

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

Gülcan ATICI

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

Gülcan ATICI

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Üye : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye : Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşegül GÖKHAN

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Çiğdem BEKTAŞ'a ve bu çalışmanın oluşumunda gerekli bütün imkanları sağlayan ve her konuda desteğini gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a ,Prof. Dr. Mikail ET'e ve Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Gülcan ATICI

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER LİSTESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
1. BÖLÜM	
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
2. BÖLÜM	
2.1. İstatistiksel Yakınsaklık.....	5
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık	7
2.3. λ - İstatistiksel Yakınsaklık	10
3 . BÖLÜM	
3.1. Δ^m - Dizi Uzayları	14
3.2. Δ^m -İstatistiksel Yakınsaklık	14
4. BÖLÜM	
4.1. λ^m – İstatistiksel Yakınsaklık	20
4.2. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Yeni Dizi Uzayları	20
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ	32

SİMGELER LİSTESİ

IN	:	Doğal sayılar cümlesi
IR	:	Reel sayılar cümlesi
C	:	Kompleks sayılar cümlesi
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
X^α	:	X in α - duali
X^β	:	X in β - duali
X^γ	:	X in γ - duali
$\delta(K)$	:	K nın doğal yoğunluğu
h.h.k	:	hemen hemen her k
S	:	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_0	:	Sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
σ_1	:	Cesàro yakınsak diziler uzayı
ω_p	:	Kuvvetli p-Cesàro yakınsak diziler uzayı
S_λ	:	λ - istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S(\Delta^m)$	:	Δ^m – istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$w_p(\Delta^m)$	:	Kuvvetli Δ_p^m - Cesàro yakınsak diziler uzayı
$\tilde{\ell}_M$	:	Orlicz dizi sınıfı
$S_\lambda(\Delta^m)$	:	λ^m – istatistiksel yakınsak diziler uzayı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ BAZI DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Gülcan ATICI

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa : 32

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, kuvvetli p - Cesàro yakınsaklık ve λ - istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; Δ^m -dizi uzayları, Δ^m - istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli Δ_p^m - Cesàro yakınsaklık ve Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; λ^m – istatistiksel yakınsaklık ve Orlicz fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $[V, \lambda, M, p](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ uzayları ve bu uzayların bazı özellikleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, λ - istatistiksel yakınsaklık, Δ^m -dizi uzayları, Δ^m - istatistiksel yakınsaklık, λ^m – istatistiksel yakınsaklık, Orlicz fonksiyonu

ABSTRACT
Master's Thesis

**SOME SEQUENCE SPACES DEFINED BY ORLICZ FUNCTIONS AND
STATISTICALLY CONVERGENCE**

Gülcan ATICI

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Page : 32

This study is prepared as four chapter.

In the first chapter; the fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; statistically convergence, statistically Cauchy sequence, strong p – Cesàro convergence and λ - statistically convergence are examined.

In the third chapter; Δ^m - sequence spaces, Δ^m - statistically convergence, strong Δ_p^m - Cesàro convergence and Δ^m - statistically Cauchy sequence are examined.

In the fourth chapter; λ^m – statistically convergence and the sequence spaces $[V, \lambda, M, p](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ and $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ are defined by Orlicz functions and some properties of these spaces are given.

Key Words : Statistically convergence, λ - statistically convergence, Δ^m - sequence spaces, Δ^m - statistically convergence, λ^m – statistically convergence, Orlicz function

1 . BÖLÜM

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. $\forall x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için

- L1) $x + y = y + x$
- L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- L3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ vardır.
- L4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $(-x) \in X$ vardır.
- L5) $1 \cdot x = x$
- L6) $a(x + y) = a x + a y$
- L7) $(a + b)x = a x + b x$
- L8) $a(b x) = (a b)x$

dır [1].

Tanım 1.1.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için

- i) $g(\theta) = 0$
- ii) $g(x) = g(-x)$
- iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$
- iv) $\lambda \rightarrow \lambda_0, x \rightarrow x_0$ iken $\lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$, başka bir ifadeyle $\lambda \rightarrow \lambda_0, g(x - x_0) \rightarrow 0$

iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ şartlarını sağlayan $g : X \rightarrow IR$ fonksiyonuna bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [1].

Tanım 1.1.3. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : X \rightarrow IR$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

- N1) $\|x\| \geq 0$
- N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Eğer N2) $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şeklinde olursa X' e yarınorm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de yarınormlu uzay adı verilir [2].

Tanım 1.1.4. $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.1.5. $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [2].

Tanım 1.1.6. $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 1.1.7. Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin kümesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.8. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow C, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK - (Banach Koordinat) uzayı denir [3].

Tanım 1.1.9. $\forall u_1, u_2 \in IR$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvektir denir. Yani $0 \leq \alpha \leq 1$ olacak şekilde her α için

$$M[\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1-\alpha)M(u_2)$$

eşitsizliğinin sağlanması demektir.

Tanım 1.1.10. $(X, \|\cdot\|)$ ile $(Y, \|\cdot\|)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alırlar [4].

Tanım 1.1.11. Eğer X ile Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ile Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X den Y ye bir lineer izometri vardır [1].

Tanım 1.1.12. X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm denir.

$f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denktir [1].

Teorem 1.1.1. Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y nin X de kapalı olmasıdır [2].

Tanım 1.1.13. X bir dizi uzayı olsun. X in α - duali (veya Köthe Toeplitz-duali) , β - duali (veya genelleştirilmiş Köthe Toeplitz-duali) ve γ - duali sırası ile

$$X^\alpha = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

$$X^\beta = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

$$X^{\gamma} = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

$\emptyset \subset X^{\alpha} \subset X^{\beta} \subset X^{\gamma}$ olduğu kolayca gösterilebilir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olsun. $X \subset Y$ ise $Y^{\eta} \subset X^{\eta}$ dir.

Tanım 1.1.14. X bir dizi uzayı olsun.

- i) $i \geq 1$ ve en az bir $x \in X$ için $|y_i| \leq |x_i|$ olduğunda $y \in X$ ise X' 'e normal veya solid denir.
- ii) X tüm basamak uzaylarının kanonik ön resimlerini kapsıyorsa X' 'e monoton dizi uzayı denir.
- iii) $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X' e perfektir denir.

2 . BÖLÜM

2.1. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk olarak 1951 yılında Fast [5] tarafından verildi. 1959 yılında Schoenberg [6] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsak dizilerin bazı özelliklerini verdi. Her iki bilim insanı da sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Salat [7], Connor [8], Maddox [9] ve Fridy [10] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışıldı.

2.1.1. Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.1.1. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$, K nın n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K ya sıfır yoğunluklu cümle denir.

Tanım 2.1.2. Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu cümle dışında bütün k lar için sağlıyorsa (x_k) dizisi P özelliğini hemen hemen her k için sağlıyor denir. Burada hemen hemen her k ifadesi kısaca “h.h.k” şeklinde gösterilir [10].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından yararlanarak istatistiksel yakınsak dizi tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani h.h.k. için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ şeklinde gösterilir. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir [10].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve istatistiksel sıfır diziler uzayı S_0 ile gösterilir.

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\},$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.$$

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = (1, 2, 3, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ demektir.

Diğer taraftan ℓ_∞ ve S uzayları bir birlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır.

Gerçekten $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = (1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$, $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.1. $S - \lim x = L_1$, $S - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

- i) $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim(\alpha x) = \alpha L_1$
- ii) $S - \lim x = L_1$, $S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim(x + y) = L_1 + L_2$

dir [6].

(i) - (ii) den istatistiksel yakınsak dizilerin uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.1.4. $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa, yani

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [10].

Teorem 2.1.2. Bir x dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [10].

İspat. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda h.h.k için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Eğer N , $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\text{h.h.k. için})$$

elde edilir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Yakınsaklık

Bu kısımda kuvvetli Cesàro yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 2.2.1. $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye Cesàro yakınsaktır denir. Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [11].

Teorem 2.2.1. $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsak ise (x_k) dizisi L ye σ_1 - yakınsaktır [11].

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $n \geq N_1$ için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Bu taktirde $n \geq N_2$ için

$$\frac{1}{n} |(x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1-1}) - N_1 L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir pozitif N_2 tamsayısı mevcuttur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n \geq N$ ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^n x_k - (n+1)L \right] \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_1}^n (x_k - L) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^n |x_k - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} (n+1 - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Tersisi doğru değildir. Gerçekten $x_n = 1 + (-1)^n$ dizisi σ_1 - yakınsaktır ancak yakınsak değildir.

Teorem 2.2.2. $S - \lim x = L$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < M$ ise $\sigma_1 - \lim x = L$ dir [6].

İspat. $L = 0$ olsun $\sigma_1 - \lim x = 0$ olduğunu gösterelim. Bu taktirde

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| < \varepsilon}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| \geq \varepsilon}} |x_k| \right\} \\
&\leq \frac{1}{n} n\varepsilon + \frac{1}{n} M \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right|
\end{aligned}$$

dır. Sağ taraf $n \rightarrow \infty$ için sıfıra gittiğinden

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Teoremin karşıtı doğru değildir. Gerçekten $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 2.2.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli p - Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\omega_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [8].

Teorem 2.2.3. $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi, L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır. Tersine $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ve sınırlı ise L sayısına kuvvetli p - Cesàro yakınsaktır [8].

İspat. $x \in \omega$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \varepsilon^p \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $S - \lim x_k = L$ demektir.

Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $K = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε u

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktide $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p - Cesàro yakınsaktır.

2.3. λ - İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde (V, λ) - toplanabilme ve λ - istatistiksel yakınsaklık kavramlarını vereceğiz.

$\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) olacak şekilde pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun.

Genelleştirilmiş Vallée-Pousin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır. Burada $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ dir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ için $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$, (V, λ) - toplanabilir dizidir denir.

Eğer $\lambda_n = n$ ise (V, λ) - toplanabilirlik $(C, 1)$ - toplanabilirliğe indirgenir. Kuvvetli Cesàro toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) - toplanabilir dizilerin sınıfları

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $x = (x_k)$ L ye kuvvetli Cesàro toplanabilir ise bu $x_k \rightarrow L[C, 1]$, kuvvetli (V, λ) - toplanabilir ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olarak yazılır.

Tanım 2.3.1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye λ - istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$S_\lambda - \lim x = L \text{ veya } x_k \rightarrow L(S_\lambda)$$

yazılır ve λ - istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir, yani

$$S_\lambda = \{x : S_\lambda - \lim x = L, \text{ en az bir } L \text{ için}\}$$

dır [12].

Uyarı .

i) Eğer $\lambda_n = n$ ise $S_\lambda = S$ dır.

$$\text{ii) } a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n}, & k \in I_n \\ 0, & k \notin I_n \end{cases}$$

olmak üzere $A = (a_{nk})$ olsun. Bu durumda λ - istatistiksel yakınsaklık A - istatistiksel yakınsaklığın özel bir hali olur.

Λ , $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) şartlarını sağlayan azalmayan pozitif terimli $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini gösterebilirsin.

Teorem 2.3.1. $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde

$$i) \quad [V, \lambda] \subset S_\lambda,$$

$$ii) \quad \ell_\infty \cap S_\lambda \subset [V, \lambda],$$

$$iii) \quad S_\lambda \cap [V, \lambda] = [V, \lambda] \cap \ell_\infty$$

dir ve (i) deki kapsama kesindir.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k \in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right|$$

dır. Böylece $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ iken $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olur. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, & n - \lfloor \sqrt{\lambda_n} \rfloor + 1 \leq k \leq n \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ bir sayının tam kısmını göstermektedir. Bu durumda $x \notin \ell_\infty$ ve

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = \frac{\lfloor \sqrt{\lambda_n} \rfloor}{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır. Yani $x_k \rightarrow 0(S_\lambda)$ dır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

yani $x_k \rightarrow 0[V, \lambda]$ olur.

ii) Kabul edelim ki tüm k değerleri için $|x_k - L| \leq M$ olmak üzere $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| &= \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

dir.

3 . BÖLÜM

3.1. Δ^m - Dizi Uzayları

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz [13] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\ell_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_{\infty}\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların $\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \sup_k |x_k|$ ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak [14], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\ell_{\infty}(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_{\infty}\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların $\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k |\Delta^m x_k|$ ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

3.2. Δ^m -İstatistiksel Yakınsaklık

X herhangi bir dizi uzayı ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\}$$

dizi uzayını tanımlayalım. Bu bölümde $X(\Delta^m)$ ve X arasındaki ilişkiler verilip $X(\Delta^m)$ in bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.2.1. X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [15].

İspat. $x, y \in X(\Delta^m)$ ve α bir skaler olsun.

i) $x \in X(\Delta^m)$ ve $y \in X(\Delta^m)$ ise $\Delta^m x \in X$ ve $\Delta^m y \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\Delta^m x + \Delta^m y \in X$, Δ^m lineer olduğundan $\Delta^m(x + y) \in X$ yazılabilir. Buradan $x + y \in X(\Delta^m)$ elde edilir.

ii) $x \in X(\Delta^m)$ ve α bir skaler olsun. Bu taktirde $\Delta^m x \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\alpha \Delta^m x \in X$ yazılabilir. Δ^m lineer olduğundan $\Delta^m(\alpha x) \in X$ olup tanımdan $\alpha x \in X(\Delta^m)$ elde edilir.

Teorem 3.2.2. $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [15].

Teorem 3.2.3. X , $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzaydır [15].

Teorem 3.2.4. X ayrılabilir ise $X(\Delta^m)$ de ayrılabilirdir [15].

İspat. X ayrılabilir olsun. Bu taktirde $\overline{A} = X$ olduğundan $\overline{A(\Delta^m)} = \overline{A}(\Delta^m) = X(\Delta^m)$ dir. Şimdi

$$f : A(\Delta^m) \rightarrow A, \quad f(x) = \Delta^m x$$

dönüşümünü tanımlayalım. f birebir örten bir dönüşümdür. Buradan $A(\Delta^m)$, $X(\Delta^m)$ nin $\overline{A(\Delta^m)} = X(\Delta^m)$ olacak şekilde sayılabilir bir alt cümlesidir. Buradan $X(\Delta^m)$ ayrılabilirdir.

Sonuç 1. $c_0(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $\ell_p(\Delta^m)$ ($1 \leq p < \infty$) ayrılabilirdir [15].

Teorem 3.2.5. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta^m)$, $X(\Delta^m)$ de konvektir [15].

İspat. $x, y \in A(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde $\Delta^m x, \Delta^m y \in A$ dir. Δ^m lineer olduğundan $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda \Delta^m x + (1 - \lambda) \Delta^m y = \Delta^m (\lambda x + (1 - \lambda) y)$$

yazılabilir. A konveks olduğundan $(\lambda \Delta^m x + (1 - \lambda) \Delta^m y) \in A$ dir.

Buradan $(\lambda x + (1 - \lambda) y) \in A(\Delta^m)$ dir.

Tanım 3.2.1. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

yani h.h.k için $\left| \Delta^m x_k - L \right| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ile gösterilir.

Δ^m - istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [15].

Sonuç 2. $S(\Delta^m)$ bir lineer uzaydır [15].

Tanım 3.2.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m - Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m - Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi $w_p(\Delta^m)$ ile gösterilir, yani

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = 0, \text{ } n \rightarrow \infty, \text{ } p > 0, \text{ } \text{en bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. $x \in w_p(\Delta^m)$ olması halinde $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazılır [15].

Teorem 3.2.6. $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.
- ii) $x_k \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [15].

İspat. i) $x = (x_k) \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left| \Delta^m x_k - L \right| < \varepsilon}} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p$$

$$\geq \varepsilon^p \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

elde edilir. Eğer $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.

ii) $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olsun. $M = \|\Delta^m x\|_\infty + |L|$ diyelim. $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε sayısını

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |\Delta^m x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |\Delta^m x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir.

Sonuç 3. $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [15].

Sonuç 4. $S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [15].

Tanım 3.2.3. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisi denir [15].

Teorem 3.2.7. Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir [15].

İspat. Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde h.h.k için

$$|\Delta^m x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. N sayısını h.h.k için

$$|\Delta^m x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçelim. Bu taktirde h.h.k için

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| &< |\Delta^m x_k - L| + |\Delta^m x_N - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 3.2.8. y , Δ^m - istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer x , h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x , Δ^m - istatistiksel yakınsak bir dizidir [15].

İspat. h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ ve $y_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her n için

$$\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : |\Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k|\} \cup \{k \leq n : |\Delta^m y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin ikinci yanındaki son cümle sabit sayıda eleman içerir. Bunu $g = g(\varepsilon)$ ile gösterelim. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \leq \lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |\Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k|\} \right| + \lim_n \frac{g}{n}$$

yazılabilir. Bu da $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.9.

- (i) $c(\Delta^m) \subset S(\Delta^m)$ ve bu kapsama kesindir.
- (ii) $S(\Delta^m)$ ve $\ell_\infty(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır.
- (iii) $S(\Delta^m)$ ve ℓ_∞ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır.
- (iv) S ve $c(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır.
- (v) S ve $c_o(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır.
- (vi) S ve $\ell_\infty(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır [15].

İspat. $c \subset S$ olduğundan $c(\Delta^m) \subset S(\Delta^m)$ dir. Şimdi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.2.1)$$

şeklinde seçelim. Bu taktirde $\Delta^m x \in S$ fakat $\Delta^m x \notin c$ dir. $c \subset S(\Delta^m)$, $c \subset c(\Delta^m)$, $c \subset \ell_\infty(\Delta^m)$, $c \subset S$, $c \subset \ell_\infty$ ve $c \cap c_o(\Delta^m) \neq \emptyset$ olduğundan $S(\Delta^m)$ ile $\ell_\infty(\Delta^m)$, $S(\Delta^m)$ ile ℓ_∞ , $S(\Delta^m)$ ile S , S ile $c(\Delta^m)$, S ile $c_o(\Delta^m)$ ve S ile $\ell_\infty(\Delta^m)$ nin ortak elemanları vardır. Şimdi bu uzayların birbirlerini kapsamadıklarını gösterelim.

(ii) Yukarıda tanımlanan diziyi göz önüne alalım. $x \in S(\Delta^m)$ fakat $x \notin \ell_\infty(\Delta^m)$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ ve $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ fakat $x \notin S(\Delta^m)$ dir.

(iii) (3.2.1) de tanımlanan dizi sınırlı değildir. Ancak Δ^m - istatistiksel yakınsaktır. Tersine $x = (1, 0, 1, 0, \dots) \in \ell_\infty$ seçersek $x \notin S(\Delta^m)$ dir.

$$(iv) \quad x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2, m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

dizisini gözönüne alalım. $x \in S$, fakat $x \notin c(\Delta^m)$ dir. Tersine $x = (k)$ seçersek $x \notin S$ fakat $x \in c(\Delta^m)$ dir.

(v) (iv) de verilen dizi bu şıkkın şartını da sağlar.

$$(vi) \quad x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde x dizisini tanımlayalım. $x \in S$ ancak $x \notin \ell_\infty(\Delta^m)$ dir. Tersine $x = (k)$ olarak alınırsa, $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ fakat $x \notin S$ olur.

4. BÖLÜM

Bu bölümde bir M Orlicz fonksiyonu, bir $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ dizisi ve Δ^m operatörü kullanılarak $[V, \lambda, M, p](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ dizi uzayları tanımlanacak ve λ^m –istatistiksel yakınsaklık ile bu uzaylar arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilecektir. Ayrıca bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

4.1. λ^m – İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1. $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ sabit bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye λ^m –istatistiksel yakınsaktır veya S_{λ^m} –yakınsaktır denir. (x_k) , L' ye λ^m –istatistiksel yakınsak ise $S_{\lambda^m} - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow LS_\lambda(\Delta^m)$ şeklinde yazılır ve λ^m –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\lambda(\Delta^m)$ ile gösterilir, yani

$$S_\lambda(\Delta^m) = \{x \in w : S_{\lambda^m} - \lim x = L \text{ en az bir } L \text{ için}\}$$

dir [12].

4.2. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Bazı Yeni Dizi Uzayları

Bir Orlicz fonksiyonu, sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonudur.

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t) dt$$

integral formunda gösterilebilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen p , azalmayan, $t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $p(0) = 0$, $t > 0$ için $p(t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ dur.

Bir Orlicz fonksiyonu verilmiş olsun ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu takdirde

$$N(x) = \int_0^x q(s) ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s)$, $p(t)$ nin tüm özelliklerine sahip olan N nin çekirdeğidir. Açıkça N bir Orlicz fonksiyonu olur. Bu şekildeki M ve N fonksiyonları birbirinin alışılmış tamamlayıcısı olarak adlandırılır.

Orlicz fonksiyonuna aynı zamanda O – fonksiyonu da denir.

Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\tilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir.

Lindenstrauss ve Tzafriri [16] Orlicz fonksiyonu fikrini kullanarak

$$I_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını tanımladı.

Tanım 4.2.1. M bir Orlicz fonksiyonu, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda

$$[V, \lambda, M, p](\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|\Delta^m x_k - L|}{\rho}\right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } L \text{ ve } \rho > 0 \text{ için} \right\},$$

$$[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\},$$

$$[V, \lambda, M, p]_{\infty}(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

tanımlanır.

$[V, \lambda, M, p](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ dizi uzaylarının tanımında $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınırsa sırasıyla $[V, \lambda, M](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M]_\infty(\Delta^m)$ uzayları elde edilir.

$x \in [V, \lambda, M](\Delta^m)$ ise (x_k) dizisi, M Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli $(V, \lambda)(\Delta^m)$ -toplanabilir denir.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$, $M(x) = x$ alınırsa $[V, \lambda, M, p](\Delta^m) = [V, \lambda](\Delta^m)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$, $\lambda_k = 1$ ve $M(x) = x$ alınırsa $[V, \lambda, M, p](\Delta^m) = [C, 1](\Delta^m)$ elde edilir. Bu uzayları açık olarak aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$(C, 1)(\Delta^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\Delta^m x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

$$[C, 1](\Delta^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

$$(V, \lambda)(\Delta^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} (\Delta^m x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

$$[V, \lambda](\Delta^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

$[C, 1](\Delta^m) \subset (C, 1)(\Delta^m)$, $[V, \lambda](\Delta^m) \subset (V, \lambda)(\Delta^m)$ ve $X = (C, 1)$, $[C, 1]$, (V, λ) veya $[V, \lambda]$ için $X(\Delta^{m-1}) \subset X(\Delta^m)$ olduğu açıktır.

Teorem 4.2.1. $S(\Delta^m) \subset S_\lambda(\Delta^m)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0 \quad (4.2.1)$$

olmasıdır [12].

İspat. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

dır. Böylece

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alıp (4.2.1) i kullanırsak $x_k \rightarrow LS(\Delta^m)$ iken $x_k \rightarrow LS_\lambda(\Delta^m)$ elde ederiz.

Tersine, kabul edelim ki $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olsun. $(n(j))_{j=1}^\infty$ alt dizisini seçelim. Öyle ki

$$\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j} \text{ ve } x = (x_i) \text{ dizisini}$$

$$\Delta^m x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \text{ ise } j = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{diger durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $x \in [C, 1](\Delta^m)$ ve $x \in S(\Delta^m)$ dir. Diğer taraftan $x \notin [V, \lambda](\Delta^m)$ ve $x \notin S_\lambda(\Delta^m)$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde (4.2.1) doğrudur.

Teorem 4.2.2. $(C, 1)(\Delta^m)$ uzayı

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^n \Delta^m x_k \right|$$

normu ile bir BK – uzayı, $[C, 1](\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta'} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(n^{-1} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k| \right)$$

normu ile bir BK – uzayıdır [12].

Teorem 4.2.3. $\lambda = (\lambda_n)$ olsun.

- i) $[V, \lambda](\Delta^m) \subset S_\lambda(\Delta^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.
- ii) Eğer $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow LS_\lambda(\Delta^m)$ ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda](\Delta^m)$ dir.
- iii) $S_\lambda(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = [V, \lambda](\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ dir [12].

İspat. i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L[V, \lambda](\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

yazılabilir. Böylece $x_k \rightarrow L[V, \lambda](\Delta^m) \Rightarrow x_k \rightarrow LS_\lambda(\Delta^m)$ olur.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $x \notin \ell_\infty(\Delta^m)$, $x_k \rightarrow 0S_\lambda(\Delta^m)$ ve $x \notin [V, \lambda](\Delta^m)$ dir.

ii) $x_k \rightarrow LS_\lambda(\Delta^m)$, $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k - L| \leq M$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |\Delta^m x_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m x_k - L| < \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle $x_k \rightarrow L[V, \lambda](\Delta^m)$ dir.

Teorem 4.2.4. m pozitif bir tamsayı olsun. M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ sınırlı bir dizi olsun. Bu taktirde $[V, \lambda, M, p](\Delta^m)$, $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde birer lineer uzaylardır [12].

İspat. $x, y \in [V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde pozitif ρ_1 ve ρ_2 sayıları mevcuttur.

$\rho_3 = \max (2|\alpha| \rho_1, 2|\beta| \rho_2)$ diyelim.

M azalmayan, konveks ve Δ^m lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m(\alpha x_k + \beta y_k)|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\alpha \Delta^m x_k + \beta \Delta^m y_k|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\alpha \Delta^m x_k|}{\rho_3} + \frac{|\beta \Delta^m y_k|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq C \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + C \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $C = \max \{1, 2^{H-1}\}$ ve $H = \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k$ **dır**. Bu da $[V, \lambda, M, p]_0 (\Delta^m)$ nin lineer uzay olduğunu ispatlar.

Teorem 4.2.5. m pozitif bir tamsayı olsun. M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ sınırlı bir dizi olsun. $[V, \lambda, M, p]_0 (\Delta^m)$ uzayı $H = \max \left\{ 1, \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k \right\}$ olmak üzere

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

paranormu ile bir paranormlu uzaydır [12].

İspat. $g(x) = g(-x)$ olduğu aşıkardır. Teorem 4.2.4 ün ispatında $\alpha = 1$, $\beta = 1$ alınırsa $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ eşitsizliği elde edilir. $x = 0$ için $\Delta^m x = 0$ olduğu açıktır. $M(0) = 0$ olduğundan $x = 0$ için $\inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m(r x_k)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\} = 0$ olur.

Şimdi skaler çarpımın sürekli olduğunu ispatlayacağız. r herhangi bir sayı olsun. Tanımdan

$$\begin{aligned} g(rx) &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m(r x_k)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\} \\ &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|r \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\} \end{aligned}$$

yazarız. $s = \rho/|r|$ alınırsa

$$g(rx) = \inf \left\{ (|r|s)^{p_n/H} : \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{s} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

olur. $|r|^{p_n} \leq \max(1, |r|^{\sup p_n})$ olduğundan

$$g(rx) \leq \left(\max \{1, |r|^{\sup p_n}\} \right)^{1/H} \cdot \inf \left\{ s^{p_n/H} : \left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{s} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

elde edilir. $g(x)$, $[V, \lambda, M, p]_0$ da sıfıra yakınsak olduğundan $g(rx)$ de sıfıra yakınsaktır.

Şimdi $i \rightarrow \infty$ iken $r_i \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $x \in [V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ ve $n > N$ için

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq (\varepsilon/2)^H$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı seçebiliriz. Bu en az bir $\rho > 0$ ve $n > N$ için

$$\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq \varepsilon / 2$$

olması demektir. $0 < |r| < 1$ olsun. M nin konveksliğini kullanırsak, $n > N$ için

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|r \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[|r| M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < (\varepsilon / 2)^H$$

elde ederiz. M , $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğundan, $n \leq N$ için

$$f(t) = \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|t \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

0 da süreklidir. Böylece $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$ olacak şekilde $1 > \delta > 0$ vardır. K sayısını $i > K$ için $|r_i| < \delta$ olacak şekilde seçelim. Bu taktirde $i > K$ ve $n \leq N$ için

$$\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|r_i \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} < \varepsilon / 2$$

dir. Böylece $i > K$ için

$$\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|r_i \Delta^m x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} < \varepsilon$$

ve $r \rightarrow 0$ için $g(rx) \rightarrow 0$ olur.

Teorem 4.2.6. $m \geq 1$ olsun. X , $[V, \lambda, M]$, $[V, \lambda, M]_0$ veya $[V, \lambda, M]_\infty$ dizi uzaylarından birini gösterebiliriz. Bu taktirde $X(\Delta^{m-1}) \subset X(\Delta^m)$ dir ve bu kapsama kesindir [12].

İspat. İspatı sadece $[V, \lambda, M]_\infty$ dizi uzayı için verelim. $[V, \lambda, M]$ veya $[V, \lambda, M]_0$ dizi uzayları için ispat benzer şekilde yapılır. $x \in [V, \lambda, M]_\infty(\Delta^{m-1})$ olsun. Bu taktirde $\rho > 0$ için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^{m-1} x_k|}{\rho} \right) \right] < \infty$$

dir. M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k|}{2\rho} \right) \right] &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}|}{2\rho} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{|\Delta^{m-1} x_k|}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{|\Delta^{m-1} x_{k+1}|}{\rho} \right) \right] < \infty \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $[V, \lambda, M]_\infty(\Delta^{m-1}) \subset [V, \lambda, M]_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. Bu yol takip edilerek $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $[V, \lambda, M]_\infty(\Delta^i) \subset [V, \lambda, M]_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. $x = (x_k) \notin [V, \lambda, M]_\infty(\Delta^m) \setminus [V, \lambda, M]_\infty(\Delta^{m-1})$ olduğundan bu kapsama kesindir.

Teorem 4.2.7. $[V, \lambda, M, p]_0$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty$ dizi uzayları normaldir [12].

İspat. İspatı $[V, \lambda, M, p]_0$ dizi uzayı için verelim. $(x_k) \in [V, \lambda, M, p]_0$ ve (α_k) dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\alpha_k x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dir. Buradan $(\alpha_k x_k) \in [V, \lambda, M, p]_0$ olup $[V, \lambda, M, p]_0$ dizi uzayı normaldir.

Uyarı. $m > 0$ olduğu zaman $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ dizi uzayları genelde normal değildir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek. $m = 1$, $p_k = 1$ ve $M(x) = x$ olsun. Bu taktirde $(x_k) = (k) \in [V, \lambda, M, p]_0(\Delta^2)$ fakat $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_k) = (-1)^k$ alınırsa $(\alpha_k x_k) \notin [V, \lambda, M, p]_0(\Delta^2)$ dır. O halde $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^2)$ dizi uzayı normal değildir.

Sonuç 4.2.8.

- i) $[V, \lambda, M, p]_0$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty$ dizi uzayları monotondur.
- ii) $[V, \lambda, M, p]_0(\Delta^m)$ ve $[V, \lambda, M, p]_\infty(\Delta^m)$ dizi uzayları perfekt değildir.

Teorem 4.2.9. m pozitif bir tamsayı olsun. Herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V, \lambda, M](\Delta^m) \subset S_\lambda(\Delta^m)$ dir [12].

İspat. $x \in [V, \lambda, M](\Delta^m)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k - L|}{\rho} \right) \right] &\geq \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{|\Delta^m x_k - L|}{\rho} \right) \right] \\ &> \lambda_n^{-1} M(\varepsilon / \rho) \left| \{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x \in S_\lambda(\Delta^m)$ dir.

KAYNAKLAR

1. Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.
2. Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
3. Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients 1, Math. Z. 118, 93-102.
4. Akilov, G. P. and Kantorovich, 1982, Functional Analysis, Pergaman Pres, Oxford.
5. Fast, H., 1951, Sur la Convergence Statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
6. Schoenberg, I. J., 1959, The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375.
7. Salat, T., 1980, On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
8. Connor, J.S., 1988, The Statistical and Strong p -Cesàro Convergence of Sequences, Analysis, 8, 47-63.
9. Maddox, I. J., 1986, Sequence Spaces Defined By a Modulus, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100, 161-166.
10. Fridy, J.A., 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313.
11. Powell, R.E. and Shah, S.M., 1972, Summability Theory and Its Applications, V.N.R. Company, London.
12. Et, M. and Ç.A.Bektaş, 2004, Generalized Strongly (V, λ) - Summable Sequence Defined By Orlicz Functions, Math. Slovaca., (54) 411-422.
13. Kızmaz, H., 1981, On Certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
14. Et, M. and Çolak, R., 1995, On Some Generalized Difference Sequence Spaces, Soochow J. Math., 21, 377-386.
15. Et, M. and Nuray, F., 2001, Δ^m - Statistical Convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.
16. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1971, On Orlicz Sequence Spaces, Israel J. Math., 10, 379-390.
17. Çolak, R., 1989, On Some Generalized Sequence Spaces, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara. Series A, (38) 35-46.

18. Et, M.,2000, On Some Topological Properties of Generalized Difference Sequence Spaces, *Internat. J. Math.& Math. Sci.* 24 (11) 785-791.
19. Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, *An Introduction To The Theory of Numbers*, John Wiley Sons New York.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ' da doğdum. İlk, orta ve lise tahsilimi Elazığ' da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandım. 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimime başladım. Halen tezli yüksek lisans öğrenimime devam etmekteyim.

Gülcan ATICI