

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL ÇARPIM İMMERSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda Demir

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

MAYIS-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL ÇARPIM İMMERSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda Demir
(141121120)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih

MAYIS-2016

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL ÇARPIM İMMERSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyda DEMİR
(141121120)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19.04.2016
Tezin Savunulduğu Tarih: 11.05.2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (N.K.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)
Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI (F.Ü)



MAYIS-2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesi sürecinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Şeyda DEMİR
ELAZIĞ–2016



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	IV
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2. ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ	12
3. PSEUDO-GALİLEAN UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI	14
3.1. G_3^1 de Sıfır Eğrilikli Küresel Çarpım Yüzeyleri	16
3.2. G_3^1 de Küresel Çarpım Yüzeylerinde Eğriler	19
4. SONUÇ	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında iki düzlemsel eğrinin küresel çarpım yüzeyi olan $X = \alpha \otimes \beta$ ve bu küresel çarpım yüzeyinin geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. Tezde kullanılacak olan çeşitli tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzayında küresel çarpım yüzeyleri ifade edilmiştir. Bu yüzeylerle ilgili eğrilikleri sıfır olacak şekilde elde edilen teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm ise tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde öncelikle küresel çarpım yüzeyleriyle ilgili önceden elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Daha sonra G_3^1 de izotropik düzlemler dışında sabit ortalama eğrilikli bir küresel çarpım yüzeyinin bulunup bulunmayacağı araştırılmıştır. G_3^1 de ele alınan iki üreteç eğrinin küresel çarpım yüzeyin flat olması için gerekli şartlar elde edilmiştir. Son olarak dördüncü bölümde G_3^1 de küresel çarpım yüzeylerinde eğriler incelenip ilgili eğrilerle ilgili sınıflandırma yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Küresel çarpım yüzeyi, Galilean uzayı, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Geodezik doğru, Asimptotik doğru

SUMMARY

SPHERICAL PRODUCT IMMERSIONS

This paper is organized in four parts.

In the first chapter in the 3- dimensional Euclidean space with a global product surface and two planar curves $X = \alpha \otimes \beta$ studies on geometrical features of this global product surface is expressed as summary.

Various definitions and theorems are given which will be used in the thesis.

In the second part of the 3-dimensional and 4- dimensional Euclidean space it expressed global product surfaces.

This surface irregularity on the given theorem obtained to be zero.

The third section is the original part of the thesis. The third chapter is primarily obtained from the results discussed in advance about the global product surface. Then G_3^1 except isotropic plane constant mean curvature has been investigated whether there is a global product surface. G_3^1 has also dealt with two generators curve obtained necessary conditions for the global product surface is flat .

Keywords: Spherical product surface, Galilean space, Gaussian curvature, Mean curvature, Geodesic line, Asymtotic line.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Galilean uzayında nokta ve doğrular	1
Şekil 1.2. G_3^1 pseudo-Galilean uzayında noktalar	4
Şekil 3.1.1. Bir Öklid elipsi ve bir doğrunun flat küresel çarpım yüzeyi, $K=0$	19



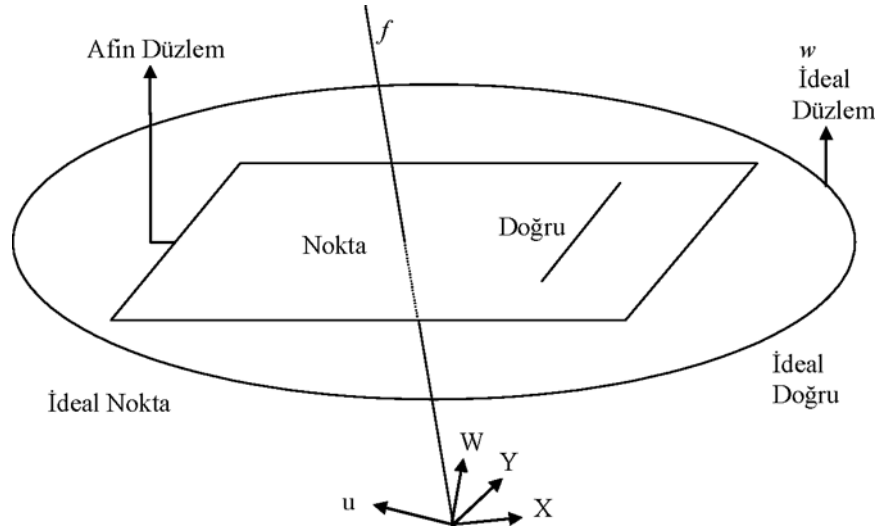
SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^{n+1}$	: $(n + 1)$ –boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{S}^n$	: $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzayının birim hiperküresi
G_3	: Galilean uzayı
G_3^1	: Pseudo - Galilean uzayı
$P_3(\mathbb{R})$	: Reel projektif uzay
$\ \cdot\ $	: Norm
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form
III	: Üçüncü temel form
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğrilik
$\otimes$	: Küresel çarpım
κ_g^u	: u-parametre eğrilerinin geodezik eğriliği
κ_g^v	: v-parametre eğrilerinin geodezik eğriliği
κ_n^u	: u-parametre eğrilerinin normal eğriliği
κ_n^v	: v-parametre eğrilerinin normal eğriliği

1. GİRİŞ

Bu çalışmada bir 3-boyutlu Öklid uzayında iki düzlemsel eğrinin küresel çarpım yüzeyi olan $X = \alpha \otimes \beta$ üzerine çalışıldı. Eğer $X = \alpha \otimes \beta$ bir küresel çarpım yüzeyi Gauss eğriliği sıfırsa (yani flat bir yüzey ise) o zaman α ya da β nin bir doğru olduğu ispatlandı. Ayrıca eğer $\alpha(u)$ nun bir doğru, $\beta(v)$ nin iki boyutlu bir eğri olması durumunda küresel çarpım non-minimal ve flat bir yüzey olduğu görüldü. $\beta(v)$ orijinden geçen bir doğru, $\alpha(u)$ herhangi iki boyutlu bir eğriyse burada küresel çarpım yüzeyinin hem minimal hem de flat olduğu ispatlandı. Yine bu çalışmada 4-boyutlu Öklid uzayında küresel çarpım yüzeylerinin eğrilik elipsi ve 2. temel formun katsayıları hesaplandı. Otsuki dönele yüzey ve Ganchev-Milousheva dönele yüzeyler 4-boyutlu Öklid uzayında küresel çarpım yüzeylerin özel türleridir. Bu gibi yüzeylerin eğrilik elipsinin $N_p(M)$ nin orjini üzerinde yatması için gerek ve yeter şartı verildi. Sonuç olarak Ganchev-Milousheva dönele yüzeylerin flat ya da Chen type halini alması için gerek şart verildi.

G_3 Galilean uzayı, 3-boyutlu bir P_3 kompleks projektif uzayında tanımlanır ve $\{\omega, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahiptir. Burada ω , ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini; $f \subset \omega$ ideal doğrularının bir reel doğrusunu; $I_1, I_2 \in f$ de ideal noktalardan iki tanesini ifade eder, (Kamenarovic, 1991).



Şekil 1.1. Galilen Uzayında Nokta ve Doğrular

G_3 uzayının bir reel modeli olarak, ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset \omega$ reel doğrusunu ve $\omega \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{\omega, f\}$ idealine sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonu

$$\omega \dots x_0 = 0, \quad f \dots x_0 = x_1 = 0$$

$$\varepsilon: (0:0:x_2:x_3) \rightarrow (0:0:x_3:-x_2).$$

şeklindedir. Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu

$$x' = a_{11} + a_{12}x,$$

$$y' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos \varphi + a_{23}z \sin \varphi,$$

$$z' = a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin \varphi + a_{23}z \cos \varphi,$$

formundadır. Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır. Üstelik a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir rol oynar. $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galilean uzayının B_6 hareket grubu elde edilir. Bu grup

$$B_6: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cos \varphi & \sin \varphi \\ e & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Böylece bu hareket boyunca G_3 Galilean uzayında doğrular dört sınıfa ayrılır. Bu doğrular aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

- 1) Reel non-izotropik doğrular. Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
- 2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular ω düzlemine ait değildir, fakat f ideal doğrusunu keserler.
- 3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka ω nın bütün doğrularıdır.
- 4) f ideal doğrusu.

G_3 , Galilean uzayında $x = sbt$ düzlemleri Öklid düzlemleridir. Özel olarak ω da bir Öklid düzlemidir. Diğer düzlemler izotropiktir.

$C^k(k \geq 3)$ sınıfından bir $r: I \rightarrow G_3$ eğrisi (I, r) koordinat komşuluğu ile $r(x) = (x, y(x), z(x))$ şeklinde verildiğinde $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}$$

$$r(x) = \frac{\det(r'(x), r''(x), r'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 Galilean uzayında ortonormal üçyüzlü

$$t(x) = r'(x)$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x))$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x))$$

şeklinde verilebilir. Burada t, n, b vektörleri, sırasıyla, tanjant, aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır. Bu vektörlerin türevleri alınarak Frenet formülleri

$$t'(x) = \kappa(x)n(x)$$

$$n'(x) = r(x)b(x)$$

$$b'(x) = -r(x)n(x)$$

şeklinde elde edilir.

Pseudo-Galilean geometri, projektif işareti $(0,0,+,-)$ olan reel Cayley-Klein geometrilerinden biridir. Pseudo-Galilean geometrinin temeli $\{\omega, f, I\}$ sıralı üçlüleridir. Burada ω ideal düzlem, f ise ω ideal düzlemde bir doğru ve I da f nin noktalarının sabit hiperbolik involusyonudur, (Divjak, 1998). Uygun afin bileşenlere sahip

$$B_6: \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ e & -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen Galilean uzayının B_6 hareket grubu göz önüne alındığında

$$\overline{B_6} := \langle B_6, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rangle$$

şeklindeki $\overline{B_6}$ grubu G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayının hareket grubu olarak adlandırılır, (Divjak, 1998). Afin bileşenlere sahip $\overline{B_6}$ grubu

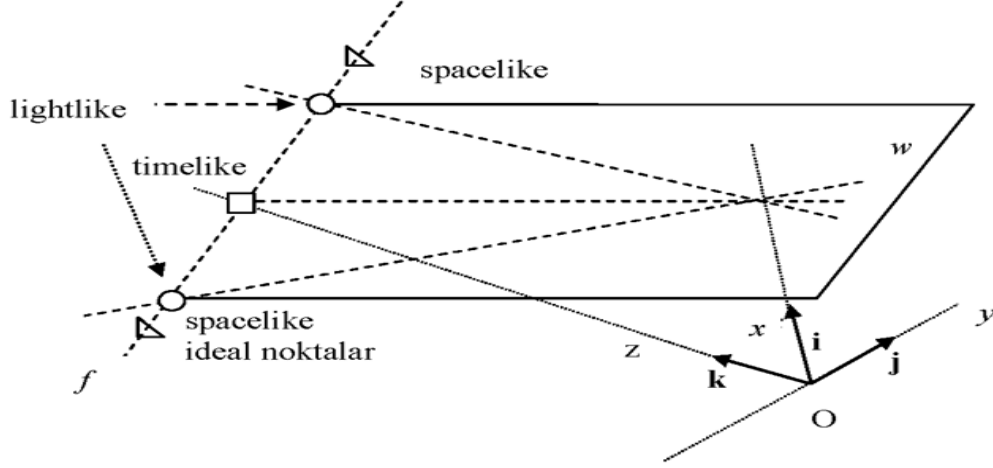
$$\overline{B_6}: \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \eta \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ e & \eta \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Burada $\eta = \pm 1$ dir. $\overline{B_6}$ hareketi boyunca noktalar altı sınıfa ayrılır. Bu altı sınıf aşağıdaki şekilde oluşturulur, (Divjak, 1998).

- 1) $(1: x: y: z) \sim (x, y, z)$ şeklindeki reel noktalar.
- 2) $(1, y, z)$ birim vektörleri tarafından gerilen mutlak olmayan $(0: 1: y: z)$ şeklindeki ideal noktalar.
- 3) Projektif işareti serbest olan ve $(0: 0: \cosh \varphi: \sinh \varphi)$ şeklinde yazılabilen space-like mutlak noktalar.
- 4) $(0: 0: \sinh \varphi: \cosh \varphi)$ şeklindeki time-like mutlak noktalar.
- 5) $(0: 0: 1: 1)$ şeklindeki bir light-like mutlak nokta.

6) $(0:0:1:-1)$ şeklindeki bir diğer light-like mutlak nokta.

Yukarıda sınıflandırılan noktalar şekil 1.2. de gösterildiği gibidir. G_3^1 uzayında bir vektör (yani bir reel nokta çifti) ω nın ideal bir noktasını temsil eder.



Şekil 1.2. G_3^1 Pseudo-Galilean Uzayında Noktalar

$\overline{B}_6$ grubuna göre G_3^1 uzayında vektörler öncelikle ikiye ayrılır. Bunları aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

G_3^1 uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörü verildiğinde, eğer $x = 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır, (Divjak and Sipus, 2003).

G_3^1 uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörü verildiğinde, eğer $x \neq 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü non-izotropik vektör olarak adlandırılır.

Bütün birim non-izotropik vektörler $X(1, y, z)$ formundadır, (Divjak and Sipus, 2003).

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. (Topolojik uzay): X boşdan farklı bir cümle ve τ , X in kuvvet cümlesi olan $P(X)$ in bir altcümlesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa τ ailesine X cümlesi üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir:

- a) $\emptyset, X \in \tau$,
- b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$,
- c) I keyfi indis cümlesi olmak üzere $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \tau$

dir. (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.2. (Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar): f, R^n uzayından R ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu C^0 sınıfından bir fonksiyondur

denir. R^n den R ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^0(R^n, R)$ şeklinde gösterilir.

R^n in her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 sınıfındandır denir.

f fonksiyonunun R^n in her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır denir. R^n den R ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(R^n, R)$ şeklinde gösterilir. R^n in her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır denir. R^n den R ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^\infty(R^n, R)$ şeklinde gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.3. (Topolojik Manifold): M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa M ye m – boyutlu topolojik manifold ya da kısaca topolojik m – manifold denir:

- a) M bir Hausdorff uzaydır,
- b) M sayılabilir sayıda açık cümleler ile örtülebilir,
- c) M nin her bir altcümlesi E^m e veya E^m in bir açık altcümlesine homeomorftur, (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 1.1.4. (Diferensiyellenebilir Manifold): M bir m – boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $A = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), \dots\}$ cümlesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde r .mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) adı verilir.

- (1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık cümlelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.
- (2) A daki herhangi iki harita r .mertebeden uyumludur.
- (3) A maksimaldir, yani eğer bir (U, φ) haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(U, \varphi) \in A$ dır.

Eğer bir M manifoldu üzerinde r .mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r .mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna C^∞ manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) adı verilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.5. (Tanjant vektör): M bir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C(M, R)$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C(M, R)$ ve her $a, b \in R$ için,

$$a) V_p(af + bg) = aV_p f + bV_p g$$

$$b) V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$$

şartlarını sağlayan $V_p: C(M, R) \rightarrow R$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.6. (Vektör alanı): M bir manifold ve $T_p M$ manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı $X: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$ diferensiyellenebilir dönüşümdür, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.7. (Yüzey): U, E^2 uzayının irtibatlı bir açık altcümlesi olmak üzere $x: U \rightarrow E^3$ diferensiyellenebilir ve regüler bir dönüşüm olsun. $x: U \rightarrow x(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $x(U)$ cümlesine bir basit yüzey denir. M, E^3 uzayının bir altcümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in x(U)$ ve $x(U) \subset M$ olacak şekilde $x(U)$ bir basit yüzeyi bulunabiliyorsa M cümlesine, E^3 uzayında bir yüzey denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.8. (Temel formlar): E^3 uzayında $\{u^1, u^2\}$ lokal koordinatlı bir basit yüzey

$x: U \rightarrow E^3$ olsun. O zaman $g_{ij} = \langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \rangle$, $i, j=1, 2$ olmak üzere

$$ds^2 = I = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

formuna x basit yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu, g_{ij} fonksiyonlarına ise x basit yüzeyinin birinci temel formunun bileşenleri denir. Ayrıca, x basit yüzeyinin

birim normal vektör alanı $\vec{U}$ ve $L_{ij} = \langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{U} \rangle$ olmak üzere

$$L = L_{11}(du^1)^2 + 2L_{12}du^1du^2 + L_{22}(du^2)^2$$

formuna x basit yüzeyinin ikinci temel formu, L_{ij} fonksiyonlarına ise x basit yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.9. (Hiperyüzey): E^{n+1} , $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayında n -boyutlu bir yüzey, veya n -yüzey diye E^3 deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^{n+1} \mid f: U \rightarrow R, f(x) = c, c \text{ sabit ve } U \text{ açık alt cümle}$$

$$M = \{x \in U \subset E^{n+1} \mid f: U \rightarrow R, f(x) = c$$

$$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$$

şeklinde tanımlanır. E^n de bir n -yüzey, $n > 2$ olması halinde bir hiperyüzey olarak adlandırılır, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.10. (Hiperküre): E^n , $(n+1)$ -boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2, r \in R, r \text{ sabit}\}$$

nokta cümlesine bir n -boyutlu hiperküre veya kısaca n -küre denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.11. (Şekil Operatörü): N, M üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p}N$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir. M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne de M yüzeyinin, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.12. (Gauss Eğriliği): S_p lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

$$K(p) = \det(S_p)$$

Tanım 1.1.13. (Ortalama Eğrilik): S_p lineer dönüşümünün izinin yarısına, M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve $H(p)$ ile gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{İz}(S_p)$$

Tanım 1.1.14. (Gauss Dönüşümü): M yüzeyinin birim dik vektör alanı N ile gösterildiğine göre

$$N = \sum_{i=1}^3 N^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

olsun.

$$G: M \rightarrow S^2, G(p) = (N^1(p), N^2(p), N^3(p))$$

fonksiyonuna, M nin Gauss dönüşümü denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Gauss dönüşümü geometrik olarak yüzeyin p noktası komşuluğundaki biçimiyle ilgilidir.

Tanım 1.1.15. (Normal Eğrilik): $v_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$k_p = (v_p) < S\left(\frac{v_p}{\|v_p\|}, \frac{v_p}{\|v_p\|}\right) >$$

eşitliğiyle tanımlanan $k_p(v_p)$ sayısına, M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.16. (Dik Kesit Eğriliği): $v_p \in T_p(M)$ olsun. $\{v_p, N(p)\}$ kümesinin gerdiği düzlemle M yüzeyinin arakesiti olan ve $\sigma'(0)$ eşitliğini sağlayan σ eğrisine, v_p doğrultusundaki dik kesit eğrisi denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.17. (Minimal Yüzey): M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir.

M minimal yüzey ise her $p \in M$ için $K(p) \leq 0$ dır, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.18. (f fonksiyonunun diferensiyeli): $f \in C^\infty(M, R)$ ve $p \in M$ olmak üzere M yüzeyinin her bir p noktasına

$$(df)_p: T_p(M) \rightarrow R, (df)_p(v_p) = v_p[f]$$

fonksiyonunu karşılık getiren df fonksiyonuna, f fonksiyonunun diferensiyeli adı verilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.19. (Açılabilir Yüzey): M yüzeyinin açılabilir olması için Gauss eğriliğinin sıfır olması gerekli ve yeterlidir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.20. (Riemann Manifold): M bir diferensiyellenebilir manifold ve g pozitif tanımlı, simetrik, $(2, 0)$ tipinde bir kovaryant tensör alanı olsun. (M, g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.21. (Türev (Diferensiyel) Dönüşüm): M ve N iki Riemann manifold olmak üzere $\phi: M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. Her $p \in M$ için $\phi_{*p}: T_M(p) \rightarrow T_N(\phi(p))$ dönüşümüne ϕ nin p noktasındaki türev (diferensiyel) dönüşümü denir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.22. (İmmersiyon): M ve N iki Riemann manifoldu olmak üzere, bir $\phi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için eğer her $p \in M$ noktasında ϕ_{*p} türev dönüşümü bire-bir ise ϕ ye bir immersyion (dolgulama) denir. Eğer ϕ immersiyonunun kendisi bire-bir ve $\phi: M \rightarrow \phi(N)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise ϕ ye imbedding (yerleştirme) adı verilir, (O' Neill, 1983).

Örnek 1.1.1. Her regüler eğri bir immersiondur.

Tanım 1.1.23. (Jakobien Matris): $F: E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $p \in E^n$ için F_{*p} olsun. Sırasıyla $T_p E^n$ ve $T_{(F(p))} E^m$ de

$$\phi = \left\{ \frac{\partial}{(\partial x_1)}|_p, \dots, \frac{\partial}{(\partial x_n)}|_p \right\}, \psi = \left\{ \frac{\partial}{(\partial y_1)}|_{(F(p))}, \dots, \frac{\partial}{(\partial y_m)}|_{(F(p))} \right\},$$

standart bazları için $F^{(*p)}$ nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine F nin p noktasında ki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir, (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 1.1.24. (Altmanifold): P ve M birer manifold olsunlar. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa P ye M nin bir altmanifoldu denir:

- a) P , M nin bir topolojik altuzayıdır,
- b) $j: P \subset M$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir ve bu inclusion dönüşümünün P nin her noktasındaki türev dönüşümü bire birdir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.25. (Pseudo-Galilean Uzayında İç Çarpım): 3-boyutlu reel vektör uzayı R^3 ve $\forall X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3^1$ vektörü için pseudo-Galilean iç çarpımı

$$g: G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0, \\ y_1 y_2 - z_1 z_2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.26. (Pseudo-Galilean Uzayında Uzaklık): $P_1, P_2 \in G_3^1, P_1 \neq P_2$ iki reel nokta olmak üzere $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ için

$$d: G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P_1, P_2) \rightarrow d(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2, \\ \sqrt{(|y_2 - y_1|)^2 - (z_2 - z_1)^2}, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna G_3^1 , pseudo-Galilean uzayında uzaklık fonksiyonu $d(P_1, P_2)$ reel sayısında $P_1, P_2 \in G_3^1$ noktaları arasındaki uzaklık denir, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.27. (Pseudo-Galilean Uzayında İzotropik Vektörler): G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ izotropik vektörü verildiğinde

$y^2 - z^2 > 0$ ise X izotropik vektörüne space-like vektör

$y^2 - z^2 < 0$ ise X izotropik vektörüne time-like vektör,

$y = \pm z$ ise X izotropik vektörüne light-like vektör denir, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.28. (Pseudo-Galilean Uzayında Birim Vektör): G_3^1 3 – boyutlu pseudo – Galilean uzayında bir light –like olmayan $X(x, y, z)$ izotropik vektörü göz önüne alınsın. Eğer $y^2 - z^2 = \pm 1$ ise bu X izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.29. (Pseudo-Galilean Uzayında Norm): G_3^1 3 – boyutlu pseudo – Galilean uzayında bir light –like olmayan $X(x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|X\| = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 - z^2|}, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.30. (Pseudo-Galilean Uzayında Fark Vektör Uzunluğu):

G_3^1 3 – boyutlu pseudo – Galilean uzayında iki non-izotropik vektör $a(1, a_2, a_3)$ ve $b(1, b_2, b_3)$ olsun. Bu iki non-izotropik vektör arasındaki açının ölçüsü onların fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$m(a, b) = \sqrt{|(b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2|}$$

şeklinde hesaplanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.31. (Pseudo-Galilean Uzayında Vektörel Çarpım): Pseudo Galilean uzayında iki vektör $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun. Bu iki vektör arasındaki vektörel çarpım

$$X \times Y = \left(0, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

şeklindedir, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.32. (Pseudo-Galilean Uzayında Bir Uygun Yüzey): G_3^1 de

$$X = X(x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$$

denklemleri ile verilen X yüzeyi için eğer $x_{u_1} = \partial x / \partial u_1 \neq 0$ veya $x_{u_2} = \partial x / \partial u_2 \neq 0$ ise yüzeye uygundur denir, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.33. (Pseudo-Galilean Uzayında Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı):

G_3^1 de $r: R^2 \rightarrow G_3^1, (u, v) \mapsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ile verilen yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{(0, z_y, 1)}{\sqrt{|1 - (z_y)^2|}}$$

ile tanımlanır, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.34. (Pseudo-Galilean Uzayında Gauss ve Ortalama Eğrilik):

G_3^1 de $r: R^2 \rightarrow G_3^1, (u, v) \mapsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ile verilen yüzeyin K Gauss ve H ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + (z_y)^2)^2}$$

ve

$$H = \frac{z_{yy}}{2 \left(1 + (z_y)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklindedir. G_3^1 de bir yüzeyin ortalama eğriliği (Gauss eğriliği) sıfır ise minimaldir (flattir) denir, (Sipus, Divjak, 2012).



2. ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİ

$\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow E^2$ iki düzlemsel eğri olsun. Kabul edelim ki,

$$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u)),$$

$$\beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$$

olsun. O zaman bu eğrilerin küresel çarpım immersiyonu;

$$X = \alpha \otimes \beta: E^2 \rightarrow E^3 \quad (2.1)$$

$$X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), g_1(v), g_2(v)), u_0 < u < u_1, v_0 < v < v_1$$

dır ve bu küresel çarpım immersiyonu E^3 de bir yüzeydir.

Teorem 2.1.: $X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v)$ iki düzlemsel eğrinin küresel çarpım yüzeyi olsun. $X(u, v)$ yüzeyi E^3 de bir flat yüzeyin parçasıysa o zaman $\alpha(u)$ (ya da $\beta(v)$) bir doğrudur ya da $f_1'(u) = 0$ dır, (B.Bulca, 2012).

Teorem 2.2.: α, β iki düzlemsel eğrinin $X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v)$ küresel çarpım yüzey yolu E^3 de minimaldir olması için gerek ve yeter şart;

$$f_1'(u)[((f_1'(u))^2 + ((f_2'(u))^2 \|\beta(v)\|^2)C(v) + f_2(u)\|\beta(v)\|^2A(u)B(v) = 0 \quad (2.2)$$

olmasıdır, (B.Bulca, 2012).

Sonuç 2.1.: $X(u, v)$ yüzeyi $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u)), \beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ şeklindeki iki düzlemsel eğrinin küresel çarpım yüzeyi olsun. Bu durumda ;

- i) Eğer $\alpha(u), f_1'(u) = 0$ ile verilen bir doğruysa o zaman yüzey düzlemin bir parçası olur.
- ii) Eğer $\alpha(u), f_2'(u) = 0$ ile verilen bir doğruysa o zaman yüzey $\beta(v)$ eğrisi boyunca bir silindir olur.
- iii) Eğer $\alpha(u), f_2(u) = mf_1(u) + n$ ile verilen bir doğruysa o zaman yüzey bir koni olur, (B.Bulca, 2012).

Sonuç 2.2: $X(u, v)$, $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u)), \beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ ile verilen iki düzlemsel eğrinin küresel çarpım yüzeyi olsun.

- i) Eğer $\alpha(u)$ bir doğru , $\beta(v)$ iki boyutlu bir eğriyse o zaman küresel çarpım yüzeyi minimal olmayan flat bir yüzeydir.
- ii) Eğer $\beta(v)$ bir doğru boyunca orjinden geçiyorsa ve $\alpha(u)$ iki boyutlu bir eğriyse o zaman küresel çarpım yüzeyi minimal ve flattir.
- iii) $\alpha(u)$ eğrisi $\alpha(u) = \left(u, a, \cosh\left(\frac{u}{a} + b\right)\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

parametrizasyonu ile verilen iki boyutlu Catenoid eğrisi ve $\beta(v)$ bir birim çemberse o zaman $X(u, v)$ minimal ve flat olmayan bir döneel yüzeydir, (B.Bulca, 2012).

$\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir Öklid uzay eğrisi ve $\beta: \mathbb{R} \rightarrow E^2$ ye Öklid düzlem eğrisi olsun.

$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)), \beta(v) = (g_1(v), g_2(v))$ olsun . Bu iki eğrinin küresel çarpım parçası $X = \alpha \otimes \beta: E^2 \rightarrow E^4, X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)g_1(v), f_3(u).g_2(v))$ E^4 de bir yüzeydir ve $u \in I = (u_0, u_1), v \in J = (v_0, v_1)$ dir. $f_1(u) = 0$ ya da $f_2(u) = 0$ durumu için $X = \alpha \otimes \beta: E^2 \rightarrow E^3$ iki 2D eğrinin bir küresel çarpımı haline gelir .

Örnek 2.1.: 1996 ‘da T. Otsuki $\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u), \sin u), \beta(v) = (\cos v, \sin v)$ özel durumunu dikkate aldı ve

$$X = \alpha \otimes \beta: S^2 \rightarrow E^4, X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), \sin u \cos v, \sin u \sin v),$$

$(u \in I, 0 \leq v \leq 2\pi)$ dir . Bu E^4 de bir yüzey parçasıdır ,burada $f_1'^2 + f_2'^2 = \sin^2 u$ dir. T. Otsuki aynı çalışmada aşağıdaki durumları dikkate aldı.

$$i) f_1(u) = \frac{4}{3} \cos^3\left(\frac{u}{2}\right), f_2(u) = \frac{4}{3} \sin^3\left(\frac{u}{2}\right), f_3(u) = \sin u$$

$$ii) f_1(u) = \frac{1}{2} \sin^2 u \cdot \cos(2u), f_2(u) = \frac{1}{2} \sin^2(2u), f_3(u) = \sin u$$

i) durumu için X parçası E^4 de Otsuki küre olarak adlandırılır ve bu X parçası E^4 ün 3-boyutlu alt uzayında yatmaz. Böyle yüzeyler Gauss eğriliği sabit yüzeylerdir, (B.Bulca

E^4 de diferensiyellenebilir bir yüzey M için γ_θ, θ yönünde M nin normal kesiti olsun. $p \in M$ de $T_p M$ tanjant uzayının ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ verilsin . Normal kesitin birim vektörünü $\gamma_\theta' = X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ şeklinde tanımlayalım. Normal uzayın alt kümesi

$$\{h(X, X) = X \in T_p M, \|X\| = 1\}$$

olarak tanımlanır. Buna M nin elips eğriliği denir ve $E(p)$ ile gösterilir, (B.Bulca, 2012).

O halde aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuç 2.3.: $X(u, v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v)$ ile verilen Ganhchev -Mileusheva dönel yüzey M olsun .

i) $\kappa_1 \neq 0$ ise o zaman p eğrilik elipsi dışında yatar.(Böyle bir nokta M nin bir hiperbolik noktasıdır)

ii) $\kappa_1 = 0$ ise o zaman p eğrilik elipsinin üzerinde yatar .(parabolik nokta)

iii) $\kappa_1 = 0$ ve $f_3''(u) = 0$ ise o zaman p flat tipin bir dönüm noktasıdır. Burada $p, N_p M$ nin orijini ve $\kappa_1 = f_1' f_2''(u) - f_1'' f_2'(u)$ $Oe_1 e_2$ -düzleminde α eğrisinin izdüşümünün eğriliğidir, (B.Bulca, 2012).

3. PSEUDO-GALİLEAN UZAYINDA KÜRESEL ÇARPIM YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

N.H.Kuiper $(n_1 + n_2 - 1)$ -boyutlu Öklid uzayında $E^{n_1+n_2-1}$ aşağıdaki gibi bir imbedding tanımlamıştır:

$$r: f \otimes g: M \times S^{n_2-1} \rightarrow E^{n_1+n_2-1},$$

$$(x, y) \rightarrow (\xi_1 f(x), \dots, \xi_{n_1-1} f(x), \xi_{n_1} f(x) \cdot g(y)),$$

Burada $f: M \rightarrow E^{n_1}$ ve $g: S^{n_2-1} \rightarrow E^{n_2}$, E^{n_2} uzayının $(n_2 - 1)$ - küresidir. Ayrıca $\xi_1, \dots, \xi_n$ E^{n_1} boyutlu ve $\xi_{n_1-1} \cdot f(x) \cdot g(y)$ E^{n_2} de bir vektördür. Böyle imbeddingler $E^{n_1+n_2-1}$ uzayında E^{n_1} in E^{n_1-1} etrafında dönmesiyle f' den elde edilir.

B.Bulca böyle embeddingleri dönel emdeddingler olarak adlandırıp E^4 de bir düzlem eğrisi ve bir uzay eğrisinin küresel çarpım yüzeyi ile ilgilenmiştir. Bu yüzeyler dönel embeddinglerin bir özel türüdür. Otsuki Ganchev-Mileusheva dönel yüzeyler E^4 de küresel çarpım yüzeylerin örnekleridir. E^3 de sıfır eğrilikli küresel çarpım yüzeyleri sınıflandırılmıştır. E^3 de dönme yüzeyi süperkuadrikler ve kuadriklerin yanı sıra küresel çarpım yüzeylerin basit bir modeli olarak dikkate alınabilir, (Barr, 1981).

Bununla birlikte G_3^1 pseudo-Galilean uzayı uzaklığın bir parabolik ölçümüyle (Öklid ve Lorentz düzlemleri içeren) üç Caylen-Klein düzleminden biridir ve o ideal bir figürle ideal bir f doğrusu ve f üzerinde ideal bir p noktası için projektif bir düzlem olarak tanımlanır.

Pseudo-Galilean uzayı anlamında dış çarpım

$$X_{G_3^1} Y = \left(0, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

dır. Kabul edelim ki $\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesi D olsun, ve G_3^1 pseudo- Galilean uzayında bir yüzey M^2

$$r: D \rightarrow G_3^1$$

$$(u_1, u_2) \rightarrow (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2))$$

ile parametrelendirilir. Burada r_k, D üzerinde gerçel değerli ve diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $1 \leq k \leq 3$ dür.

$$(r_k)_{u_i} = \frac{\partial r_k}{\partial u_i} \text{ ve } (r_k)_{u_i u_j} = \frac{\partial^2 r_k}{\partial u_i \partial u_j}, 1 \leq k \leq 3 \text{ ve } 1 \leq i, j \leq 2$$

O zaman böyle bir yüzey uygun bir yüzeydir (yani, Öklid tanjant düzlemi olmaksızın) $\Leftrightarrow$ bazı $i = 1,2$ için $(r_1)_{u_i} \neq 0$ dir.

$$g_i = (r_1)_{u_i}$$

$$h_{ij} = (r_2)_{u_i}(r_2)_{u_j} + (r_3)_{u_i}(r_3)_{u_j}, i, j = 1,2$$

tanımlayalım. Ayrıca M^2 nin I.temel formu $I = ds_1^2 + \varepsilon ds_2^2$ dir. Burada

$$ds_1^2 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2 \text{ ve } ds_2^2 = h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2 \text{ ve}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & du_1 : du_2 \text{ yönü izotropik değilse} \\ 1, & du_1 : du_2 \text{ yönü izotropik } \end{cases}$$

dir. w fonksiyonu

$$w = \sqrt{((r_1)_{u_2}(r_3)_{u_1} - (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2})^2 + ((r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_2)_{u_1})^2}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca M^2 nin tanjant düzleminde S tanjant vektörü;

$$S = \frac{1}{w} (0, (r_1)_{u_2}(r_2)_{u_1} - (r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2}, (r_1)_{u_2}(r_3)_{u_1} - (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2}) \quad (3.1)$$

ile tanımlanır. M^2 nin U birim normal vektör alanı

$$U = \frac{1}{w} (0, (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_3)_{u_1}, (r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_1)_{u_2}(r_2)_{u_1}) \quad (3.2)$$

ile verilen bir izotropik vektör alanıdır. M^2 nin 2.temel formu

$$II = L_{11} du_1^2 + 2L_{12} du_1 du_2 + L_{22} du_2^2$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \varepsilon \frac{1}{g_1} (g_1 (0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j} (0, (r_2)_{u_1}, (r_3)_{u_1})). U \\ &= \varepsilon \frac{1}{g_2} (g_2 (0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j} (0, (r_2)_{u_2}, (r_3)_{u_2})). U \end{aligned}$$

dır.

Eğer bir yüzeyin 2.temel formu özdeş olarak sıfırsa bu yüzey total geodezik olarak adlandırılır. M^2 nin III. temel formu

$$III = P_{11} du_1^2 + 2P_{12} du_1 du_2 + P_{22} du_2^2$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} P_{11} &= U_{u_1} \cdot U_{u_1} \\ P_{12} &= U_{u_1} \cdot U_{u_2} \\ P_{22} &= U_{u_2} \cdot U_{u_2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dir. M^2 nin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = -\varepsilon \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{w^2} \quad (3.4)$$

$$H = -\varepsilon \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2w^2}$$

formu ile verilir. Eğer G_3^1 de bir yüzeyin ortalama eğriliği sıfırsa (Gauss eğriliği), minimal yüzey (flat) olarak adlandırılır.

3.1. G_3^1 de Sıfır Eğrilikli Küresel Çarpım Yüzeyleri

Kabul edelim ki $\Gamma_i: I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow G_2, i = 1,2$ Galilean düzleminde iki eğri $\Gamma_1(u) = (p_1(u), p_2(u))$ ve $\Gamma_2(v) = (q_1(v), q_2(v))$ ile verilsin. Burada p_i ve $q_i (i=1,2)$ sırasıyla I_1 ve I_2 aralıkları üzerinde sabit olmayan ve gerçel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca G_3^1 de iki eğrinin küresel çarpım yüzeyi M^2

$$r: \Gamma_1 \otimes \Gamma_2: I_1 \times I_2 \rightarrow G_3^1, (u, v) \rightarrow (p_1(u), p_2(u)q_1(v), p_2(u)q_2(v)) \quad (3.1.1)$$

ile tanımlanır. Γ_1 ve Γ_2 eğrileri üreteç eğrileri olarak tanımlanır.

$$p_i' = \frac{dp_i}{du}$$

$$q_i' = \frac{dq_i}{dv}$$

p_i ve q_i sabit olmayan fonksiyonlar farzedildiği için M^2 daima kabul edilebilir bir yüzeydir. (3.1), (3.2) ve (3.1.1) den şu sonuç çıkar ki; S tanjant vektör alanı

$$S = \frac{1}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}} (0, -q_1', -q_2') \quad (3.1.2)$$

ve

$$U = \frac{1}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}} (0, +q_2', q_1') \quad (3.1.3)$$

olur.

NOT 3.1.1.: (3.1.3) eşitliği G_3^1 de bir küresel çarpım yüzeyinin dejenere olmuş III.temel forma sahip olan (3.3) ifadesini gerektirir. Yani

$$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = 0$$

dır.

I.temel formun başkatsayıları için biz $g_1 = p_1'$ ve $g_2 = 0$ dır. Ayrıca II.temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{+\varepsilon \cdot (p'_1)(q_1)^2}{\sqrt{(q'_1)^2 + (q'_2)^2}} \alpha' \beta' \\
L_{12} &= 0 \\
L_{22} &= \frac{-\varepsilon \cdot p_2(q'_1)^2}{\sqrt{(q'_1)^2 + (q'_2)^2}} \gamma'
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Burada

$$\alpha = \frac{p'_2}{p'_1}, \quad \beta = \frac{q_2}{q_1}, \quad \gamma = \frac{q'_2}{q'_1} \tag{3.1.5}$$

dır.

NOT 3.1.2.: Açıkça görülüyor ki Γ_2 orjinden geçen bir doğru olduğunda (yani $\beta = \text{sabit}$) olduğunda küresel çarpım yüzeyi total (toplam) geodeziktir. Böylece daha sonraki sonuçlar G_3^1 de sabit ortalama eğrilikli küresel çarpım yüzeyi için bir sınıflandırma verir.

Teorem 3.1.1.: G_3^1 de izotropik düzlemler dışında sabit ortalama eğrilikli bir küresel çarpım yüzeyi bulunmaz .

İspat: Kabul edelim ki M^2 , G_3^1 de H sabit ortalama eğrilikli (3.1.1) ile verilen bir küresel çarpım yüzeyi olsun. (3.4) den

$$2H = \frac{(p'_1)^2 p_2 (q'_1)^2}{((q'_1)^2 + (q'_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \gamma' \tag{3.1.6}$$

elde ederiz. O halde (3.1.6) nın u ya göre diferensiyellenmesi

$$0 = \frac{p'_2 (q'_2)^2}{((q'_1)^2 + (q'_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \gamma' \tag{3.1.7}$$

yi verir. p_i, q_i fonksiyonları sabit olmayan fonksiyonlar oldukları için $\gamma' = 0$ olan (3.1.7) den çıkan sonuçtur ve bu yüzden $H = 0$ dır. (3.1.5) den $\gamma = \text{sabit}$ olduğu göz önüne alındığında

$$q_2 = c_1 q_1 + c_2, c_1 \neq 0 \tag{3.1.8}$$

dır. Bu da Γ_2 nin bir doğru olmasını gerektirir. Üstelik (3.1.3) den U sabit birim normal vektör alanını

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+(c_1)^2}} (0, -c_1, 1), c_1 \neq 0 \tag{3.1.9}$$

şeklinde elde ederiz. Bu şu anlama gelir ki küresel çarpım yüzeyinin bir izotropik düzlemin açık bir parçası olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.1.2.: G_3^1 de Γ_1 ve Γ_2 eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart ya bir izotropik düzlem ya da ve Γ_1 üreteç eğrinin bir doğru olmasıdır .

İspat: Farzedelim ki G_3^1 de Γ_1 ve Γ_2 eğrilerinin bir flat küresel çarpım yüzeyi M^2 olsun. K Gauss eğriliği için (3.4) kullanılarak

$$0 = K = \frac{\varepsilon \cdot q_1^2 (q_1')^2}{p_1' p_2 ((q_1')^2 + (q_2')^2)^2} \alpha' \beta' \gamma'$$

elde ederiz. Böylece 3 durum sağlanır.

Durum A: $\alpha = \text{sabit}$. O zaman $p_1 = c_3 p_2 + c_4$, $c_3 \neq 0$ sonucunu çıkarırız ki bu da Γ_1 in bir doğru olduğunu gösterir.

Durum B : $\beta = \text{sabit}$. Ayrıca bütün $v \in I_2$ için $\frac{q_2}{q_1} = \text{sabit}$ ve Γ_2 üreteç eğri orjinden geçen bir doğru ki bu M^2 nin bir total geodezik yüzey ve bir izotropik düzlemin bir açık parçası olduğunu verir.

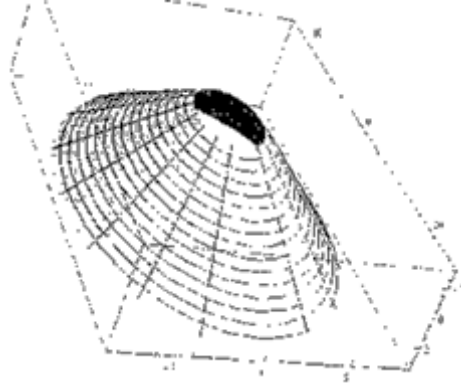
Durum C: $\gamma = \text{sabit}$. Bu durum (3.1.8) aracılığıyla analiz edildi ve M^2 bu durumda bir izotropik düzlemin açık bir parçasıdır. Böylece ispat tamamlanır. Teorem (3.1.1.) ve Teorem (3.1.2) kullanılarak aşağıdaki sınıflandırma sonuçlarını elde ederiz.

Sonuç 3.1.3 (Sınıflandırma): G_3^1 de Γ_1 ve Γ_2 eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyi M^2 için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- a) Γ_1 bir doğruysa, o zaman M^2 flattir fakat minimal değildir.
- b) Γ_2 orjinden geçen bir doğruysa o zaman M^2 bir toplam geodezik yüzey ve bir izotropik düzlemin bir açık parçasıdır.
- c) Γ_2 , $y = mx + n$, $m, n \neq 0$ formunda bir doğruysa o zaman M^2 bir izotropik düzlemin bir açık parçasıdır
- d) İzotropik düzlemler dışında sabit ortalama eğrilikli bir küresel çarpım yüzeyi yoktur.

Örnek 3.1.1.: $y = 0.5x + 2.5$ doğrusu ve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ Öklid elipsinin bir küresel çarpım yüzeyini dikkate alalım. Ayrıca biz flat olan yüzeyi parametrize ettik, fakat aşağıdaki gibi minimal değildir;

$$r(u, v) = (u - 3, (0.5u + 1)(2\sin v), (0.5u + 1)(3\cos v)), 0 \leq u, v \leq 2\pi$$



Şekil 3.1.1. Bir Öklid elipsi ve bir doğrunun flat küresel çarpım yüzeyi, $K = 0$

3.2. G_3^1 de Küresel Çarpım Yüzeylerinde Eğriler

Frenet çatı alanı dışında yüzeyler üzerinde yatan eğriler için Darboux çatı alanı olarak da adlandırılan bir çatı alanı vardır. Kabul edelim ki γ , U birim vektör alanına sahip M^2 yüzeyi üzerinde yatan bir eğri olsun. $T = \gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right)$ alınarak $\{T, T \times U, U\}$ bir yeni çatı alanı elde edilebilir ki bu M^2 ye göre γ nın Darboux çatı alanıdır. Bir diğer yandan M^2 üzerinde γ eğrisinin 2.türevi $\ddot{\gamma}$, M^2 ye dik bir bileşene sahiptir ve M^2 ye teğet bir bileşen, yani

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}^T + \ddot{\gamma}^\perp \quad (3.2.1)$$

dir.

Burada $\ddot{\gamma}$ eğrinin parametreye göre türevini tanımlar. $\|\ddot{\gamma}^T\|$ ve $\|\ddot{\gamma}^\perp\|$ normları sırasıyla M^2 üzerinde geodezik eğriliği ve normal eğriliği olarak adlandırılır. γ eğrisi geodezik (Asimptotik doğru) olarak adlandırılır gerek ve yeter şart κ_g geodezik eğrilik κ_n (normal eğrilik) sıfırdır.

G_3^1 de (3.1.1) ile verilen $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ küresel çarpım yüzeyini dikkate alalım.

Önceki bölümdeki gibi

$$\Gamma_1(u) = (p_1(u), p_2(u)), \Gamma_2(v) = (q_1(v), q_2(v))$$

dır.

$r = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ üzerinde v parametre eğrisi ve u parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri sırasıyla

$$\kappa_g^u = S \cdot r_{uu} = \begin{cases} 0, & p_1 \text{ lineer değilse} \\ \frac{-p_2''(q_1 q_1' + q_2 q_2')}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}}, & p_1 \text{ lineer ise} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$\kappa_g^v = S. r_{vv} = \frac{-p_2(q_1'q_2'' + q_1'q_2'')}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}} \quad (3.2.3)$$

ile verilir, (3.2.2) ve (3.2.3) dikkate alınarak biz aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Teorem 3.2.1.: Kabul edelim ki G_3 de

$$\Gamma_1(u) = (p_1(u), p_2(u)), \Gamma_2(v) = (q_1(v), q_2(v))$$

eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyi M^2 olsun. O halde

A) p_1 bir lineer olmayan fonksiyon ise o zaman u parametre eğrileri geodezik doğrulardır. Aksi takdirde (p_1 lineer fonksiyon olduğunda) u parametre eğrileri geodezik eğrilerdir gerek ve yeter şart ya

A1) p_2 bir non-lineer fonksiyon ya da

A2) Γ_2 bir Öklid çemberi, bunun sonucu olarak M^2 , Γ_1 in x –ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen bir dönel yüzeydir

B) v parametre eğrileri geodezik doğrulardır gerek ve yeter şart Γ_2

$$q_1 = \pm \int \sqrt{c_2 - (q_2')^2} dv$$

eşitliğini sağlayan eğridir.

İspat: Teoremin A durumu (3.2.2) den açıktır. O zaman (3.2.2) ile verilen şu sonucu çıkarırız ki: u parametre eğrileri geodezik doğrulardır (yani K_g^u sıfırdır) gerek ve yeter şart ya p_2 bir lineer fonksiyon (teoremin A1) durumunu gerektirir), ya da

$$q_1q_1' + q_2q_2' = 0 \quad (3.2.3)$$

dır. (3.2.3) den $c_1 > 0$ bazı sabitleri için $q_1^2 + q_2^2 = c_1$ sonucunu çıkardık. Anlamı şudur ki Γ_2 orjin merkezli ve $\sqrt{c_1}$ yarıçaplı bir Öklid çemberidir. Ayrıca M^2 nin $(p_1(u), \sqrt{c_1}p_2(u))$ eğrisi x -ekseni etrafında dönmesiyle (Öklid) elde edilen bir dönel yüzey olması demektir.

Bu da Teoremin A2) durumunun ispatını verir. Eğer κ_g^v eş değer olarak sıfır ise o zaman

(3.2.3) den $q_1'q_1'' + q_2'q_2'' = 0$ olur ki yani $q_1 = \pm \int \sqrt{c_2 - (q_2')^2} dv$ ki bu ispatı tamamlar.

$r = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ parametre eğrilerinin normal eğrilikleri sırasıyla

$$\kappa_n^u = U. r_{uu} = \begin{cases} 0, & p_1 \text{ lineer değilse} \\ \frac{-p_2''(q_1q_2' - q_1'q_2)}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}}, & p_1 \text{ lineer ise} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

ve

$$\kappa_n^v = U. r_{vv} = \frac{p_2(q_1'q_2'' - q_1''q_2')}{\sqrt{(q_1')^2 + (q_2')^2}}, \quad (3.2.5)$$

ile verilir, (Divjak, Sipus, 2003).

Teorem 3.2.2. Kabul edelim ki G_3^1 de $\Gamma_1(u) = (p_1(u), p_2(u)), \Gamma_2(v) = (q_1(v), q_2(v))$ eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyi M^2 olsun. O zaman biz aşağıdakileri elde ederiz.

A) Eğer p_1 bir lineer fonksiyon değilse o zaman u-parametre eğrileri asimptotik doğrulardır. Aksi taktirde (p_1 bir lineer fonksiyon olduğunda) u-parametre eğrileri asimptotik doğrulardır gerek ve yeter şart ya

A1) p_2 bir lineer fonksiyon olduğunda ya da

A2) M^2 bir toplam (total) geodezik yüzey

B) v parametre eğrileri asimptotik doğrulardır gerek ve yeter şart M^2 izotropik düzlemin bir açık parçasıdır.

İspat: Teoremin A) durumu (3.2.4) den açıktır. Eğer p_1 bir lineer fonksiyonsa o zaman (3.2.4) ile biz elde edebiliriz ki u parametre eğrileri asimptotik doğrulardır gerek ve yeter şart ya p_2 bir lineer fonksiyon (Teorem A1) ya da

$$q_1 q_2' - q_1' q_2 = 0 \quad (3.2.6)$$

dır. Sıfır olmayan c_1 sabitleri için $q_2 = c_1 q_1$ olduğu (3.2.6) dan elde edilir. Not (3.1.2) göz önüne alındığında M^2 nin total geodezik yüzey olması gerekir ki bu da A2 ifadesini sağlar. Ayrıca v parametre eğrileri asimptotik doğrular olduğunda (3.2.5) den

$$q_2 = c_2 q_1 + c_3, c_2 \neq 0 \quad (3.2.7)$$

sağlanır. (3.1.3) den (3.2.7) eşitliği teoremin B ifadesini gerektirir. Böylece ispat tamamlanır. M^2 regüler yüzey üzerinde bir γ eğrisi bir asli eğrilik olarak adlandırılır gerek ve yeter şart kendi hız vektör alanı daima asli yöndeki noktalardır. Ayrıca bir M^2 yüzeyi bir asli yüzey olarak adlandırılır gerek ve yeter şart kendi parametre eğrileri asli eğrilerdir, (Divjak, Sipus, 2003).

G_3^1 bir yüzey üzerinde γ asli eğrisi aşağıdaki

$$\det(\dot{\gamma}, U, \dot{U}) = 0 \quad (3.2.8)$$

formül ile tanımlanır. Burada U yüzeyin birim normal vektör alanıdır, (Divjak, Sipus, 2003). (3.1.1), (3.1.3) ve (3.2.8) göz önünde bulundurularak doğrudan

$$\det(r_u, U, U_u) = 0 \text{ ve } \det(r_v, U, U_v) = 0$$

elde ederiz ki bu aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 3.2.3. G_3^1 de küresel çarpım yüzeyleri asli olan yüzeylerdir.

4. SONUÇ

Öncelikle bu çalışmada G_3^1 pseudo- Galilean uzayı ve küresel çarpım yüzeyleriyle ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzayında küresel çarpım yüzeyleri ifade edilmiştir. Bu yüzeylerle ilgili eğrilikleri sıfır olacak şekilde elde edilen teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Üçüncü bölümde; G_3^1 de izotropik düzlemler dışında sabit ortalama eğrilikli bir küresel çarpım yüzeyi bulunamayacağı elde edilmiştir. G_3^1 de ele alınan iki üreteç eğrinin bir küresel çarpım yüzeyinin izotropik düzlemde flat olması için gerekli şartlar elde edilmiştir.

G_3^1 de Γ_1 ve Γ_2 eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyi M^2 çin elde edilen sınıflandırma şu şekildedir; Γ_1 bir doğruysa, o zaman M^2 flattir fakat minimal değildir. Γ_2 orijinden geçen bir doğruysa o zaman M^2 bir toplam geodezik yüzey ve bu yüzey izotropik düzlemin açık bir parçasıdır. Γ_2 , $y = mx + n$, $m, n \neq 0$ formunda bir doğruysa o zaman M^2 bir izotropik düzlemin açık bir parçasıdır. İzotropik düzlemler dışında sabit ortalama eğrilikli bir küresel çarpım yüzeyi yoktur. Son olarak: G_3^1 de $\Gamma_1(u) = (p_1(u), p_2(u))$, $\Gamma_2(v) = (q_1(v), q_2(v))$ eğrilerinin bir küresel çarpım yüzeyi M^2 olmak üzere, eğer p_1 bir lineer fonksiyon değilse o zaman u-parametre eğrileri asimptotik doğrulardır. Ama p_1 bir lineer fonksiyon olduğunda u-parametre eğrilerinin asimptotik doğrular olması için gerek ve yeter şart ya p_2 bir lineer fonksiyon, ya da M^2 nin bir toplam (total) geodezik yüzey olması gerekir.

KAYNAKLAR

- Akar M., Yüce S. and Kuruoglu N.,** 2013. *One-parameter planar motion on the Galilean plane, hit. Electron. J. Geom.* **6(1)**, 79-88.
- Aydın M. E., Öğrenmis A. O. and Ergut M.,** *Classification of factorable surfaces in the pseudo- Galilean space*, Glas. Mat. Ser. III, to appear.
- Aydın M. E., A. Mihai, Öğrenmiş A. O. and Ergut M.,** 2015. *Geometry of the solutions of localized induction equation in the pseudo-Galilean space*, Aclv. Math. Pliys., vol. 2015, Article ID 905978, 7 pages, 2015. do i: 10.1155/2015/9059 78.
- Barr A. H.,** 1981. *Superquadrics and angle-preserving transformations*, IEEE Cornput.Graph. Appl. 1(1) (1981), 11-23.
- Bulca B., Arslan K., (Kılıç) Bayram B. and Öztürk G.,** 2012. *Spherical product surfaces in E^4* , An. St. Univ. Ovidius Constanta **20(1)** (2012), 41-54.
- Bulca B., Arslan K., (Kılıç) Bayram B., Öztürk G. and Ugail H.,** *On spherical product surfaces* , IEEE Computer Society, 2009, Int. Conference on CYBERWORLDS.
- Dede M.,** 2013. *Tubular surfaces in Galilean space*, Math. Commun. 18 (2013), 209-217.
- Dede M., Ekici C. and Coken A. C.,** 2013. *On the parallel surfaces m Galilean space*, Hacettepe J. Math. Stat. 42(0) (2013), 605-615.
- Diyjak B. and Sipus Z.M.,** 2003. *Special curves on ruled surfaces in Galilean and, pseudo-Galilean spaces*, Acta Math. Hun gar. 98 (2003), 175-187.
- Carmo M.P.,** 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- Erjavec Z., Divjak B. and Horvat D.,** 2011. *The general solutions of Frenetds system in the equiform geometry of the Galilean, pseudo-Galilean, simple isotropic and double isotropic space*, Int. Math. Forum 6(17) (2011), 837 - 856.
- Erjavec Z.,** 2014. *On generalization of helices in the Galilean and the pseudo-Galilean space*, J. Math. Res. 6(3) (2014), 39-50.
- Gray A.,** 1998. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press LLC, 1998.
- Kamenarovic I.,** 1991. *Existence theorems for ruled, surfaces in the Galilean space G_3* , Rad Hazu Math. 456(10) (1991), 183-196.

- Karacan M.K. and Tuncer Y.,** 2013. *Tubular surfaces of Weingarten types in Galilean and pseudo- Galilean*, Bull. Math. Anal. Appl. 5(2) (2013), 87-100.
- Kuiper N. H.,** *Minimal Total absolute curvature for immersions*, Invent. Math., **10** (1970), 209-238.
- Öğrenmiş A.O., Ergut M. and Bektaş M.,** *On the helices in the Galilean Space G_3* , Iranian J. Sci. Tech., **31(A2)** (2007), 177-181.
- Onishchick A. and Sulanke R.,** 2006. *Projective and Cayley-Klein Geometries*, Springer, 2006.
- Öztekin H. B. and Tatlipinar S.,** 2012. *On some curves in Galilean plane and 3-dimensional Galilean space*, J. Dyn. Syst, Geom. Theor. **10(2)** (2012), 189-196.
- Pavkovic B. J. and Kamenarovic I.,** 1987. *The equiform differential geometry of curves in the Galilean space G_3* , Glasnik Mat. 22(42) (1987), 449-457.
- Sipus Z.M.,** 2008. *Sip us, Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space*. Period. Math. Hungar. 56 (2008), 213-225.
- Sipus Z.M. and Divjak B.,** 2008. *Some special surface in the pseudo-Galilean Space*, Acta Math. Hungar. 118 (2008), 209-226.
- Sipus Z.M. and Divjak B.,** 2011. *Translation surface in the Galilean space*, Glas. Mat. Ser. Ill 46(2) (2011), 455-469.
- Sipus Z.M. and Divjak B.,** 2012. *Surfaces of constant curvature in the pseudo-Galilean space*, Iut. J. Math. Sci., 2012, Art ID375264, 28pp.
- Yoon D.W.,** 2013. *Surfaces of revolution in the three dimensional pseudo-Galilean space*, Glas. Mat. Ser. Ill, 48(2) (2013), 415-428.
- Yoon D.W.,** 2012. *Some classification of translation surfaces in Galilean 3-space*, Int. J. Math. Anal. 6(28) (2012), 1355-1361.
- Yoon D. W.,** *Classification of rotational surfaces in pseudo-Galilean space*, Glas. Mat. Ser. Ill, to appear.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2010 yılında, Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2014 yılında, Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında, tezli yüksek lisansa başladım.

