

**ÖKLİD UZAYINDA KÜRENİN
HİPERYÜZEYLERİ**

Hüseyin Ali ÇATALTAŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ
OCAK-2014**

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA KÜRENİN HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hüseyin Ali ÇATALTAŞ
(091121108)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

ELAZIĞ -2014

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA KÜRENİN HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hüseyin Ali ÇATALTAŞ
(091121108)

Tezin enstitüye verildiği tarih: 27/01/2014

Tezin savunulduğu tarih:04/02/2014

Tez Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Vedat Asil (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr.Tayfun Tutak(F.Ü)

ELAZIĞ -2014

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan, çalışmanın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli hocam sayın **Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ**' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hüseyin Ali ÇATALTAŞ

ELAZIĞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
SEMBOLLER LİSTESİ.....	V
I. BÖLÜM	
1.1. Temel Kavramlar.....	1
1.2. Minimal Altmanifodlar.....	6
1.3. Stokes Tipinde Klasik Teoremler.....	11
II. BÖLÜM	
2.1. Giriş.....	13
2.2. Kürede Hiperyüzey	13
2.3. Sabit Ortalama Eğrilikli Hiperyüzeyler.....	16
2.4. Temel Teoremin İspatı.....	17
III. BÖLÜM	
3.1. Bazı Operatörler.....	20
3.2. Bazı İntegral Formülleri	22
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ.....	27

ÖZET

ÖKLİD UZAYINDA KÜRENİN HİPERYÜZEYLERİ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde, bir kürede kompakt hiperyüzeyler için gerekli koşullar verildi.

Üçüncü bölümde ise bazı integral formülleri verildi.

Anahtar Kelimeler : Kompakt hiperyüzeyler, Destek Fonksiyonu ve İntegral Formülleri

SUMMARY

SPACE SPHERE IN EUCLID'S HYPERSURFACES

This thesis consists of three parts.

In the first section, some basic definitions that will be used in later chapters were given.

In the second part, a sphere was given the necessary conditions for compact hypersurfaces.

In the third section was given some integral formulas.

Keywords: Compact hypersurfaces, Support Functions and Integral Formulas

SİMGELER LİSTESİ

Z :Paralel birim vektör alını

M :Hiperyüzey

S^{n+1} :Birim küre

Z^T :Teğet izdüşümü

∇ :Riemann konneksiyonu

$grad$:Gradient operatörü

ρ :Destek fonksiyonu

div :Divergens operatörü

C^∞ :Diferansiyellenebilir fonksiyon cümlesi

$\mathcal{X}(M)$:Vektör alanlarının cümlesi

Δ : Laplace operatörü

α : Ortalama eğrilik

H_p :Hessian fonsiyonu

BİRİNCİ BÖLÜM

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 Öklid metriği (İç Çarpım): V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bir $\psi: V \times V \longrightarrow R$ fonksiyonu aşağıda ki koşulları sağlarsa ψ ye V üstünde bir iç çarpım fonksiyonu denir.

i) ψ bilinear formdur:

$$\forall a_1, a_2 \in R \text{ ve } \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V \text{ için}$$

$$\psi(a_1 x_1 + a_2 x_2, y) = a_1 \psi(x_1, y) + a_2 \psi(x_2, y)$$

$$\psi(x, a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 \psi(x, y_1) + a_2 \psi(x, y_2)$$

ii) ψ simetrik formdur.

$$\psi(x, y) = \psi(y, x) \quad \forall x, y \in V$$

iii) ψ pozitif tanımlıdır:

$$\psi(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in V$$

$$\psi(x, x) = 0 \text{ gerek ve yeter şart } x = 0.$$

Bu çalışma boyunca

$$\psi(x, y) = \langle x, y \rangle$$

ve $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ile göstereceğiz, buna göre

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\|x\|^2} = \|x\|$$

dir. Bu son ifadeye x in normu denir [5].

Tanım 1.1.2 (Topolojik Manifold): M topolojik uzay olsun. Eğer bu topolojik uzay için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n -boyutlu topolojik manifold denir.

M1) M bir Hausdorff uzayıdır,

M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n veya E^n nin açık alt cümlesine homeomorftur,

M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [4].

Tanım 1.1.3 (Hiperyüzey) : E^n n -boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ -boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$ -yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M: \{ x \in U \subseteq E^n / f: U \xrightarrow{\text{Dif.bilir}} IR, U \text{ bir açık alt cümle} \}$$

$$x \longrightarrow f(x) = c \quad \forall f \nparallel p \neq 0 \quad \forall p \in M,$$

biçiminde tanımlanır. E^2 de l -yüzeye düzlemsel eğri denir .

E^n de $(n-1)$ -yüzey, $n > 3$ olması halinde genellikle hiperyüzey olarak adlandırılır [4].

Tanım 1.1.4 (Tanjant Vektör) : V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{V} \in V$ için $(P, \vec{V})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. Tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilir. Buna göre $T_A(P) = \{(p, \vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ dir [4].

Tanım 1.1.5 (Vektör Alanı) : U , E^n uzayının açık bir alt cümlesi olsun U nun her bir p noktasına, p noktasın da bir tanjant vektör karşılık getiren bir X fonksiyona U üstünde bir vektör alanı denir.

Başka bir deyişle

$$X : U \longrightarrow \bigcup_{q \in U} T_q(E^n)$$

fonksiyonu için $\forall p \in U, X_p \in T_q(E^n)$ oluyorsa X fonksiyonuna U üstünde bir vektör alanı denir [4].

Tanım 1.1.6 (C^∞ sınıftan fonksiyon) : E^n de açık bir alt cümle U olmak üzere, U nun bir a noktasında $f: U \longrightarrow R$ fonksiyonunun k ıncı basamağa kadar kısmi türevleri mevcut ve k ıncı basamaktan kısmi türevleri sürekli ise bu fonksiyona a noktasında k ıncı basamaktan diferansiyellenebilir veya C^k sınıfındandır denir.

f fonksiyonunun a noktasında her basamaktan kısmi türevleri mevcut ise bu fonksiyona a noktasında diferansiyellenebilir veya C^∞ sınıfındandır denir [4].

Tanım 1.1.7 (Teğet vektör alanı) : E^n Öklid uzayında bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğrinin hız vektörü olan $\alpha'(t)$ tanjant vektörü

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi

$$\alpha' = \bigcup_{m \in M} T_M(m) \longrightarrow M \text{ dönüşümünü göz önüne alalım.}$$

$$\alpha'(t) \longrightarrow \alpha(t) = m$$

olmak üzere $\pi \circ \alpha' = I_M \longrightarrow M$ olduğu aşıkardır. O halde α' , üstünde bir vektör alanıdır. α' vektör alanına M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre teğet vektör alanı denir [4].

Tanım 1.1.8 (Destek fonksiyonu) : E^3 içinde yönlü bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı Z olmak üzere

$$h: M \longrightarrow R \quad h(p) = \langle P, Z(P) \rangle$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonuna M yüzeyinin destek fonksiyonu denir [7].

Tanım 1.1.9 (Kompakt) : Kapalı ve sınırlı bir M manifolduna kompakt manifold denir [6].

Tanım 1.1.10 (Yönlendirilebilir Manifold) : M, E^n de k -boyutlu manifold olsun. Eğer M nin her bir noktasındaki tanjant uzaylarda yönlendirme aynı ise M manifolduna uygun yönlendirilmiş manifold aksi halde ise M manifolduna uygun yönlendirilmemiş manifold denir [4].

Tanım 1.1.11 (Gauss denklemi) :

E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. E^n in Riemann konneksiyonu D' ile gösterilmek üzere,

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$D'_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N \quad (1.1.1.)$$

şeklinde tanımlı D operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü ve (1.1.1.) denkleminde M üzerinde Gauss denklemi denir [4].

Tanım 1.1.12 (Weingarten dönüşümü) : E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [4].

Tanım 1.1.13 (Kesit eğrilik) : M bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun M nin bir P noktasındaki $T_M(P)$ tanjant uzayının 2-boyutlu altuzayı P olsun. P yi geren birim vektörleri X_P, Y_P , olsun, yani $P = S\{X_P, Y_P\}$ olsun. O zaman M üzerindeki eğrilik tensörü R oluşuna göre

$$R(X_P, Y_P, Y_P, X_P,)$$

değerine M nin P noktasında P düzlemine göre **Kesit eğriliği** denir [6].

Tanım 1.1.14 (Skaler eğrilik) : M bir Riemann n-Manifold olsun. M nin bir P noktasındaki Skaler eğriliği; $T_M(P)$ nin bütün 2-boyutlu altuzaylarına göre olan kesit eğriliklerinin toplamına denir ve

$$\tau(P) = \sum_{i \neq j=1}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i)$$

ile hesaplanır [6].

Tanım 1.1.15 (Ricci eğriliği) : M bir n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. M nin bir p noktası ile bu noktadaki bir X_P tanjant vektörü verilmiş olsun.

$T_M(P)$ nin X_P yi ihtiva eden bütün 2-boyutlu alt uzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamı M nin p noktasında X_P doğrultusunda ki Ricci eğriligi olarak adlandırılır [6].

Tanım 1.1.16 (Ortalama eğrilik) : N nin n -boyutlu alt manifoldu M olsun.

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{H}$ vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı adı verilir. Eğer $\tilde{H}=0$ ise M alt manifolduna minimaldir denir. $\tilde{H}$ ortalama eğrilik vektörünün normu $\|\tilde{H}\|$ yada M nin ortalama eğriligi adı verilir [6].

Tanım 1.1.17 (Laplace operatörü) : M bir n -Riemann manifoldu ve $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} \Delta: C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow \Delta f = \text{div}(\text{grad } f) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Δ operatörüne M üzerinde Laplace operatörü denir [6].

Tanım 1.1.18 (Hessian fonksiyonu) : M bir n -boyutlu manifold olmak üzere $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. $P \in M$ bir kritik nokta olmak üzere

$$\begin{aligned} H_f: T_P M \times T_P M &\longrightarrow T_P M \\ (u, v) &\longrightarrow H_f(u, v) = \langle \nabla_u \text{grad } f, v \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan H_f fonksiyonuna f nin $P \in M$ kiritik noktasındaki Hessian fonksiyonu denir.

H_f fonksiyonu $T_M(P)$ üzerinde simetrik bilineer bir formdur [2].

Tanım 1.1.19 (Schwartz eşitsizliği) : V bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in V$ olsun. Bu taktir de

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

dir [5].

Tanım 1.1.20 (Total Umbilik) : N , Riemann manifoldunun bir alt manifoldu M ve M nin metriği g olsun. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g(X, Y) \tilde{H}$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye total umbilik alt manifold adı verilir [6].

Tanım 1.1.21 (Sabit eğrilikli uzay) : M bir manifold olsun. Eğer M nin kesitsel eğriliği K bütün alt düzlemleri için sabit ise M ye sabit eğrilikli uzay denir [6].

Tanım 1.1.22 (Geodezik eğrilik) : E^3 de s -yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü $T = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere

$$k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen E^3 deki jeodezik eğriliği denir [6].

Tanım 1.1.23 (Birim normal vektör alanı) : E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(M)^\perp$ in bir ortonormal bazı N ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir. [4]

1.2 MINİMAL ALTMANİFOLDLAR

Teorem 1.2.1 :

M kapalı, sınırsız n -Riemann manifoldu olsun.

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve her yerde $\Delta f \geq 0$ ise f sabittir

(ve $\Delta f=0$ dır) [6].

İspat: M nin hacim elamanı dV olsun. $X=\text{grad } f$ alalım. O zaman $\Delta f=\text{div } X$ olacağından

$$\int_M \Delta f \, dV = \int_M \text{div } X \, dV$$

değeri, M sınırsız olduğundan Green teoreminden 0 dır. O halde

$$\int_M \Delta f \, dV = \int_M \text{div } X \, dV=0$$

dır. Diğer taraftan her yerde $\Delta f \geq 0$ olduğundan M üzerinde her yerde $\Delta f=0$ olmak zorundadır. Burada f yerine f^2 alırsak

$$\int_M \Delta(f^2) \, dV = 2 \int_M f \Delta f \, dV + 2 \int_M g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dV$$

olur Green teoreminden

$$\int_M \Delta(f^2) \, dV=0$$

ve $\Delta f=0$ olduğundan son ifadeden

$$\int_M g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dV = 0$$

olur. Diğer taraftan integrand non-negatif olduğundan

$$g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

olmak zorundadır. Buradan da

$$df=0$$

olmak zorundadır, yani f = sabittir. Bu da ispatı tamamlar. Buradan sınırsız kapalı bir n -manifold üzerinde $\Delta f = 0$ eşitliğine uyan yegane

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu sabit bir fonksiyondur, gerçeği elde edilir.

Teorem 1.2.2 Öklid uzayında kapalı ve minimal olan bir alt manifold yoktur [6].

İspat : M , E^{n+p} Öklid uzayına daldırılmış bir n -Riemann manifoldu olsun. Hesaplamamız lokal olacağından bir $x \in M$ noktasını E^{n+p} de karşılık geldiği noktanın yer vektörü ile eşleyebiliriz.

$$\begin{aligned} f: M &\longrightarrow E^{n+p} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan f immersiyonu

$$f(x) = \langle x, a \rangle$$

olduğuna göre Δf yi hesaplıyalım. $Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$Yf = Y \{ \langle x, a \rangle \} = \langle Y, a \rangle$$

dır, bu eşitliğin sağındaki Y vektörü $\mathbb{R}^{n+p}$ deki bir vektör gibi düşünülmektedir. Bir diğer $X \in \chi(M)$ için

$$XY_f = \langle D'_X Y, a \rangle$$

dır. Burada D' ile E^{n+p} deki Öklidyen konneksiyonu gösterilmektedir. M nin ikinci temel form V ve M nin konneksiyonu D olmak üzere Gauss denkleminde göre

$$D'_X Y = D_X Y + V(X, Y)$$

dir. D operatörünün

$$(D_X Y)f = \langle D_X Y, a \rangle$$

özelliklerinden

$$XY_f = \langle D_X Y + V(X, Y), a \rangle$$

ve

$$= \langle D_X Y, a \rangle + \langle V(X, Y), a \rangle$$

veya

$$\underbrace{XY_f - \langle D_X Y, a \rangle}_{(D^2 f)(Y; X)} = \langle V(X, Y), a \rangle$$

$$D^2 f(Y; X) = \langle V(X, Y), a \rangle$$

dır.

$$T_M X = \text{Sp} \{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad \langle X_i, X_i \rangle = \delta_i^j$$

olsun. O zaman f nin Laplacianı için

$$\Delta f = g^{ij} (D^2 f)(X_i, X_i)$$

ve $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ortanormal olduğundan $g^{ij} = \delta_i^j$ dir ve

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{(D^2 f)(X_i: X_i)}{\langle V(X_i, X_j), a \rangle}$$

veya

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \langle V(X_i, X_j), a \rangle$$

dır. Ayrıca

$$T_{M^{\perp}}^X = \text{Sp} \{ \xi_1, \dots, \xi_p \}, \quad \text{ve} \quad \langle \xi_r, \xi_s \rangle = \delta_r^s$$

olsun. O zaman

$$V(X, Y) = h^k(X, Y) \xi_k$$

bulunur. O halde

$$H = 1/n \sum_{i=1}^n V(X_i, X_j)$$

olur. Böylece

$$\Delta f = n \langle H, a \rangle = 0$$

veya $n \neq 0$ olduğundan

$$\langle H, a \rangle = 0$$

dır. Bu da $a = e_i$, i -yinicisi ortanormal vektörü için $\langle H, e_i \rangle = 0$ yani H 'nin i -yinicisi bileşeni 0'dır. Bu ise $f(H) = 0$ demektir. Yani f immersiyonu harmoniktir ve M kapalı olduğundan f sabittir. Bu da M 'nin bir tek noktadan ibaret olması demektir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 1.2.3 : Bir Öklid uzayında kompakt minimal altmanifold yoktur [6].

İspat: $a = e_A$, $A = 1, \dots, n+p$ olarak

$$f(H) = \langle H, e_A \rangle$$

için yukarıdaki düşünce ile

$$f(H) = 0$$

olur. Bu da f nin i -yinci bileşenin sıfır olması demektir, öyleyse f bir harmonik fonksiyondur ve dolayısı ile M kompakt olduğundan f sabittir. Bu da M nin bir tek noktaya büzülmüş olması demektir.

1.3 STOKES TİPİNDE KLASİK TEOREMLER

Teorem 1.3.1 (Green Teoremi)

E^3 de M bir kompakt 2-boyutlu ve sınırlı bir manifold olsun. Kabul edelim ki

$$\alpha, \beta: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

diferansiyellenebilir olsunlar. O zaman

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} (\alpha dx + \beta dy) &= \int_{\partial M} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

dır [4].

Teorem 1.3.2 (Divergence Teoremi)

E^3 de kompakt ve sınırlı bir 2-Manifold M ve ∂M üzerinde bir diferansiyellenebilir vektör alanı F ise

$$\int_M \operatorname{div} F \, dv = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle \, dA$$

dır, burada dv ile E^3 deki hacim elementini ve dA ile de ∂M deki alan elementini gösteriyoruz [4].

Teorem 1.3.3 (Stokes Teoremi)

E^3 de kompakt, yönlü ve sınırlı bir 2-manifold M ve M nin birim dış normal vektör alanı n olsun. ∂M üzerinde indirgenmiş yön seçilmiş olsun. ∂M Üzerinde vektör alanı $ds(T)=1$ olacak şekilde T ve M yi kapsayan bir açık cümle üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı da F ise

$$\int_M \langle \nabla_X F, n \rangle \, dA = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle \, ds$$

dir. Burada $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ bir operatördür [4].

İKİNCİ BÖLÜM

2.1. GİRİŞ

R^{n+2} de Z paralel birim vektör alanına sahip S^{n+1} in kompakt bir hiperyüzeyi M olsun. Z paralel birim vektör alanının S^{n+1} deki teğet izdüşümünü Z^T ve Z^t nin M üzerindeki teğet izdüşümü t ile gösterilirse

$$Z^T = t + \rho N \quad (2.1.1)$$

yazılır. Burada N , S^{n+1} in M deki birim vektör alanı ve ρ ise M üzerinde

$$\rho = \langle Z^T, N \rangle \quad (2.1.2)$$

şeklindedir. C^∞ -sınıfından bir fonksiyon olup R^{n+2} de Z vektör alanı ile temsil edilen M hiperyüzeyinin destek fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu bölümün amacı aşağıdaki teoremi ispatlamaktır.

Teorem 2.1.1

M S^{n+1} de kompakt yönlendirilebilir bağlantılı bir hiperyüzey ve S^{n+1} in R^{n+2} deki Z paralel birim vektör alanı ile temsil edilen destek fonksiyonu ρ olsun. Eğer M nin Ricci eğriliği

$$\rho^2 (n-1)(n+2) < \rho^2 Ricc \leq n-1 \quad (2.1.3)$$

şartını sağlıyorsa ρ bir sabit ve $M = S^n (1/\rho^2)$ küresidir. [3]

2.2. KÜREDE HİPERYÜZEY

R^{n+2} , Öklid uzayının birim küresi ve S^{n+1} in merkezinde yönlendirilebilir bir hiperyüzey M olsun. Böylece S^{n+1} in M hiperyüzeyi bir tek N birim normal vektör alanına sahiptir. S^{n+1} ve M nin sırasıyla Rieman konneksiyonları $\bar{\nabla}$ ve ∇ olsun. Bu takdirde M üzerinde X ve Y vektör alanları çifti için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y) \quad (2.2.1)$$

Gauss denklemi yazılabilir. Burada g indirgenmiş metrik ve A Weingarten dönüşümüdür ve bu dönüşüm

$$\bar{\nabla}_X N = -AX \quad (2.2.2)$$

şeklinde tanımlanır .

R^{n+2} de paralel birim vektör alanı Z yi sabitleyen ve S^{n+1} de Z nin teğet ve normal bileşenlerine sırasıyla Z^T ve Z^N denilirse

$$Z = Z^T + Z^N$$

şeklinde yazılabilir.

R^{n+2} de S^{n+1} nin birim normal vektör alanı $\bar{N}$ olsun.

Böylece $f = \langle Z^N, \bar{N} \rangle$ denilirse

$$\bar{\nabla}_X Z^T = f X \quad (2.2.3.1)$$

ve

$$X f = g(X, Z^T), \quad X \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.2.3.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Oysa $\rho: M \longrightarrow R$ destek fonksiyonu ile tanımlanan $Z^T = t + \rho N$ teğet bileşeni göz önüne alınırsa R^{n+2} deki Z paralel birim vektör alanıyla bağlantı elde edilir. Bir başka ifade ile (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3.1) ve (2.2.3.2) denklemleri kullanılarak

$$\nabla_X Z^T = -f X + \rho AX$$

$$X \rho = g(AX, t) \quad (2.2.4)$$

ve

$$X f = g(X, Z^T) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

ayrıca

$$\text{grad} \rho = -At,$$

ve

$$\text{grad} f = t \quad (2.2.5)$$

elde edilir.

Gauss denkleminden M nin Ricci eğrilik tensörü

$$\text{Ric}(X, Y) = (n - 1)g(X, Y) + n\alpha g(AX, Y) - g(AX, AY) \quad (2.2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada α , M nin ortalama eğriliği olup

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_1^n g(Ae_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan Codazzi denkleminden

$$(\nabla_X, A)Y = (\nabla_Y A)X \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.2.7)$$

yazılabilir. A simetrik olduğundan $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$g((\nabla_X A)Y, Z) = g((\nabla_X A)Z, Y) \quad (2.2.8)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1 M bir hiperyüzey ve M nin Laplace operatörü Δ olsun. Bu takdirde $f \in C^\infty(M)$ için

$$\mathbf{a)} \quad \Delta f = n(-f + \rho\alpha)$$

ve

$$\mathbf{b)} \quad \frac{1}{2} \Delta f^2 = n(-f^2 + \alpha f \rho) + \|t\|^2$$

dir.

İspat:

a) (2.2.4) den açıktır

b) (2.2.5) ve (a) dan

$$\Delta f^2 = 2f \Delta f + 2\|grad f\|^2$$

yazılabilir. Burada (a) kullanılırsa (b) nin ispatı bulunur.

2.3. SABİT ORTALAMA EĞRİLİKLİ HİPERYÜZEYLER

Nomizu ve Smyth [8] makalelerinde S^{n+1} deki sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeyleri çalıştılar. Bu makalelerinde S^{n+1} kapalı yarı küresinde sabit ortalama eğrilikli hiperyüzeylerin varlık şartını ispatladılar. S. Dcshmukh ve M.A AL Gwaiz [3] ise Nomizu ve Smyth in bu çalışmalarına ilaveten aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem 2.3.1. S^{n+1} de kompakt yönlendirilebilir sabit ortalama eğrilikli hiperyüzey M olsun. Eğer R^{n+2} deki paralel birim vektör alanı Z ye bağlı olarak ifade edilen M nin destek fonksiyonu M üzerinde sıfırdan farklıysa M , S^{n+1} de hiperküredir.

İspat : (2.2.4) denklemi kullanılarak ρ nin Hessian fonksiyonu

$$H_\rho(X, Y) = -g((\nabla_X A)Y, t) + f g(AX, Y) - \rho g(AX, AY)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemle (2.2.8) birlikte göz önüne alınırsa

$$\Delta_\rho = -nt\alpha + n f \alpha - \rho tr A^2 \quad (2.3.1)$$

elde edilir. (2.2.4) denkleminden

$$div t = n(-f + \rho\alpha) \quad (2.3.2)$$

ve

$$\operatorname{div}(at) = t\alpha + n\alpha(-f + \rho\alpha) \quad (2.3.3)$$

yazılır.

(2.3.1) denklemi (3.3.1) de yerine yazılırsa

$$\Delta\rho = -n(n-1)f\alpha + n^2\alpha^2\rho^2 - \rho\operatorname{tr}A^2 - \operatorname{div}(nat) \quad (2.3.4)$$

bulunur. Eğer M nin ortalama eğriliği sabit ise Yardımcı teorem (2.2.1) den

$$\Delta(\rho - (n-1)\alpha f) = \rho(n\alpha^2 - \operatorname{tr}A^2) - \operatorname{div}(nat)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin M üzerinden integrali alınırsa

$$\int_M \rho(n\alpha^2 - \operatorname{tr}A^2)dv = 0$$

bulunur. Schwarz eşitsizliğinden

$$t\alpha^2 - \operatorname{tr}A^2 \geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin geçerli olması için gerek ve yeter şart M nin totally umbilic olmasıdır.

Eğer M üzerinde $\rho \neq 0$ ve M bağlantılı ise $n\alpha^2 - \operatorname{tr}A^2$ olup M totally umbiliktir.

M kompakt ise M S^{n+1} de hiperküredir.

2.4. TEMEL TEOREMİN İSPATI

M nin skaler eğriliği

$$S = n(n-1) + n^2\alpha^2 - \operatorname{tr}A^2$$

eşitliğiyle verilir. (2.3.4.) denkleminde

$$\rho \Delta \rho = \rho(S - n(n-1)) - n(n-1) f \rho \alpha - \rho \operatorname{div}(n \alpha t) \quad (2.4.1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\operatorname{div}(n \alpha \rho t) = n \alpha t \rho + \rho \operatorname{div}(n \alpha t)$$

olduğundan (2.2.4) ün ikinci denkleminde

$$-\rho \operatorname{div}(n \alpha t) = n \alpha g(At, t) - \operatorname{div}(n \alpha \rho t)$$

yazılır. Böylece (2.4.1) denklemini

$$\rho \Delta \rho = \rho(S - n(n-1)) - n(n-1) f \rho \alpha - n \alpha g(At, t) - \operatorname{div}(n \alpha \rho t)$$

şekline dönüşür. Böylece

$$\left(\frac{1}{2}\right) \Delta \rho^2 = \rho \Delta \rho + \|g \alpha \rho\|^2$$

ve (2.2.5) den

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right) \Delta \rho^2 &= \rho^2(S - n(n-1)) - f \rho \alpha n(n-1) - [Ric(t, t)\|t\|^2] \\ &\quad - \operatorname{div}(n \alpha \rho t) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

bulunur (2.4.2) ve yardımcı teorem (2.2.1) den

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}\right) \Delta(\rho^2 + (n-1)f^2) + \operatorname{div}(n \alpha \rho t) \\ &= \rho^2 S - n(n-1)(\rho^2 + f^2 + \|t\|^2) + (n-1)(n+2)\|t\|^2 - Ric(t, t) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$Z = t + \rho N + f\bar{N}$$

birim vektör alanı olduğundan

$$\|t\|^2 + \rho^2 + f^2 = 1 \quad (2.4.4)$$

bulunur. (2.4.3) ün M üzerinden integrali alınır ve (2.4.4) kullanılırsa

$$\int_M [\|t\|^2(Ric(t, t) - (n-1)(n+2)) + (n(n-1) - P^2S)] dv = 0 \quad (2.4.5)$$

elde edilir. Burada $\hat{t} = \frac{t}{\|t\|}$ dir.

Teoremin hipotezinden $t=0$ $\rho^2 S = n(n-1)$ bulunur Diğer taraftan (2.2.4) den ρ sıfırdan farklı bir sabit f/M sabit ve $A = (f/P) I$ dır.

Sonuç olarak Gauss denkleminden $M = Sn (1/\rho^2)$ elde edilir.

3. BÖLÜM

İNTEGRAL FORMÜLLERİ

3.1. BAZI OPERATÖRLER:

Tanım 3.1.1.

M bir manifold ve M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon f olsun. M nin Laplace operatörü

$$\Delta f = \text{div} (\text{grad } f)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım lokal koordinatlar cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, M nin bir p noktasındaki lokal koordinatlar ve M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon f olsun. Bu takdirde laplace operatörü

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$g = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

ve

$$g_{i,j} = \langle dx_i, dx_j \rangle$$

dir [2].

Tanım 3.1.2 Grad tanımı E^n de diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C(E^n, \mathbb{R})$ ve vektör alanların cümlesi $X(E^n)$ olmak üzere

$$\text{Grad} : C(E^n, \mathbb{R}) \longrightarrow X(E^n)$$

$$f \longrightarrow \text{Grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Grad fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.3. M bir Manifold olsun. M diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun Hessian tensörü, $\text{Hess } f$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned}\text{Hess } f : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ v &\longrightarrow \text{Hess } f(v) = \nabla_v \text{grad } f\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 3.1.1. Hessian tensörü $\forall u, v \in T_p M$ için

$$H_f(u, v) = u(vf) - (\nabla_u v)f$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

M bir Manifold ve $p \in M$ noktasında $T_p M$ nin keyfi iki u ve v elamanı için

$$u \langle \text{grad } f, v \rangle = \langle \nabla_u \text{grad } f, v \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_u v \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$u(vf) = \langle \nabla_u \text{grad } f, v \rangle + (\nabla_u v)f$$

olup

$$H_f(u, v) = u(vf) - (\nabla_u v)f$$

elde edilir.

Yardımcı teorem 3.1.1. (Newton eşitsizliği) M n -boyutlu bir manifold ve M üzerinde C^∞ -sınıfından bir f fonksiyonu için

$$(\Delta f)^2 \leq n \|\text{Hess } f\|^2$$

dir [2].

Teorem 3.1.2. (Bochner Formülü) M , bir manifold ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2} \Delta (\|\text{grad } f\|^2) = \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) - \|\text{Hess } f\|^2 - \langle \text{grad } f, \text{grad } \Delta f \rangle$$

dir. [1]

3.2. BAZI İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Teorem 3.2.1. $M=S^2$ ($1/\rho^2$) S^n nin kompakt, bağlantılı bir hiperyüzeyi olsun. ρ destek fonksiyonu olmak üzere

$$\int_M [(f - t)n \propto - \rho n[(n - 1) - n \propto] - \rho S] dv = 0 \quad (3.2.1)$$

dır. Burada S , M nin skalar eğriliğidir.

İspat: M nin skalar eğriliği

$$S = n(n - 1) + n^2 \alpha^2 - \text{tr} A^2 \quad (3.2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan ρ nun Laplace nı

$$\Delta \rho = -n t \propto + n f \propto - \text{tr} A^2 \quad (3.2.3)$$

olarak elde edilir. Böylece (3.2.3) de (3.2.2) yerine yazılır ve M üzerinden integral alınırsa

$$\int_M [(f - t)n \propto - \rho n[(n - 1) - n \propto] - \rho S] dv = 0$$

bulunur.

Teorem 3.2.2 ρ destek fonksiyonu olmak üzere S^{n+1} in kompakt, bağlantılı bir hiperyüzeyi M olsun. M nin Laplace nun birinci karakteristik değeri λ , olmak üzere

$$\int_M [(f - t)n \propto - \rho n[(n - 1) - n \propto] - \rho \lambda] dv = 0 \quad (3.2.4)$$

dır.

İspat: M nin Laplace operatörü Δ olmak üzere Δ nın birinci karakteristik değeri λ olsun. Eğer $M \rightarrow S^n (1/\rho^2)$ küresine izometrik ise

$$\int_M \Delta \rho dv = 0 \quad (3.2.5)$$

ve M nin S skaler eğriliği

$$S = \lambda (n - 1) \quad (3.2.6)$$

dir. Böylece (3.2.5) ve (3.2.6) dan

$$\int_M [(f - t)n \propto - \rho n[(n - 1) - n \propto] - \rho \lambda] dv = 0$$

bulunur.

Teorem 3.2.3 M, S^{n+1} de kompakt bağlantılı bir yüzey olsun. M nin keyfi difarensiyellenebilir f fonksiyonu için

$$\int_M \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 (\Delta f)^2 - Ric (grad f, grad f) \right] dv \geq 0 \quad (3.2.7)$$

dir.

İspat: M hiperyüzeyinin üzerindeki keyfi bir f fonksiyonu için Bochner formülü

$$\frac{1}{2} \Delta (\|grad f\|^2) = Ric (grad f, grad f) - \|Hess f\|^2 - \langle grad f, grad \Delta f \rangle \quad (3.2.8)$$

yazılır. Newton eşitsizliğinden

$$\frac{(\Delta f)^2}{n} \leq \|\text{Hess } f\|^2 \quad (3.2.9)$$

yazılabilir. (3.2.8), (3.2.9) de yerine yazılır ve M üzerinden integral alınırsa

$$\int_M \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 (\Delta f)^2 - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) \right] dv \geq 0$$

bulunur.

Teorem 3.2.4 M, S^{n+1} de kompakt bağlantılı bir hiperyüzey olsun. M nin keyfi diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu ve ρ destek fonksiyonu için

$$\int_M [n(n-1)(f^2 - 2f\rho\alpha + f^2\alpha^2) - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)] dv = 0 \quad (3.2.10)$$

dir.

İspat: M nin keyfi bir f fonksiyonu için, yardımcı teorem (2.2.1) den

$$\Delta f = n(-f + \rho\alpha) \quad (3.2.11)$$

yazılır. (3.2.11) ve (3.2.7) den

$$\int_M [n(n-1)(f^2 - 2f\rho\alpha + f^2\alpha^2) - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)] dv \geq 0$$

elde edilir.

Teorem: 3.2.5. $M = S^n(1/\rho^2)$ kompakt bağlantılı bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde

$$\int_M [n(n-1)f^2 + (2n^2 + 3n-1)f\rho\alpha + n(2n-1)\rho^2\alpha^2 + \rho^2 \text{tr} A^2 - (n-1)\|t\|^2] dv \geq 0 \quad (3.2.12)$$

dır.

İspat: M nin skalar eğriliği S olmak üzere (3.2.1)

$$\rho \Delta \rho = \rho(S - n(n-1) - n(n-1)f \rho \propto - \rho \operatorname{div}(n \propto t) \quad (3.2.14)$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\operatorname{div}(n \propto \rho t) = n \propto t \rho + \rho \operatorname{div}(n \propto t)$$

olup (2.2.4) den

$$\rho \Delta \rho = \rho(n^2 \alpha^2 - \operatorname{tr} A^2) - f \rho \propto (n-1)n - n \propto \langle At, t \rangle - \operatorname{div}(n \propto \rho t) \quad (3.2.15)$$

yazılır. Yardımcı teorem 2.2.1 den, ρ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2} \Delta \rho^2 = \rho \Delta \rho + \|\operatorname{grad} \rho\|^2 \quad (3.2.16)$$

elde edilir. Böylece (3.2.15) ve (3.2.16) denklemlerinden

$$\frac{1}{2} \Delta \rho^2 = \rho^2 (n^2 \alpha^2 - \operatorname{tr} A^2) - f \rho \propto n(n-1) - [\operatorname{Ric}(t, t) - n(n-1)\|t\|^2] - \operatorname{div}(n \propto \rho t) \quad (3.2.17)$$

elde edilir. (3.2.17) ifadesi (3.2.10) da yerine yazılırsa (3.2.12) elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] M. Bektaş, The Rcilly's Integrant Formula on with Nondegenerale Time-like Boundary Lorentz Manifold, 'F.Ü. Fen Müh. Bil. Dergisi, 10(2), 89-97, 1998.
- [2] M. Bektaş, Lorentz Uzayının Integral Geometrisi , Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bil. Ens.1998.
- [3] S Deshmuk and M.A.AL. GWAIZ, A Sufficent Conditon for a Compact Hypersurfaces in a Sphe to be a Sphere, Yok. Math. J. Vol. 40, 1993, 105-109.
- [4] H.H. Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No:2 (1983).
- [5] H.H. Hacısalihoğlu, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Yayınları, No: 2 (1980).
- [6] H.H. Hacısalihoğlu, Tensör Geometri, Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara, 2003.
- [7] H.H. Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, İstanbul, (1983).
- [8] K. Nomizu and B. Smyth, on the Gauss Mapping for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Sphere, Comm, Math, Helv., 44 (1969). 484-490.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Ali Çataltaş olarak 1979 da Elazığ da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ da tamamladım. Üniversite öğrenimini ise Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde 1997-2001 yıllarında tamamladım. 13 yıldır özel kurumlarda Matematik öğretmenliği yapmaktayım, evli ve iki çocuk babasıyım.