

**PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE
OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM**

Gamze DOLANBAY

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU
TEMMUZ-2013**

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze DOLANBAY

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

TEMMUZ-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze DOLANBAY

(111121119)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Haziran 2013

TEMMUZ-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze DOLANBAY

(111121119)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Haziran 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 4 Temmuz 2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü.)



TEMMUZ-2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında engin ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı sayın hocam Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU 'na sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayat boyu yanımda olup, ideallerimi gerçekleştirmem konusunda her zaman beni destekleyen değerli aileme teşekkür eder, saygılar sunarım.

Gamze DOLANBAY

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. Temel Tanım ve Teoremler.....	1
2. Sınır koşullarının öz parametreye bağlı olduğu Sturm-Liouville denklemleri için Ambarzumyan teoremi	10
2.1. Karakteristik Denklem	10
2.2. Teklik Teoremi	12
3. Sınır koşullarının öz parametreye bağlı olduğu n -boyutlu matris değerli Sturm-Liouville denklemleri için Ambarzumyan teoremi.....	22
3.1. Matris değerli Sturm-Liouville operatörü için teklik teoremi	23
4. Sonuç.....	33
KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

Gamze DOLANBAY

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2013, Sayfa: 37

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez içerisinde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilerek, Sturm-Liouville operatörünün bazı temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, sınır koşullarında öz parametre bulunduran Sturm-Liouville öz değer problemi için Ambarzumyan teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde, sınır koşullarında öz parametre bulunduran n - boyutlu matris Sturm-Liouville denklemi için Ambarzumyan teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ambarzumyan Teoremi, Karakteristik Denklem, Sturm-Liouville Operatörü.

SUMMARY

Master's Thesis

PARAMETREYE BAĞLI MATRİS STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

Gamze DOLANBAY

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2013, Pages: 37

This thesis consists of three chapters.

In chapter one, some concepts which are used in this thesis are given and some fundamental properties of Sturm-Liouville operator are examined.

In chapter two, Ambarzumyan's theorem for Sturm-Liouville eigenvalue problem with spectral parameter in boundary condition is expressed and proved.

In chapter three, Ambarzumyan's theorem for n - dimensional matrix valued Sturm-Liouville eigenvalue problem with spectral parameter in boundary condition is given.

Key Words: Ambarzumyan's Theorem, Characteristic Equation, Sturm-Liouville Operator.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$L_2[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$L_{2,\rho}[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında ρ ya göre karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\rho(T)$	: Rezolvent Cümlesi
$R_\lambda(T)$	: Rezolvent operatörü
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: n . özdeğer
$\sigma(T)$	: Spektrum
T^*	: Hilbert adjoint operator
C^N	: N . Mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1. (*Metrik Uzak*) X boştan farklı bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise bir metrik uzak denir. Bu özellikler; $\forall x, y, z \in X$ için

$$\text{M1)} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şeklindedir.

ÖRNEK 1.1. $L_2[a, b]$ uzayının elemanları $x(t), y(t), \dots$ şeklinde $[a, b]$ kapalı aralığında reel (veya kompleks) değerli, karesel anlamda integrallenebilen fonksiyonlardır. $x(t) \in L_2[a, b]$ olması için gerek ve yeter şart

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$$

olmasıdır. $L_2[a, b]$ uzayı; $\forall x(t), y(t) \in L_2[a, b]$ için

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

metriğine göre bir metrik uzaydır.

TANIM 1.2. (*Normlu Uzak*) X, K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzak olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzak denir. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ skaleri için

$$\text{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\text{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şeklindedir.

ÖRNEK 1.2. $L_2 [a, b]$ uzayı $f(x) \in L_2 [a, b]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

TANIM 1.3. (*Operatör*) Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir.

TANIM 1.4. (*Lineer Operatör*) Bir T lineer operatörü; $D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi birer vektör uzayı olan ve $\forall x, y \in D(T)$ ve her α skaları için;

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

özelliklerine sahip olan bir operatördür. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ şeklinde verilen bir lineer operatör olsun. $\forall x \in D(T)$ için;

$$\|T(x)\| \leq c \|x\| ,$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcut ise T operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan c sabitlerinin en küçüğüne T operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

TANIM 1.5. (Hilbert Uzayı) Bir iç çarpım uzayı (ya da bir ön-Hilbert uzayı), üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir H vektör uzayıdır. Burada iç çarpım $H \times H \rightarrow K$ şeklinde olan ve $\forall x, y, z \in H$ ve $\alpha \in K$ için

- 1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- 3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

şartlarını sağlayan, $\langle, \rangle$ gösterimine sahip olan bir dönüşümdür. Bir iç çarpım uzayı üzerindeki norm; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde tanımlanır. Eğer; H deki tüm Cauchy dizileri yakınsak (iç çarpım üzerindeki norma göre tam) ise H uzayına bir soyut Hilbert uzayı denir.

ÖRNEK 1.3. $H = L_{2,\rho}[a, b]$ bir Hilbert uzayıdır. $x(t) \in L_{2,\rho}[a, b]$ ise, $\rho(t) > 0$ integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty,$$

şeklinde olur. Bu uzayda iç çarpım $\forall x(t), y(t) \in L_{2,\rho}[a, b]$ için

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b \rho(t) x(t) \overline{y(t)} dt,$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1.4. $H = L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayın elemanları $f(x), g(x), \dots$ şeklinde $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel (veya kompleks) değerli, karesel integrallenebilen fonksiyonlardır. Bu uzayda iç çarpım ise $\forall f(x), g(x) \in L_2[a, b]$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır.

TANIM 1.6. (Rezolvent operatör, Regüler değer, Öz değer, Öz fonksiyon)

T, H Hilbert uzayında lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\lambda I - T$ operatörünü gözönüne alalım. Eğer $\lambda I - T$ operatörünün tersi mevcut ve sınırlı ise $\lambda, \rho(T)$ rezolvent cümlesinin bir elemanıdır denir. Bu şekildeki λ lar regüler değer adını alır. Ayrıca $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ operatörüne ise T operatörünün rezolvent operatörü denir. Bu şartı sağlamayan λ değerlerine T operatörünün bir öz değeri, bu öz değere karşılık gelen sıfırdan farklı çözüm fonksiyonuna ise T operatörünün öz fonksiyonu denir.

TANIM 1.7. (Spektrum) Regüler olmayan (singüler) tüm λ değerlerinin kümesine T operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ dir. Bir T operatörünün spektrumu üç gruba ayrılır ve bunlar şu şekilde adlandırılır:

1. $R_\lambda(T)$ mevcut değil ise $\sigma_p(T)$ kümesine diskret spektrum,
2. $R_\lambda(T)$ sınırlı değil ise $\sigma_c(T)$ kümesine sürekli spektrum,
3. $\sigma(T)$ nin geri kalan noktalarının kümesine ise $\sigma_r(T)$ artık spektrum (veya residual spektrum) denir.

TANIM 1.8. (*Başlangıç ve Sınır Koşulları*) Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir:

(i) *Sınır şartları*: Sınır şartları kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir.

$$\text{Dirichlet Sartı} : u|_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann Sartı} : \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g \text{ (veya } 0),$$

$$\text{Karışık (mixed) veya Robin Sartı} : \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$$

(ii) *Başlangıç şartları*: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyon ve bu fonksiyonun zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

TANIM 1.9. (*Sturm-Liouville Problemleri*) $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad (1.1.1)$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemdir. $r(x)$ fonksiyonuna ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki denklemin aşıkâr olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak, Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır. (1.1.1) denkleminde $r(x) = p(x) = 1$ olarak alınırsa

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

denklemi elde edilir.

Uygulamalarda sık sık kullanılan en temel operatörlerden birisi de $q(x)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferensiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş şart-

larla belirlenir. L operatörü için en önemli sınır şartları

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0,$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0,$$

şeklindedir.

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad (1.1.2)$$

denklemini ve

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0,$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0, \quad (1.1.3)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. (1.1.2)-(1.1.3) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir. (1.1.3) sınır şartını $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere

$$y(a) \cot \alpha + y'(a) = 0,$$

$$y(b) \cot \beta + y'(b) = 0, \quad (1.1.4)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ denilirse

$$y'(a) - hy(a) = 0,$$

$$y'(b) + Hy(b) = 0, \quad (1.1.5)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; H ve h sayıları da sonlu ise (1.1.2)-(1.1.5) problemine regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir.

TANIM 1.10. (*Ters Sturm-Liouville Problemi*)

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b], \quad q \in L_2[a, b]$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0, \quad \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0,$$

şeklindeki Sturm-Liouville probleminde, λ öz değeri verilip $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun bulunması isteniyorsa böyle bir probleme ters Sturm-Liouville problemi denir.

TANIM 1.11. (*Adjoint Operatör*) H_1 ve H_2 Hilbert uzaylar olmak üzere, $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. T nin T^* Hilbert adjoint operatörü $\forall x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle,$$

özelliğini sağlayan $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatördür. Eğer T operatörü için $T^* = T$ ise T operatörüne self-adjoint (kendine eşlenik) operatör denir. Bu durumda tanım bölgesindeki tüm x ve y fonksiyonları için

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T y \rangle$$

şeklindedir.

TANIM 1.12. (*Transpoz Matris*) Verilen bir matrisin satırlarını sütuna, sütunlarını da satıra yazmak suretiyle elde edilen matrise verilen matrisin transpoz denir.

TEOREM 1.1. İkinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklem Sturm-Liouville denklemi şeklinde yazılabilir.

İSPAT:

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y + \lambda a_3(x) y = 0$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemi gözönüne alınır. Bu diferensiyel denklemin Sturm-Liouville denklemi biçiminde olması için p nin

$$(p y')' = p y'' + p' y' = a_0(x) y'' + a_1(x) y',$$

yani $p(x) = a_0(x)$, $p'(x) = a_1(x)$ olması gerektiği açıktır. Fakat genellikle $a_0'(x) \neq a_1(x)$ olduğundan bu doğrudan yaklaşım her zaman mümkün değildir. Bu denklemin her iki tarafı $\mu = \mu(x)$ ile çarpılırsa

$$\mu(x) a_0(x) y'' + \mu(x) a_1(x) y' + \mu(x) a_2(x) y + \lambda \mu(x) a_3(x) y = 0,$$

denkleminin Sturm-Liouville tipi bir denklem olması için

$$p(x) = \mu(x) a_0(x),$$

$$p'(x) = \mu(x) a_1(x),$$

olması gerekir. Buradan p için

$$p'(x) = \frac{p(x)a_1(x)}{a_0(x)},$$

diferensiyel denklemi bulunur. Değişkenlerine ayrılabilen bu diferensiyel denklemin bir çözümü

$$p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx},$$

dir. Bu çözüm kullanılarak $\mu = \mu(x)$ çarpanı için

$$\mu = \frac{p(x)}{a_0(x)} = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx},$$

formülü elde edilir.

Demek ki, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemin Sturm-Liouville denklemi haline getirilebilmesi için, $a_0(x)$ ve $a_1(x)$ in $a < x < b$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $a_0(x) \neq 0$ olması gerekir. Bu durumda,

$$\left(e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y' \right)' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y + \lambda \frac{a_3(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0,$$

diferensiyel denklemi elde edilir ki bu Sturm-Liouville tipinde bir denklemdir.

TEOREM 1.2. Regüler Sturm-Liouville probleminin öz değerleri reeldir.

İSPAT:

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad a < x < b,$$

regüler Sturm-Liouville probleminin bir öz değeri λ , $\phi(x)$ ise bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Bu taktirde $\phi(x)$ fonksiyonu

$$L[\phi(x)] = \lambda r(x) \phi(x), \quad (1.1.6)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} a_1 \phi(a) + a_2 \phi'(a) &= 0, \\ b_1 \phi(b) + b_2 \phi'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

sınır koşullarını sağlar. (1.1.6) denkleminin ve (1.1.7) sınır koşullarının her iki tarafının kompleks eşleniği alınıp, p, q ve r nin reel fonksiyonlar ve a_1, a_2, b_1, b_2 nin reel sabitler olduğu göz önüne alınırsa

$$L [\bar{\phi}(x)] = \bar{\lambda} r(x) \bar{\phi}(x), \quad (1.1.8)$$

ve

$$a_1 \bar{\phi}(a) + a_2 (\bar{\phi})'(a) = 0,$$

$$b_1 \bar{\phi}(b) + b_2 (\bar{\phi})'(b) = 0,$$

elde edilir. Yani $\bar{\phi}, \bar{\lambda}$ öz değerine karşılık gelen öz fonksiyondur.

Şimdi (1.1.6) denkleminin her iki tarafı $\bar{\phi}(x)$, (1.1.8) denkleminin her iki tarafı $\phi(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve daha sonra bu ifadenin a dan b ye integrali alınırsa

$$\int_a^b \{ \bar{\phi}(x) L[\phi(x)] - \phi(x) L[\bar{\phi}(x)] \} dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx,$$

bulunur. Bu son bulunan denklemde

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = 0,$$

özdeşliği kullanılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx = 0,$$

dır. Böylece

$$\lambda = \bar{\lambda},$$

elde edilir. Bu λ nın reel olduğunu gösterir.

TEOREM 1.3. (1.1.2)-(1.1.3) Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerler-

ine karşılık gelen öz fonksiyonları ortogonaldır.

İSPAT: $\lambda_n \neq \lambda_m$ iki farklı özdeğer ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla u_n ve u_m olsun. $\langle u_n, u_m \rangle = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$-u_n'' + q(x)u_n = \lambda_n u_n,$$

$$-u_m'' + q(x)u_m = \lambda_m u_m,$$

denkleminde ilk denklem u_m ile ikinci denklem u_n ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$-u_n''u_m + u_m''u_n = (\lambda_n - \lambda_m)u_nu_m,$$

olup, her iki tarafın a dan b ye integrali alınır ve sınır koşulları uygulanırsa

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b u_nu_m dx = 0,$$

olur ve $\lambda_n \neq \lambda_m$ olmak üzere ortogonalite elde edilir.

2. SINIR KOŞULLARININ ÖZPARAMETRELERE BAĞLI OLDUĞU DURUMLARDA AMBARZUMYAN TEOREMİ

Bu çalışmada

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad [0, \pi], \quad (2.1)$$

Sturm-Liouville denklemi

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) + f(\lambda)y(\pi) = 0, \quad (2.2)$$

sınır şartlarıyla gözönüne alınacaktır. Bu klasik Sturm-Liouville özdeğer problemi görüntüsünden, sınır koşulunun π deki değerinin λ özparametresini içermesi yönünden farklıdır. Bu kısımda $q \in C[0, \pi]$ ve

$$f(\lambda) = a_1\sqrt{\lambda} + a_2\sqrt{\lambda}^2 + a_3\sqrt{\lambda}^3 + \dots + a_m\sqrt{\lambda}^m, \quad a_i \in \mathbb{R}, a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.3)$$

olarak alınacaktır. (2.1)-(2.2) sınır değer problemi $B = B(q, f(\lambda))$ ile gösterilirse B problemi için yalnızca özdeğerler $q(x)$ potansiyelini tek olarak belirlemez. B nin spektrumu ve normlaştırıcı sabitlerine veya klasik sınır koşullu iki problemin spektrumuna ihtiyaç duyulur.

2.1. Karakteristik Denklem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2.1.1)$$

probleminin $\phi_1(x, \lambda)$ çözümü

$$\phi_1(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \quad (2.1.2)$$

olup, $K(x, t)$, t ve x e bağlı sürekli kısmi türevlere sahiptir. Benzer olarak $\phi_2(x, \lambda)$

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (2.1.3)$$

probleminin çözümü olsun. $K(x, t)$ çekirdeği

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds \quad (2.1.4)$$

eşitliğini sağlar. (2.1.2) ye kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}\phi_1(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{K(x, x) \sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x K_t(x, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt, \\ \phi_1(\pi, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}\pi + \frac{K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt, \quad (2.1.5)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.2) ye türev uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}\phi_1'(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + K(x, x) \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x K_x(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \\ \phi_1'(\pi, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda}\pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \quad (2.1.6)\end{aligned}$$

bulunur. $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\phi_2(x, \lambda)$ (2.1) in temel çözümleridir. Bu yüzden (2.1) denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 nin keyfi sabit olduğu yerde

$$\phi(x, \lambda) = c_1 \phi_1(x, \lambda) + c_2 \phi_2(x, \lambda),$$

formuna sahiptir. Eğer $\phi(x, \lambda)$, B probleminin bir çözümü ise $c_2 = 0$ dır. Çünkü $\phi(x, \lambda)$, B probleminin bir çözümü ise $\phi'(0, \lambda) = 0$ dır. Bu ise

$$c_1 \phi_1'(0, \lambda) + c_2 \phi_2'(0, \lambda) = 0,$$

olması anlamına gelir. (2.1.1) den $\phi_1'(0, \lambda) = 0$ olduğundan $c_2 = 0$ dır. Böylece

$$\phi(x, \lambda) = c_1 \phi_1(x, \lambda)$$

dır. (2.2) den λ nın B probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\phi_1'(\pi, \lambda) + f(\lambda) \phi_1(\pi, \lambda) = 0 \quad (2.1.7)$$

olmasıdır. (2.1.5) ve (2.1.6), (2.1.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}& -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda}\pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt \\ & + f(\lambda) \left[\cos \sqrt{\lambda}\pi + \frac{K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt \right] = 0\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
W(\lambda) = & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + f(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^{\pi} K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \\
& + \frac{f(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} \pi K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = 0
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

elde edilir. Bu yüzden $W(\lambda)$ nın sıfırları B probleminin öz değerleridir.

2.2. Teklik Teoremi

B probleminin özdeğerlerinin kümesi $\sigma_p(q)$ olsun.

LEMMA 2.1.

1) $m = 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{\int_0^{\pi} q(x) dx}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.2.1}$$

dir.

2) $m = 2$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^{\pi} q(x) dx - \frac{2}{a_2}}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.2.2}$$

dir.

3) $m \geq 3$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^{\pi} q(x) dx}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.2.3}$$

dir.

Bu üç durumda da $0 \in \sigma_p(0)$ dir. (Yang ,C. F. ve Yang, X. P. , 2011)

İSPAT:

(2.1.8) den görülür ki; λ nın, B probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + f(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^{\pi} K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \\
& + \frac{f(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} \pi K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = 0
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

olmasıdır.

1) $m = 1$ için (2.2.4) den

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi + a_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \\ & + a_1 \sin \sqrt{\lambda} \pi K(\pi, \pi) - a_1 \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = 0 \end{aligned}$$

dır. Yani

$$\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi = a_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + a_1 \sin \sqrt{\lambda} \pi K(\pi, \pi) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \pi}}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

dır. Böylece

$$\tan \sqrt{\lambda} \pi = a_1 + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda}} \tan \sqrt{\lambda} \pi K(\pi, \pi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

elde edilir. Bu ise

$$\tan \sqrt{\lambda} \pi - a_1 = \frac{(1 + a_1^2)K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

olduğunu verir. Trigonometrik özdeşliklerin uygulanmasından

$$\tan \sqrt{\lambda} \pi - a_1 = \tan(\sqrt{\lambda} \pi - \arctan a_1)(1 + a_1 \tan \sqrt{\lambda} \pi),$$

$$\begin{aligned} \tan(\sqrt{\lambda} \pi - \arctan a_1) &= (1 + a_1 \tan \sqrt{\lambda} \pi)^{-1} \left(\frac{(1 + a_1^2)K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \\ &= \frac{1}{(1 + a_1^2)} \left[\frac{(1 + a_1^2)K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \\ &= \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\arctan \left[\tan \left(\sqrt{\lambda} \pi - \arctan a_1 \right) \right] = \arctan \left[\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

$$\sqrt{\lambda} \pi - \arctan a_1 = n\pi + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n} \pi} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}\pi} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \\ \sqrt{\lambda_n} &= n \left[1 + \frac{\arctan a_1}{n\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}n\pi} + O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right) \right] \\ \sqrt{\lambda_n} &= n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{n} &= 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}\tag{*}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{n} = 1 + \frac{\arctan a_1}{n\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}n\pi} + O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right),$$

(*) dan

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]}$$

veya

$$\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} &= \frac{1}{n} \left[1 + \frac{\arctan a_1}{n\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}n\pi} + O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{\arctan a_1}{n^2\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}n^2\pi} + O\left(\frac{1}{n^2\lambda_n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

olup,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

alınırsa

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ &= n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{\int_0^\pi q(x)dx}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

bulunur.

2) $m = 2$ için (2.2.4) den

$$\begin{aligned}\cot \sqrt{\lambda} \pi &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{f(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a_m \sqrt{\lambda}^m} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{a_m \sqrt{\lambda}^{m-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

olup $m = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\cot \sqrt{\lambda} \pi &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{a_2 \sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{a_2} - K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\operatorname{arccot}(\cot \sqrt{\lambda} \pi) = \operatorname{arccot} \left[\frac{\frac{1}{a_2} - K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

$$\sqrt{\lambda} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\sqrt{\lambda_n} \pi} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

dır. Bir önceki metotla

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\sqrt{\lambda_n} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)}\right) \right]$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (**)$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{n + \frac{1}{2}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{n + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\sqrt{\lambda_n} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)}\right)$$

(**) dan

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]}$$

$n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} &= \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left[1 + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\sqrt{\lambda_n} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi q(x) dx - \frac{2}{a_2}}{(2n + 1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

3) $m = 3$ olması durumunda (2.2.4) yardımıyla

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \int_0^\pi \frac{q(x) dx}{(2n + 1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğu görülebilir.

4) $m = 4$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \cot \sqrt{\lambda} \pi &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{f(\lambda)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1 \sqrt{\lambda} + a_2 \lambda + a_3 \sqrt{\lambda}^3 + a_4 \lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{a_1 + a_2 \sqrt{\lambda} + a_3 \lambda + a_4 \sqrt{\lambda}^3} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}^3}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\lambda_n} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n} \pi} + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)}\right)\right]$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left[1 + \frac{K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n} \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{\lambda_n \left(n + \frac{1}{2}\right)}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi q(x) dx}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Buradan $m \geq 3$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi q(x) dx}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dir.

LEMMA 2.2. $f : [a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olsun.

Bu durumda

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0,$$

dır. (Yang, C. F. ve Yang, X. P. , 2011)

TEOREM 2.3. $\sigma_p(q) = \sigma_p(\tilde{q})$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\pi [q(x) - \tilde{q}(x)] dx = 0,$$

dır. (Yang, C. F. ve Yang, X. P. ,2011)

İSPAT: $\lambda_n, \sigma_p(q)$ nun bir özdeğeri olsun. $\sigma_p(q) = \sigma_p(\tilde{q})$ olduğundan $\lambda_n \in \sigma_p(\tilde{q})$

dır. Böylece (2.1.8) den

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \pi + f(\lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\ & + \frac{f(\lambda_n) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi K(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ve

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} \pi + f(\lambda_n) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \tilde{K}(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi \tilde{K}_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\ & + \frac{f(\lambda_n) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \tilde{K}(\pi, \pi)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi \tilde{K}_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

elde edilir. Son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi \left[K_x(\pi, t) - \tilde{K}_x(\pi, t) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\ & + \frac{f(\lambda_n) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi}{\sqrt{\lambda_n}} \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi \left[K_t(\pi, t) - \tilde{K}_t(\pi, t) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

olup Lemma 2.2 den

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left(\cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right) = 0$$

dır.

I. Durum

$m = 1$ ise

$$\begin{aligned}
&= \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left(\cos \sqrt{\lambda_n} \pi + a_1 \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right) = 0 \\
&= \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos(n\pi + \arctan a_1) + a_1 \sin(n\pi + \arctan a_1)] = 0 \\
&= \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos n\pi \cos(\arctan a_1) - \sin n\pi \sin(\arctan a_1) \\
&\quad + a_1 \sin n\pi \cos(\arctan a_1) + a_1 \cos n\pi \sin(\arctan a_1)] = 0 \\
&= (-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos(\arctan a_1) + a_1 \sin(\arctan a_1)] = 0
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan a_1) &= \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}} \\
\sin(\arctan a_1) &= \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}} + \frac{a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}} \right) \\
&= (-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \sqrt{1+a_1^2}
\end{aligned}$$

dir. $n \rightarrow \infty$ için $K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi [q(x) - \tilde{q}(x)] dx = 0$$

dır.

II. Durum

$m > 1$ ise (2.2.7) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)}$ ile çarpılarak bu eşitlik

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)} \cos \sqrt{\lambda_n} \pi \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)} \int_0^\pi \left[K_x(\pi, t) - \tilde{K}_x(\pi, t) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\
&+ \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] - \int_0^\pi \left[K_t(\pi, t) - \tilde{K}_t(\pi, t) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0 \quad (2.2.8)
\end{aligned}$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada 2. ve 4. ifade Lemma 2.2 den sıfırdır.

$m = 2$ olsun;

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \pi \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] + \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] = 0$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right] = 0$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] & \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \left(\cos n\pi \cos \frac{\pi}{2} - \sin n\pi \sin \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + \sin n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos n\pi \sin \frac{\pi}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$(-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] = 0$$

$n \rightarrow \infty$ için $K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) = 0$ olduğundan

$$\int_0^\pi [q(x) - \tilde{q}(x)] dx = 0,$$

dır.

TEOREM 2.4. $q(x) \in C[0, \pi]$ ve $\sigma_p(q) = \sigma_p(0)$ olsun. Bu durumda $[0, \pi]$ aralığında $q(x) = 0$ dır.

İSPAT:

Hipotezden

$$\int_0^\pi q(x) dx = 0 \tag{2.2.9}$$

dır. U_1 , 0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. (2.1) ve (2.2) den

$$-U_1'' + q(x)U_1 = 0$$

$$U_1'(0) = U_1'(\pi) = 0 \tag{2.2.10}$$

olur. $U_1(0) \neq 0$ ve $U_1(\pi) \neq 0$ dır. Aksi halde eğer $U_1(0) = 0 = U_1'(0)$ veya $U_1(\pi) = 0 = U_1'(\pi)$ ise başlangıç değer problemlerinin çözümünün teklik teoreminden $U_1(x) = 0$, $[0, \pi]$ elde edilir. Bu ise $U_1(x)$ in 0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olmasıyla çelişir. $U_1(x)$ in $[0, \pi]$ de çoğu sonlu birçok ayrıık sıfıra sahip olduğu

ispatlanacaktır. Aksi halde $\hat{x}$, $U_1(x)$ in sıfırlarının bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $U_1(\hat{x}) = U_1'(\hat{x})$ doğru olur ki bu başlangıç değer problemlerinin çözümünün tekliği teoreminden imkansızdır. Böylece

$$G = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \quad x_i \in (0, \pi), \quad U_1(x_i) = 0\}, G = 0$$

dır. (2.2.10) dan görülür ki eğer $U_1(x_i) = 0$ ise $U_1''(x_i) = 0$ dır. Fakat $U_1'(x_i) \neq 0$ dır. Böylece $\frac{U_1''(x)}{U_1(x)}$ fonksiyonunun $x = x_i$ deki değeri sonludur. (2.2.9) ve (2.2.10) da kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\int_0^\pi \frac{U_1''(x)}{U_1(x)} dx = \int_0^\pi q(x) dx = 0$$

dır. Yani

$$\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \left[\frac{U_1'(x)}{U_1(x)} \right]^2 dx = 0$$

sonucu çıkar. Bu ise

$$\int_0^\pi \left| \frac{U_1'(x)}{U_1(x)} \right|^2 dx = 0$$

anlamına gelir. Böylece $U_1(x) = c \neq 0$ dır. (2.1.1) denkleminde $U_1(x)$ yerine c yazılırsa

$$-c'' + q(x)c = 0, \quad [0, \pi]$$

elde edilir. Böylece $q(x) = 0$ dır.

3.SINIR KOŞULLARINDA ÖZ DEĞERLERİN OLDUĞU n-BOYUTLU MATRİS DENKLEMLERİ İÇİN AMBARZUMYAN TEOREMİ

Bu kısımda

$$\begin{aligned} -Y'' + Q(x)Y &= \lambda Y, [0, \pi] \\ Y(0) &= I_n, Y'(0) = 0_n \\ Y'(\pi) + f(\lambda)Y(\pi) &= 0_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

öz değer problemi gözönüne alınacaktır. Burada

$$f(\lambda) = a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots + a_m\mu^m, \mu = \sqrt{\lambda}$$

$Q(x)$; $n \times n$ tipinde, reel ve simetrik bir matris, $Y(x)$; $n \times n$ tipinde bir matris, I_n n boyutlu birim matris ve 0_n sıfır matrisidir.

$$\begin{aligned} -Y'' + Q(x)Y &= \lambda Y \\ Y(0) &= I_n, Y'(0) = 0_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

probleminin $\varphi_1(x, \lambda)$ çözümü,

$$\varphi_1(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x I_n + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt$$

dir. Burada $K(x, t)$; $n \times n$ tipinde, reel ve simetrik bir matris fonksiyonudur. Benzer şekilde $\varphi_2(x, \lambda)$

$$\begin{aligned} -Y'' + Q(x)Y &= \lambda Y \\ Y(0) &= 0_n, Y'(\pi) = I_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

probleminin bir çözümü olsun. $\varphi_1(x, \lambda)$ ya kısmi integrasyon uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}x I_n + K(x, x) \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x K_t(x, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt, \\ \varphi_1(\pi, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}\pi I_n + K(\pi, \pi) \frac{\sin \sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda}t dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\varphi_1(x, \lambda)$ nın türetilmesiyle de

$$\varphi_1'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x I_n + K(x, x) \cos \sqrt{\lambda}x + \int_0^x K_x(x, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt,$$

$$\varphi_1'(\pi, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt,$$

elde edilir. $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ (3.1) in temel çözümleridir. Bu yüzden (3.1) in genel çözümünü c_1 ve c_2 nin keyfi sabit olduğu yerde

$$\varphi(x, \lambda) = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda)$$

formuna sahiptir. Eğer $\varphi(x, \lambda)$ (3.1) probleminin çözümü ise $c_2 = 0$ dir. Çünkü $\varphi(x, \lambda)$ (3.1) probleminin çözümü ise $\varphi'(0, \lambda) = 0_n$ olup $\varphi'(0, \lambda) = c_1 \varphi_1'(0, \lambda) + c_2 \varphi_2'(0, \lambda) = 0_n$ dir. $\varphi_1'(0, \lambda)$ (3.2) den dolayı 0_n olacağından $c_2 \varphi_2'(0, \lambda) = 0_n$ olup $c_2 = 0$ dir. Böylece

$$\varphi(x, \lambda) = c_1 \varphi_1(x, \lambda)$$

olur. λ nın (3.1) in bir öz değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\varphi_1'(\pi, \lambda) + f(\lambda) \varphi_1(\pi, \lambda) = A(\lambda) \quad (3.6)$$

matrisinin singüler olması veya başka bir ifadeyle $\det A(\lambda) = 0$ olmasıdır. (3.4) ve (3.5), (3.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \\ & f(\lambda) \left[\cos \sqrt{\lambda} \pi I_n + \frac{K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] = 0_n \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Yani (3.7) nin sıfırları (3.1) probleminin öz değerleridir.

3.1. Matris Değerli Sturm-Liouville Operatörü İçin Teklik Teoremi

$\sigma_p(Q)$, (3.1) probleminin öz değerlerinin bir dizisi olsun.

LEMMA 3.1. Eğer;

1) $m = 1$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.1.1)$$

2) $m = 2$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx - \frac{2}{a_2}}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

3) $m \geq 3$ ise $n \rightarrow \infty$ için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

dir.

İSPAT:

λ , nm (3.1) in bir öz değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \\ & + f(\lambda) \left[\cos \sqrt{\lambda} \pi I_n + \frac{K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] = 0_n \end{aligned}$$

olmasıdır.

1) $m = 1$ olması halinde

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + a_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi I_n \\ & + a_1 K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda} \pi - a_1 \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = 0_n \end{aligned}$$

dir. Yani

$$\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi I_n = a_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda} \pi + a_1 K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda} \pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

dir. $\sqrt{\lambda} = \mu$ olduğundan

$$\mu \sin \mu \pi I_n = a_1 \mu \cos \mu \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \mu \pi + a_1 K(\pi, \pi) \sin \mu \pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

dir. (Her taraf $\mu \cos(\mu \pi)$ ye bölünürse)

$$\tan \mu \pi I_n = a_1 I_n + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{a_1 K(\pi, \pi) \tan \mu \pi}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$(\tan \mu\pi - a_1) I_n = \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{a_1 K(\pi, \pi) \tan \mu\pi}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$\mu \rightarrow \infty$ olması halinde $\tan(\mu\pi) \cong a_1$ olduğundan

$$(\tan \mu\pi - a_1) I_n = \frac{(1 + a_1^2) K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} (\tan \mu\pi - a_1) = \frac{(1 + a_1^2)}{\mu} \begin{bmatrix} K_{11}(\pi, \pi) & K_{12}(\pi, \pi) & \dots & K_{1n}(\pi, \pi) \\ K_{21}(\pi, \pi) & K_{22}(\pi, \pi) & \dots & K_{2n}(\pi, \pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(\pi, \pi) & K_{n2}(\pi, \pi) & \dots & K_{nn}(\pi, \pi) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olup K nın köşegen dışındaki tüm elemanları 0 ve

$$\begin{aligned} \tan \mu\pi - a_1 &= \frac{(1 + a_1^2) K_{11}(\pi, \pi)}{\mu} \\ \tan \mu\pi - a_1 &= \frac{(1 + a_1^2) K_{22}(\pi, \pi)}{\mu} \\ &\vdots \\ \tan \mu\pi - a_1 &= \frac{(1 + a_1^2) K_{nn}(\pi, \pi)}{\mu} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\tan \mu\pi - a_1 = \frac{(1 + a_1^2) K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

dir. Trigonometrik özdeşliklerin uygulanmasından

$$\begin{aligned} \tan \mu\pi - a_1 &= \tan(\mu\pi - \arctan a_1) (1 + a_1 \tan \mu\pi) \\ &= \frac{\tan \mu\pi - a_1}{1 + a_1 \tan \mu\pi} (1 + a_1 \tan \mu\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\mu\pi - \arctan a_1) &= (1 + a_1 \tan \mu\pi)^{-1} \left[\frac{(1 + a_1^2) K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{1 + a_1^2} \right) \left[\frac{(1 + a_1^2) K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \right] \\ &= \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\arctan [\tan (\mu \pi - \arctan a_1)] = \arctan \left[\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \right]$$

$$\mu \pi - \arctan a_1 = n \pi + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\mu_n = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu_n \pi} + O\left(\frac{1}{\mu_n^2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ olduğundan}$$

$$\mu_n = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{K(\pi, \pi)}{n \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\arctan a_1}{\pi} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx}{2n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dir.

2) $m = 2$ için

$$\begin{aligned} & -\mu \sin \mu \pi I_n + K(\pi, \pi) \cos \mu \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \mu t dt \\ & + f(\lambda) \left[\cos \mu \pi I_n + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} \sin \mu \pi - \frac{1}{\mu} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \mu t dt \right] = 0_n \end{aligned}$$

ifadesinde (her taraf $f(\lambda) \sin(\mu \pi)$ ye bölünürse)

$$-\frac{\mu I_n}{f(\lambda)} + \frac{K(\pi, \pi) \cot \mu \pi}{f(\lambda)} + \cot \mu \pi I_n + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) = 0_n,$$

$$\cot \mu \pi I_n = -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{\mu I_n}{a_m \mu^m} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

elde edilir. $m = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} \cot \mu \pi I_n &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{\mu I_n}{a_2 \mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \\ &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{I_n}{a_2 \mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \\ &= \frac{\frac{I_n}{a_2} - K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cot \mu \pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2 \mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2 \mu} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_2 \mu} \end{bmatrix}_{n \times n} - \begin{bmatrix} \frac{K_{11}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{12}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{1n}(\pi, \pi)}{\mu} \\ \frac{K_{21}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{22}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{2n}(\pi, \pi)}{\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{K_{n1}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{n2}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{nn}(\pi, \pi)}{\mu} \end{bmatrix}$$

$$\cot \mu \pi = \frac{\frac{1}{a_2} - K_{11}(\pi, \pi)}{\mu}$$

$$\cot \mu \pi = \frac{\frac{1}{a_2} - K_{22}(\pi, \pi)}{\mu}$$

.

.

.

$$\cot \mu \pi = \frac{\frac{1}{a_2} - K_{nn}(\pi, \pi)}{\mu}$$

olup sonuçta

$$\cot \mu \pi = \frac{\frac{1}{a_2} - K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\operatorname{arccot}(\cot \mu \pi) = \operatorname{arccot}\left(\frac{\frac{1}{a_2} - K(\pi, \pi)}{\mu}\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\mu \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\mu_n = n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\mu_n \pi} + O\left(\frac{1}{\mu_n^2}\right)$$

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mu_n &= n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi) - \frac{1}{a_2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx - \frac{2}{a_2}}{(2n + 1) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

3) $m = 3$ olması durumunda

$$\begin{aligned}
\cot \mu \pi I_n &= -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{\mu I_n}{a_m \mu^m} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \\
&= -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + \frac{\mu I_n}{a_3 \mu^3} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \\
&= -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cot \mu \pi = - \begin{bmatrix} \frac{K_{11}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{12}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{1n}(\pi, \pi)}{\mu} \\ \frac{K_{21}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{22}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{2n}(\pi, \pi)}{\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{K_{n1}(\pi, \pi)}{\mu} & \frac{K_{n2}(\pi, \pi)}{\mu} & \dots & \frac{K_{nn}(\pi, \pi)}{\mu} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\begin{aligned}
\cot \mu \pi &= -\frac{K_{11}(\pi, \pi)}{\mu} \\
\cot \mu \pi &= -\frac{K_{22}(\pi, \pi)}{\mu} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\cot \mu \pi &= -\frac{K_{nn}(\pi, \pi)}{\mu}
\end{aligned}$$

olup

$$\cot \mu \pi = -\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\operatorname{arccot}(\cot \mu \pi) = \operatorname{arccot}\left[-\frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\mu \pi &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \\
\mu_n &= n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu_n \pi} + O\left(\frac{1}{\mu_n^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu_n &= n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi)}{\mu_n \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= n + \frac{1}{2} + \frac{K(\pi, \pi)}{(n + \frac{1}{2}) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi Q(x) dx}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

bulunur.

TEOREM 3.2. $\sigma_p(Q) = \sigma_p(\tilde{Q})$ olsun.

$$\int_0^\pi [Q(x) - \tilde{Q}(x)] dx = 0_n$$

dir.

İSPAT:

$\lambda_n, \sigma_p(Q)$ nun bir öz değeri olsun. $\sigma_p(Q) = \sigma_p(\tilde{Q})$ olduğundan $\lambda_n \in \sigma_p(\tilde{Q})$ dır. Böylece (3.7) den

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\lambda_n} I_n \sin \sqrt{\lambda_n} \pi + f(\lambda_n) I_n \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + K(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi K_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\
& + \frac{f(\lambda_n) K(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi K_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0_n \quad (3.1.2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\lambda_n} I_n \sin \sqrt{\lambda_n} \pi + f(\lambda_n) I_n \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \tilde{K}(\pi, \pi) \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi \tilde{K}_x(\pi, t) \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\
& + \frac{f(\lambda_n) \tilde{K}(\pi, \pi) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi \tilde{K}_t(\pi, t) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0_n \quad (3.1.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.2) den (3.1.3) ün çıkarılmasıyla

$$\begin{aligned}
& [K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi)] \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \int_0^\pi [K_x(\pi, t) - \tilde{K}_x(\pi, t)] \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\
& + \frac{f(\lambda_n) \sin \sqrt{\lambda_n} \pi}{\sqrt{\lambda_n}} [K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi)] - \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^\pi [K_t(\pi, t) - \tilde{K}_t(\pi, t)] \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0_n \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

bulunur.

I. Durum

(3.1.4) de 2. ve 4. ifade Riemann Lebesque lemmasından dolayı sıfırdır.

Dolayısıyla

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \frac{f(\lambda_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right] = 0_n,$$

dir.

$m = 1$ için

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\cos \sqrt{\lambda_n} \pi + a_1 \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right] = 0_n,$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos(n\pi + \arctan a_1) + a_1 \sin(n\pi + \arctan a_1)] = 0_n,$$

$$\begin{aligned} & \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos n\pi \cos(\arctan a_1) - \sin n\pi \sin(\arctan a_1) \\ & + a_1 \sin n\pi \cos(\arctan a_1) + a_1 \cos n\pi \sin(\arctan a_1)] = 0_n \end{aligned}$$

$\cos n\pi = (-1)^n$ olduğundan bu ifade

$$(-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] [\cos(\arctan a_1) + a_1 \sin(\arctan a_1)] = 0_n$$

$$\cos(\arctan a_1) = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}, \sin(\arctan a_1) = \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}} \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}} + \frac{a_1^2}{\sqrt{1+a_1^2}} \right) &= 0_n \\ (-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \sqrt{1+a_1^2} &= 0_n \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için $K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) = 0_n$ olduğundan

$$\int_0^\pi [Q(x) - \tilde{Q}(x)] dx = 0_n,$$

dir.

II. Durum.

(3.1.4) eşitliği $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)}$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)} \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{f(\lambda_n)} \int_0^\pi \left[K_x(\pi, t) - \tilde{K}_x(\pi, t) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\ & + \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} \pi - \int_0^\pi \left[K_t(\pi, t) - \tilde{K}_t(\pi, t) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0_n \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $m > 1$ için $m = 2$ olsun:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} \pi \\ & + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \int_0^\pi \left[K_x(\pi, t) - \tilde{K}_x(\pi, t) \right] \cos \sqrt{\lambda_n} t dt \\ & + \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} \pi - \int_0^\pi \left[K_t(\pi, t) - \tilde{K}_t(\pi, t) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} t dt = 0_n \end{aligned}$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} \pi + \sin \sqrt{\lambda_n} \pi \right] = 0_n$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] = 0_n$$

$$\left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1 \sqrt{\lambda_n} + a_2 \lambda_n} (\cos n\pi \cos \frac{\pi}{2} - \sin n\pi \sin \frac{\pi}{2}) + \sin n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos n\pi \sin \frac{\pi}{2} \right] = 0_n$$

$$(-1)^n \left[K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) \right] = 0_n$$

$n \rightarrow \infty$ için $K(\pi, \pi) - \tilde{K}(\pi, \pi) = 0_n$ olduğundan

$$\int_0^\pi \left[Q(x) - \tilde{Q}(x) \right] dx = 0_n,$$

dir.

TEOREM 3.3. $Q(x) \in C[0, \pi]$ ve $\sigma_p(Q) = \sigma_p(0_n)$ olsun. Bu durumda $[0, \pi]$ de $Q(x) = 0_n$ dir.

İSPAT: Teorem 2.3 yardımıyla

$$\int_0^{\pi} [q_{ij} - 0_{ij}] dx = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

yani

$$\int_0^{\pi} q_{ij}(x) dx = 0$$

dir. Lemma 2.1 den $0 \in \sigma_p(0) = \sigma_p(Q)$ olduğu görülür.

0, (2.1) öz değer probleminin ilk öz değeri olduğundan $y_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ile gösterilen ve aynı 0 öz değerine karşılık gelen n tane lineer bağımsız sabit vektör bulunabilir. Bunlar esas diferensiyel denklemi sağladığından

$$-y_j'' + Q(x)y_j = \lambda y_j, \quad \lambda = 0$$

$$Q(x)y_j = 0_n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

elde edilir. Böylece

$$Q(x) \equiv 0_n,$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.SONUÇ

2011 yılında Yang C.F ve Yang X.P sınır koşullarının özparametrelere bağlı olduğu Sturm-Liouville özdeğer problemi için Ambarzumyan teoremini incelemişlerdir. Burada Yang ve Yang'ın çalışması esas alınmıştır.

Birinci bölümde tez içerisinde kullanılan tanım ve teoremlere yer verilerek Sturm-Liouville operatörü tanıtılmış ve bu operatörün bazı temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde sınır koşullarında özparametre bulunduran Sturm-Liouville özdeğer problemi için Ambarzumyan teoremi ifade ve ispat edilmiş , böyle problemler için Teklik teoremi ispatlanmış ve özdeğerlerin bulunmasına ilişkin karakteristik denklem incelenmiştir..

Üçüncü bölümde sınır koşullarında özparametre bulunduran n boyutlu matris Sturm-Liouville denklemi için Ambarzumyan teoremi ve Teklik teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Ambartsumyan, V. A.,** 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, *Zeitschrift für Physik*, 53, 690-695
- Bayraktar, M.,** 2006. Fonksiyonel Analiz, *Fersa Matbaacılık*.
- Carlson, R. and Pvovarchik, V. N.,** 2007. Ambarzumian's theorem for trees, *Electronic Journal of Differential Equations*, 142, 1-9.
- Chakravarty, N. K. and Acharyya, S. K.,** 1988. On an extension of the theorem of V. A. Ambarzumyan, *Proceeding of the Royal Society of Edinburg*, 110A, 79-84.
- Chern, H. H. and Shen, C. L.,** 1997. On the n -dimensional Ambarzumyan's theorem, *Inverse Problems*, 13, 15-18.
- Chern, H. H., Law, C. K. and Wang, H. J.,** 2001. Extension of Ambarzumyans theorem to general boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, 333-342.
- Freiling, G. and Yurko, V. A.,** 2001. Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, *Nova Science Publishers*.
- Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh.,** 1981. The determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademik Nauk Azerbaijan SSR*, 37(2), 19-23
- Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M.,** 1951. On the determination of a differential equation from its spectral function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, 15, 4 309-360; 1955 translated in American Mathematical Society Translate, 1, 253.
- Guseinov, G. Sh.,** 1985. On spectral analysis of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Soviet Mathematic Doklady*, 32, 859-862

- Horvath, M.**, 2001. On a theorem of Ambarzumyan, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 131(A), 899-907 .
- Hoschtadt, H. and Lieberman, B.**, 1978. An Inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34, 4 676-680.
- Hryniv, R. and Pronska, N.**, 2012. Inverse spectral problems for energy dependent Sturm-Liouville equations, *Inverse Problems*, 28, 085008 .
- Jaulent, M. and Jean, C.**, 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*, 28, 177-220 .
- Koyunbakan, H.**, 2006. A new inverse problem for the diffusion operator, *Applied Mathematics Letters*, 19(10), 995-999
- Koyunbakan, H. and Panakhov, E. S.**, 2007. Half inverse problem for diffusion operators on the finite interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326, 1024-1030
- Koyunbakan, H., Lesnic, D. and Panakhov, E. S.**, 2012. Ambarzumyan type theorem for a quadratic Sturm-Liouville operator, *Turkish Journal of Science and Technology*.
- Levitan, B. M.**, 1964. Determination of a Sturm-Liouville differential equation in terms of the two spectra, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya*, 28, 1 63-78.
- Levitan, B. M and Sargsjan, I. S.**, 1975. Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators, *American Mathematical Society*, Providence, Rhode Island.
- Nabiev, I. M.**, 2007. The inverse quasiperiodic problem for a diffusion operator, *Doklady Mathematics*, 76, 527-529 .
- Pöschel, J. and Trubowitz, E.**, 1987. Inverse Spectral Theory, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc, Boston, MA.

- Shen, C. L.**, 2007. On some inverse spectral problems related to the Ambarzumyan problem and the dual string of the string equation, *Inverse Problems*, 23, 2417--2436 .
- Shieh, C. T., Buterin, S. A. and Ignatiev, M.**, 2011. On Hoschtadt-Lieberman theorem for Sturm Liouville operators, *Far East Journal of Applied Mathematics*, 52 2 131-146.
- Soykan, Y.**, 2008. Fonksiyonel Analiz, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara.
- Şuhubi, E. S.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, *İTÜ Vakfı Yayınları*, İstanbul.
- Uluçay, C.**, 1978. Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, *Türkiye Cumhuriyeti Karadeniz Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayınları*, Trabzon.
- Wang, Y. P.**, 2012. Borg-type theorem for the missing eigenvalue problem, *Applied Mathematic Letters*, 26(4), 452-456.
- Yang, C. F. and Yang, X. P.**, 2009. Some Ambarzumyan type theorems for Dirac operators, *Inverse Problems*, 25(9) 1-12 .
- Yang, C. F., Huang, Z. Y. and Yang, X.P.**, 2010. Ambarzumyan's theorems for vectorial Sturm-Liouville systems with coupled boundary conditions, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 14(4), 1429-1437.
- Yang, C. F. and Yang, X. P.**, 2011. Ambarzumyan's theorem with eigenparameter in the boundary conditions, *Acta Mathematica Scientia*, 31(4) 1561-1568
- Yang, C. F.**, 2012. Trace formulae for the matrix Schrödinger equation with energy-dependent potential, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 393,526-533

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Malatya'da doğdum ilk, orta ve lise öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 2007 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde başladığım lisans öğrenimimi, bir yıl Fırat Üniversitesi'nde devam ettikten sonra 2011 yılında İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen aynı anabilim dalında tezli yüksek lisans yapmaktayım.