambda_n) \equiv 0$ alabiliriz. Yukarıdaki şekilde tanımlanan ifadelerin türevini alırsak

$$d_q y(x, q, \lambda)[w] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) [y(x, q + \varepsilon w, \lambda) - y(x, q, \lambda)]$$

olmak üzere

$$y_2'(x_n^j, q, \lambda_n) d_q x_n^j[w] + d_q y_2(x_n^j, q, \lambda_n)[w] + \dot{y}_2(x_n^j, q, \lambda_n) d_q \lambda_n[w] = 0$$

ve

$$d_q y(1, q, \lambda_n)[w] + \dot{y}(1, q, \lambda_n) d_q \lambda_n[w] = 0$$

dır. $d_q y(x_n^j, q, \lambda_n)[w]$ ve $d_q y(x_n^j, q, \lambda_n)[w]$ için tanımladığımız ifadelerden lemmadaki formül doğrudan hesaplanabilir. Bunun kolayca sağlandığını gösterebiliriz.

$$\frac{y_2(x, q + \varepsilon w, \lambda) - y_2(x, q, \lambda)}{\varepsilon} = \int_0^x [y_2(x, q, \lambda) y_1(t, q, \lambda) - y_1(x, q, \lambda) y_2(t, q, \lambda)] \cdot [w(t)] y_2(t, q + \varepsilon w, \lambda) dt \quad (5.3.4)$$

elde ederiz. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alırsak

$$d_q y_2(x, q, \lambda)[w] = \int_0^x [y_2(x, q, \lambda) y_1(t, q, \lambda) - y_1(x, q, \lambda) y_2(t, q, \lambda)] y_2(t, q, \lambda) w(t) dt$$

elde ederiz.

Bu ifade $x=1$ veya $x = x_n^j$ ve $\lambda = \lambda_n$ için $y_2(1, q, \lambda_n) = 0$ ve $y_2(x_n^j, q, \lambda_n) \equiv 0$ olduğundan basitleşir. Bu durumlarda

$$d_q y_2(x_n^j, q, \lambda)[w] = -y_1(x_n^j, q, \lambda_n) \int_0^{x_n^j} w(t) [y_2(t, q, \lambda_n)]^2 dt$$

ve

$$d_q y_2(1, q, \lambda)[w] = -y_1(1, q, \lambda_n) \int_0^1 w(t) [y_2(t, q, \lambda_n)]^2 dt$$

elde ederiz. Sonuçta

$$y_1(1, q, \lambda_n) y_2'(1, q, \lambda_n) = y_1(x_n^j, q, \lambda_n) y_2'(x_n^j, q, \lambda_n) = 1$$

elde ederiz ki buda bir Sturm özdeşliğidir.

$x_n^j[w]$ 'nın türevi için elde edilen hesaplamalardan (5.3.4) eşitliğine geri dönebiliriz ve bu türev Frechet türevidir. $x_n^j(q)$ için asimptotik formu kullanırsak türev formülünü elde edebiliriz. Gerçekkte, $x_n^j(q) - x_n^j(0) = x_n^j(q) - \frac{j}{n}$ farkının sınırlılığı gerekir.

Bunu aşağıdaki lemma ile tamamlayabiliriz.

Lemma 5.3.2 $q \in L^2(0,1)$ olsun. (5.3.1)-(5.3.2) problemini göz önüne alalım ve $\lambda = \lambda_n$, $n=1,2,\dots$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $y_2(x, q, \lambda_n)$ olsun. $y_2(x, q, \lambda_n)$ 'nin j. inci sıfırı x_n^j olsun. O zaman

$$x_n^j = \frac{j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dir.

İspat. q düzgün bir fonksiyon olduğunda

$$\left(\frac{d}{dt}\right)x_n^j(tq) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (x_n^j(tq + \varepsilon q) - x_n^j(tq)) / \varepsilon = d_{iq} x_n^j[q]$$

olmak üzere

$$x_n^j(q) - x_n^j(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} x_n^j(tq) dt$$

yazabiliriz.

Bu lineer operatör önceki lemmalarda açık olarak hesaplanmıştı. Tüm t 'ler için $d_{iq} x_n^j[q]$ üzerine bir sınırlılık tanımlayalım. Bu bölümün başlangıcında verilen asimptotik formüllerden faydalanarak λ reel sayısı için aşağıdaki bağıntıları

$$y_2'(x, tq, \lambda_n) = \cos \sqrt{\lambda_n} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

$$[y_2(x, tq, \lambda_n)]^2 = \left[\frac{1 - \cos 2\sqrt{\lambda_n} x}{2\lambda_n}\right] + O\left(\frac{1}{(\lambda_n)^{3/2}}\right)$$

elde ederiz ve

$$\frac{\dot{y}_2(x_n^j, tq, \lambda_n)}{\dot{y}_2(1, tq, \lambda_n)} = x_n^j + O(1)$$

buluruz. Ayrıca

$$d_{iq} x_n^j[q] = \frac{1}{2n^2 \pi^2} \left[\int_0^{x_n^j} q(s) ds - x_n^j \int_0^1 q(s) ds + O(1) \right]$$

dir. Böylece lemma ispatlanmış oldu.

Her bir $q \in L^2[0,1]$, $x_n^j(q)$, $j=1,2,\dots,n-1$, $n=2,3,\dots$ için nodalların seçilen bir alt cümlesinin $[0,1]$ aralığında yoğun olacağını gösterelim. Bu alt cümle her $n \geq 2$ için bir nodalı (düğüm noktasını) kapsayacaktır. Burada bizim kullanacağımız metot her $q \in L^2[0,1]$ için sonucu elde etmek için yukarıdaki teoremi kullanarak $q \equiv 0$ olduğunda alt cümlenin yoğunluğunu göstermek olacaktır.

$q \equiv 0$ için bu sonucu aşağıdaki lemma kapsar.

Lemma5.3.3 $\frac{(m+1)}{(2^{k+1}-m)}$, $k=0,1,2,3,\dots$, $m=0,1,\dots,2^k-1$ sayılarının cümlesi $[0,1]$

aralığında yoğundur.

Lemmanın ispatından önce aşağıdaki hatırlatmaları yapalım:

1. $q \equiv 0$ olmak üzere (5.3.1)-(5.3.2) probleminin $\lambda = \lambda_1$ hariç tüm özdeğerlerin cümlesi $(2^{k+1} - m)^2 \pi^2$, $k=0,1,2,\dots$, $m=0,1,\dots,2^k - 1$ sayılarıdır. $\frac{(m+1)}{(2^{k+1} - m)}$ kesri $(2^{k+1} - m)^2 \pi^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonun bir sıfırdır. Dolayısıyla önceki lemmada verilen rasyonel sayıların cümlesi $\lambda = \lambda_1 = \pi^2$ 'ye karşılık gelen özfonksiyon dışında her bir özfonksiyonun düğüm noktasını gösterir.

2. Bir başka bakış açısından dikkat edecek olursak $q \equiv 0$ için

$$x_{2^{k+1}-m}^{m+1} = \frac{(m+1)}{(2^{k+1} - m)}$$

olur.

Bu ispatın temelini

$$0, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}-1}, \frac{3}{2^{k+1}-2}, \dots, \frac{2^k}{2^k+1}, 1, \quad k=0,1,2,\dots$$

dizisindeki her ardışık sayılar arasındaki farkın maksimumunun $k \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaştığı oluşturur. Bu gösterimde önce verilen farkların sınırlılığine dikkat edersek

$$1 - \frac{2^k}{2^k+1} = \frac{1}{2^k+1}$$

$$\frac{1}{2^{k+1}} - 0 = \frac{1}{2^{k+1}}$$

ve $m=0,1,\dots,2^k - 2$ için

$$\frac{m+2}{2^{k+1} - (m+1)} - \frac{m+1}{2^{k+1} - m} = \frac{2^{k+1} + 1}{[2^{k+1} - (m+1)][2^{k+1} - m]} < \frac{2}{2^k + 1}$$

dir. Bundan dolayı $\left\{0, \frac{1}{2^{k+1}}, \dots, \frac{2^k}{2^k+1}, 1\right\}$ k. inci dizisindeki ardışık sayılar arasındaki

farkın $\frac{2}{2^k + 1}$ üst sınırı $k \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider ve böylece lemma ispatlanmış olur.

Böylece $q(x)=0$ olacak şekilde $(0,1)$ aralığında yoğun olan $\{\sin n\pi x\}_{n=2}^{\infty}$

özfonksiyonlarının sıfırlarının bir cümlesini kurmuş olduk. Benzer sonuç $q \in L^2(0,1)$ için aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma5.3.4 $q \in L^2(0,1)$ olsun. $n = 2^{k+1} - m$ olmak üzere her bir $n \geq 2$ tamsayısı için $k=0,1,2,3,\dots$, ve $m = 0,1,\dots,2^{k-1}$ bulunur. Her bir n sabiti için $j(n) = m + 1$ ile tanımlı k ve m nin terimlerindeki n yi temsil etmekte kullanırız. O zaman bu $\{x_n^{j(n)}(q)\}_{n=2}^{\infty}$, $(0,1)$ aralığında yoğundur.

Şimdi tekliğe ilişkin teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem5.3.4 (Teklik Teoremi) $q_1, q_2 \in L^2$ olsun. $i=1,2$ için

$$y'' + (\lambda - q_i)y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

özdeğer problemini göz önüne alalım. Her bir $n \geq 2$ için $j(n)$ 'i Lemma5.3.4 deki gibi seçelim. Özel olarak seçilen sıfırlar için

$$x_n^{j(n)}(q_1) = x_n^{j(n)}(q_2) \quad , \quad n=2,3,\dots$$

ve

$$\int_0^1 q_1 dx = \int_0^1 q_2 dx$$

bağıntıları sağlasın , o zaman $q_1 \equiv q_2$ dir.

İspat. Birinci durum gerçekte gösterir ki $\{x_n^{j(n)}\}_{n \geq 2}$ aşağıdaki gibi yoğundur. $x \in [0,1]$ sabit, ancak keyfi seçilmiş olsun. O zaman $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{j(n_k)} = x$ olmak üzere $j(n)$ ' nin tanımından dolayı n_k , $k=1,2,\dots$ alt dizisi vardır. Kısaca $x_k = x_{n_k}^{j(n_k)} = x$ olsun. Ayrıca J_k ,

$$J_k = n_k^2 \pi^2 \int_0^{x_k} [\lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2) - q_1 + q_2] y_2(t, q_1, \lambda_{n_k}(q_1)) y_2(t, q_2, \lambda_{n_k}(q_2)) dt$$

eşitliği ile tanımlanacak olursa standart Sturm özdeşliğini kullanırsak $J_k = 0$, $k=1,2,3,\dots$ olduğunu gösterebiliriz.

$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k$ limitini hesaplayalım. Bu sonucu $\int_0^1 (q_1 - q_2) dt = 0$ olduğundan özdeğerler için

asimptotik formüllerden görebiliriz o zaman $\lim B_k = 0$ olmak üzere

$$\lambda_{n_k}(q_1) - \lambda_{n_k}(q_2) = B_k$$

dır. (gerçekten de $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 < \infty$ dur.) Ayrıca $0 \leq x \leq 1$ için öyle bir $M > 0$ sabiti vardır ki

$$\left| (n_k \pi)^2 y_2(t, q_1, \lambda_{n_k}(q_1)) y_2(t, q_2, \lambda_{n_k}(q_2)) - \left[\frac{1 - \cos 2n_k \pi x}{2} \right] \right| \leq \frac{M}{n_k}$$

dır. Böylece $k \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^{x_k} (q_2 - q_1) \cos 2n_k \pi t dt \rightarrow 0$$

Bağıntısını göz önüne alırsak ve bu sonuçları birleştirirsek $k \rightarrow \infty$ iken J_k daki terimlerinin çoğu sıfıra yaklaşır

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k = \int_0^x (q_1(t) - q_2(t)) dt$$

olur. Böylece x sabiti için ispat yapılmış olur, x keyfi seçilmişti. Bu sebeple

$$0 = \int_0^x (q_1(t) - q_2(t)) dt \quad , \quad x \in [0, 1]$$

ve $q_1 - q_2 = 0$ dır . Dolayısıyla teorem ispatlanmış oldu.

KAYNAKLAR

- [1] Akhizer, N.I. and Glazman, I.M.,1961, Theory of Linear Operators in Hilbert Space , Eng. Trans.1-2 vols. New York
- [2] Atkinson, F.V., 1964, “ Discrete and Continuous Boundary Problems”, Academic Press, New York
- [3] Borg, G.,1946, Eine Umkerung der Sturm-Liouville Eigenwertaufgabe, Acta Math.76, 1-96.
- [4] Browne, P.J. and Sleeman, B.D., 1966, Inverse Nodal Problems for Sturm-Liouville Equations with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions , Inverse Problems 12,377-381.
- [5] Carlson, R., 1999, Large Eigenvalues and Trace Formulas for Matrix Sturm-Liouville Problems, Siam.J. Math. Anal.30, No.5,949-962
- [6] Churchill, R.V., 1963, Fourier series and Boundary Value Problems.2d.Ed. Mc Graw-Hill.
- [7] Gelfand, I.M. and Levitan , B.M. , 1951, On the Determination of a Differential Equation from Its Spectrum. Izv. Akad. Nauk. SSSR.Ser. Math.,15,309-360; Amer. Math. Soc.Transl.1 (1955) ,253-304
- [8] Gesztesy, F. and Simon, B.,1999,On the determination of a potential by three spectra , Amer. Math. Soc. Transl. (2) 189 ,85-92.
- [9] Hald, O.H., McLaughlin J.R., 1989, Solutions of inverse nodal problems , inverse problems 5,307-47
- [10] Hochstadt , H. , 1973. The Inverse Sturm-Liouville Problem , Comm. On Pure and Applied Mathematics. vol. XXVI, 715-729

- [11] Hochstadt, H.,1976, On The Determination of the Density of a Vibrating String from Spectral Data. J. Math. Anal. Appl.55, 673-685.
- [12] Hochstadt, H. and Lieberman B., 1978, An Inverse Sturm-Liouville Problem with Mixed Given Data, SIAM J. Appl. Math. 34, No.4, 676-680
- [13] Isaacson, E.L. and Trubowitz, E.,1983, The Inverse Sturm-Liouville Problem I, Comm. Pure Appl. Math. 36. 767-783
- [14] İdemem, M.,1999. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi . Işık Üni, 208. İstanbul
- [15] Kalmogorov, A.N. and Fomin , S.V.,1972. Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisinin Elemanları . Nauka, 496 ,Moscow
- [16] Kostyuchenko, A. G. and Sargsyan , I.S., 1979. Distribution of Eigenvalues. Nauka , 364.Moscow
- [17] Koyunbakan H. and Panakhov E.S., 2006. Solution of a Discontinuous Invers Nodal Problem on a Finite İnterval .Math. and Comp.Modelling 44, 204-209
- [18] Kreyszig, E.,1978, Introductory Functional Analysis with Applications. 480 . New York
- [19] Law, C.K. and Yang, C.F.,1998, Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data , Inverse Problems.14 299-312
- [20] Law, C.K. Shen, C.L. , and Yang, C.F.,1999, The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function , Inverse Problems. 15,253-263
- [21] Lax , P.,1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Wawes. Comn.Pure and Appl. Math. V, 21,467-490.
- [22] Levin , B.Ja.,1980. Distribution of Zeros of Entire Functions . 621.Rhode Island

- [23] Levinson , N., 1949.The Inverse Sturm-Liouville Problem. Mat. Tidsskr.B, pp.25-30.
- [24] Levitan , B.M.,1951 Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions. Uspeki Mat. Nauk 6,no.2(42),102-143
- [25] Levitan , B.M. and Gasymov , M.G.,1964. Determination of a Differential Equations by Two its Spectra. Russian Math.surveys, 19, 1-63.
- [26] Levitan, B.M.,1964, Generalized Translation Operators and some of its Applications. Israel Prog sci. Translations,23-44.
- [27] Levitan , B.M. and Sargsyan , I.S., 1975. Introduction to Spectral Theory . American Mathematical Society , 522 ,Rhode Island
- [28] Levitan , B.M.,1978, On the Determination of the Sturm-Liouville Operator from One and Two Spectra. Math. USSR , Izvestija , vol.12, no. 1, pp.179-193.
- [29] Levitan , B.M.,1987. Inverse Sturm-Liouville Problems. Utrecht ,239, Netherlands.
- [30] Levitan , B.M. and Sargsyan , I.S., 1991. Sturm-Liouville and Dirac Operators. Kluver Academic Publishers ,345,Netherlands.
- [31] Marchenko , V.A., 1977. Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Proc. Roy. Soc., 79(A),25-12.
- [32] Markushevich, A.I. and Markushevich, L.A., 1977. Introduction to Theory of Analitic Functions.320.Moscow.
- [33] McLaughlin, J.R.,1986, Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28,53-72
- [34] McLaughlin, J.R.,1988, Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness results, J, Diff. Eqns. 73,354-362.

- [35] Naimark, M.A. ,1968 Linear Differential Operators, Frederik Ungar Publishing Co. Inc, 528, New York
- [36] Penahov, E.S., 1981. Inverse Problem for Sturm-Liouville Equation with Pecularity in two Partially Non-coincide Spectrum. Ph.D. disser. Moscova University, 101, Moscow
- [37] Pöschel, J. and Trubowitz, E., 1987, Inverse Spectral Theory, Academic Press, New York.
- [38] Shen ,C.L. and Shieh, C.T., 2000, An inverse nodal problem for vectorial Sturm-Liouville equations , to appear in Inverse problems. 16, No.2 ,349-356
- [39] Şuhubi , E.S., 2001, Fonksiyonel Analiz. İ.T.Ü , 638. İstanbul
- [40] Titchmarsh ,E.C., 1946, Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Part I ,Clarendon Press, 268, Oxford University Press.
- [41] Titchmarsh, E.C., 1962, Eigenfunction Expansions. Part I, 2nd edition, Oxford University Press.
- [42] Uluçay, C., 1978, Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri . K.T.Ü, Tem.Bil.Fak. ,736, Ankara.
- [43] Yang, X.F. ,1997, A solution of the inverse nodal problem ,Inverse Problems 13, 203-213.
- [44] Yang, X.F., 2001, A new inverse nodal problem ,to appear in J. Diff. Eqns. 169 No 2, 633-653

ÖZGEÇMİŞ

13/05/1981 yılında Elazığ ‘da doğmuşum. İlkokulu Elazığ Merkez Dumlupınar İlköğretim okulunda , ortaokulu Elazığ Merkez Mezre İlköğretim okulunda okudum. Lise öğrenimi Elazığ Merkez Balakgazi Lisesinde yaptım. Üniversite sınavına ilk girdiğim sene Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. Bölümü 2002 yılında derece ile bitirdim. Milli Eğitim ‘de ilk olarak Kars ili Sarıkamış ilçesinde “60. yıl Anadolu Meslek ve Kız Meslek Lisesi , Şehit Binbaşı Bedri Karabıyık Anadolu Lisesi, Sarıkamış Lisesi” okullarında görev yaptım. Daha sonra tayinim Elazığ ili Palu ilçesi Yavuz Selim İlköğretim okuluna çıktı. İki seneden fazla Palu ‘da çalıştıktan sonra 2006 Şubat döneminde şuan ki görev yerim olan Elazığ Merkez Doğukent İlköğretim Okuluna atandım. Öğretmenlikte beşinci yılımı çalışıyorum.

Saygılarımla

Neslihan CEYLAN