

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL NOKTASI -DAİRESİ VE
DAYANIKLILIK PROBLEMLERİ ÜZERİNE**

Keziban TAŞ

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Etibar PENAHOV

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ELAZIĞ 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL NOKTASI -DAİRESİ VE
DAYANIKLILIK PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Keziban TAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez,..... tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun...../...../..... tarih ve..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yöneten ve çalışmalarında bana destek ve yardımcı olan sayın hocam Prof.Dr. Etibar PENAHOV'a, ayrıca Dr. Erdal BAŞ hocama en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Keziban TAŞ

İÇİNDEKİLER

Teşekkür	
İçindekiler	I
Simgeler Listesi	II
Özet	III
Abstract	IV
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2 WEYL DAİRESİ VE WEYL NOKTASI	
2.1.Sturm-Liouville Operatörü İçin Weyl Dairesi ve Weyl Noktası	5
2.2. Rezolventin İntegral Görüntüsü	12
3.TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ	
3.1. Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Karakteristikleri	19
3.2. Spektral Karakteristikler ve Özfonksiyonlar İçin	
Asimptotik Formüllere İlişkin Teoremler	21
3.3. Spektral Karakteristikleriyle Bir Sturm-Liouville Probleminin Tanımlanması	26
3.4. İntegral Denklemin Diferensiyellenmesi	31
3.5.Gel'fand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümü	34
3.6.Düzgün Tanımlı Ters Sturm-Liouville Problemine İlişkin Teoremler	38
KAYNAKLAR	44

SİMGELER LİSTESİ

$W(f, g)$	:	Wronskian determinanı
$L_2[a, b]$	:	Karesi integrallenbilen fonksiyonlar uzayı
C_b	:	$x = b$ noktasına karşılık gelen çember
φ_n	:	Özfonksiyon
λ	:	Özdeğer
$K(x, y)$	:	Çekirdek fonksiyonu
$q(x)$	:	Potansiyel fonksiyonu
$\rho(\lambda)$	:	Spektral fonksiyonu
$G(x, y, z)$	:	Green fonksiyonu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL OPERATÖRLER İÇİN WEYL NOKTASI-DAİRESİ VE DAYANIKLILIK PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Keziban TAŞ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 46

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferensiyel operatörlerin Spektral teorisinde sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Sturm-Liouville operatörü için Weyl noktası, Weyl dairesi incelenmiş, bazı teoremler ve rezolventin integral görüntüsü verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Düzgün tanımlanmış ters Sturm-Liouville problemleri için Gel'fand-Levitan yönteminden farklı olan Mizutani yöntemi açıklanmış ve bu yöntem ile potansiyel fonksiyonlara ilişkin teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, özfonksiyon, ters Sturm-Liouville problemi, Weyl noktası, Weyl dairesi, potansiyel fonksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE WEYL POINT-CIRCLE FOR DIFFERENTIAL OPERATORS AND THE STABILITY PROBLEMS

Keziban TAŞ

Firat University

Graduate School of Science and Technology Department of Mathematics

2007, Page: 46

This study is consist of three chapters.

In the first chapter, some fundamantel definitions and theorems that use often in Spectral theory of differential operators are given.

In the second chapter, The Weyl point and Weyl circle for a Sturm-Liouville opeator are examined, some theorems and integral representation of the resolvent are given.

In the final chapter, For Wellposed of Inverse Sturm-Liouville problems Mizutani's method that different from Gel'fand-Levitan's method is examined. Theorems for Potential function are given.

Keywords: Eigenvalue, eigenfunction, inverse Sturm-Liouville problem, Weyl point, Weyl circle, potential function.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a, b]$ uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde, bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 1.1.2. Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşüm operatör denir.

Tanım 1.1.3. E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olmak üzere

1. $x_1, x_2 \in E_x$ için $L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2$

2. $x \in E_x, \lambda \in \mathbf{R}$ için $L(\lambda x) = \lambda Lx$

şartlarını sağlayan $L : E_x \longrightarrow E_y$ operatörüne lineer operatör denir [1].

Tanım 1.1.4. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \longrightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\| \leq c \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir [2].

Tanım 1.1.5. $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ 'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [3].

Tanım 1.1.6. Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörünün tersi mevcut olacak biçimde

$R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne $(L - \lambda I)x = y$ denkleminin rezolvent operatörü denir [2].

Tanım 1.1.7. L operatörü $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen özfonksiyon denir [3].

Tanım 1.1.8. Eğer $x \longrightarrow 0$ (veya $x \longrightarrow \infty$) iken $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir [4].

Tanım 1.1.9. $[a, b]$, $\mathbf{R}$ 'nin kapalı sınırlı bir aralığı ve $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ ' ler $[a, b]$ de açık aralıklar olmak üzere $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ vardır öyleki

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

oluyorsa $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ fonksiyonu $[a, b]$ de mutlak sürekli dir denir [5].

Tanım 1.1.10. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında

diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [6].

Tanım 1.1.11. $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'e tam fonksiyon denir.

Tanım 1.1.12. $0 < |z - z_0| < R$ bölgesinde $f(z)$ analitik fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 'a $f(z)$ 'in kutup noktası denir [6].

Tanım 1.1.13. $g(z)$ ve $h(z)$ tam fonksiyonlar ve $h(z) \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

formundaki $f(z)$ fonksiyonuna meromorf fonksiyon denir [6].

Tanım 1.1.14.

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan determinanta Wronskian determinanı denir [3].

Tanım 1.1.15.(Parseval Eşitliğı) $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u) g(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_a^b f(u) \phi(u, \lambda_n) du \right) \left(\int_a^b g(u) \phi(u, \lambda_n) du \right)$$

dir [3].

Tanım 1.1.16.(Minkowski Eşitsizliğı) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ (veya $\mathbf{C}^n$) için

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklindeki eşitsizliğe toplam için Minkowski eşitsizliğı denir [2].

Tanım 1.1.17.(Cauchy-Bunjakowski Eşitsizliğı) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

dir [2].

Tanım 1.1.18.(Bessel Eşitsizliği) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve (x_n) de X 'de bir ortonormal dizi olmak

üzere $x \in X$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

dir [1].

Tanım 1.1.19. $A^m[0, \pi]$ $\{m = 1, 2, 3, \dots\}$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında tanımlı $(m-1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip ve m . türevi mutlak sürekli olan reel değerli fonksiyonlardan oluşan uzaydır [5].

Teorem 1.1.1.(Green Teoremi) Ω , xoy düzleminde bir bölge ve Γ da bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları Ω üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

dir [6].

Teorem 1.1.2.(I.Helli Teoremi) $\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \dots, \sigma_n(\lambda), \dots$ $[a, b]$ kapalı aralığında monoton azalmayan sınırlı fonksiyonlar dizisi ve bu dizide bulunan fonksiyonların tamamı soldan sürekli olsun. $\sigma_n(\lambda)$ fonksiyonları düzgün sınırlı olmak üzere monoton $\sigma(\lambda)$ fonksiyonuna yakınsak olan $\sigma_{n_j}(\lambda)$ alt dizisini seçmek mümkündür [3].

Teorem 1.1.3.(II.Helli Teoremi) $a \leq \lambda \leq b$ aralığında $f(\lambda)$ fonksiyonu sürekli ve $\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \dots, \sigma_n(\lambda), \dots$ monoton fonksiyonlar dizisi her süreklilik noktasında $\sigma(\lambda)$ limit fonksiyonuna yakınsak olmak üzere eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(a) = \sigma(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(b) = \sigma(b)$$

ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(\lambda) d\sigma_n(\lambda) = \int_a^b f(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

dir [3].

Teorem 1.1.4.(Genelleştirilmiş Helli Teoremi) $\sigma_n(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ monoton fonksiyonlar dizisi $\sigma(\lambda)$ monoton fonksiyonunun her süreksizlik noktasında bu fonksiyona yakınsasın. $f(\lambda)$ doğru ekseninde sürekli fonksiyon ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı, $\forall a, b > A$ ve $\forall n$ için

$$\int_{-\infty}^a |f(\lambda)| d\sigma_n(\lambda) < \varepsilon, \quad \int_b^{\infty} |f(\lambda)| d\sigma_n(\lambda) < \varepsilon$$

olmak üzere yeterince büyük pozitif $A = A(\varepsilon)$ sayısı vardır. Öyleki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\sigma_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

dir [3].

2. WEYL DAİRESİ VE WEYL NOKTASI

2.1. Sturm-Liouville Operatörü İçin Weyl Dairesi ve Weyl Noktası

Bu bölümde $[0, \infty)$ da tanımlı ve her sonlu aralıkta sürekli $q(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $F(x)$ fonksiyonu

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \quad (2.1.1)$$

diferensiyel denklemini sağlasın. $G(x)$ fonksiyonu ise aynı denklemi $\lambda = \lambda'$ için sağlasın. b sabit sayı ve

$$W_x \{F, G\} = \begin{vmatrix} F(x) & F'(x) \\ G(x) & G'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_0^\pi L F \cdot G(x) dx = W_\pi \{F, G\} - W_0 \{F, G\} + \int_0^\pi F(x) \cdot L G dx$$

özdeşliğinden

$$\begin{aligned} (\lambda' - \lambda) \int_0^b F(x) G(x) dx &= \int_0^b \{F(x) [q(x) G(x)] - G''(x) [q(x) F(x) - F''(x)]\} dx \\ &= - \int_0^b \{F(x) G''(x) - G(x) F''(x)\} dx \\ &= W_0 \{F, G\} - W_b \{F, G\} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

olur.

Özel olarak $\lambda = u + iv$, $\lambda' = \bar{\lambda} = u - iv$ olacak şekilde, $q(x)$ reel olduğu için $G(x) = F(x)$ bulunur. Bu sebeple (2.1.2) formülünden

$$2v \int_0^b |F(x)|^2 dx = i W_0 \{F, F\} - i W_b \{F, F\} \quad (2.1.2')$$

elde edilir.

α reel sayı olacak biçimde

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \sin \alpha & \varphi'(0) &= -\cos \alpha \\ \theta(0) &= \cos \alpha & \theta'(0) &= \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan (2.1.1) denkleminin çözümlerini $\varphi(x) = \varphi(x, \lambda)$ ve $\theta(x) = \theta(x, \lambda)$ ile göstereyim. (2.1.1) denkleminde birinci türeve sahip terimin katsayısı sıfıra eşit olduğundan belirli Liouville formülünden dolayı Wronskian sabittir. Dolayısıyla

$$W_x \{\varphi, \theta\} = W_0 \{\varphi, \theta\} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dir. Bu nedenle (2.1.1) denkleminin genel çözümünü $\theta(x) + \ell\varphi(x)$ şeklinde yazmak mümkündür. β reel sayı olacak şekilde $x = b$ noktasında

$$\{\theta(b) - \ell\varphi(b)\} \cos \beta + \{\theta'(b) + \ell\varphi'(b)\} \sin \beta = 0 \quad (2.1.3')$$

koşulunu sağlayan çözümleri gözönüne alalım. Son eşitlikten ℓ 'yi tanımlarsak

$$\ell = -\frac{\theta(b) \cot \beta + \theta'(b)}{\varphi(b) \cot \beta + \varphi'(b)} \quad (2.1.4)$$

elde ederiz. b sabit ve $-\infty < \cot \beta < +\infty$ olacak şekilde ℓ kompleks düzlemde C_b çemberini çizmiş olur. $\cot \beta = z$ kompleks değişken değiştirilmesi yapılsa

$$\ell = \ell(\lambda, z) = -\frac{\theta(b)z + \theta'(b)}{\varphi(b)z + \varphi'(b)} \quad (2.1.4')$$

olur. $\ell = \infty$ noktasına $z = -\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}$ karşılık gelir. Bu nedenle C_b dairesinin merkezine $\bar{z} = -\frac{\bar{\varphi}'(b)}{\bar{\varphi}(b)}$ noktası karşılık gelir. $\bar{z}$ değerini ℓ için yazdığımız formülde yerine yazarak C_b çemberinin merkezinin

$$-\frac{W_b \{\theta, \bar{\varphi}\}}{W_b \{\varphi, \bar{\varphi}\}}$$

noktasında bulunacağını görürüz. Böylece

$$\operatorname{Im} \left\{ -\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)} \right\} = \frac{1}{2}i \left\{ \frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)} - \frac{\bar{\varphi}'(b)}{\bar{\varphi}(b)} \right\} = -\frac{1}{2}i \frac{W_b \{\varphi, \bar{\varphi}\}}{|\varphi(b)|^2}$$

elde edilir. $W_0 \{\varphi, \bar{\varphi}\} = 0$ olduğu için (2.1.2')'den dolayı son ifadenin işareti ile v nin işareti aynıdır. Böylece aşağıdaki lemmayı ispatlamış oluruz.

Lemma 2.1.1. $v > 0$ ise üst z -yarı düzlemine C_b çemberinin dış kısmı karşılık gelir.

$z = 0$ olacak şekilde $-\frac{\theta'(b)}{\varphi'(b)}$ noktası C_b çemberi üzerinde bulunduğundan C_b dairesinin r_b yarıçapı için

$$r_b = \left| \frac{\theta'(b)}{\varphi'(b)} - \frac{W_b \{\theta, \bar{\varphi}\}}{W_b \{\varphi, \bar{\varphi}\}} \right| = \left(2v \int_0^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{-1} \quad (2.1.5)$$

ifadesini elde ederiz.

Bununla birlikte Lemma 2.1.1'den dolayı $\operatorname{Im} z < 0$, yani $i(z - \bar{z}) > 0$ için ℓ , C_b dairesinin içerisinde bulunacaktır. (2.1.4')'nü z ye göre çözerek ve $i(z - \bar{z}) > 0$ eşitsizliğinde yerine yazarak

$$i \left\{ \frac{\ell\varphi'(b) + \theta'(b)}{L\varphi(b) + \theta(b)} + \frac{\ell\bar{\varphi}(b) + \bar{\theta}(b)}{L\bar{\varphi}(b) + \bar{\theta}(b)} \right\} > 0$$

elde ederiz. Buradan ise

$$\begin{aligned}
& i \left\{ |\ell|^2 W_b \{ \varphi, \bar{\varphi} \} + \ell W_b \{ \varphi, \bar{\theta} \} + \bar{\ell} W_b \{ \theta, \bar{\varphi} \} + \bar{\ell} W_b \{ \theta, \bar{\theta} \} \right\} \\
& = i W_b \left\{ \theta + \ell \varphi, \bar{\theta} + \bar{\ell} \bar{\varphi} \right\} > 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu sebeple (2.1.2') özdeşliğinde $F = \theta + \ell \varphi$ alınır

$$2v \int_0^b |\theta(x) + \ell \varphi(x)|^2 dx < i W_0 \left\{ \theta + \ell \varphi, \bar{\theta} + \bar{\ell} \bar{\varphi} \right\}$$

elde edilir.

$$W_0 \{ \varphi, \bar{\theta} \} = 1, \quad W_0 \{ \varphi, \bar{\varphi} \} = 0, \quad W_0 \{ \theta, \bar{\theta} \} = 0 \quad W_0 \{ \theta, \bar{\varphi} \} = 1$$

olduğu için

$$W_0 \left\{ \theta + \ell \varphi, \bar{\theta} + \bar{\ell} \bar{\varphi} \right\} = \ell - \bar{\ell} = 2i \operatorname{Im} \ell$$

olur. Böylece $v > 0$ ve

$$\int_0^b |\theta(x) + \ell \varphi(x)|^2 dx < -\frac{\operatorname{Im} \ell}{v} \quad (2.1.6)$$

olacak şekilde ℓ , C_b çemberinin içerisinde bulunmaktadır. $v < 0$ durumunda da $\operatorname{Im} z > 0$ eşitsizliğinden faydalanılarak benzer sonuç elde edilir. Her iki durumda $\operatorname{Im} \ell$ nin işareti v nin işaretinin aksine eşittir. Dolayısıyla ℓ , C_b çemberinin içerisinde bulunursa ve $0 < b' < b$ ise

$$\int_0^{b'} |\theta(x) + \ell \varphi(x)|^2 dx < \int_0^b |\theta(x) + \ell \varphi(x)|^2 dx < -\frac{\operatorname{Im} \ell}{v}$$

dir. Bu nedenle ℓ , $C_{b'}$ çemberi içerisinde de bulunur. Demek ki $b' < b$ ise $C_{b'}$, C_b yi kapsıyor. Buradan $b \rightarrow \infty$ için C_b daireleri ya limit dairesine ya da limit noktasına yakınsarlar. $m = m(\lambda)$ limit noktası veya limit çemberinin keyfi noktası olsun. Bu takdirde her b için

$$\int_0^b |\theta(x) + m \varphi(x)|^2 dx \leq -\frac{\operatorname{Im}(m)}{v} \quad (2.1.7)$$

olur. Bu sebeple

$$\int_0^\infty |\theta(x) + m \varphi(x)|^2 dx \leq -\frac{\operatorname{Im}(m)}{v}$$

dir. Böylece aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 2.1.1. λ nın reel olmayandır değerlerinin tamamı için

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0$$

denkleminin $[0, \infty]$ aralığında karesi integrallenebilen

$$\psi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda) \varphi(x, \lambda)$$

çözümü vardır.

Limit dairesi durumunda $b \rightarrow \infty$ için r_b sonlu limite sahiptir. Bu nedenle (2.1.5)' den $\varphi(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$ elde edilir. Yani bu durumda (2.1.1) denkleminin her çözümü $L^2(0, \infty)$ uzayına aittir. Doğal olarak aşağıdaki soru ile karşılaşabiliriz;

Limit dairesi ve limit noktasının sınıflandırılması özel olarak λ_0 ın özel değerinin seçimine mi bağlıdır veya sadece $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ operatörüne mi bağlıdır?

Teorem 2.1.2. Herhangi kompleks λ_0 için (2.1.1) denkleminin her çözümü $L^2(0, \infty)$ uzayının elemanı ise bu takdirde her keyfi kompleks λ için (2.1.1) denkleminin her çözümü de $L^2(0, \infty)$ uzayının elemanıdır. Diğer bir ifadeyle reel olmayan herhangi λ_0 için limit daire durumu reel olmayan keyfi λ için de sağlanacaktır.

İspat: $\text{Im } \lambda_0 \neq 0$ olacak şekilde

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda_0 y$$

denkleminin $L^2(0, \infty)$ uzayında bulunan lineer olmayan iki çözümü φ ve ψ olsun.

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y$$

denkleminin keyfi çözümü χ olsun. Bu denklemi

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda_0 y + (\lambda - \lambda_0)y$$

şeklinde yazalım. $W\{\varphi, \bar{\psi}\} = 1$ olacak şekilde φ yi herhangi bir sabitle çarpıp ve sabitler varyasyonu kuralını uygularsak c, c_1, c_2 sabitleri için

$$\chi(x) = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi + (\lambda - \lambda_0) \int_0^x \{\varphi(x) \psi(t) - \varphi(t) \psi(x)\} \chi(t) dt \quad (2.1.8)$$

elde ederiz.

$$\|\chi(x)\|_c = \left\{ \int_0^x |\chi(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

eşitliğinden faydalanarak her $x \geq c$ için $\|\varphi(x)\|_c \leq M$ ve $\|\psi(x)\|_c \leq M$ olmak üzere M nin mevcut olmasından ve Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinden

$$\int_0^x \{\varphi(x) \psi(t) - \varphi(t) \psi(x)\} \chi(t) dt \leq \{|\varphi(x)| + |\psi(x)|\} \|\chi(x)\|_c$$

eşitsizliğini buluruz. (2.1.8) formülünden ve Minkovski eşitsizliğinden faydalanırsak

$$\|\chi(x)\|_c = \{|c_1| + |c_2|\} M + 2|\lambda - \lambda_0| M^2 \|\chi(x)\|_c$$

elde ederiz.

$|\lambda - \lambda_0| M^2 < \frac{1}{4}$ olmak üzere c yeterince büyük olduğunda

$$\|\chi(x)\|_c \leq 2\{|c_1| + |c_2|\} M$$

dir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı x den bağımsız olduğu için $\chi(x) \in L^2(0, \infty)$ dir.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ operatörü için limit noktası durumunun sağlanması için yararlı olan yeterlik koşulunu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 2.1.3. Herhangi bir pozitif k sabiti için

$$q(x) \geq -kx^2$$

ise L operatörü için limit noktası durumu geçerlidir.

İspat: İlk önce homojen $-y'' + q(x)y = 0$ denkleminin $L^2(0, \infty)$ da bulunan lineer bağımsız iki çözümünün olmadığını gösterelim. $Ly = 0$ denkleminin reel çözümü $\varphi(x)$ ve $\varphi(x) \in L^2(0, \infty)$ olsun. $\varphi'' = q\varphi$ eşitliğinden $c > 0$ için

$$\int_0^x \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{t^2} dt = \int_c^x \frac{q(t)}{t^2} \varphi^2(t) dt \geq -k \int_c^x \varphi^2(t) dt$$

elde ederiz. Kısmi integrasyon uygularsak ve $\varphi \in L^2(0, \infty)$ olduğundan faydalanırsak

$$-\frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{x^2} + \int_c^x \frac{\{\varphi'(t)\}^2}{t^2} dt - \int_c^x \frac{2\varphi'(t)\varphi(t)}{t^3} dt < k_1 \quad (2.1.9)$$

olmak üzere k_1 sabitinin varlığını ispatlayalım.

$$H(x) = \int_c^x \frac{\{\varphi'(t)\}^2}{t^2} dt$$

olsun. Bu taktirde Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \int_c^x \frac{2\varphi'(t)\varphi(t)}{t^3} dt \right|^2 &\leq k_2 \left(\int_c^x \frac{|\varphi'(t)| |\varphi(t)|}{t} dt \right)^2 \\ &\leq k_2 H(x) \int_c^x \varphi^2(t) dt \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

elde ederiz. Böylece (2.1.10) ve (2.1.9) dan

$$-\frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{x^2} + H(x) - k_3 H^{1/2}(x) < k_1 \quad (2.1.11)$$

olmak üzere k_3 sabitinin varlığını elde edilir.

Eğer $x \rightarrow \infty$ için $H(x) \rightarrow \infty$ ise yeteri kadar büyük x ' ler için (2.1.11) 'den

$$\frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{x^2} > \frac{1}{2} H(x)$$

bulunur. Bu yeterince büyük x 'ler için $\varphi(x)$ ve $\varphi'(x)$ in aynı işaretli olması demektir. Bu ise $\varphi(x) \in L^2(0, \infty)$ ile çelişir. Böylece

$$\int_c^x \frac{\{\varphi'(t)\}^2}{t^2} dt < \infty \quad (2.1.12)$$

olmak üzere $H(x)$ sonludur.

$Ly = 0$ denkleminin $L^2(0, \infty)$ uzayında bulunan lineer bağımsız iki çözümü $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ olsun. Yani L operatörü için limit dairesi durumunun sağlandığını kabul edelim. Bu çözümler reeldir ve

$$W\{\varphi, \psi\} = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = 1$$

dir. Buradan

$$\varphi(x) \frac{\psi'(x)}{x} - \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{1}{x}$$

eşitliği elde edilir.

(2.1.12) eşitsizliği ve Cauchy-Bunjakovski eşitsizliğinden dolayı son eşitliğin sol kısmı (c, ∞) aralığında integrallenebilir. Sağ kısmın ise integrallenemeyeceği açıktır. Böylece limit daire durumu sağlanamaz. Dolayısıyla limit nokta durumu söz konusudur. Teorem ispatlanmış olur.

Verilen β için λ 'ya bağlı $\ell = \ell(\lambda)$ analitik fonksiyondur. Aynı zamanda bu fonksiyon kutup noktaları reel eksen üzerinde bulunan bir meromorf fonksiyondur. Gerçekten (2.1.4) 'den dolayı $\ell(\lambda)$ nın kutup noktaları

$$\varphi(b, x) \cos \beta + \varphi'(b, \lambda) \sin \beta$$

fonksiyonunun sıfırlarından oluşur. Bu sıfırlar sonlu $[0, b]$ aralığında (2.1.1) denkleminin özdeğerleridir, dolayısıyla basittirler. Birinci kısımdaki yorumlardan dolayı verilen λ için C_b dairesiyle örtülü ℓ -düzleminin bölgesi b arttığında küçülür. Bu nedenle tamamı üst (alt) ℓ -yarı düzleminde bulunan her sınırlı bölgede $\ell(\lambda) = \ell(\lambda, b, \beta)$ analitik fonksiyonlar ailesi düzgün sınırlıdır.

Analitik fonksiyonlar teorisinde bilinen teoremden dolayı bu fonksiyonlar ailesi her bölgede düzgündür. Yani her sonsuz diziden düzgün yakınsak alt dizi seçmek mümkündür.

Reel olmayan herhangi λ için limit nokta durumu sağlanacak şekilde (reel olmayan diğer λ lar içinde Teorem (5.1.2) 'den dolayı aynı sonuç sağlanır.) Weierstrass teoreminden dolayı $\ell(\lambda)$ fonksiyonlar ailesi analitik olan bir tek $m(\lambda)$ limitine sahiptir.

Limit dairesi durumunda $\ell(\lambda)$ ailesi tek limite sahip değildir. Ailenin düzgünlüğünden her λ -yarı düzleminde mevcut ve analitik olan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell(\lambda, b_k, \beta_k) = m(\lambda)$$

olmak üzere sınırsız artan b_k sayı dizilerini ve β_k sayı dizisini seçmek mümkün olur. $m(\lambda)$ sayılarının limit çevreleri üzerinde bulunacağı aşikardır.

$\ell = \ell(\lambda, b)$ olacak şekilde $\psi(x, \lambda) = \theta(x) + \ell\varphi(x)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki lemma sağlanır.

Lemma 2.1.2. Reel olmayan her λ için

$$\psi_b(x, \lambda) \rightarrow \psi(x, \lambda)$$

ve $b \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^b |\psi_b(x, \lambda)|^2 dx \rightarrow \int_0^b |\psi(x, \lambda)|^2 dx$$

dir.

İspat: $\psi(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$ için

$$\psi_b(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + [\ell(\lambda) - m(\lambda)] \varphi(x, \lambda)$$

dir. Limit daire durumunda $\ell(\lambda) \rightarrow m(\lambda)$ dir. Bu nedenle $\psi_b(x, \lambda) \rightarrow \psi(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$ olduğundan dolayı

$$\int_0^b |\psi_b(x, \lambda)|^2 dx \rightarrow \int_0^b |\psi(x, \lambda)|^2 dx$$

olur.

Limit nokta durumunda $v \neq 0$ olacak biçimde

$$|\ell(\lambda) - m(\lambda)| \leq r_b = \left(2v \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \right)^{-1}$$

$r_b \rightarrow 0$ olduğu için $\psi_b(x, \lambda) \rightarrow \psi(x, \lambda)$,

$$\begin{aligned} \int_0^b |\{\ell(\lambda) \rightarrow m(\lambda)\} \varphi(x, \lambda)|^2 dx &= |\ell(\lambda) - m(\lambda)|^2 \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \\ &\leq \left(4v^2 \int_0^b |\varphi(x, \lambda)|^2 dx \right)^{-1} \end{aligned}$$

Bunun için bu durumda

$$\int_0^b |\psi_{b_k}(x, \lambda)|^2 dx \rightarrow \int_0^b |\psi(x, \lambda)|^2 dx$$

olur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

2.2.Rezolventin İntegral Görüntüsü

$f(x) \in L^2(0, \infty)$ olsun. $\varphi(x, \lambda)$ ile $\psi(x, \lambda)$ önceki kısımda tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere reel olmayan λ için

$$\phi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) \cdot f(y) dy + \varphi(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) \cdot f(y) dy$$

alalım. Eğer $f(x)$ sürekli fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \phi'(x, \lambda) &= \psi'_x(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) \cdot f(y) dy + \varphi'_x(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) \cdot f(y) dy \\ \phi''(x, \lambda) &= \psi''_x(x, \lambda) \int_0^x \varphi(y, \lambda) \cdot f(y) dy + \varphi''_x(x, \lambda) \int_x^\infty \psi(y, \lambda) \cdot f(y) dy \\ &\quad + \{\psi'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \psi(x, \lambda)\} f(x) \\ &= \{q(x) - \lambda\} \phi(x, \lambda) + f(x) \end{aligned}$$

dir. Çünkü;

$$\begin{aligned} \psi'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \psi(x, \lambda) &= W_x \{\varphi, \psi\} = W_0 \{\varphi, \psi\} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha + m(\lambda) \sin \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha - m(\lambda) \cos \alpha \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\phi''(x, \lambda) + \{\lambda - q(x)\} \phi(x, \lambda) = f(x)$$

olur. Bundan başka

$$\begin{aligned} \phi(0, \lambda) &= \varphi(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) \cdot f(y) dy \\ \phi'(0, \lambda) &= \varphi'(0, \lambda) \int_0^\infty \psi(y, \lambda) \cdot f(y) dy \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\phi(x, \lambda)$

$$\phi(0, \lambda) \cos \alpha + \phi'(0, \lambda) \sin \alpha = 0$$

sınır koşulunu sağlıyor.

$$-y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \quad (0 \leq x < \infty)$$

$$y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha = 0$$

$$y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0$$

sınır probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları sırasıyla $\lambda_{n,b}$ ve $\varphi_{n,b}(x)$ olsun. $\ell(\lambda)$ ve $\psi_b(x, \lambda)$ bir önceki paragraftaki değerlere sahip olsunlar. $G_b(x, y; z)$ Green fonksiyonu ve $R_{z,b}f$ rezolventi $z = u + iv$ olmak üzere

$$G_b(x, y; z) = \begin{cases} \psi_b(x, z) \varphi(y, z), & y \leq x \\ \varphi(x, z) \psi_b(y, z) & y > x \end{cases}$$

$$R_{z,b}f = \int_0^b G_b(x, y; z) f(y) dy$$

şeklinde alalım.

$$\alpha_{n,b}^2 = \int_0^b \varphi_{n,b}^2(x) dx \quad (2.2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} R_{z,b}f &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,b}(x) \int_0^b f(y) \varphi_{n,b}(y) dy}{\alpha_{n,b}^2(z - \lambda_{n,b})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) \int_0^b f(y) \varphi(y, \lambda) dy}{z - \lambda} d\rho_b(\lambda) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \rho_b(\lambda) &= - \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \leq 0} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \quad (\lambda \leq 0) \\ \rho_b(\lambda) &= \sum_{0 < \lambda_{n,b} \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \quad (\lambda \leq 0) \end{aligned} \quad (2.2.2')$$

dir.

Lemma 2.2.1. Reel olmayan her z ve sabit x için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda) < K \quad (2.2.3')$$

dir.

İspat: (2.2.2) eşitliklerinin birincisinde $f(y) = \varphi_{n,b}(x)$ alalım. Daha sonra (2.1.1) eşitliğini gözönüne alırsa $\varphi_{n,b}(x)$ özfonksiyonlarımızın ortogonalliğinden dolayı

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_0^b G_b(x, y; z) \varphi_{n,b}(y) dy = \frac{\varphi_{n,b}(z)}{\alpha_n(z - \lambda_{n,b})} \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Şimdi $G_b(x, y; z)$ 'yi y 'ye göre bağımlı fonksiyon olarak gözüntüne alırsak ve Parseval eşitliğini uygularsak

$$\int_0^b |G_b(x, y; z)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,b}^2(x)}{\alpha_n^2 |(z - \lambda_{n,b})|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda)$$

buluruz. Lemma 2.1.1' den dolayı soldaki integral yakınsak olduğu için Lemma 2.2.1' i ispat etmiş oluruz.

Sonuç I. $\rho(\lambda)$ (2.2.2') eşitlikleri ile tanımlansın. Bu takdirde (2.2.3) eşitsizliğinde bulunan K sabiti için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda) \leq K \quad (2.2.5)$$

olur.

Gerçekten keyfi $a > 0$ için (2.2.3) eşitsizliğinden

$$\int_{-a}^a \left| \frac{\varphi(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda) \leq K$$

elde edilir. Önce $b \rightarrow \infty$ ve daha sonra $a \rightarrow \infty$ alınırsa (2.2.5)' i elde edilir.

Sonuç II. $\sin \alpha \neq 0$ olacak şekilde (2.2.5) eşitsizliğinde $x = 0$ alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{(z - \lambda)^2} < \infty$$

elde ederiz. Buradan her $a > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{\lambda^2} < \infty, \quad \int_a^{\infty} \frac{d\rho_b(\lambda)}{\lambda^2} < \infty \quad (2.2.6)$$

elde edilir.

$\sin \alpha = 0$ olacak şekilde (2.2.4)' ün x 'e göre diferansiyelini alırsak

$$\frac{1}{\alpha_n} \int_0^b G_b(x, y; z) \varphi_{n,b}(y) dy = \frac{\varphi'_{n,b}(x)}{\alpha_n (z - \lambda_{n,b})}$$

eşitliğini buluruz. Buradan Parseval eşitliğinden dolayı

$$\int_0^b \left| \frac{\partial}{\partial x} G_b(x, y; z) \right|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi'(x, \lambda)}{z - \lambda} \right|^2 d\rho_b(\lambda)$$

elde ederiz. Benzer işlemler yapılarak (2.2.6) 'daki ifadeleri elde edebiliriz.

Lemma 2.2.2. $f(x) \in L^2(0, \infty)$ için

$$G(x, y; z) = \begin{cases} \psi(x, z) \varphi(y, z), & y \leq x \\ \varphi(x, z) \psi(y, z) & y > x \end{cases}$$

olmak üzere

$$R_z f = \int_0^\infty G(x, y; z) f(y) dy$$

olsun. Bu takdirde

$$\int_0^\infty |R_z f|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^\infty f^2(x) dx$$

dir.

İspat: $\forall b > 0$ için Parseval eşitliğinden dolayı (2.2.2) 'den $z = u + iv$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |R_{z,b} f|^2 dx &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_n^2 |(z - \lambda_{n,b})|^2} \left\{ \int_0^b f(y) \varphi_{n,b}(y) dy \right\}^2 \\ &\leq \frac{1}{v^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ \int_0^b f(y) \varphi_{n,b}(y) dy \right\}^2 = \frac{1}{v^2} \int_0^b f^2(y) dy \end{aligned}$$

elde ederiz. $a > 0$ sabit sayı olsun. Eğer $a < b$ ise

$$\int_0^a |R_{z,b} f|^2 dx \leq \int_0^b |R_{z,b} f|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^b f^2(y) dy$$

dir. $b \rightarrow \infty$ iken son eşitlikten

$$\int_0^a |R_z f|^2 dx \leq \frac{1}{v^2} \int_0^\infty f^2(y) dy$$

elde ederiz. a keyfi olduğundan lemma ispatlanmış olur.

Şimdi rezolventin integral görüntüsüne ilişkin aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.2.1. Her $f(x) \in L^2(0, \infty)$ fonksiyonu ve reel olmayan her z için

$$F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olmak üzere

$$R_z f = \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x, \lambda) F(\lambda)}{z - \lambda} d\rho(\lambda) \quad (2.2.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Önce $f(x) = f_n(x)$ fonksiyonunun $[0, n]$ aralığı dışında sıfır olduğunu (2.1.3) sınır koşullarını sağladığını ve ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olduğunu varsayalım. $b > n$ ve $\gamma > 0$ keyfi sayı olsun.

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f_n(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

alalım. Bu takdirde (2.2.2) eşitliğini

$$\begin{aligned}
R_{z,b}f_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) F_n(\lambda)}{z - \lambda} d\rho_b(\lambda) \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{-v} + \int_{-v}^v + \int_v^{\infty} \right\} \frac{\varphi(x, \lambda) F_n(\lambda)}{z - \lambda} d\rho_b(\lambda) = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Şimdi I_1 i değerlendirelim. (2.2.2)' den dolayı

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{-v} \frac{\varphi(x, \lambda) F_n(\lambda)}{z - \lambda} d\rho_b(\lambda) = \sum_{\lambda_{k,b} < -v} \frac{\varphi_{k,b}(x)}{\alpha_{k,b}^2(z - \lambda_{k,b})} \int_0^n f_n(y) \varphi_{k,b}(y) dy \tag{2.2.9} \\
&\leq \left(\sum_{\lambda_{k,b} < -v} \frac{\varphi_{k,b}^2(x)}{\alpha_{k,b}^2 |z - \lambda_{k,b}|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{\lambda_{k,b} < -v} \frac{1}{\alpha_k^2} \left[\int_0^n f_n(x) \varphi_{k,b}(x) dx \right] \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

elde ederiz. Daha sonra iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^n f_n(x) \varphi_{k,b}(x) dx &= -\frac{1}{\lambda_{k,b}} \int_0^n f_n(x) \{ \varphi_{k,b}''(x) - q(x) \varphi_{k,b}(x) \} dx \\
&= -\frac{1}{\lambda_{k,b}} \int_0^n \{ f_n''(x) - q(x) f_n(x) \} \varphi_{k,b}(x) dx
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

elde edilir. Lemma 2.2.1 'den dolayı (2.2.9) 'un sağ kısmındaki birinci toplam yakınsaktır. Bu durumda (2.2.10) eşitliğini gözönüne alınırsa (2.2.9)' dan

$$I_1 \leq \frac{K^{1/2}}{v} \left(\sum_{\lambda_{k,b} < -v} \frac{1}{\alpha_k^2} \left\{ \int_0^n [f_n''(x) - q(x) f_n(x)] \varphi_{k,b}(x) dx \right\}^2 \right)^{1/2}$$

eşitliğini bulunur. Bu nedenle Bessel eşitsizliğinden dolayı

$$I_1 \leq \frac{K^{1/2}}{v} \left(\int_0^n [f_n''(x) - q(x) f_n(x)]^2 dx \right)^{1/2} = \frac{C}{v}$$

olur. Benzer şekilde $I_3 \leq \frac{C}{v}$ şeklinde ispat edilir.

Bu bağıntılardan dolayı $\gamma \rightarrow \infty$ için b ye göre düzgün olmak üzere I_1 ve I_3 sıfıra yakınsar. Bu sebeple genelleştirilmiş Helli Teoreminden faydalanmak mümkündür. (2.2.8) eşitliğinden

$$R_z f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda) F_n(\lambda)}{z - \lambda} d\rho(\lambda) \tag{2.2.11}$$

elde ederiz. $f(x)$ fonksiyonu $[0, \infty]$ aralığında karesi integrallenebilir keyfi fonksiyon olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken bir önceki koşulları sağlayamaz ve $f(x)$ 'e ortalama (karesel) yakınsak olan $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi mevcuttur.

Parseval eşitliğine göre $f_n(x)$ fonksiyonlarının $E_n(\lambda)$ Fourier dönüşümler dizisinde ortalama yakınsaklık anlamında $\rho(\lambda)$ ölçümüne göre $f(x)$ fonksiyonunu $F(\lambda)$ ile gösterelim ve Fourier

dönüşümüne yakınsıyor. Bu sebeple Lemma 2.2.1' deki sonuç I. ve Lemma 2.2.2 'den dolayı (2.2.11) eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak teoremin ispatını elde etmiş oluruz.

Hatırlatma: Benzer yorumlarla

$$F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

$$G(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n g(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olacak şekilde

$$\int_0^\infty R_z f g(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\lambda) G(\lambda)}{z - \lambda} d\rho(\lambda) \quad (2.2.11')$$

formülünü elde edilebilir.

Teorem 2.2.2. $f(x)$ fonksiyonu

1. $f(x) \in L^2(0, \infty)$
2. $\{f''(x) - q(x)f(x)\} \in L^2(0, \infty)$
3. $f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} W\{f(x), E_\lambda(x)\} = 0, \quad \lambda \neq 0$ için $E_\lambda(x) = \int_0^\lambda \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$

koşullarını sağlasın.

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(y) E_\lambda(y) dy$$

olmak üzere,

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda) dg(\lambda) \quad (2.2.12)$$

dir ve buradaki integral mutlak yakınsaktır.

İspat: $f(x)$ fonksiyonu sonlu aralık dışında sıfır olacak şekilde integralleme sıralamasını değiştirirsek

$$g(\lambda) = \int_0^\lambda F(\lambda) d\rho(\lambda), \quad F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olur. Fourier dönüşümlerinin ortalama yakınsaklığından dolayı $g(\lambda)$ için bu formül genel durumda da geçerlidir. Bu nedenle (2.2.7) formülünü

$$R_z f = \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x, \lambda) dg(\lambda)}{z - \lambda}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Lemma 2.2.1 'den dolayı son integral mutlak yakınsaktır. $f(x)$ e göre $g(\lambda)$ 'nın tanımlanmasına benzer şekilde $h(\lambda)$

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

ile tanımlanmış olsun. 4. koşul ve Green özdeşliğine göre

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \int_0^\infty \{f''(x) - q(x)f(x)\} E_\lambda(x) dx \\ &= - \int_0^\infty f(x) \left\{ \int_0^\lambda \mu \varphi(x, \mu) d\rho(\mu) \right\} dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonlu aralık dışında $f(x)$ sıfır olursa,

$$h(\lambda) = - \int_0^\lambda \mu F(\mu) d\rho(\mu) = - \int_0^\lambda \mu dg(\mu) \quad (2.2.13)$$

dir. Bu formül genel durumda da sağlanır ve

$$\int_0^\lambda \mu \varphi(x, \mu) dg(\mu) \in L^2(0, \infty)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left\{ \int_0^\lambda \mu \varphi(x, \mu) d\rho_b(\mu) \right\}^2 dx \\ &= \int_0^b \left\{ \sum_{n \leq \lambda_n, b \leq \lambda} \frac{\lambda_{n,b}}{\alpha_n^2} \varphi_{n,b}(x) \right\} \left\{ \sum_{0 \leq \lambda_n, b \leq \lambda} \frac{\lambda_{n,b}}{\alpha_n^2} \varphi_{n,b}(x) \right\} dx \\ &= \sum_{0 \leq \lambda_n, b \leq \lambda} \frac{\lambda_{n,b}^2}{\alpha_n^2} = \int_0^\lambda \mu^2 dg_b(\mu) \end{aligned}$$

burada $a < b$ ise

$$\int_0^a \left\{ \int_0^\lambda \mu \varphi(x, \mu) d\rho_b(\mu) \right\}^2 dx \leq \int_0^\lambda \mu^2 dg_b(\mu)$$

dir. Önce $b \rightarrow \infty$, daha sonra $a \rightarrow \infty$ için gereken ispat yapılmış olur.

Şimdi (2.2.13) 'ün diferensiyelini alırsak

$$dh(\lambda) = -\lambda dg(\lambda) \quad (2.2.14)$$

elde ederiz. 2. koşuldan dolayı

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ell(\mu, \lambda) dh(\lambda)}{z - \lambda}$$

integralinin mutlak yakınsaklığı için (2.2.14) 'den dolayı

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda) dg(\lambda)$$

integrali de mutlak yakınsak olur. Bu nedenle Teorem 2.1.2 'den ispat elde edilir.

3. TERS STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

3.1. Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Karakteristikleri

$q(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon, h ve H reel sayılar olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.1.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \quad (3.1.2)$$

Sturm-Liouville problemini gözönüne alalım.

(3.1.1)-(3.1.2) özdeğer problemini, $E(q(x); h, H)$ şeklinde gösterelim. Bu problemin özdeğerleri $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ olacak biçimde $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun.

$$\rho_n = \int_0^\pi \phi^2(x, \lambda_n) dx \quad (3.1.3)$$

olacak şekilde ρ_n normlaştırıcı sayılarını alalım. Burada $\phi(x, \lambda)$, (3.1.1) denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h. \quad (3.1.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümüdür.

$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayıları $E(q(x); h, H)$ özdeğer probleminin spektral karakteristikleri veya spektral verileri olarak adlandırılır.

Eğer $q(x) \in A^3[0, \pi]$ veya $q(x) \in A^4[0, \pi]$ ise $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektral karakteristiklerinin sırasıyla aşağıdaki asimptotik formülü sağladığı bilinir[18]:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (3.1.5)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (3.1.6)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), \quad (3.1.5')$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), \quad (3.1.6')$$

Burada a_0, b_0, a_1 ve b 'ler sabitlerdir.

Spektral verilere göre $q(x)$ potansiyelinin ve h, H sayılarının bulunmasına ters Sturm-Liouville problemi denir. Bu spektral veriler Sturm-Liouville operatörünün spektrumu, normlaştırıcı sayıları, spektral fonksiyonu, nodal noktaları olabilir.

V.A.Marchenko[9] spektral karakteristiklerin Sturm-Liouville problemini belirlediğini gösterdi ve I.M.Gel'fand ve B.M.Levitan [18] de $q(x), h, H$ 'ın spektral fonksiyona göre tanımlanması yöntemini verdi.

Bu kısımda ters problemin çözümü için başka yöntem önereceğiz.

(3.1.5) ve (3.1.6) asimptotik formüllerini sağlayan $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayılarının iki dizisi olsun. Başlangıç yaklaşımı olarak, $\alpha + \beta \cos 2x$ formunda reel değerli $r(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. J reel sayı olmak üzere $E(r(x); 0, J)$ özdeğer probleminin $\{\nu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektral karakteristikleri (3.1.5) ve (3.1.6) 'daki gibi asimptotik formüllere sahiptirler, yani;

$$\sqrt{\nu_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3.1.7)$$

$$\tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (3.1.8)$$

dir.

$E(r(x); 0, J)$ 'ye yaklaşan Sturm-Liouville problemi ile karşılaştırmayla $q(x) \in C^1[0, \pi]$ olmak üzere bilinmeyen $E(q(x); h, H)$ Sturm-Liouville problemi oluşturacağız.

Benzer yöntemle, eğer $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ (3.1.5)' ve (3.1.6)' formüllerini sağlarsa $q(x) \in C^2[0, \pi]$ olur. Gel'fand-Levitan başlangıç yaklaşımı olarak $E(0; 0, 0)$ sabit özdeğer problemini aldılar.

Eğer $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_0}{n^2} + \dots + \frac{a_{[(m+1)/2]}}{n^{2[(m+1)/2]+1}} + O\left(\frac{1}{n^{m+2}}\right), \\ \rho_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + \dots + \frac{b_{[m/2]}}{n^{2[m/2]+2}} + O\left(\frac{1}{n^{m+3}}\right), \end{aligned}$$

formundaki asimptotik formüller sağlanıyorsa $q(x) \in C^m[0, \pi]$ ($m \geq 3$) olur.

“Ters Sturm-Liouville problemi düzgün tanımlanmış mıdır?” sorusunu ele alacağız.

$q(x) \in C^1[0, \pi]$ reel değerli bir fonksiyon, h ve H 'ın bilinen reel sayılar olduğunu kabul edelim. Ayrıca $E(q(x); h, H)$ 'nin spektral karakteristikleri $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'ler de verilsin. $p(x) \in C^1[0, \pi]$ bilinmeyeniyle $E(p(x); h, H)$ 'nin $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ farklı spektral karakteristiklerinin verildiğini kabul edelim.

Bu durumda $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty} \longrightarrow \{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ olacak şekilde $|p(x) - q(x)|$ farkının küçük olduğu gösterilecektir.

$\lambda_0 \geq 1$ olsun. Aksi halde sırasıyla $E(q(x); h, H)$ ve $E(p(x); h, H)$ 'ın yerine $E(q(x) - \lambda_0 + 1; h, H)$ ve $E(p(x) - \lambda_0 + 1; h, H)$ almak yeterlidir.

Teorem 3.1.1. $C_1 > 0$ $q(x), h$ ve H 'a bağlı bir sabit olmak üzere eğer $A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n|\}$ yeterince küçük ise

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq C_1.A, \quad (3.1.9)$$

dir.

Şimdi $q(x)$ 'in $q'(x)$ türevnin, $[0, \pi]$ de mutlak sürekli olduğunu kabul edelim. Spektral karakteristikler için aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (3.1.10)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (3.1.11)$$

Teorem 3.1.1 'in genelleştirilmiş hali olan teorem 3.1.2 'yi verebiliriz.

Teorem 3.1.2. $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ ' ler aşağıdaki asimptotik formülleri sağlarlar.

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a'_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (3.1.12)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b'_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (3.1.13)$$

Eğer

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\lambda_n} \left| \sigma_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right| + |\mu_n - \lambda_n - 2(a'_0 - a_0)| \right\} \\ + |\mu_0 - \lambda_0| + |\sigma_0 - \rho_0| + |a'_0 - a_0| + |b'_0 - b_0|$$

yeterince küçük ise

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x) - q(x)| \leq C_2.B \quad (3.1.14)$$

dir. $C_2 > 0$ $q(x)$, h ve H 'a bağlı bir sabittir.

3.2. Spektral Karakteristikler Ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüllere İlişkin

Teoremler

$q(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon, h , H reel sabitler ve λ reel bir parametre olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, 0 < x < \pi, \quad (3.2.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3.2.2)$$

şeklinde $E(q(x); h, H)$ özdeğer problemini gözönüne alalım. $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ olacak şekilde $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $E(q(x); h, H)$ 'ın özdeğerleri olsun. Bilindiği gibi bu problemin özdeğerleri alttan sınırlıdır. Genelliği bozmaksızın en küçük özdeğeri $\lambda_0 \geq 1$ alabiliriz. Bir başka ifadeyle (3.2.1) 'in yerine

$$y'' + (\lambda - (q(x) - \lambda_0 + 1)) = 0,$$

diferensiyel denklemini gözönüne almak yeterlidir.

$$\rho_n = \int_0^\pi \phi^2(x, \lambda_n) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

alalım. Burada $\phi(x, \lambda)$, (3.2.1) 'in

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h \quad (3.2.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümdür.

$\phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun

$$\phi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + h \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-s) q(s) \phi(s, \lambda) ds. \quad (3.2.4)$$

integral denklemini sağladığı bilinir[18]. Böylece aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.2.1. $\forall \lambda \geq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ için $M > 0$ sabiti vardır öyleki $\forall \lambda \geq 1$ ve $0 \leq x \leq \pi$ için

$$|\phi(x, \lambda)| + |\phi'(x, \lambda)| / \sqrt{\lambda} \leq M,$$

$$\sqrt{\lambda} \left| \dot{\phi}(x, \lambda) \right| + \left| \dot{\phi}'(x, \lambda) \right| \leq M$$

olmak üzere bir $M > 0$ sabiti vardır. Burada $' = \frac{\partial}{\partial x}$, $\dot{\cdot} = \frac{\partial}{\partial \lambda}$ dir.

Lemma 3.2.2. $\xi = \sqrt{\lambda}$ olmak üzere

(i) Eğer $q(x) \in A^2[0, \pi]$ ise

$$\phi(x, \lambda) = \left(1 + \frac{C_2(x)}{4\xi^2}\right) \cos \xi x + \frac{S_1(x)}{2\xi} \sin \xi x + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \quad (3.2.5)$$

$$\phi'(x, \lambda) = \left(-\xi + \frac{S_1^*(x)}{4\xi}\right) \sin \xi x + \frac{C_0^*(x)}{2} \cos \xi x + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \quad (3.2.6)$$

olur.

(ii) Eğer $q(x) \in A^3[0, \pi]$ ise

$$\phi(x, \lambda) = \left(1 + \frac{C_2(x)}{4\xi^2}\right) \cos \xi x + \left(\frac{S_1(x)}{2\xi} + \frac{S_3(x)}{8\xi^3}\right) \sin \xi x + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \quad (3.2.7)$$

$$\phi'(x, \lambda) = \left(-\xi + \frac{S_1^*(x)}{4\xi}\right) \sin \xi x + \left(\frac{C_0^*(x)}{2} + \frac{C_2^*(x)}{8\xi^3}\right) \cos \xi x + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \quad (3.2.8)$$

olur.

(iii) Eğer $q(x) \in A^4[0, \pi]$ ise

$$\phi(x, \lambda) = \left(1 + \frac{C_2(x)}{4\xi^2} + \frac{C_4(x)}{16\xi^4}\right) \cos \xi x + \left(\frac{S_1(x)}{2\xi} + \frac{S_3(x)}{8\xi^3}\right) \sin \xi x + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right) \quad (3.2.9)$$

olur. Burada

$$Q(x) = \int_0^x q(s) ds,$$

$$S_1(x) = C_0^*(x) = 2h + Q(x),$$

$$C_2(x) = q(x) - q(0) - 2hQ(x) - \frac{1}{2}Q^2(x),$$

$$\begin{aligned} S_3(x) &= 2h(q(x) + q(0)) - q'(x) - q'(0) + \int_0^x q^2(t) dt \\ &\quad + (q(x) - q(0))Q(x) - hQ^2(x) - \frac{1}{6}Q^3(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4(x) &= \frac{5}{2}q^3(x) - q(0)q(x) - \frac{3}{2}q^2(0) - q''(x) + q''(0) \\ &\quad + 2h\left\{q'(x) - q'(0) - \int_0^x q^2(t) dt - (q(x) + q(0))Q(x)\right\} \\ &\quad + \left(q'(x) + q'(0) - \int_0^x q^2(t) dt\right)Q(x) - \frac{q(x) - q(0)}{2}Q^2(x) \\ &\quad + \frac{h}{3}Q^3(x) + \frac{1}{24}Q^4(x), \end{aligned}$$

$$S_1^*(x) = q(x) + q(0) + 2hQ(x) + \frac{1}{2}Q^2(x),$$

$$\begin{aligned} C_2^*(x) &= -2h(q(x) - q(0)) + q'(x) - q'(0) + \int_0^x q^2(t) dt \\ &\quad - (q(x) + q(0))Q(x) - hQ^2(x) - \frac{1}{6}Q^3(x). \end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak Lemma 3.2.2'de $\phi'(x, \lambda)$ ve $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonları için asimptotik açılımlardan dolayı spektral karakteristikler için asimptotik formüller elde ederiz.

Lemma 3.2.3. (i) Eğer $q(x) \in A^2[0, \pi]$ ise

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (3.2.10)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (3.2.11)$$

olur.

(ii) Eğer $q(x) \in A^3[0, \pi]$ ise

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (3.2.12)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (3.2.13)$$

olur.

(iii) Eğer $q(x) \in A^4[0, \pi]$ ise

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), \quad (3.2.14)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right). \quad (3.2.15)$$

olur. Burada

$$Q = \int_0^\pi q(t) dt,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2}Q \right),$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left\{ h + H + \frac{1}{2}Q + \pi \left(h^2 - \frac{1}{2}q(0) \right) \right\},$$

$$\begin{aligned} a_1 = & \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{8} \left(q'(\pi) - q'(0) + \int_0^\pi q^2(t) dt \right) + \frac{1}{2} (Hq(\pi) + hq(0)) \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} (h^2 + H^2) - \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2}Q \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 = & -a_0b_0 + \frac{\pi}{2}a_1 - \frac{1}{3}(\pi a_0)^3 + h(\pi a_0)^2 \\ & + \frac{1}{2}(\pi a_0 - h) \left(q(\pi) - q(0) - \frac{1}{2}Q^2 \right) + \frac{\pi}{4}h \left(hq(0) - q'(0) \right) \\ & + \frac{1}{8} \left(q'(\pi) - q'(0) + \int_0^\pi q^2(t) dt \right) + \frac{\pi}{16} \left(q''(0) - q^2(0) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (\pi a_0 - h)^2 + a_0 - \frac{1}{2}q(\pi) \right\} Q + \frac{1}{24}Q^3. \end{aligned}$$

dir. Şimdi $q(x) \in C^1[0, \pi]$ ve j reel sayısının, ayrıca $p(x) \in C^1[0, \pi]$ fonksiyonunun ve h 'ın verildiğini kabul edelim. Bu taktirde bir "deformasyon formülü" çıkarabiliriz.

Lemma 3.2.4.

(i) $D = \{(x, s); 0 < s < \pi\}$ olmak üzere

$$K_{xx} - p(x)K = K_{ss} - q(s)K \quad (3.2.16)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = j - h + \frac{1}{2} \int_0^x (p(t) - q(t)) dt, 0 \leq x \leq \pi. \quad (3.2.17)$$

$$K_s(x, 0) - hK(x, 0) = 0, 0 < x < \pi, \quad (3.2.18)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek $K = K(x, s) \in C^2(\bar{D})$ çözümü vardır.

(ii) $\phi(x, \lambda)$ (3.2.1)-(3.2.3) probleminin çözümü olacak şekilde

$$\psi(x, \lambda) = \phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, s) \phi(s, \lambda) ds \quad (3.2.19)$$

alalım. Bu taktirde $\psi(x, \lambda)$,

$$\psi''(x, \lambda) + (\lambda - p(x))\psi(x, \lambda) = 0, \quad (3.2.20)$$

denklemini ve

$$\psi(0, \lambda) = 1, \psi'(0, \lambda) = j \quad (3.2.21)$$

başlangıç şartlarını sağlar.

(3.2.17)' nin yerine

$$K(x, x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3.2.17')$$

sınır şartını alalım. $K(x, s; p, q, f, h)$ (3.2.16), (3.2.17)' ve (3.2.18) probleminin çözümünü olsun. Bu taktirde aşağıdaki lemma söz konusudur.

Lemma 3.2.5. $\gamma : [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu monoton artan ve sürekli olmak üzere $h \leq L$ için

$$\|K(\cdot, \cdot; p, q, f, h)\|_{C^2(\bar{D})} \leq \gamma\left(\|p\|_{C^1[0, \pi]}, \|q\|_{C^1[0, \pi]}, L\right) \cdot \|f\|_{C^2[0, \pi]}$$

dir[11].

3.3. Spektral Karakteristikleriyle Bir Sturm-Liouville Probleminin Tanımlanması

Teorem 3.3.1.

(i) a_0, b_0 ve a_1 reel sabitler olacak şekilde $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \lambda_i < \lambda_j, i < j \text{ için} \quad (3.3.1)$$

$$\rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (3.3.2)$$

asimptotik formülleri sağlayan pozitif sayıların iki dizisi olsun.

Bu taktirde $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri $E(q(x); h, H)$ özdeğer probleminin spektral karakteristikleri olmak üzere $q(x) \in C^1[0, \pi]$ fonksiyonu, h ve H reel sayıları vardır.

(ii) Ayrıca, eğer $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla (3.1.5)' ve (3.1.6)' yı sağlarsa, $q(x) \in C^2[0, \pi]$ olur.

Hatırlatma: (i) ifadesi bilinen Gel'fand-Levitan teoremi [18] dir.

Teorem 3.1.1' i yeni bir yöntem sunarak ispatlayacağız. Bu yöntem aşağıdaki şekildedir:

(I): $E(\alpha + \beta \cos 2x; 0, J)$ özdeğer probleminin $\{\nu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektral karakteristikleri verilen $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ için bilinen asimptotik formüllerin benzerini, yani;

$$\sqrt{\nu_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad (3.3.3)$$

$$\tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3.3.4)$$

asimptotik formülleri sağlayacak şekilde reel α, β ve J sayıları vardır. $r(x) = \alpha + \beta \cos 2x$ alalım.

(II):

$$y'' + (\lambda - r(x))y = 0, \quad (3.3.5)$$

diferensiyel denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.3.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $w(x, \lambda)$ ve

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{w(x, \lambda_n) w(s, \lambda_n)}{\rho_n} - \frac{w(x, \nu_n) w(s, \nu_n)}{\tau_n} \right] \quad (3.3.7)$$

olsun. Bu taktirde $F(x, s)$ fonksiyonu $0 \leq x, s \leq \pi$ de ikikez sürekli diferensiyellenebilirdir.

(III):

$$K(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt + F(x, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (3.3.8)$$

integral denklemi her sabit x için bir tek sürekli $K(x, s)$ çözümüne sahiptir ve $K(x, s)$ çözümü $0 \leq s \leq x \leq \pi$ de ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilirdir.

(IV):

$$\phi(x, \lambda) = w(x, \lambda) + \int_0^x K(x, s) w(s, \lambda) ds \quad (3.3.9)$$

integral denklemini gözönüne alalım. Ayrıca

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x) + r(x) \quad (3.3.10)$$

$$h = K(0, 0) \quad (3.3.11)$$

olsun. Bu taktirde her $\lambda \geq 0$ ve $0 < x < \pi$ için $\phi(x, \lambda)$,

$$\phi''(x, \lambda) + (\lambda - q(x))\phi(x, \lambda) = 0 \quad (3.3.12)$$

diferensiyel denklemini ve

$$\phi(0, \lambda) = 1, \quad \phi'(0, \lambda) = h, \quad (3.3.13)$$

başlangıç şartlarını sağlar. Buna ilaveten

$$\rho_n = \int_0^\pi \phi^2(x, \lambda_n) dx \quad (3.3.14)$$

dir ve $\phi'(\pi, \lambda_n) / \phi(\pi, \lambda_n)$ oranı n den bağımsız bir sabittir.

Böylece eğer $H = -\phi'(\pi, \lambda_n) / \phi(\pi, \lambda_n)$ alırsak, verilen $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^\infty$ sayılarının $E(q(x); h, H)$ özdeğer probleminin spektral karakteristikleri olduğunu buluruz.

Daha sonra teoremin (ii) ifadesini ispatlamak için (I) in yerine aşağıdaki (I)' nü göstermek yeterlidir.

(II)' : $r(x) = \alpha + \beta \cos 2x + \gamma \sin x$ olmak üzere $E(r(x) + 2a_0; h, H)$ özdeğer probleminin $\{\nu_n^*, \tau_n^*\}_{n=0}^\infty$ spektral karakteristikleri için

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu_n^*} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right), \\ \tau_n^* &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \end{aligned}$$

asimptotik formülleri sağlanacak şekilde α, β, γ ve J reel sayıları vardır.

Gel'fand-Levitan başlangıç yaklaşımı olarak $E(0; 0, 0)$ sabit özdeğer problemini ele almıştır. Bu durumda $w(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x$ dir.

Bu çalışmada kullanılan metoda göre $q(x)$ fonksiyonun regülerliğini gerçeklemek daha kolaydır.

(I) $\sim$ (II) ve (I)' nün sağlandığını ispatlayalım:

(I) in ispatı: Lemma 3.2.3 'den

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0^*}{n} + \frac{a_1^*}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

ve

$$\tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0^*}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde ederiz. Burada

$$a_0^* = \frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2}, \quad b_0^* = \frac{J}{2} - \frac{\pi}{4}\beta$$

ve

$$a_0^* = \frac{1}{8} \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) + \frac{J}{2\pi} (\alpha + \beta) - \frac{J^3}{3\pi} - \left(\frac{J}{\pi} + \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

dir.

Sonuç olarak $a_0^* = a_0$, $b_0^* = b_0$ ve $a_1^* = a_1$ eşitlikleri sağlanacak biçimde her bir a_0, b_0 ve a_1 için α, β ve J sayıları vardır.

Böylece (I) ispatlanmış olur.

(II) nin İspatı:

$F(x, s)$ in $0 \leq x, s \leq \pi$ de ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olduğunu ispatlayalım:

$k + m \leq 2$ olacak şekilde her bir $k, m \geq 0$ tamsayısı için (3.3.1)~(3.3.4) ve Lemma 3.2.1'den

$$\frac{w^{(k)}(x, \lambda_n) w^{(m)}(s, \lambda_n)}{\rho_n} - \frac{w^{(k)}(x, \nu_n) w^{(m)}(s, \nu_n)}{\tau_n} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad 0 \leq x, s \leq \pi \quad (3.3.15)$$

olur.

(3.3.15) eşitliği (II) iddiasını içerir.

(III) ün ispatı: $\tilde{K}(x, s)$ ($0 \leq s \leq x \leq \pi$),

$$K_{xx} - r(x)K = K_{ss}, \quad 0 < s < x < \pi, \quad (3.3.16)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.3.17)$$

$$K_s(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.3.18)$$

sınır şartarını sağlayan çözümü olsun. Bu taktirde Lemma 3.2.4'den dolayı $\forall \lambda \geq 0$ ve $0 \leq x \leq \pi$ için

$$w(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x \tilde{K}(x, s) \cos \sqrt{\lambda}s ds \quad (3.3.19)$$

elde ederiz.

Her sabit x için (3.3.8) integral denkleminin bir tek $K(x, s)$ çözümüne sahip olduğunu ispatlayacağız. Bunun için homojen

$$g(s) + \int_0^x F(s, t)g(t) dt, \quad 0 \leq s \leq x \quad (3.3.20)$$

integral denkleminin sadece $g(s) = 0$ aşıkâr çözümüne sahip olduğunu ispatlamak yeterlidir.

(3.3.20) ifadesi $g(s)$ ile çarpılıp ve 0 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\int_0^x g^2(s) ds + \int_0^x \left[\int_0^x F(s, t) g(t) g(s) dt \right] ds = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^x g^2(s) ds + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_0^x g(s) w(s, \lambda_n) ds \right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} \left(\int_0^x g(s) w(s, \nu_n) ds \right)^2 = 0 \quad (3.3.21)$$

olur.

Parseval bağıntısından dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_0^x g(s) w(s, \lambda_n) ds \right)^2 = 0$$

dir.

Tüm ρ_n 'ler pozitif olduklarından (3.3.19)'dan

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x g(s) w(s, \lambda_n) ds \\ &= \int_0^x \left\{ g(t) + \int_0^x \tilde{K}(x, s) g(s) ds \right\} \cos \sqrt{\lambda_n} t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

elde ederiz.

Eğer

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq x, \\ 0, & x < t \leq \pi, \end{cases}$$

alırsak her bir n için

$$\int_0^x \left\{ \tilde{g}(t) + \int_0^x \tilde{K}(x, s) \tilde{g}(s) ds \right\} \cos \sqrt{\lambda_n} t dt, \quad (3.3.23)$$

elde ederiz. Burada aşağıdaki Levinson lemmasını ([5],cf. [2]) kullanabiliriz..

Lemma 3.3.1. $\{\cos \sqrt{\lambda_n} t\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi $L^2(0, \pi)$ de tamdır.

İspat: $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayılarından oluşan dizi ve

$$\wedge(u) = a < u \text{ olacak şekildeki } \alpha_n \text{ sayılarının sayısı}$$

olsun. Eğer C sabiti için,

$$\int_1^v \frac{\wedge(u)}{u} du > v - \frac{1}{4} \log v - C \quad (3.3.24)$$

ise, bu takdirde $f \in L^2(0, \pi)$ için

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos \alpha_n x dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

denkleminde $f(x) = 0$ sağlanır.

Burada $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$ alınırsa

$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ olduğundan bazı C ler için kolaylıkla (3.3.24) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Lemma 3.3.1 ispatlanmış olur.

(3.3.23) ve Lemma 3.3.1' den

$$\tilde{g}(t) + \int_0^x \tilde{K}(s, t) \tilde{g}(s) ds = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

elde ederiz. Bu Volterra türü integral denklemdir, dolayısıyla $\tilde{g}(t) \equiv 0$ aşıkâr çözüme sahiptir.

$K(x, s)$ 'in $\overline{D}$ de ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir olduğu gerçeği Gel'fand-Levitan Lemma'sından sağlanır.

Lemma 3.3.2. (Gel'fand-Levitan)

$$k(s, c) + \int_0^1 L(s, t; c) k(t, c) dt = g(s, c),$$

integral denkleminin verildiğini kabul edelim. Burada $L(s, t; c)$ ve $g(s, c)$ s, t ve c parametresinin sürekli fonksiyonlarıdır. Eğer $c = c_0$ için

$$k^*(s, c_0) + \int_0^1 L(s, t; c_0) k^*(t, c_0) dt = 0,$$

eşlenik homojen denklem sadece $k^*(s, c_0) = 0$ aşıkâr çözüme sahipse, $c = c_0$ 'ın bazı komşuluğunda $k(s, c)$ çözümü s ve c nin sürekli bir fonksiyonudur. Eğer L ve g, c 'de m. sürekli türeve sahiplerse dolayısıyla k da sahiptir.

Lemma 3.3.2 'den $K(x, sx)$ 'in ikinci sürekli türeve sahip olduğu görülür. Böylece $K(x, s)$ 'in ikiyez sürekli diferensiyellenebilir olduğunu buluruz.

(I)' nün ispatı:

$$E(\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x; 0, J)$$

probleminin $\{\nu_n, \tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektral karakteristikleri sırasıyla

$$\sqrt{\nu_n} = n + \frac{1}{n^3} \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad (3.3.25)$$

$$\tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \frac{b_1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \quad (3.3.26)$$

eşitliklerini sağladığında α, β, γ ve J reel sayıları vardır.

(3.3.25) ve (3.3.26) formüllerinin sağlanması için Lemma 3.2.3 'den

$$0 = J + \frac{\pi}{2} \alpha + \gamma, \quad (3.3.27)$$

$$2b_0 = J + \frac{\pi}{2} \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2} (\alpha + \beta) = -\frac{\pi}{2} (\alpha + \beta), \quad (3.3.28)$$

$$\pi \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) = \frac{1}{8} \left\{ -2\gamma + \pi \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \right) + 4\alpha\gamma \right\} + \frac{J}{2} (\alpha - \beta) - \frac{J^3}{3} \quad (3.3.29)$$

ve

$$\begin{aligned} b_1 &= \pi \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) + \frac{1}{8} \left\{ -2\gamma + \pi \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \right) + 4\alpha\gamma \right\} \frac{\pi}{16} (\alpha + \beta)^2 \\ &\quad - \frac{\pi}{16} \beta - \frac{1}{4} (\alpha - \beta) (\pi\alpha + 2\gamma) + \frac{1}{24} (\pi\alpha + 2\gamma)^2 \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

elde edilir. (3.3.29) 'dan (3.3.30) 'u çıkarırsak (3.3.29) ve (3.3.28) 'den dolayı

$$\begin{aligned} \pi \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) - b_1 &= -\frac{\pi}{2} \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) + \frac{\pi}{16} \left(-\frac{4}{\pi} b_0 \right)^2 + \frac{\pi}{16} \beta, \\ \beta &= \frac{16}{\pi} \left\{ \frac{3}{2} \pi \left(a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) - \frac{1}{\pi} b_0^2 - b_1 \right\} \equiv \beta_* \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

elde ederiz. (3.3.27) ve (3.3.28) den

$$\alpha = -\beta_* - \frac{4}{\pi} b_0 \quad (3.3.32)$$

ve

$$\gamma = -J + \frac{\pi}{2} \beta_* + 2b_0 \quad (3.3.33)$$

buluruz.

(3.3.29) 'da (3.3.31)~(3.3.33) 'i yerine koyarak J için kübik denklemi elde ederiz. Böylece (3.3.27)~(3.3.30) ' u sağlayan α, β, γ ve J reel sabitlerinin mevcut olduğunu götürtüz.

3.4. İntegral Denklemin Diferensiyellenmesi

Bu ve bir sonraki paragraflarda düzgün tanımlı ters Sturm-Liouville problemini inceleyeceğiz.

$q(x) \in C[0, \pi]$, h ve H reel sabitler ve λ reel bir parametre olmak üzere

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.4.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \quad (3.4.2)$$

şeklinde $E(q(x); h, H)$ özdeğer problemini gözönüne alalım.

$\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile $E(q(x); h, H)$ 'in spektral karakteristiklerini ve $\phi(x, \lambda)$ ile (3.4.1) 'in

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h \quad (3.4.3)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü gösterelim.

Benzer şekilde ikinci bir $E(p(x); h, H)$ özdeğer problemini gözönüne alalım:

$$y'' + (\lambda - p(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.4.4)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0.$$

Burada $p(x) \in C^1[0, \pi]$ dir.

Ayrıca $E(p(x); h, H)$ 'ın spektral karakteristikleri $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (3.4.4) 'ün

$$\psi(0, \lambda) = 1, \psi'(\lambda) = h \quad (3.4.3')$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ise $\psi(x, \lambda)$ olsun. $K(x, s)$ fonksiyonu

$$K_{xx} - p(x)K = K_{ss} - q(s)K, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.4.5)$$

diferensiyel denkleminin

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(t) - q(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.4.6)$$

$$K_s(x, 0) - hK(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (3.4.7)$$

sınır şartlarını sağlayan çözümü olsun. Bu taktirde Lemma 3.2.4 'den

$$\psi(x, \lambda) = \phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, s) \phi(s, \lambda) ds \quad (3.4.8)$$

elde edilir.

Bundan sonra $q(x), h, H, \{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'lerin bilindiğini fakat $p(x)$ 'in bilinmediğini kabul edeceğiz.

Teorem 3.4.1.

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \quad (3.4.9)$$

olmak üzere

$$K(x, s) + \int_0^x K(x, t) F(t, s) dt + F(x, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (3.4.10)$$

dir.

İspat: $\rho(\lambda)$ ve $\sigma(\lambda)$ spektral fonksiyonlarını

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \rho_n^{-1}, \quad \sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \sigma_n^{-1}, \quad (3.4.11)$$

şeklinde tanımlayalım ve $\chi(\lambda) = \sigma(\lambda) - \rho(\lambda)$ olsun. Bu taktirde $0 \leq b \leq s < a \leq x \leq \pi$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \psi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \phi(t, \lambda) dt \right] d\sigma(\lambda) = 0 \quad (3.4.12)$$

elde ederiz.

Şimdi (3.4.12) 'yi ispatlayalım.

$\Gamma(x, s)$, $0 \leq s \leq x \leq \pi$ olmak üzere, $K(x, s)$ in çekirdek rezolventi, yani

$$\Gamma(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} K^{(n)}(x, s)$$

olsun. Burada $K^{(1)}(x, s) = K(x, s)$ ve $n \geq 2$ için $K^{(n)}(x, s) = \int_s^x K(x, t) K^{(n-1)}(t, s) dt$ dir. Bu durumda

$$\phi(t, \lambda) = \psi(x, \lambda) - \int_0^t \Gamma(t, u) \psi(u, \lambda) du \quad (3.4.13)$$

elde ederiz. (3.4.13) 'den

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \psi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \phi(t, \lambda) dt \right] d\sigma(\lambda) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \psi(u, \lambda) du \right] \left[\int_0^b \left(- \int_b^s \Gamma(t, u) dt \right) \psi(u, \lambda) du \right] d\sigma(\lambda) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \psi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \left(1 - \int_b^s \Gamma(t, u) dt \right) \psi(u, \lambda) du \right] d\sigma(\lambda) \\ = & 0 \end{aligned}$$

buluruz. Son eşitlik, Parseval eşitliği ve $[a, x] \cap [0, s] = \emptyset$ bağıntısından elde edilir. Böylece (3.4.12) ispatlanmış olur.

Lemma 3.4.1.

$$H(x, t; a) = \begin{cases} \int_a^x K(u, t) du, & 0 \leq t \leq a \\ \int_t^x K(u, t) du, & a \leq t \leq x \end{cases} \quad ((3.4.14))$$

olmak üzere, sürekli her $\theta(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^x H(x, t; a) \theta(t) dt = \int_a^x \left[\int_0^u K(u, t) \theta(t) dt \right] du \quad (3.4.15)$$

olur.

Şimdi $0 \leq b \leq s < a \leq x \leq \pi$ için

$$\int_a^x du \int_b^s dv \left\{ F(u, v) + K(u, v) + \int_0^u K(u, t) F(t, v) dt \right\} = 0 \quad (3.4.16)$$

olduğunu ispatlayalım.

(3.4.16) sağlanmak üzere, (3.4.16) x ve s 'e göre diferensiyellenirse (3.4.10) integral denklemi elde edilir.

$$F(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, \lambda) w(z, \lambda) d\chi(\lambda)$$

bağıntısı gözönüne alıp (3.4.16) 'nın sol tarafını hesaplırsak,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \phi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\chi(\lambda) + \int_a^x \left(\int_b^s K(u, v) dv \right) du \\ & + \int_a^x du \int_b^s dv \int_0^u K(u, t) F(t, v) dt \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

ifadesine eşit olduğunu elde ederiz.

(3.4.17) 'nin üçüncü terimi

$$\begin{aligned} & \int_0^x H(x, t; a) \left(\int_b^s F(t, v) dv \right) dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^x H(x, t; a) \phi(t, \lambda) dt \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\chi(\lambda) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^x H(x, t; a) \phi(t, \lambda) dt \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\sigma(\lambda) - \int_b^s H(x, t; a) dt \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle (3.4.16) 'nın sol tarafı

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \phi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\chi(\lambda) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^x H(x, t; a) \phi(t, \lambda) dt \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\sigma(\lambda) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \phi(u, \lambda) du + \int_0^x H(x, t; a) \phi(t, \lambda) dt \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\sigma(\lambda) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \left\{ \phi(u, \lambda) + \int_0^x K(u, t) \phi(t, \lambda) dt \right\} du \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\sigma(\lambda) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \psi(u, \lambda) du \right] \left[\int_b^s \phi(v, \lambda) dv \right] d\sigma(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.4.1 ispatlanmıştır.

3.5. Gel'fand-Levitan İntegral Denkleminin Çözümü

Paragraf 3.4.'de $K(x, s)$ in (3.4.10) lineer integral denklemi sağladığını gösterdik. Şimdi (3.4.10) denklemini çözelim. Önce $F(s, t)$ 'i ele alalım ve aşağıdaki gibi $F^{(n)}(s, t; x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) iterasyon çekirdeklerini oluşturalım:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(s, t; x) &= F(s, t), \\ F^{(n+1)}(s, t; x) &= \int_0^x F(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$S(s, t; x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(s, t; x)$$

alalım ve

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |F(s, t)|^2 ds dt < 1 \quad (3.5.2)$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$K(x, s) = S(x, s; x), \quad 0 \leq s \leq x \leq \pi \quad (3.5.3)$$

elde edilir. (3.4.6) 'dan

$$\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) = -\frac{d}{dx} K(x, x) \quad (3.5.4)$$

bulunur.

Lemma 3.5.1. (3.4.9) ile tanımlı $F(x, s)$ fonksiyonunun sürekli türeve sahip olduğunu ve (3.5.2) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda

$$\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) = \frac{d}{dx} F(x, x) - K^2(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \quad (3.5.5)$$

olur.

İspat: (3.5.1) ~ (3.5.4) den dolayı

$$\frac{1}{2} (q(x) - p(x)) = \frac{d}{dx} F(x, x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) \quad (3.5.6)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{d}{dx} F^{(n+1)}(x, x; x) = \left\{ F_s^{(n+1)} + F_t^{(n+1)} + F_x^{(n+1)} \right\}_{\substack{s=x \\ t=x}} \quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \int_0^x F_s(s, u) F^{(n)}(u, t; x) du + \int_0^x F_t(u, t) F^{(n)}(s, u; x) du + F_x^{(n+1)}(s, t; x) \right\}_{\substack{s=x \\ t=x}} \\ &= 2 \int_0^x F_x(x, u) F^{(n)}(x, u; x) du + \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x) \end{aligned}$$

olarak hesaplarız. (3.5.6) ve (3.5.7) 'den

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (q(x) - p(x)) &= \frac{d}{dx} F(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^n F^{(k)}(x, x; x) F^{(n+1-k)}(x, x; x) \\ &= \frac{d}{dx} F(x, x) - K^2(x, x) + 2 \int_0^x F_x(x, u) K(x, u) du \end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla lemma 3.5.1 ispatlanmış olur.

Şimdi teorem 3.1.1' i ispatlayalım:

$$A_0 = \frac{1}{2} \inf_n \rho_n \quad (3.5.8)$$

alalım.

$\rho_n = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ asimptotik formülünden A_0 ın pozitif olduğu bulunur([8], sayfa10).

$$A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \leq A_0 \quad (3.5.9)$$

olsun. Bu taktirde her bir n için

$$\rho_n \geq 2A_0 \quad \text{ve} \quad \sigma_n \geq A_0 \quad (3.5.10)$$

bağıntılarını elde ederiz. (3.4.9), yani

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

formülünün sağ tarafı x ' e göre diferensiyellenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

olur. Bu ifadeye $\frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n}$ ifadesini eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\rho_n} + \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)}{\sigma_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} (\phi'(x, \mu_n) \phi(s, \mu_n) - \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} d_{\lambda} (\phi'(x, \lambda) \phi(s, \lambda)) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece Lemma 3.2.1 den dolayı $\phi(s, \lambda)$ sınırlı olduğundan, (3.5.9) ile (3.5.10) dan ve $F(x, s)$ in sürekli türeve sahip olduğundan

$$\begin{aligned}
|F_x(x, s)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right] \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\rho_n} \right) \phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n) \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sigma_n - \rho_n}{\sigma_n \rho_n} \right| |\phi'(x, \lambda_n) \phi(s, \lambda_n)| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \left| \int_{\lambda_n}^{\mu_n} \left(\dot{\phi}'(x, \lambda) \phi(s, \lambda) + \phi'(x, \lambda) \dot{\phi}(s, \lambda) \right) d\lambda \right| \\
&\leq C' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \equiv C' A
\end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla

$$|F_x(x, s)| \leq C' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \equiv C' A \quad ((3.5.11))$$

dır. (3.4.9) 'dan

$$F(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\phi^2(x, \mu_n)}{\sigma_n} - \frac{\phi^2(x, \lambda_n)}{\rho_n} \right]$$

elde edilir ve buradan

$$\left| \frac{d}{dx} F(x, x) \right| \leq 2C' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right] \equiv 2C' A \quad (3.5.12)$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.4.9) 'dan

$$|F(x, s)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\sigma_n - \rho_n| + \left| \sqrt{\mu_n} - \sqrt{\lambda_n} \right| \right] \leq C'' A \quad (3.5.13)$$

elde edilir. Burada C' ve C'' sadece $q(x), h, H$ 'a bağlı sabitlerdir.

Eğer $\pi C'' A$ yeteri kadar küçükse, yani $\pi C'' A < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda

$$|K(x, s)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F^{(n)}(x, s; x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (\pi C'' A)^n \leq 2C'' A$$

olur. Sonuç olarak Lemma 3.5.1 ve (3.5.11)~(3.5.13) 'den $A \leq \min \left\{ A_0, (2\pi C'')^{-1} \right\}$ olmak üzere

$$|p(x) - q(x)| \leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\lambda_n} |\sigma_n - \rho_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right]$$

elde ederiz.

3.6. Düzgün Tanımlı Ters Sturm-Liouville Problemine İlişkin Teoremler

$q(x) \in A^2[0, \pi]$ olduğu için $\{\lambda_n, \rho_n\}_{n=0}^\infty$ spektral karakteristikleri aşağıdaki asimptotik formüllerini sağlar:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \rho_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.6.1)$$

Ayrıca $p(x) \in C^1[0, \pi]$ bilinmeyen bir fonksiyon olacak biçimde

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a'_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \sigma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b'_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.6.2)$$

olmak üzere $E(p(x); h, H)$ 'ın $\{\mu_n, \sigma_n\}_{n=0}^\infty$ spektral karakteristikleri de verilsin. Bu taktirde Teorem 3.1.2 'yi ispatlayalım.

İlk olarak $a_0 = a'_0$ durumunu gözönüne alalım.

1. $\{\nu_n, \tau_n\}_{n=0}^\infty, E(r(x); h, H)$ 'ın spektral karakteristikleri olmak üzere

$$r(x) = q(x) + \frac{8}{\pi^2} (b'_0 - b_0) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.6.3)$$

alalım.

Lemma 3.2.3 'den

$$\sqrt{\nu_n} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \tau_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b'_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.6.4)$$

elde edilir, yani $\sqrt{\nu_n} - \sqrt{\mu_n} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ve $\tau_n - \sigma_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ olur.

$\alpha = \frac{8}{\pi^2} (b'_0 - b_0)$ ve $e(x) = r(x) - q(x) = \alpha \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ olsun.

Lemma 3.6.1. $|\alpha|$ yeterince küçük ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left| \sqrt{\nu_n} \right| \tau_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right\} + |\nu_n - \lambda_n| \leq C |\alpha| \quad (3.6.5)$$

dir. Burada $C > 0$ sadece $q(x), h, H$ 'a bağlı bir sabittir.

İspat: İlk olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu_n - \lambda_n| \leq C |\alpha| \quad (3.6.6)$$

bağıntısını gösterelim.

$0 < x \leq \pi$ için $|r(x) - q(x)| = \left| \alpha \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{\pi}{2} |\alpha|$ olduğundan

$$|\lambda_n - \nu_n| \leq \frac{\pi}{2} |\alpha|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olur. Dolayısıyla büyük n ler için

$$|\lambda_n - \nu_n| \leq C \frac{|\alpha|}{n^2}, \quad (3.6.7)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Gerçekten $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ özdeğerleri

$$\phi'(\pi, \lambda) + H\phi(\pi, \lambda) = 0 \quad (3.6.8)$$

denkleminin kökleridir.

(3.2.4) özdeşliğinden $\xi = \sqrt{\lambda}$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \phi'(\pi, \lambda) + H\phi(\pi, \lambda) &= \left(-\xi + \frac{hH}{\xi}\right) \sin \xi \pi + (h + H) \cos \xi \pi \\ &+ \int_0^\pi \left\{ \cos \xi(\pi - s) + H \frac{\sin \xi(\pi - s)}{\xi} \right\} q(s) \phi(s, \lambda) ds \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

buluruz.

$$y'' + (\lambda - r(x))y = 0 \quad (3.6.10)$$

denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h \quad (3.6.11)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $w(x, \lambda)$ olsun.

Benzer şekilde $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ özdeğerleri $\eta = \sqrt{\nu}$ olacak biçimde

$$\begin{aligned} w'(\pi, \lambda) + Hw(\pi, \lambda) &= \left(-\eta + \frac{hH}{\eta}\right) \sin \eta \pi + (h + H) \cos \eta \pi \\ &+ \int_0^\pi \left\{ \cos \eta(\pi - s) + H \frac{\sin \eta(\pi - s)}{\eta} \right\} r(s) w(s, \nu) ds, \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

denkleminin kökleridir.

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (r(t) - q(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$K_s(x, 0) - hK(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

sınır şartlarını sağlayan

$$K_{xx} - r(x)K = K_{ss} - q(s)K, \quad 0 < s < x < \pi$$

denkleminin çözümü $K_1(x, s)$ olsun.

Lemma 3.2.4 'den

$$w(x, \nu) = \phi(x, \nu) + \int_0^x K_1(x, t) \phi(t, \nu) dt = \phi(x, \nu) + k(x, \nu) \quad (3.6.13)$$

elde ederiz.

(3.6.8), (3.6.9) ve (3.6.12) 'den

$$\begin{aligned}
[\zeta \sin \zeta \pi]_{\zeta=\eta_n}^{\zeta=\xi_n} &= \left[\frac{hH}{\zeta} \sin \zeta \pi + (h+H) \cos \zeta \pi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\pi \left\{ \cos \zeta (\pi - s) + \frac{H}{\zeta} \sin \zeta (\pi - s) \right\} q(s) \phi(s, \zeta^2) ds \right]_{\zeta=\eta_n}^{\zeta=\xi_n} \\
&\quad - \int_0^\pi \left\{ \cos \eta_n (\pi - s) + \frac{H}{\eta_n} \sin \eta_n (\pi - s) \right\} \{r(s)k(s, \nu_n) + e(s)\phi(s, \nu_n)\} ds \\
&\equiv I_1 - I_2
\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

olur.

$$\varepsilon_n = \sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\nu_n} = \xi_n - \eta_n \text{ alalım.}$$

Aşağıdaki bağıntıları ispatlayalım:

Yeterince büyük n 'ler için $|\alpha| < 2/\pi$ olmak üzere

$$|[\zeta \sin \zeta \pi]_{\zeta=\eta_n}^{\zeta=\xi_n}| \geq C' n |\varepsilon_n|, \quad |\alpha| < 2/\pi, \tag{3.6.15}$$

$$|I_1| \leq C'' |\varepsilon_n|, \tag{3.6.16}$$

$$|I_2| \leq C'' \frac{|\alpha|}{n^2} \tag{3.6.17}$$

dir. Burada C' ve C'' sadece $q(x), h, H$ 'a bağlı sabitlerdir.

Eğer yukarıdaki (3.6.15) $\wedge$ (3.6.17) bağıntıları doğruysa (3.6.7) 'yi elde ederiz.

$|\lambda_n - \nu_n| \leq \frac{\pi}{2} |\alpha|$ dan $|\alpha| < 2/\pi$ için

$$\xi_n - \frac{1}{\xi_n} \leq \eta_n \leq \xi_n + \frac{1}{2\xi_n}$$

sağlanır ve

$$[\zeta \sin \zeta \pi]_{\zeta=\eta_n}^{\zeta=\xi_n} = \int_{\eta_n}^{\xi_n} \frac{d}{d\zeta} (\zeta \sin \zeta \pi) d\zeta$$

bağıntısını buluruz.

$\sqrt{\lambda_n}$ için (3.6.1) asimptotik ifadesinden (3.6.15) 'i elde ederiz.

(3.6.16) 'yı ispatlamak için

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\zeta} \left[\frac{hH}{\zeta} \sin \zeta \pi + (h+H) \cos \zeta \pi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\pi \left\{ \cos \zeta (\pi - s) + \frac{H}{\zeta} \sin \zeta (\pi - s) \right\} q(s) \phi(s, \zeta^2) ds \right]
\end{aligned} \tag{3.6.18}$$

ifadesini hesaplayalım.

Lemma 3.2.1 'den dolayı, $\phi(s, \zeta^2)$ ve $\dot{\phi}(s, \zeta^2) \zeta \geq 1$ için $0 \leq s \leq \pi$ de düzgün sınırlıdır, (3.6.18)

ζ de düzgün sınırlıdır. Dolayısıyla (3.6.16) sağlanır.

Şimdi (3.6.17) 'yi ispatlayalım.

$\frac{1}{2} \int_0^x (r(t) - q(t)) = O(|\alpha|)$ olduğundan dolayı Lemma 3.2.5 'den

$$\|K_1\|_{C^2(\bar{D})} \leq C|\alpha| \quad (3.6.19)$$

buluruz. Basit olması için $S(s) = r(s)k(s, \nu_n) + e(s)\phi(s, \nu_n)$ alalım.

Bu taktirde (3.6.4), (3.6.13), (3.6.19), (3.6.6) ve lemma 3.2.1 'den aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\frac{\sin \eta_n \pi}{\eta_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.6.20)$$

$$S(s) = O(|\alpha|), \quad S'(s) = -e(s)\eta_n \sin \eta_n s + O(|\alpha|), \quad (3.6.21)$$

$$S'(0) = O(|\alpha|), \quad S'(\pi) = O(|\alpha|), \quad (3.6.22)$$

ve $q''(s) \in L^1(0, \pi)$ için

$$\begin{aligned} S''(s) &= -e(s)\eta_n^2 \cos \eta_n s - (r(s)K_1(s, s) + 2\alpha)\eta_n \sin \eta_n s \\ &\quad + q''(s)k(s, \nu_n) + O(|\alpha|) \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

(3.6.14) 'de kısmi integrasyon uygulanırsa, I_2 yi integrallenirse, (3.6.20)~(3.6.23) den dolayı $e(s) = \alpha \cdot (s - \frac{\pi}{2})$ ve $\int_0^\pi e(s) ds = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \left\{ \cos \eta_n (\pi - s) + \frac{H}{\eta_n} \sin \eta_n (\pi - s) \right\} S(s) ds \\ &= \left[\left\{ -\frac{1}{\eta_n} \sin \eta_n (\pi - s) + \frac{H}{\eta_n^2} \cos \eta_n (\pi - s) \right\} S(s) + \frac{1}{\eta_n^2} \cos \eta_n (\pi - s) S'(s) \right]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi \cos \eta_n (\pi - s) \cdot \left\{ \frac{1}{\eta_n^2} S'(s) + \frac{H}{\eta_n^2} S'(s) \right\} ds \\ &= \int_0^\pi e(s) \cdot \frac{1}{2} (\cos \eta_n \pi + \cos \eta_n (\pi - 2s)) ds \\ &\quad + \int_0^\pi (r(s)K_1(s, s) + 2\alpha) \frac{1}{2\eta_n} (\sin \eta_n \pi - \sin \eta_n (\pi - 2s)) ds \\ &\quad + \int_0^\pi e(s) \frac{H}{2\eta_n} (\sin \eta_n \pi - \sin \eta_n (\pi - 2s)) ds + O\left(\frac{|\alpha|}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{|\alpha|}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(3.6.6) yı elde ederiz.

Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\nu_n} \left| \tau_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right| \leq C|\alpha| \quad (3.6.24)$$

eşitsizliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \{w^2(x, \nu) - \phi^2(x, \lambda)\} dx \\
&= \int_0^\pi \{w^2(x, \nu) - \phi^2(x, \nu)\} dx + \int_0^\pi \{\phi^2(x, \nu) - \phi^2(x, \lambda)\} dx \\
&\equiv I_3 + I_4
\end{aligned}$$

buluruz.

I_4 de sırasıyla ν ve λ yerine ν_n ve λ_n ekleyerek (3.6.7) 'den büyük n 'ler için

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \{\phi^2(x, \nu) - \phi^2(x, \lambda)\} dx &= \int_0^\pi \left(\int_{\lambda_n}^{\nu_n} 2\phi(x, \varkappa) \dot{\phi}(x, \varkappa) dx \right) \\
&= O\left(|\sqrt{\nu_n} - \sqrt{\lambda_n}|\right) = O\left(\frac{|\alpha|}{n^3}\right)
\end{aligned} \tag{3.6.25}$$

elde ederiz.

Lemma 3.2.2 'den

$$\begin{aligned}
\phi(x, \nu) &= \cos \eta x + \frac{\sin \eta x}{\eta} \left(\frac{1}{2} Q(x) + h \right) + \frac{\cos \eta x}{4\eta^2} (q(x) - q(0) - 2hQ(x)) \\
&+ \frac{1}{4\eta^2} \int_0^x (-q'(s) + hq(s)) \cos \eta(x - 2s) ds \\
&+ \frac{1}{\eta^2} \int_0^x ds \int_0^s dt \{q(s)q(t)\phi(t, \nu) \sin \eta(x - s) \sin \eta(s - t)\},
\end{aligned} \tag{3.6.26}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
w(x, \nu) &= \cos \eta x + \frac{\sin \eta x}{\eta} \left(\frac{1}{2} Q(x) + \frac{1}{2} E(x) + h \right) \\
&+ \frac{\cos \eta x}{4\eta^2} (q(x) - q(0) - 2hQ(x) + \alpha x - 2hE(x)) \\
&+ \frac{1}{4\eta^2} \int_0^x \{(-q'(s) + hq(s)) + (-\alpha + he(s))\} \cos \eta(x - 2s) ds \\
&+ \frac{1}{\eta^2} \int_0^x ds \int_0^s dt \{r(s)r(t)w(t, \nu) \sin \eta(x - s) \sin \eta(s - t)\},
\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

elde ederiz. Burada $Q(x) = \int_0^x q(t) dt$ ve $E(x) = \int_0^x e(t) dt$ dir.

(3.6.26) ve (3.6.27) 'den

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \{w^2(x, \nu) - \phi^2(x, \lambda)\} dx \\
&= \int_0^\pi (w(x, \nu) + \phi(x, \lambda))(w(x, \nu) - \phi(x, \lambda)) dx \\
&= \int_0^\pi \left\{ 2 \cos \eta x + \frac{\sin \eta x}{\eta} \left(Q(x) + \frac{1}{2} E(x) + 2h \right) + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \right\} \\
&\quad \times \left[\frac{\sin \eta x}{2\eta} E(x) + \frac{\cos \eta x}{4\eta^2} \left\{ \alpha x - E(x) \left(2h + Q(x) + \frac{1}{2} E(x) \right) \right\} + O\left(\frac{|\alpha|}{\eta^3}\right) \right] dx \\
&= \frac{\pi}{8\eta^2} \alpha + O\left(\frac{|\alpha|}{\eta^3}\right)
\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

elde ederiz.

(3.6.28) de ν yerine ν_n yazarak (3.6.25) den

$$\begin{aligned}
\tau_n - \rho_n &= \int_0^\pi \{w^2(x, \nu_n) - \phi^2(x, \lambda_n)\} dx = \frac{\pi^2}{8n^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} (b'_0 - b_0) O\left(\frac{|\alpha|}{n^3}\right) \\
&= \frac{b'_0 - b_0}{n^2} + O\left(\frac{|\alpha|}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece büyük n ler için

$$\left| \tau_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right| \leq C \frac{|\alpha|}{n^3}$$

elde ederiz.

Küçük n 'ler için de

$$\left| \tau_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right| \leq C |\alpha|$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterebiliriz. Dolayısıyla (3.6.24) elde edilir.

2. $|p(x) - r(x)|$ farkını üstten değerlendirmek için Teorem 3.1.1 'i kullanabiliriz.

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{\nu_n} |\sigma_n - \tau_n| + |\mu_n - \nu_n|]$ yeterince küçük ise,

$$|p(x) - r(x)| \leq \widetilde{C}_1 \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{\nu_n} |\sigma_n - \tau_n| + |\mu_n - \nu_n|]$$

olur. Burada $\widetilde{C}_1$ sadece $q(x), h$ ve H 'a bağlı bir sabittir.

3. Son olarak $a_0 \neq a'_0$ genel durumu ele alalım. $q_1(x) = q(x) + 2(a'_0 - a_0)$ olsun.

Aşkar olarak $E(q_1(x); h, H)$ 'in $\left\{ \lambda_n^{(1)}, \rho_n^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ spektral karakteristikleri için

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = n + \frac{a_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{ve} \quad \rho_n^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

formülleri sağlar. 1, 2 ve 3 den,

$$\begin{aligned}
|p(x) - q(x)| &\leq |p(x) - r(x)| + |r(x) - q(x)| \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{\nu_n} |\sigma_n - \tau_n| + |\mu_n - \nu_n|] + \left| 2(a'_0 - a_0) + \frac{8}{\pi^2} (b'_0 - b_0) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right| \\
&\leq C \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{\nu_n} \left| \sigma_n - \rho_n - \frac{b'_0 - b_0}{n^2} \right| + |\mu_n - \lambda_n - 2(a'_0 - a_0)| \right] \right. \\
&\quad \left. + |a'_0 - a_0| + |b'_0 - b_0| + |\sigma_0 - \rho_0| + |\mu_0 - \lambda_0| \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece Teorem 3.1.2. ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1] Kreyszing, E., Introductory functional Analysis with Applications, New York, 1978.
- [2] Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J., Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1961.
- [3] Levitan, B.M. and I.S. Sargsjan, Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, Amer. Math. Soc. Transl. Math. Monographs, 1975.
- [4] Olver, F.W.J., Introduction to Asymptotics and Special Functions, 1974.
- [5] Natahson, I.P., Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, "NAUKA" Moskow. 1974. Markushevich, A.I., Introduction to Analytic Functions Theory I, II, Moskow. 1977.
- [6] Markushevich, A.I., Introduction to Analytic Functions Theory I, II, Moskow. 1977.
- [7] Levitan, B.M. and M.G. Gasymov, Determination of a differential equations by two of its spectra, Russian Math. Surveys (1964).
- [8] Hochtad, H., On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Arch. Rational Mech. Anal. (1965).
- [9] Marchenko, V.A., Some problems in the theory of second-order differential operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR (1950).
- [10] Murayama, R., The Gel'fand-Levitan theory and certain inverse problems for the parabolic equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. (1981).
- [11] Suzuki, T., Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, J. Differential Equations (1983).
- [12] Suzuki, T., Inverse problems for heat equations on compact intervals and on circles, I, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [13] Suzuki, T., On the inverse Sturm-Liouville problem for spatially symmetric operators, to appear in J. differential Equations.
- [14] Suzuki, T., Inverse problems for the heat equation, (Japanese), Sugaku (1982).
- [15] Yosida K., Theory of Integral Equations, 2nd ed. (Japanese), Iwanami, 1978.
- [16] Titchmarsh, E.C., Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations I, 1946, II, 1958.
- [17] Levinson, N., Gap and Density Theorems, Collog. Publ. vol. Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [18] Gel'fand, I.M. and B.M. Levitan, On the determination of a differential equation by its spectral function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. (1951). (English Translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. (1955))
- [19] Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillischen Eigenwertaufgabe, Acta Math. (1946).

- [20] Naimark, M.A., Linear Differential Operators. NAUKA, 1969.
- [21] Hochstad, H., On the wellposedness of the inverse Sturm-Liouville problems, J. Differential Equations (1977).
- [22] Marchenko, V.A., Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Naukova Dumka, Kiev 1977.
- [23] Levinson, N., The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B, (1949).
- [24] Mizutani, Akira, On The Inverse Sturm-Liouville Problem, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

13.08.1981 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve ortaöğretimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 2000 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 2004 yılında mezun oldum ve aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tezli yüksek lisansa başladım.

Keziban TAŞ