

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan BULUT
İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

EKİM-2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
ŞEYMA TÜLÜCE DEMİRAY**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

**Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT
İkinci Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR**

EKİM – 2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ
ŞEYMA TÜLÜCE DEMİRAY
(102121203)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12.09.2014
Tezin Savunulduğu Tarih: 14.10.2014
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK (M.Ü)
Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)
Prof. Dr. Alaattin ESEN (İ.Ü)

EKİM – 2014

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü desteği esirgemeyen hocam Doç. Dr. Hasan BULUT'a ayrıca 2. tez danışmanım olan Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR'a ve Matematik Bölümü'nde her zaman desteklerini esirgemeyen hocalarıma teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

Elazığ-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
SEMBOLLER LİSTESİ	X
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.	6
3. MATERYAL VE METOTLAR.	29
3.1 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM).....	29
3.2 Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM).....	31
3.3 Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM).....	41
3.4 Homotopi Ayrışım Metodu	43
4. METOTLARIN UYGULANMASI.	45
4.1 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Klein-Gordon Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	45
4.2 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli KdV Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	51
4.3 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli mKdV Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	55
4.4 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Burgers Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	64
4.5 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Cahn-Hilliard Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	77
4.6 Lineer Olmayan Zaman-Kesirli 3. Mertebeden Genelleştirilmiş KdV Denklemine GKM'nin Uygulanması.....	81
4.7 Kesirli Mertebeden Homojen Diferansiyel Denkleme SDM'nin Uygulanması	85
4.8 Kesirli Mertebeden Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemlere SDM'nin Uygulanması	87

4.9 Kesirli Mertebeden Homojen Adi Diferansiyel Denkleme VIM'in	
Uygulanması	90
4.10 Kesirli Mertebeden Homojen Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlere VIM'in	
Uygulanması	93
4.11 Kesirli Mertebeden Kadomtsev-Petviashvili Diferansiyel Denklemine Homotopi	
Ayrışım Metodu'nun Uygulanması	97
5. SONUÇ.....	107
KAYNAKLAR.....	108
ÖZGEÇMİŞ.....	120

ÖZET

Lineer ve Lineer olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi ve çözüm yöntemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM), Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) ve Homotopi Ayırışım Metodunun genel yapıları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak, lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi, zaman-kesirli KdV ve mKdV denklemleri, zaman-kesirli genelleştirilmiş ikinci mertebeden Burgers denklemi, zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemi ve zaman-kesirli genelleştirilmiş üçüncü mertebeden KdV denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için GKM kullanılmıştır. İkinci olarak, kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için SDM kullanılmıştır. Üçüncü olarak, kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için VIM kullanılmıştır. Son olarak da, kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Homotopi Ayırışım Metodu kullanılmıştır. Bu metodlar yardımıyla elde ettiğimiz analitik ve yaklaşık çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu çalışmada elde edilen analitik ve yaklaşık çözümler dikkate alınarak kullanılan metotlar hakkında sonuç ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Riemann-Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integrali, Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM), Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) ve Homotopi Ayırışım Metodu.

SUMMARY

The Solution Methods of Linear and Nonlinear Fractional Differential Equations

This study consist of the five chapters.

In Section 1, it has been given informations on the solution techniques and one the historical structures of differential equations with fractional order was given and some information on the solution techniques were also presented.

In Section 2, some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study was introduced.

In Section 3, the general structures of Generalized Kudryashov Method (GKM), Sumudu Transform Method (STM), Variational Iteration Method (VIM) and Homotopi Decomposition Method, were given.

In Section 4, Firstly GKM was used to obtain analytical solutions of nonlinear time-fractional Klein-Gordon equation, time-fractional KdV and mKdV equations, time-fractional second-order Burgers equation, time-fractional Cahn-Hilliard equation and time-fractional generalized third-order KdV equation. Secondly, STM was utilized to find analytical solutions of homogeneous and non-homogeneous fractional ordinary differential equations. Thirdly, VIM was handled to reach approximate solutions of homogeneous and non-homogeneous fractional ordinary differential equations. Finally, Homotopi Decomposition Method (HDM) was tackled to gain approximate solutions of fractional Kadomtsev-Petviashvili equation. Two and three dimensional graphics of analytical and approximate solutions that we obtained by the help of these methods were plotted by means of Mathematica programme.

In chapter five, it has been given a conclusion about techniques used by taking into consideration analytical and approximate solutions obtained in this study.

Key Words: Gamma function, Beta function, Riemann-Liouville fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Generalized Kudryashov Method (GKM), Sumudu Transform Method (STM), Variational Iteration Method (VIM) ve Homotopi Decomposition Method (HDM).

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.2.1. Lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) analitik çözümünün $k=1, 0 < t < 1, -8 < x < 8, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.95$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	54
Şekil 4.2.2. Lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) analitik çözümünün $k=1, -8 < x < 8, t=1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.95$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	55
Şekil 4.3.1. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) analitik çözümünün $k=1, -1 < t < 1, -15 < x < 15, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	58
Şekil 4.3.2. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.21) analitik çözümünün $k=1, 0 < t < 1, -5 < x < 5, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	60
Şekil 4.3.3. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.25) analitik çözümünün $k=1, 0 < t < 1, -5 < x < 5, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	62
Şekil 4.3.4. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.29) analitik çözümünün $k=1, 0 < t < 1, -5 < x < 5, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	63
Şekil 4.4.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) analitik çözümünün $k=1, p=2, a_1=1, b_0=2, \beta=3, 0 < x < 10, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	67
Şekil 4.4.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) analitik çözümünün $k=1, p=2, a_1=1, b_0=2, \beta=3, 0 < x < 10, t=1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	68
Şekil 4.4.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.17) analitik çözümünün $k=1, p=3, b_0=3, b_1=1, \beta=2, -15 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	69

Şekil 4.4.4. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.17) analitik çözümünün $k = 1, p = 3, b_0 = 3, b_1 = 1, \beta = 2, -15 < x < 15, t = 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	70
Şekil 4.4.5. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.21) analitik çözümünün $k = 1, p = 1, \beta = 4, -15 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	71
Şekil 4.4.6. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.21) analitik çözümünün $k = 1, p = 1, \beta = 4, -15 < x < 15, t = 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	72
Şekil 4.4.7. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.25) analitik çözümünün $k = 1, p = 3, \beta = -2, -15 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	73
Şekil 4.4.8. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.25) analitik çözümünün $k = 1, p = 3, \beta = -2, -15 < x < 15, t = 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	73
Şekil 4.4.9. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.29) analitik çözümünün $k = 1, p = 2, \beta = 3, 0 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	75
Şekil 4.4.10. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.29) analitik çözümünün $k = 1, p = 2, \beta = 3, 0 < x < 15, t = 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	75
Şekil 4.4.11. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.33) analitik çözümünün $k = 1, p = 3, \beta = 2, -15 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	76
Şekil 4.4.12. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.33) analitik çözümünün $k = 1, p = 3, \beta = 2, -15 < x < 15, t = 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	77
Şekil 4.5.1. Zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.15) analitik çözümünün $k = 1, a_0 = 1, b_0 = 2, -5 < x < 5, 0 < t < 1, \alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	81

Şekil 4.5.2. Zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.15) analitik çözümünün $k=1, a_0=1, b_0=2, -5 < x < 5, t=1, \alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	81
Şekil 4.6.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.6.14) analitik çözümünün $k=1, p=2, \gamma=3, -15 < x < 15, 0 < t < 1, \alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	85
Şekil 4.6.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.6.14) analitik çözümünün $k=1, p=2, \gamma=3, -15 < x < 15, t=1, \alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	85
Şekil 4.7.1. Kesirli mertebeden homojen (4.7.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.7.3) analitik çözümünün $0 < t < 5$ ve $c=3$ için elde edilen iki boyutlu görünümü	87
Şekil 4.8.1. Kesirli mertebeden homojen (4.8.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.3) analitik çözümünün $0 < t < 5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü	88
Şekil 4.8.2. Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.4) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.6) analitik çözümünün $0 < t < 5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü	90
Şekil 4.9.1. Kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin (4.9.10) analitik çözümü ile VIM yardımıyla elde edilen (4.9.8) yaklaşık çözümünün $0 < t < 0.1$ ve $\alpha=0.35$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	93
Şekil 4.10.1. Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.10.1) adi diferansiyel denkleminin (4.10.9) analitik çözümü ile VIM yardımıyla elde edilen (4.10.8) yaklaşık çözümünün $0.3 < t < 0.5$ ve $\alpha=0.1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	96
Şekil 4.11.1. Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denkleminin Homotopi Ayırışım Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümünün $\alpha=0.05$ ve $y=\pi$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	106

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Lineer Operatör
N	: Lineer Olmayan Operatör
$\lambda(s, t)$	: Lagrange Çarpanı
$\Gamma(z)$	: Gama Fonksiyonu
$\beta(z, w)$	: Beta Fonksiyonu
$E_a(z)$	: Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{a, \beta}(z)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_t(v, a)$	: Mellin-Ross Fonksiyonu
$\Gamma^*(v, t)$	: Tamamlanmamış Gama Fonksiyonu
${}_a D_t^p f(t)$	: Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}_a D_t^p f(t)$	: Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_a^C D_t^\alpha f(t)$	: Caputo Kesirli Türevi

KISALTMALAR

KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi
mKdV	: Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries Denklemi
GKM	: Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu
SDM	: Sumudu Dönüşüm Metodu
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu

1. GİRİŞ

Kesirli mertebe kavramı 03.08.1695 tarihinde L'Hospital'in Leibniz'e yazmış olduğu mektupta " $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{D^n y}{Dx^n}$ türevinin nasıl hesaplanacağı ve sonucun ne olacağı" sorularak ilk olarak literatüre sunulmuştur [1].

Leibniz ve Johann Bernoulli arasında da kesirli mertebe kavramına değinilmiştir. Bernoulli Aralık 1695 yılında Leibniz'e "Türevlerin kesirli veya irrasyonel olması" ile ilgili sorular sorduğu bir mektup yazmıştır. Leibniz de L'Hospital'a yolladığına benzer bir mektubu Bernoulli'ye yazmıştır. Fakat bu mektupta genel mertebeli türev yapısı hakkında L'Hospital'a yolladığına kıyasla daha detaylı bilgiler vermiştir [1].

Leibniz'in yaşamı boyunca kesirli analizle ilgili son referansı 1697 yılında J. Wallis'e yazdığı bir mektubun bulunmasıdır. 1716 yılında Leibniz'in ölmesiyle tam sayı olmayan mertebeli türevle ilgili araştırmalar son bulmamıştır. 1783 yılında Leonhard Euler makalesinde [2] bu konuya yer vermiştir. Euler bu makalesinde ilk defa faktöriyelin genelleştirilmesi olan Gama fonksiyonunu sunmuştur ve sayıların gelişmesi üzerine çalışmıştır [1].

Leibniz'in ölümünden yaklaşık 50 yıl sonra J. L. Lagrange'ın yaptığı çalışma [3] kesirli analiz alanına katkıda bulunmuştur. 1772 yılında J. L. Lagrange tam sayı mertebeli diferansiyel operatörler için üstlerin bir kuralını geliştirmiştir. Belirli şartlar altında bu tamsayı mertebeli diferansiyel operatörler için bulunan sonucun keyfi seçimlere dönüşebileceğini bulmuştur [1].

1812 yılında P. S. Laplace "Théorie analytique des probabilités" [4] kitabında ilk olarak kesirli türevin tanımını detaylı bir şekilde kurmuştur. Bu kitabın birkaç sayfasında P. S. Laplace bir integral ile temsil edilen fonksiyonlar için bir kesirli türev tanımını anlatmıştır [1].

Birkaç sene sonra 1819 yılında S. F. Lacroix "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" [5] 700 sayfalık kitabının sadece 2 sayfasında tam sayı mertebeli türevin genelleştirilmesiyle kesirli mertebeli türevin elde edilebileceğini söylemiştir. S. F. Lacroix, Leonhard Euler'in bulduğu Gama fonksiyonunun genelleştirilmiş faktöriyelini kullanarak tamsayı olmayan mertebeden türevi formüle etmiştir. Lacroix'in elde ettiği bu sonuçlar bugün hala kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev gösterimiyle aynıdır [1].

1822 yılında J. B. J. Fourier "Théorie analytique de la chaleur" [6] kitabında kesirli türevin diğer genel bir uygulanabilir tanımını vermiştir. Bu kesirli türev tanımı yeteri

kadar iyi-tanımlı fonksiyon için uygundur. Bu tanım yapılırken ne Lacroix'in makalesindeki gibi bir kuvvet fonksiyonuna ne de Laplace'ın çalışmasındaki gibi bir integral fonksiyonuna ihtiyaç duyulmuştur [1].

1823 yılında Niels Henrik Abel Tautochrone probleminde açığa çıkan bir integral denklemini çözmek için kesirli mertebeden türevi kullanmıştır [7,8]. Daha sonra Abel'in çalışmalarına Samko ve ekibi de kitabında değinmiştir [9].

Abel'in Tautochrone problemine kesirli operatörleri uygulamasından sonra, kesirli analizle ilgili ilk çalışmalar J. Liouville tarafından yapılmıştır [10-17]. J. Liouville kesirli türevin iki farklı tanımını geliştirmiştir [12]. İlk olarak seri şeklinde açılabilen bir fonksiyona kesirli türev tanımını uygulamıştır. Ancak bu tanımda yakınsak seriler için α 'nın seçiminde sınırlama olduğu görülmüştür. İkinci tanımda ise α 'nın seçiminde böyle bir sınırlama olmadığı görülmüştür. α keyfi parametre olmak üzere $f(x)=1/x^\alpha$ şeklindeki fonksiyonların kesirli türevi alınmıştır [1].

1847 yılında G. F. B. Riemann, Taylor serisinin genelleştirilmesini araştırırken $f(x)$ fonksiyonunun α mertebeden kesirli integralini bulmuştur. Ama Riemann bu çalışmasını yayınlamamıştır. Ancak Riemann'ın ölümünden 10 yıl sonra "Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass- Bernhard Riemann" [18] çalışmasında yayınlanmıştır.

Bir çok yazar Riemann-Liouville tanımının gelişmesine katkı sağlamıştır. 1869 yılında N. Y. Sonin keyfi mertebeli türeve erişmek için Cauchy integral formülünü kullanarak bir çalışma yapmıştır [19]. Kısa bir süre sonra 1872 yılında A. V. Letnikov, Sonin'in fikrini genişleterek kesirli türevi tanımlamıştır. Tamsayı mertebeden türevler için Cauchy integral formülünü kullanarak Euler'in tanımladığı Gama fonksiyonu ile faktöriyeli yerleştirerek kesirli duruma genelleştirir [20].

Grünwald'un 1867 yılındaki [21] ve Letnikov 'un 1868 yılındaki [22] yayınlarından bugün hala kullanılan bir diğer kesirli türevin temelini sağlayan kesirli türev tanımı ortaya çıkar. Bu tanım Grünwald-Letnikov kesirli türevi olarak isimlendirilir [1].

19. yüzyılın sonlarındaki kesirli analizdeki gelişmelerle birlikte O. Heaviside "Heaviside operational calculus" isimli bir çalışma yapmıştır [23]. Daha sonra Heaviside'in türev operatörü Riemann kesirli türev operatörü olarak yorumlanır [1].

1917 yılında H. Weyl çalışmasında “Weyl kesirli integrali” olarak isimlendirilmiş $c = -\infty$ alt limitiyle kesirli integralin Riemann-Liouville tanımını verir [24].

1927 yılında Marchaud Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımının integral halini geliştirmiştir. Marchaud, f fonksiyonunun bugün “Marchaud kesirli türevi” olarak bilinen kesirli türevini bulmuştur [25].

Daha sonra 1928 yılında Hardy ve Littlewood kesirli integrasyonun özelliklerinden bahsetmiştir. Hardy ve Littlewood α mertebeden kesirli integrasyon operatörünün L_q daki L_p ’nin bir fonksiyonunu işaret ettiğini ispatlamıştır [26].

1931 yılında Watanabe f ve g analitik fonksiyonları için Riemann-Liouville kesirli türevinin bir Leibniz formülünü geliştirmiştir [27].

Daha sonra 1938 yılında Riesz bu konuda çok sayıda çalışma yapmıştır. n boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmesi olan “Riesz potansiyeli” olarak bilinen integrali geliştirmiştir [28,29]. Bu integral Weyl kesirli integrale ve Riemann-Liouville kesirli integrale bağlantılıdır [1].

1938 yılında B. S. Nagy yaklaşım teorisi alanına katkıda bulunarak trigonometrik toplamalar için bir Favard tipinde eşitsizliği geliştirmiştir. Nagy, trigonometrik polinomlar ile kesirli integrallerin yaklaşım oranında bir Bernstein tipinde teorem elde etmiştir [30].

1967 yılında M. Caputo, “Caputo kesirli türevi” olarak bilinen kesirli türev tanımını vermiştir [31]. Bu türev Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla bağlantılıdır. Caputo kesirli türevini kullanmak Riemann-Liouville kesirli türevine kıyasla klasik formdaki kesirli türevlerin başlangıç şartlarını belirler [1].

20. yüzyılın ikinci yarısıyla kesirli analiz alanında 1974 yılında New Haven’da kesirli analizin teori ve uygulamalarıyla ilgili ilk konferans düzenlenmiştir [32]. Kesirli analizle ilgili ilk kitap Oldham ve Spanier tarafından yayınlanmıştır [33]. Daha sonra ise kesirli analizle ilgili birçok sayıda kitap yayınlanmıştır [34-47].

Son yıllarda ise kesirli mertebeden türev hesaplamaları; mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, uygulamalı bilimler, kontrol teorisi, finans, sinyal işleme, sistem tanımlama, viskoelastisite, elektrik kontrol teorisi, olasılık ve istatistik, optik fiber, mekanik mühendisliği, hidrodinamik, termodinamik, ısı transferi, katı hal fiziği, kesirli dinamik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır.

Kesirli mertebeye sahip problemlerin oluşturulması, oluşturulan problemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerinin elde edilmesi bilim insanları arasında derin bir ilgi uyandırmıştır. Bu çözümlerin elde edilmesi için farklı metotların geliştirilmesi ve uygulanılması bilim insanları arasında büyük önem kazanmıştır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yazar Homotopi Ayırışım metodu [48-52], Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM) [53-56], Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodu (MEDDM) [57-58], Çoklu Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (ÇGDDM) [59] ve Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu (MEKM) [60-62] gibi çok sayıda metod ele almıştır.

Bu çalışmada ise, Nikolay A. Kudryashov'un lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için geliştirmiş olduğu Kudryashov metodunun [63] genelleştirilmesiyle elde edilen Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM) [64-66] lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi, zaman-kesirli KdV ve mKdV denklemleri, zaman-kesirli genelleştirilmiş 2. mertebeden Burgers denklemi, zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemi ve zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [64-66]. Kudryashov metodunun genelleştirilmesiyle elde edilen Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM) literatüre yeni sunulmaktadır [64-66].

Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM) ilk olarak 1993 yılında mühendislik kontrol problemlerini çözmek için G. Watugala tarafından literatüre sunulmuştur [67,68]. Daha sonra Watugala Sumudu dönüşümünü iki değişkene genişletmiştir [69]. SDM'nin kısmi diferansiyel denklemlere ilk uygulaması ve ters formülün kuruluşu Weerakoon tarafından yapılmıştır [70,71]. Muniru Asiru SDM'yi kullanarak ayrık dinamik sistemler ve kıvrım tipindeki integral denklemlerin çözümünü elde etmiştir [72-74]. Daha sonra Belgacem ve diğerleri SDM'nin birçok uygulamasını yapmıştır [75-80]. Belgacem'in 21. yüzyılın başındaki SDM uygulamalarının çoğu tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgilidir. Ayrıca Bulut ve diğerleri de tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlere SDM'yi uygulamıştır [81-86]. Daha sonra Belgacem kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için SDM'yi kullanmıştır [87-90]. Bunlara ek olarak Bulut ve diğerleri de kesirli diferansiyel denklemlere SDM'yi uygulamıştır [91].

Bu çalışmada ise kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için SDM kullanılmıştır [92].

Varyasyonel iterasyon metodu (VIM)'nin temel yapısı ve diferansiyel denklemlere uygulanması birçok çalışmada ele alınmıştır [93-115]. Kesirli diferansiyel denklemlere varyasyonel iterasyon metodunu ilk olarak J. H. He uygulamıştır [97]. Odibat ve Momani lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere VIM'i uygulamıştır [105, 106, 107,109]. Odibat lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için VIM ile yaklaşık çözüm elde etmiştir [111]. Wu lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için VIM kullanmıştır [112]. Ayrıca Bulut ve diğerleri kesirli mertebeden gaz dinamik denklemi ve kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri bulmak için VIM kullanmıştır [113].

Bu çalışmada ise kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için VIM kullanılmıştır [116].

Homotopi Ayırışım Metodu daha önce birkaç yazar tarafından çalışılmıştır [48-52]. Bu çalışmada ise kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Homotopi Ayırışım Metodu kullanılmıştır. Kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denklemi için elde edilen yaklaşık çözüm için üç boyutlu grafik çizilmiştir [117].

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir [118].

Tanım 2.2.

Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene bağımsız değişken, denklemde türevi alınan değişkene ise bağımlı değişken denir.

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişkenden oluşan, bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden adi türevlerini bulunduran denkleme adi diferansiyel denklem denir. Genel olarak,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır [118].

Tanım 2.3.

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini içeren denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (2.2)$$

olarak yazılır [119].

Tanım 2.4.

Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denklemin mertebesi denir [120].

Tanım 2.5.

Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin kuvvetine denklemin derecesi denir [120].

Tanım 2.6.

Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denkleme değişken katsayılı diferansiyel denklem denir. Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar sabit ya da yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir [120]. Eğer bir diferansiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklem denir [119].

Tanım 2.7.

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı lineer denir [120].

Tanım 2.8.

Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir [120].

Tanım 2.9.

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktası civarında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \quad (2.3)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilirse ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x 'in bütün değerleri için Taylor açılımı $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyondur denir [118].

Tanım 2.10.

Bir x bağımsız değişkeni ile, bunun iki veya daha fazla fonksiyonu ve bu fonksiyonların x 'e göre türevlerinden meydana gelen sisteme diferansiyel denklem sistemi denir [121].

Tanım 2.11.

Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenlere göre rasyonel mertebeden en az bir tane türevini içeren bir diferansiyel denkleme kesirli mertebeden diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.12

X boştan farklı bir cümle ve τ da X 'in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [122].

T1) $\emptyset, X \in \tau$

T2) $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı sonlu kesişime göre kapalıdır.

T3) Her $i \in I$ için $G_{k_i} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı sonlu birleşime göre kapalıdır.

Tanım 2.13

X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [123].

$$\mathbf{M1)} \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$\mathbf{M2)} \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M3)} \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M4)} \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Tanım 2.14.

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir [124].

Tanım 2.15.

$X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisi $x \in X$ 'e yakınsar veya (x_n) dizisi yakınsaktır denir. $(x_n) \rightarrow x$ ile gösterilir [123].

Tanım 2.16.

$X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [123].

Tanım 2.17.

X metrik uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyorsa X metrik uzayı tamdır denir [123].

Tanım 2.18.

V boş olmayan, üzerinde vektörel bir toplama ve skalerle (gerçek sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V, \text{ için } x + y \in V,$$

$$r \in \mathbb{R}, \text{ için } rx \in V,$$

biçiminde tanımlı olsun; yani, V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine

göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{R}$ (gerçek sayılar kümesi) üzerinde bir vektör uzayı denir [125].

V_1 : Her $x, y \in V$ için $x + y = y + x$ olmalıdır. (Toplamanın yer değiştirme özelliği)

V_2 : Her $x, y, z \in V$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ olmalıdır. (Toplamanın değişme özelliği)

V_3 : Her $x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ bulunmalıdır.

(Toplama işlemine göre etkisiz eleman)

V_4 : Her $x \in V$ için $x + y = y + x = 0$ olacak şekilde bir tek $y \in V$ bulunmalıdır.

(Toplama işlemine göre ters eleman)

V_5 : Her $x, y \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c(x + y) = cx + cy$ olmalıdır.

(Skaler ile çarpmanın toplama üzerine dağılımı)

V_6 : Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$ olmalıdır.

V_7 : Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$ olmalıdır.

V_8 : Her $x \in V$ için $1.x = x$ olmalıdır.

Tanım 2.19.

X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| \geq 0,$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler}),$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

dir [123].

Tanım 2.20.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [123].

Tanım 2.21.

Üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. Üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$ 'den X 'in K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür. Yani X 'in her x ve y vektör çifti (x, y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir skalerle eşlenmektedir [123].

$$1) (x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$

$$2) (\alpha x, y) = \alpha (x, y),$$

$$3) (x, y) = \overline{(y, x)},$$

$$4) (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

Tanım 2.22.

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [126].

Tanım 2.23.

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x 'de ve değer kümesi E_y 'de bulunan $y = Ax$ operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa verilen A operatörüne lineer operatör denir [126].

$$i) A(x + y) = A(x) + A(y),$$

$$ii) A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

Teorem 2.1. (Leibniz Formülü)

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t): a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli ve $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanır [127].

$f(x, t)$ fonksiyonu bu teoremdaki şartları sağlayan bir fonksiyon, $u(t)$ ve $v(t)$ de $c \leq t \leq d$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise,

$$\frac{d}{dt} \int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t) dx = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(v(t), t)v'(t) - f(u(t), t)u'(t) \quad (2.5)$$

eşitliği sağlanır [127].

Tanım 2.24.

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. Bu durumda M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir [128].

Tanım 2.25.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.6)$$

ise Φ fonksiyonuna (2.6) denkleminin çözümüdür denir. Bir adi diferansiyel denklem, denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir.

Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir. Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise başlangıç şartları, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar ise sınır şartları ile tanımlanır [128].

Tanım 2.26.

Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak Jacques Hadamard tarafından literatüre sunulan bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümünün tek olması, mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır.

Eğer başlangıç yada sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y 'ya bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [129].

Tanım 2.27. (Lipschitz Şartı)

a, b ve n sabitler ve $f(x, y)$ de $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$ ile tanımlanmış D bölgesinin bütün noktalarında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y(a) = n$ başlangıç koşulu ile verilmiş $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Özel olarak, D bölgesindeki bütün (x, y) noktaları için y 'ye göre sürekli türevler ile işlem yapılır ve ortalama değer teoremi kullanılırsa; $y < \bar{y} < y^*$ olmak üzere

$$f(x, y) - f(x, y^*) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} (y - y^*), \quad (2.7)$$

yazılır. Açıkça görüleceği gibi,

$$L = (x, y) \in D \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|, \quad (2.8)$$

olarak seçildiğinde (2.7) eşitliği aşıkarak sağlanır [130].

Tanım 2.28. (Laplace Dönüşümü)

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup, fizik, mekanik, mühendislik, tıp ve bazı diğer bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemlerin çözümünde de yararlanılabilen bir dönüşümdür. Bu dönüşümle çözümü elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da ihtiva ettiği görülür.

$F(t), t \geq 0$ 'ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun. ($t < 0$ için $F(t) = 0$ kabul edilebilir); $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} ise,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Bu dönüşüm $L\{F(t)\}$ veya $f(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bu dönüşümü

$$f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad (2.9)$$

şeklinde yazabiliriz [118].

Tanım 2.29.

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Bazı $\alpha \in F$ için $y - \alpha x = 0$ olmak üzere

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y), \quad (2.10)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ile tanımlı norm ifadesine göre

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad (2.11)$$

olarak da yazılabilir [131].

Tanım 2.30.

Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sayılarını ele alalım.

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartlarını sağlayan

$$\sum_{n=1}^k |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^q \right)^{1/q}, \quad (2.12)$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir [131].

Tanım 2.31.

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutbudur denir.

$\phi(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktası da dahil olmak üzere, bu bölgenin her noktasında analitik ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \phi(z_0) \neq 0 \quad (2.13)$$

ise $f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında n . mertebeden bir kutup noktasına sahiptir denir [132].

Tanım 2.32.

Gama fonksiyonu $\mathbb{R}(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.14)$$

integrali ile tanımlanır [39]. Gama fonksiyonunun en temel özellikleri aşağıdaki gibidir [1,39];

1) $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.15)$$

sağlanır.

2) $z \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad (2.16)$$

dir.

3) $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z) \quad (2.17)$$

yazılır.

4) Gama fonksiyonu için limit tanımı,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır.

5) Gama fonksiyonu sıfırdan farklıdır.

6) Gama fonksiyonu her $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için analitiktir.

7) $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında basit kutup noktasına sahiptir.

8) $1 < p < \infty$, eşleniği q ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği Gama fonksiyonuna

uygulanabilir. Yani, $0 < x, y < \infty$ olmak üzere

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q} \quad (2.19)$$

yazılabilir.

Tanım 2.33.

Beta fonksiyonunun tanımı,

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (2.20)$$

olarak bilinir ve burada $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ dir [39]. Beta fonksiyonunun en temel özellikleri aşağıdaki gibidir [1,39];

1) $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ için

$$\beta(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z (1-t)^w dt \quad (2.21)$$

dir.

2) $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ için

$$\beta(z, w) = \beta(w, z) \quad (2.22)$$

değişme özelliği vardır.

3) $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ için

$$\beta(z, w) = \beta(z+1, w) + \beta(z, w+1) \quad (2.23)$$

yazılır.

4) $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ için

$$\beta(z, w+1) = \frac{w}{z} \beta(z+1, w) = \frac{w}{z+w} \beta(z, w) \quad (2.24)$$

sağlanır.

Tanım 2.34.

Gama fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki bağıntı,

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0 \quad (2.25)$$

eşitliği ile verilir [39].

Tanım 2.35.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hata fonksiyonu denir. Hata fonksiyonunun en temel özellikleri aşağıdaki gibidir;

$$1) \operatorname{erf}(0) = 0$$

$$2) \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$3) \operatorname{erf} \text{ ile tanımlanan tamamlayıcı hata fonksiyonu } \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

şeklindedir [39].

Tanım 2.36.

Üstel e^z fonksiyonun bir parametrelili genelleşmiş hali,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.27)$$

Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır [39].

Tanım 2.37.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.28)$$

seri açılımı yardımıyla elde edilebilir [39].

Tanım 2.38.

e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılan $E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu,

$$E_t(v, a) = t^v e^{at} \cdot \Gamma^*(v, at) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + v + 1)} = t^v E_{1, v+1}(at) \quad (2.29)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada verilen

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v) t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad \Re(v) > 0 \quad (2.30)$$

ifadesi Tamamlanmamış Gama fonksiyonu olarak adlandırılır [39].

Teorem 2.2.

$f(t)$ fonksiyonunun Grünwald-Letnikov anlamında kesirli mertebeden türevi, a ve t limit noktaları olmak üzere

$${}_a^{GL}D_t^p[f(t)] = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh), \quad (2.31)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq p < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}^+$ olup $p = m$ ise m . mertebeden türev, $p = -m$ ise m katlı integrali temsil eder [39].

Tanım 2.39.

$0 < p \leq 1$, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonu her (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu duruma Riemann-Liouville kesirli p mertebeden integrali

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır. $k - \alpha > 0$ olacak şekilde α sayısını ele alalım. Bu durumda Riemann-Liouville kesirli $k - \alpha > 0$ mertebeden türevi

$${}_aD_t^{k-\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (2.33)$$

olarak ifade edilir. Bu integralin tanımlı olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. Burada $p = k - \alpha$ alınırsa

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-(k-p)} f(t)), \quad (k-1 \leq p < k), \quad (2.34)$$

elde edilir [39].

Tanım 2.40.

$q > 0$, $n-1 < q < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{R}^+$ ve $x > c$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun q -mertebeli Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali

$$J^q[f(x)] = {}_cD_x^{-q}[f(x)] = \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_c^x (x-t)^{q-1} f(t) dt, \quad (2.35)$$

ile temsil edilir [39].

Tanım 2.41.

$q > 0$, $n-1 < q < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{R}^+$ ve $x > c$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun q -mertebeli Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi

$${}_c D_x^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (x-t)^{n-q-1} f(t) dt \quad (2.36)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq p < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}^+$ dir [39].

Teorem 2.3.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise (2.35)'deki ${}_c D_x^{-q} [f(x)]$ Riemann-Liouville integral operatörü de D bölgesinde $q(q > 0)$ ve x 'e göre analitik bir fonksiyondur [133].

Teorem 2.4.

Eğer f fonksiyonu analitik bir fonksiyon ise ${}_c D_x^q [f(x)]$ kesirli türevi ${}_c D_x^{-q} [f(x)]$ kesirli integralinin analitik devamıdır [133].

Tanım 2.42.

$m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}$, $m-1 < p < m$ ve $f(t)$ fonksiyonu da m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(t)$ fonksiyonunun p -mertebeden Caputo kesirli türevi;

$${}_a^C D_t^p [f(t)] = \frac{1}{\Gamma[m-p]} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau, \quad (2.37)$$

ile tanımlanır [138].

Teorem 2.5.

$\nu - 1 \leq p < \nu$ olmak üzere $f(t) = (t - a)^\nu$ fonksiyonunun kesirli mertebeden integrali,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(1 + \nu + p)} (t - a)^{\nu + p} \quad (2.38)$$

eşitliğini sağlar [39].

İspat

$a = 0$ için $f(t) = t^\nu$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli integral tanımı ve Beta fonksiyonunun tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} \tau^\nu d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{p-1} t^{p-1} \tau^\nu d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1 - u)^{p-1} t^{p-1} (ut)^\nu t du, \quad \left(\frac{\tau}{t} = u\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} t^{\nu+p} \int_0^1 u^\nu (1 - u)^{p-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} t^{\nu+p} \beta(1 + \nu, p) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} t^{\nu+p} \frac{\Gamma(1 + \nu) \Gamma(p)}{\Gamma(1 + \nu + p)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\Gamma(1 + \nu + p)} t^{\nu+p} \end{aligned}$$

elde edilir [134].

Teorem 2.6.

$\nu - 1 \leq p < \nu$ olmak üzere $f(t) = (t-a)^\nu$ fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi,

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)} (t-a)^{\nu-p} \quad (2.39)$$

eşitliğini sağlar [39].

İspat

$a=0$ için $f(t) = t^\nu$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli integral tanımı ve (2.15) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= D \left[{}_a D_t^{-(1-p)} f(t) \right] \\ &= D \left[{}_a D_t^{-(1-p)} t^\nu \right] \\ &= D \left[\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma[1+(1+\nu-p)]} t^{1+\nu-p} \right] \\ &= (1+\nu-p) t^{\nu-p} \frac{\Gamma(1+\nu)}{(1+\nu-p)\Gamma(1+\nu-p)} \\ &= \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)} t^{\nu-p} \end{aligned}$$

elde edilir [134].

Teorem 2.7.

$b, d > -1$ ($b, d \in \mathbb{R}$) olmak üzere

$$\int_0^x (x-t)^b t^d dt = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(d+1)x^{b+d+1}}{\Gamma(b+d+2)} \quad (2.40)$$

dir [133].

Tanım 2.43. (Lacroix'in Tanımı)

p ve m doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{d(z^p)}{dz} &= pz^{p-1} \\
\frac{d^2(z^p)}{dz^2} &= p(p-1)z^{p-2} \\
&\vdots \\
\frac{d^m(z^p)}{dz^m} &= p(p-1)\dots(p-m+1)z^{p-m} = \frac{p(p-1)\dots(p-m+1)(p-m)!}{(p-m)!} z^{p-m} \\
\frac{d^m(z^p)}{dz^m} &= \frac{p!}{(p-m)!} z^{p-m}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

dir [133].

Teorem 2.8.

$f(x) = x^{-a}$, $x > 0$, $a > 0$ ve alt sınır $-\infty$ olmak üzere

$$_{-\infty}D_x^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(a)} x^{-\alpha-a} \tag{2.42}$$

ifadesine Riemann-Liouville'un ikinci kesirli türev tanımı denir[135].

Teorem 2.9.

$a > 0$ olmak üzere e^{-ax} üstel fonksiyonunun α -mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral tanımı;

$${}_0D_x^\alpha e^{-ax} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (ax)^{n-1}}{\Gamma(\alpha + n)} x^\alpha \tag{2.43}$$

ile verilir [136].

Teorem 2.10.

$\sin x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali ;

$${}_0D_x^{-\alpha} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(\alpha + 2n)} x^{2n-1+\alpha} \tag{2.44}$$

formundadır [136].

Teorem 2.11.

$\ln x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali ;

$${}_0D_x^{-\alpha} \ln x = \frac{x^\alpha \ln x}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(\alpha+k)} \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanır [136].

Tanım 2.44.

(2.36) Riemann-Liouville kesirli türevi lineerdir. Şöyle ki $\alpha > 0$ ve k herhangi bir sabit olmak üzere,

$${}_cD_x^\alpha [f(x) + g(x)] = {}_cD_x^\alpha f(x) + {}_cD_x^\alpha g(x) \quad (2.46)$$

ve

$${}_cD_x^\alpha k f(x) = k {}_cD_x^\alpha f(x) \quad (2.47)$$

olur [137].

Teorem 2.12.

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t, y), \quad (2.48)$$

$$\left[{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t) \right]_{t=0} = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.49)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada

$${}_aD_t^{\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1};$$

$${}_aD_t^{\sigma_k-1} \equiv {}_aD_t^{\alpha_k-1} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1};$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n);$$

$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde ifade edilsin.

Farzedelim ki, $f(t, y)$, (t, y) uzayının bir G bölgesinde tanımlı olsun ve

$$0 < t < h, \quad \left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\sigma_i - \sigma_1}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K, \quad (2.50)$$

eşitsizliğini sağlayan $(t, y) \in G$ noktalar kümesindeki bir $R(h, k) \subset G$ bölgesi tanımlansın;

burada h ve K sabittir.

$f(t, y)$ reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun, y 'ye göre

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2| \quad (2.51)$$

eşitsizliğindeki Lipschitz şartını sağlayan G bölgesinde tanımlansın.

Burada her $(t, y) \in G$ için $|f(t, y)| \leq M < \infty$ şeklindedir. Ayrıca $K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}$

olsun. Bu durumda $R(h, k)$ bölgesinde (2.48)-(2.49) probleminin bir tek $y(t)$ sürekli çözümü vardır [39].

Tanım 2.45.

Üstel $f(t) = e^{\pm \lambda t}$ ve trigonometrik $g(t) = \sin(bt)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha [f(t)] &= {}_0I_t^\alpha [e^{\pm \lambda t}] = \lambda^{-\alpha} e^{\pm \lambda t}, \\ {}_0I_t^\alpha [g(t)] &= {}_0I_t^\alpha [\sin(bt)] = b^{-\alpha} \sin\left(bt \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

ile ifade edilir. Burada $a > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [9,41].

Teorem 2.13.

$0 \leq m \leq p \leq m+1$, $0 \leq n \leq q \leq n+1$ ve $f(t)$, $f^{(k)}(a) = 0$ olsun. Bu takdirde $k = 0, 1, \dots, r-1$ olmak üzere ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ kesirli mertebeden türeve sahip operatörlerin birleşimi

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p ({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t), \quad (2.53)$$

eşitliğini sağlar [39].

Tanım 2.46.

a noktası $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ olsun; Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türev arasındaki ilişki;

$${}^{RL}_a D_t^p [f(t)] = {}^C_a D_t^p [f(t)] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma[k-\alpha+1]} f^{(k)}(a), \quad (2.54)$$

olarak bilinir ve burada $n-1 < \alpha < n$ dir [138,139].

Teorem 2.14.

Tamsayı mertebeden kesirli türevlerin ve integrallerin birleşimi; $k > n$ olsun $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$.mertebeden türevi

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.55)$$

dir ve burada D^k operatörü $k \leq 0$ olduğunda k katlı integrali ifade eder [39].

Tanım 2.47.

n tamsayı değerleri için Cauchy anlamında n katlı integrasyon

$$f^{-n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

dur. Yukarıda verilen Cauchy formülünde $p > 0$ reel sayısı ile n tamsayısı yer değiştirirse;

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

$p -$ katlı kesirli integral tanımı elde edilir. Burada n tamsayısı $n \geq 1$ şartını sağlamalıdır.

Bu durumda $p > 0$ olmalıdır. Eğer $t \geq a$ için $f(t)$ sürekli ise bu takdirde integrasyon

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t), \quad (2.56)$$

biçimindeki özelliği korur [39].

Tanım 2.48.

Bazı özel trigonometrik fonksiyonların Riemann-Liouville anlamında kesirli türev ve integralleri aşağıdaki şekilde elde edilir. Kesirli integral tanımında $\xi = t - \tau$ değişken değiştirmesi yapılarak $m \leq p < m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{-p} [\cos(at)] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \xi^{p-1} \cos(a(t-\xi)) d\xi = C_t(p, a), \quad p > 0, \\
{}_0D_t^{-p} [\sin(at)] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \xi^{p-1} \sin(a(t-\xi)) d\xi = S_t(p, a), \quad p > 0,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

elde edilir. (2.57) denkleminde $p = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^{-\frac{1}{2}} [\cos(at)] &= C_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} [C(x) \cos(at) + S(x) \sin(at)], \\
{}_0D_t^{-\frac{1}{2}} [\sin(at)] &= S_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} [C(x) \sin(at) - S(x) \cos(at)],
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int_0^x \cos(t^2) dt, \\
S(x) &= \int_0^x \sin(t^2) dt,
\end{aligned}$$

dir.

Benzer olarak

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^p [\cos(at)] &= C_t(-p, a), \\
{}_0D_t^p [\sin(at)] &= S_t(-p, a),
\end{aligned}$$

olur [140].

Tanım 2.49.

$f(t) = C$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali

$${}_0D_t^{-\alpha} [f(t)] = {}_0D_t^{-\alpha} [C] = C {}_0D_t^{-\alpha} [t^0] = \frac{C}{\Gamma[1+\alpha]} t^\alpha, \tag{2.58}$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [41].

Tanım 2.50.

$f(t) = C$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında kesirli mertebeden türevi

$${}_0D_t^\alpha [f(t)] = {}_0D_t^\alpha [C] = C {}_0D_t^\alpha [t^0] = \frac{C}{\Gamma[1-\alpha]} t^{-\alpha}, \quad (2.59)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [39,41].

Tanım 2.51.

$m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve J_t^α Riemann-Liouville integral operatörü olmak üzere Caputo anlamında kesirli türeve sahip terime uygulanması aşağıdaki şekilde tanımlanır [141];

$$J_t^\alpha [{}^C D^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}. \quad (2.60)$$

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM)

Nikolay A. Kudryashov'un lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için literatüre sunmuş olduğu Kudryashov metodunun [63,142,143] genelleştirilmiş hali olan genelleştirilmiş Kudryashov metodu aşağıdaki gibi dört adımda ele alınabilir [64-66].

Adım 1. u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı bir bağımlı fonksiyon olmak üzere

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.1.1)$$

şeklinde zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.1) için dalga dönüşüm denklemi [64-66];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}, \quad (3.1.2)$$

şeklinde olup burada k , λ sabit ve $\lambda \neq 0$ dır. (3.1.1) denkleminde (3.1.2) dönüşümü uygulanırsa (3.1.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi

$$N(x, t, u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (3.1.3)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde dönüşür. Burada türev η 'ya göre alınır.

Adım 2. (3.1.3) adi diferansiyel denklemi için genelleştirilmiş Kudryashov fonksiyonu aşağıdaki gibi alınır;

$$u(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\eta)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\eta)} = \frac{A[Q(\eta)]}{B[Q(\eta)]} \quad (3.1.4)$$

burada $Q = \frac{1}{1 \pm e^\eta}$ 'dir. Q fonksiyonu ise

$$Q_\eta = Q^2 - Q \quad (3.1.5)$$

denkleminin bir çözümüdür [63].

(3.1.4) denklemi dikkate alınarak, u 'nın η 'ya göre türevleri,

$$u'(\eta) = \frac{A'Q'B - AB'Q'}{B^2} = Q' \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] = (Q^2 - Q) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right], \quad (3.1.6)$$

$$u''(\eta) = \frac{Q^2 - Q}{B^2} \left[(2Q-1)(A'B - AB') + \frac{Q^2 - Q}{B} \left[B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2 \right] \right], \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} u'''(\eta) = (Q^2 - Q)^3 & \left[\frac{(A'''B - AB''' - 3A''B' - 3B''A')B + 6B(AB'' + B'A')}{B^3} - \frac{6A(B')^3}{B^4} \right] \\ & + 3(Q^2 - Q)^2 (2Q-1) \left[\frac{B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2A(B')^2}{B^3} \right] \\ & + (Q^2 - Q)(6Q^2 - 6Q + 1) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

şeklindedir.

Adım 3. Genelleştirilmiş Kudryashov metoduna göre (3.1.3) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranır;

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + \dots + a_NQ^N}{b_0 + b_1Q + b_2Q^2 + \dots + b_MQ^M}. \quad (3.1.9)$$

(3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri (3.1.3)'de yerine yazılarak ve balans prensibinin koşulları dikkate alınarak en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin polinom karşılığındaki en yüksek dereceli terimin dengeleme bağıntısından (3.1.9) denkleminin dereceleri olan M ve N değerleri hesaplanır.

Adım 4. (3.1.4) denklemi (3.1.3) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yazılırsa Q 'ya bağlı $R(Q)$ diferansiyel denklemi elde edilir. $R(Q)$ 'nun katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$ katsayıları belirlenir. Böylece (3.1.1) zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri elde edilmiş olur.

3.2. Sumudu Dönüşüm Metodu (SDM)

Literatürde; fizik, astronomi ve mühendislikte yaygın olarak kullanılan birçok integral dönüşümü vardır. Bunlardan bazıları Laplace dönüşüm metodu, Fourier dönüşüm metodu, Mellin dönüşüm metodu ve Hankel gibi integral dönüşümleri ile ilgili teori ve uygulama alanında birçok çalışma mevcuttur. Bunlara ilaveten, Sumudu dönüşümü [67-91] olarak adlandırılan ve kontrol mühendisliği problemlerindeki adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılan bu metodu Watugala [67] ilk kez literatüre kazandırmıştır. Watugala bir $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır [67-69].

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

olmak üzere

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut) dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2), \quad (3.2.1)$$

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u} \right) e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt, \quad (3.2.2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.2.1) eşitliği verilen herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanarak $F(u)$ Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. Bu dönüşümün ters Sumudu dönüşümü [76];

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{s}, \quad (3.2.3)$$

olarak tanımlanır. Bu integralin hesabı oldukça zor olduğundan uygulamada daha önce hazırlanmış olan dönüşüm tablolarından yararlanılabilir [76]. (3.2.1) denkleminin (3.2.3) ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa Sumudu dönüşüm metoduyla verilen denklemin çözümü elde edilmiş olur.

Kısmi diferansiyel denklemlere de Sumudu dönüşümü uygulanarak $F(x, u)$ 'yu içeren diferansiyel denklemler elde edilir. Elde edilen bu denklemlerde $F(x, u)$ bağımlı değişkeninin bulunması HPM, ADM, VIM gibi bilinen yarı analitik metotlarla elde edilebilir [144].

3.2.1. Sumudu Dönüşümünün Diğer Dönüşümlerle İlişkisi

Sumudu dönüşümü;

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.2.1.1)$$

olarak tanımlanan Laplace dönüşümünün farklı bir versiyonudur. Aynı zamanda, bu Laplace dönüşümü p-katlı Laplace-Carson dönüşümü olarak da bilinir [145];

$$C\{f(t)\} = G(p) = \int_0^{\infty} p e^{-pt} f(t) dt. \quad (3.2.1.2)$$

Bu üç dönüşüm ortak bir fonksiyon üzerinde karşılaştırılabilir. Örneğin t^n fonksiyonu üzerinde karşılaştırılırsa:

$$L\{t^n\}(s) = n! s^{-(n+1)},$$

$$C\{t^n\}(p) = n! p^{-(n)},$$

$$S\{t^n\}(u) = n! u^n.$$

Böylece (3.2.1.2) denkleminde $p = \frac{1}{u}$ alınarak (3.2.2) denklemi elde edilir.

Sumudu dönüşümünün farklı dönüşümlerle de arasında bağlantı vardır. Başlangıçta verilen $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ aşağıdaki şekilde Sumudu Dönüşümü $F_s(u)$ 'ya dönüştürülebilir;

$$F_s(u) = \frac{1}{u} F\left(\frac{1}{u}\right),$$

ve onun tersi

$$F_s = \frac{1}{s} F_s\left(\frac{1}{s}\right),$$

şeklindedir [144].

3.2.2. Sumudu Dönüşüm Metodunun Temel Tanım ve Teoremleri

Tanım 3.2.2.1.

A bir fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}, \quad j = 1, 2, 3$$

olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü;

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut) dt, u \in (-\tau_1, \tau_2), \quad (3.2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır [67-91].

Teorem 3.2.2.1.

$f(t), g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümü

$$S[a.f(t) + b.g(t)] = a.S[f(t)] + b.S[g(t)], \quad (3.2.2.2)$$

şeklinde lineerlik özelliğine sahiptir [67-91].

İspat:

$$\begin{aligned} S[a.f(t) + b.g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-t} [a.f(ut) + b.g(ut)] dt = \int_0^{\infty} [a.e^{-t} f(ut) + b.e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= \int_0^{\infty} [a.e^{-t} f(ut)] dt + \int_0^{\infty} [b.e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= a \cdot \int_0^{\infty} [e^{-t} f(ut)] dt + b \cdot \int_0^{\infty} [e^{-t} g(ut)] dt, \\ &= a.S[f(t)] + b.S[g(t)]. \end{aligned} \quad (3.2.2.3)$$

Teorem 3.2.2.2.

$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{u} [F(x, y, u) - f(x, y, 0)], \quad (3.2.2.4)$$

özelliğine sahiptir [76,81-86].

İspat:

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t}\right] &= \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} dt \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(x, y, t) \Big|_0^p + \frac{1}{u^2} \int_0^p e^{\frac{-t}{u}} f(x, y, t) dt \right] \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(x, y, t) \Big|_0^p + \frac{1}{u} \left(\frac{1}{u} \int_0^p e^{\frac{-t}{u}} f(x, y, t) dt \right) \right] \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{u} e^{\frac{-t}{u}} f(x, y, t) \Big|_0^p \right] + \frac{1}{u} F(x, y, u) \\
&= -\frac{1}{u} f(x, y, 0) + \frac{1}{u} F(x, y, u) \\
&= \frac{1}{u} [F(x, y, u) - f(x, y, 0)]
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2.3.

$\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S \left[\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{u^2} \left[F(x, y, u) - f(x, y, 0) - u \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial t} \right] \quad (3.2.2.5)$$

özelliğine sahiptir [76,81-86].

İspat:

$$S \left[\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{u} [F(x, y, u) - f(x, y, 0)] \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\begin{aligned}
S \left[\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} \right] &= S \left[\frac{\partial g(x, y, t)}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = g(x, y, t) \\
&= \frac{1}{u} [G(x, y, u) - g(x, y, 0)] \\
&= \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u} \int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} g(x, y, t) dt - g(x, y, 0) \right] \\
&= \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u} \int_0^\infty e^{\frac{-t}{u}} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} dt - g(x, y, 0) \right] \\
&= \frac{1}{u} \left[\frac{1}{u} (F(x, y, u) - f(x, y, 0)) - \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial t} \right] \\
&= \frac{1}{u^2} \left[F(x, y, u) - f(x, y, 0) - u \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial t} \right]
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2.4.

$f^{(n)}(x, y, t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial^3 f(x, y, t)}{\partial t^3}\right] = \frac{1}{u^3} [F(x, y, u) - f(x, y, 0) - uf'(x, y, 0) - u^2 f''(x, y, 0)], \quad (3.2.2.6)$$

$$S\left[\frac{\partial^4 f(x, y, t)}{\partial t^4}\right] = \frac{1}{u^4} [F(x, y, u) - f(x, y, 0) - uf'(x, y, 0) - u^2 f''(x, y, 0) - u^3 f'''(x, y, 0)], \quad (3.2.2.7)$$

⋮

$$S\left[\frac{\partial^n f(x, y, t)}{\partial t^n}\right] = \frac{1}{u^n} \left[F(x, y, u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k f^{(k)}(x, y, 0) \right], \quad (3.2.2.8)$$

özelliklerine sahiptir [76,91].

Teorem 3.2.2.5.

$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S\left[\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}\right] = F', \quad (3.2.2.9)$$

şeklinde ifade edilir [75-80].

İspat:

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x}\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial x} \partial t \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{t}{u}} f(x, y, t) dt \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= F'. \end{aligned}$$

Teorem 3.2.2.6.

Özel olarak $f(t)$ fonksiyonunu $f(t) = e^{at}$ üstel olarak alırsak bu fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$S[e^{at}] = \frac{1}{1-au}, \quad (3.2.2.10)$$

şeklindedir [75-80].

İspat:

$$\begin{aligned}
 S[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{a(ut)} dt \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\int_0^p e^{t(au-1)} dt \right] \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{t(au-1)}}{au-1} \right]_0^p \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(au-1) \cdot e^{(1-au)t}} \right]_0^p \\
 &= \frac{1}{1-au}.
 \end{aligned}$$

3.2.3. Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Sumudu Dönüşüm Metodu

Tanım 3.2.3.1.

Kesirli Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha} \{ f(t) \} &= G_{\alpha}(u) = \int_0^{\infty} E_{\alpha}(-t^{\alpha}) f(ut) (dt)^{\alpha} \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M E_{\alpha}(-t^{\alpha}) f(ut) (dt)^{\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.2.3.1}$$

şeklindedir. Burada $u \in C$ ve $E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ olarak tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur [87-91].

Tanım 3.2.3.2.

Kesirli çift Sumudu dönüşümü

$$S_{\alpha}^2 \{ f(t, x) \} = G_{\alpha}^2(u, v) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E_{\alpha}[-(t+x)^{\alpha}] f(ut, vx) (dt)^{\alpha} (dx)^{\alpha} \tag{3.2.3.2}$$

şeklindedir. Burada $u, v \in C$ ve $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ olarak tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur [87-91].

Tanım 3.2.3.3.

$\int_0^x f(t)(dt)^\alpha$ ifadesinin eşiti

$$y(x) = \int_0^x f(t)(dt)^\alpha = \alpha \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (3.2.3.3)$$

şeklindedir [87-90].

Tanım 3.2.3.4.

Kesirli Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned} L_\alpha \{ f(t) \} &= F_\alpha(u) = \int_0^\infty E_\alpha(-(ut)^\alpha) f(t)(dt)^\alpha \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M E_\alpha(-(ut)^\alpha) f(t)(dt)^\alpha \end{aligned} \quad (3.2.3.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $u \in C$ ve $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ olarak tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur [87-91].

Tanım 3.2.3.5. (Kesirli mertebeden Laplace-Sumudu İkili dönüşümü)

Laplace dönüşümü $L_\alpha \{ f(t) \} = F_\alpha(u)$ ve Sumudu dönüşümü $S_\alpha \{ f(t) \} = G_\alpha(u)$ olup, kesirli Sumudu dönüşümü tanımı gereğince

$$\begin{aligned} G_\alpha(u) &= S_\alpha \{ f(t) \} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M E_\alpha(-t^\alpha) f(ut)(dt)^\alpha \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \int_0^M (M-t)^{\alpha-1} E_\alpha(-t^\alpha) f(ut) dt \end{aligned}$$

Burada $t' = ut$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{u^\alpha} \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \int_0^{Mu} (Mu - t')^{\alpha-1} E_\alpha \left(-\left(\frac{t'}{u}\right)^\alpha \right) f(t') dt' \\
&= \frac{1}{u^\alpha} \int_0^\infty E_\alpha \left(-\left(\frac{t'}{u}\right)^\alpha \right) f(t') (dt')^\alpha \\
&= \frac{1}{u^\alpha} F_\alpha \left(\frac{1}{u} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.3.5}$$

olarak bulunur. Yani

$$G_\alpha(u) = \frac{1}{u^\alpha} F_\alpha \left(\frac{1}{u} \right) \tag{3.2.3.6}$$

elde edilir [87-91].

Teorem 3.2.3.1.

Eğer $F(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ise, Riemann-Liouville kesirli türevinin Sumudu dönüşümü [87],

$$S[D^\alpha f(t)] = u^{-\alpha} \left[F(u) - \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} [D^{\alpha-k}(f(t))]_{t=0} \right], \quad -1 < n-1 \leq \alpha < n, \tag{3.2.3.7}$$

ile verilir.

İspat:

İlk olarak $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ olmak üzere Laplace dönüşümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
L[D^\alpha f(t)] &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1}(f(t))]_{t=0} \\
&= s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} [D^{\alpha-k}(f(t))]_{t=0}.
\end{aligned} \tag{3.2.3.8}$$

Burada s yerine $1/u$ yerleştirirsek kesirli mertebeden $f(t)$ 'nin Sumudu dönüşümü aşağıdaki gibi olur [77]:

$$S[D^\alpha f(t)] = u^{-\alpha} \left[F(u) - \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} [D^{\alpha-k}(f(t))]_{t=0} \right]. \tag{3.2.3.9}$$

Sumudu dönüşümünün özelliklerinden yararlanarak kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulalım.

$y(0) = f(0)$ başlangıç şartı ile verilen

$$\frac{\partial^\alpha y(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial y(t)}{\partial t} + y(t) + c, \quad (3.2.3.10)$$

lineer kesirli adi diferansiyel denklemini ele alalım.

(3.2.2.8) ve (3.2.3.7) denklemlerini dikkate alarak (3.2.3.10) denkleminin Sumudu dönüşümünü aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\partial^\alpha y(t)}{\partial t^\alpha}\right] &= S\left[\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}\right] + S\left[\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right] + S[y(t)] + S[c], \\ u^{-\alpha}\left[F(u) - \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} \left[D^{\alpha-k}(f(t))\right]_{t=0}\right] &= \frac{1}{u^2}\left[F(u) - f(0) - u \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right] \\ &\quad + \frac{1}{u}[F(u) - f(0)] + F(u) + c, \\ F(u) - \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} \left[D^{\alpha-k}(f(t))\right]_{t=0} &= u^{\alpha-2}\left[F(u) - f(0) - u \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right] \\ &\quad + u^{\alpha-1}[F(u) - f(0)] + u^\alpha F(u) + cu^\alpha, \\ F(u) &= u^{\alpha-2}F(u) - u^{\alpha-2}f(0) + \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} \left[D^{\alpha-k}(f(t))\right]_{t=0} - u^{\alpha-1} \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \\ &\quad + u^{\alpha-1}F(u) - u^{\alpha-1}f(0) + u^\alpha F(u) + cu^\alpha, \\ F(u) - u^{\alpha-2}F(u) - u^{\alpha-1}F(u) - u^\alpha F(u) &= -u^{\alpha-2}f(0) + \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} \left[D^{\alpha-k}(f(t))\right]_{t=0} \\ &\quad - u^{\alpha-1} \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} - u^{\alpha-1}f(0) + cu^\alpha, \\ F(u) &= \frac{1}{1 - u^{\alpha-2} - u^{\alpha-1} - u^\alpha} \left[g(u) - u^{\alpha-1}f(0) - u^{\alpha-2}f(0) + cu^\alpha\right], \end{aligned} \quad (3.2.3.11)$$

Burada $g(u), \sum_{k=1}^n u^{\alpha-k} \left[D^{\alpha-k}(f(t))\right]_{t=0} - u^{\alpha-1} \frac{\partial f(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ ile tanımlanır.

Eğer ters dönüşüm tablosunu kullanarak [76,87] ,(3.2.3.11) denkleminin ters Sumudu dönüşümünü alırsak (3.2.3.10) denkleminin Sumudu dönüşümü ile analitik çözümünü

$$y(t) = S^{-1} \left[\frac{1}{1 - u^{\alpha-2} - u^{\alpha-1} - u^\alpha} \left[g(u) - u^{\alpha-1} f(0) - u^{\alpha-2} f(0) + cu^\alpha \right] \right]. \quad (3.2.3.12)$$

şeklinde elde ederiz [91].

Ayrıca kesirli Sumudu dönüşümünün bazı özel dönüşümleri aşağıda verilmiştir [75-80].

$$\text{i)} \quad S_\alpha \{ f(\alpha t) \} = G_\alpha(\alpha u),$$

$$\text{ii)} \quad S_\alpha \{ f(t-b) \} = E_\alpha(-b^\alpha) G_\alpha(u),$$

$$\text{iii)} \quad S_\alpha \{ E_\alpha(-c^\alpha t^\alpha) f(t) \} = \frac{1}{(1+cu)^\alpha} G_\alpha\left(\frac{u}{1+cu}\right),$$

$$\text{iv)} \quad S_\alpha \left\{ \int_0^t f(t)(dt)^\alpha \right\} = u^\alpha \Gamma(1+\alpha) G_\alpha(u),$$

$$\text{v)} \quad S_\alpha \{ f(t)^\alpha \} = \frac{G_\alpha(u) - \Gamma(1+\alpha) f(0)}{u^\alpha}.$$

3.3. Varyasyonel İterasyon Metodu

Varyasyonel iterasyon metodunun temel yapısı ve diferansiyel denklemlere uygulanması birçok çalışmada ele alınmıştır [93-114]. Kesirli diferansiyel denklemlere varyasyonel iterasyon metodunu ilk olarak J. H. He uygulamıştır [97]. Varyasyonel iterasyon metodu kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanması aşağıdaki şekilde ifade edilir [111].

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \quad t > 0 \quad (3.3.1)$$

burada L verilen diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörü, N lineer olmayan operatör ve $g(x,t)$ verilmiş sürekli bir fonksiyondur. c_k lar sabit olmak üzere başlangıç şartları ise ,

$$u^k(x,0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.3.2)$$

şeklindedir [111]. α ise $m-1 < \alpha \leq m$ olmak üzere kesirli mertebeden türevin mertebesidir. Varyasyonel iterasyon metodunun temel özelliği (3.3.1) denklemi için bir düzeltme fonksiyoneli kurmaktır. Bu düzeltme fonksiyoneli varyasyonel teorisi gereğince,

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t \left[\lambda(\tau) \left(\frac{\partial^m u_k(x,\tau)}{\partial \tau^m} + L\tilde{u}_k(x,\tau) + N\tilde{u}_k(x,\tau) - g(x,\tau) \right) \right] d\tau \quad (3.3.3)$$

şeklinde yazılır. Burada λ Lagrange çarpanıdır ve $\tilde{u}_k$ kısıtlanmış varyasyondur. Düzeltme fonksiyoneli u_k ya göre sabit alınır ve δ varyasyonel operatör olmak üzere $\delta N\tilde{u}_k = 0$ [146] olduğu kabul edilirse,

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) \left[\left(\frac{\partial^m u_k(x,\tau)}{\partial \tau^m} + L\tilde{u}_k(x,\tau) + N\tilde{u}_k(x,\tau) - g(x,\tau) \right) \right] d\tau \quad (3.3.4)$$

olur. (3.3.4) denklemden

$$\begin{aligned}
\delta u_{k+1}(x,t) &= \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \left[\frac{\partial^m \lambda(\tau) u_k}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) L \tilde{u}_k + \lambda(\tau) N \tilde{u}_k - \lambda(\tau) g(x,\tau) \right] d\tau = 0 \\
&= \delta u_k(x,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^m \lambda(\tau) \delta u_k}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) \delta L \tilde{u}_k + \lambda(\tau) \delta N \tilde{u}_k - \lambda(\tau) \delta g \right] d\tau = 0 \\
&= \delta u_k(x,t) - \int_0^t \left[-\frac{\partial^m \lambda(\tau) \delta u_k}{\partial \tau^m} - \lambda(\tau) \delta L \tilde{u}_k + \lambda(\tau) \delta g \right] d\tau = 0 \\
&= \delta u_k(x,t) + \lambda(\tau) \delta \tilde{u}_k(x,\tau) + \int_0^t \left[\frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) \right] \delta u_k(x,\tau) d\tau = 0 \\
&= (1 + \lambda(\tau)) \delta u_k(x,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) \right] \delta u_k(x,\tau) d\tau = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$1 + \lambda(\tau) = 0 \text{ ve } \frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) = 0$$

olmak üzere Lagrange çarpanı [112],

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1, \quad m = 1 \\ \lambda = \tau - t, \quad m = 2 \\ \vdots \\ \lambda = (-1)^m \frac{(\tau - t)^{(m-1)\alpha}}{\Gamma[1 + (m-1)\alpha]}, \quad m > 2 \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

şeklinde elde edilir.

3.4. Homotopi Ayırışım Metodu

Bu metodun temel notasyonunu göstermek için,

$$\frac{\partial^i U(x,t)}{\partial t^i} = y_i(x), \quad \frac{\partial^{m-1} u(x,0)}{\partial t^{m-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-2, \quad (3.4.1)$$

başlangıç şartı ile verilen

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m} = L(U(x,t)) + N(u(x,t)) + f(x,t), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.2)$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım [51-52]. Burada m türevin mertebesi, $f(x,t)$ verilmiş sürekli bir fonksiyon, L verilen diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörü ve N lineer olmayan türev operatörüdür.

İlk olarak (3.4.2) denkleminin her iki tarafına $\frac{\partial^m}{\partial t^m}$ türevinin ters operatörünü uygularsak

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k u(x,t)}{dt^k} + \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} L(U(x,\tau)) + N(U(x,\tau)) + f(x,\tau) d\tau \dots dt \quad (3.4.3)$$

elde edilir.

(3.4.3) denklemindeki çoklu integral

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} L(U(x,\tau)) + N(U(x,\tau)) + f(x,\tau) d\tau \dots dt \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} L(U(x,\tau)) + N(U(x,\tau)) + f(x,\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

haline dönüşür. Buradan (3.4.2) denklemi

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_i(x) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} L(U(x,\tau)) + N(U(x,\tau)) + f(x,\tau) d\tau \quad (3.4.5)$$

olarak yeniden formüle edilir.

Homotopi yapısını kullanarak, (3.4.5) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} U(x,t,p) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t), \\ U(x,t) &= \lim_{p \rightarrow 1} U(x,t,p), \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

seri formunda verilir.

$p \in (0,1]$ bir yerleştirme parametresi olmak üzere lineer olmayan terim

$$NU(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n \mathcal{H}_n(U) \quad (3.4.7)$$

olarak ayrıştırılır. $\mathcal{H}_n(U)$

$$\mathcal{H}_n(U_0, \dots, U_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{j=0}^n p^j U_j(x,t) \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4.8)$$

şeklinde ifade edilen polinomlardır.

Abel integrali ile Ayrışım metodunun birleşmesiyle elde edilen Homotopi ayrışım metodu,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t) = T(x,t) + p \frac{1}{(m-1)!} \\ \times \int_0^t (t-\tau)^{m-1} \left[f(x,t) + L \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,\tau) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n \mathcal{H}_n(U) \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

ile verilir. Burada

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_i(x) \quad (3.4.10)$$

ile ifade edilir.

p 'nin aynı kuvvetlerinin terimlerini kıyaslarsak çeşitli mertebeden çözümleri verir.

Yaklaşımın başlangıç değeri m mertebeden çözümün Taylor serisi olan $T(x,t)$ olarak varsayılır. Bu başlangıç değeri Ayrışım serilerinin tekliğini sağlar [51-52].

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde ilk olarak, lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi, zaman-kesirli KdV ve mKdV denklemleri, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemi, zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemi ve zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için GKM kullanılmıştır. Daha sonra GKM kullanılarak bulunan analitik çözümler için iki ve üç boyutlu grafikler çizilmiştir [64-66].

İkinci adımda, kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için SDM [67-91] kullanılmıştır. Daha sonra SDM kullanılarak bulunan analitik çözümler için iki boyutlu grafikler çizilmiştir [92].

Üçüncü adımda, kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için VIM kullanılmıştır. Daha sonra VIM kullanılarak bulunan yaklaşık çözümler için iki boyutlu grafikler çizilmiştir [116].

Son olarak, kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Homotopi Ayırışım Metodu kullanılmıştır. Daha sonra Homotopi Ayırışım Metodu kullanılarak bulunan yaklaşık çözüm için üç boyutlu grafik çizilmiştir [117].

4.1. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Klein-Gordon Denklemine GKM'nin Uygulanması

Klein-Gordon denklemi birinci relativistik dalga denkleminin ilk gelişimi ve başlangıcı olarak bilinir. 1926 yılında Klein, Fock, Schrödinger, ve de Broglie'nin de aralarında bulunduğu bir çok fizikçi klasik Schrödinger denkleminin bir relativistik genelleştirmesi için ilk olarak Klein-Gordon denklemini ele almışlardır. Klein-Gordon denkleminin ilk versiyonlarının çoğu izafiyetin genel teorisiyle alakalıdır. Klein ve bazı diğer fizikçiler elektrodinamiğin yanısıra genel göreliliği kapsayan bir beş boyutlu birleşik teorisi içindeki kuantum mekaniğini açıklamışlardır. 1926 yılındaki bu büyük girişim dikkat çekmesine rağmen, onun kuantum mekaniğindeki gelişmelerin yayılması üzerindeki etkisi oldukça azdır [65].

Şimdi Klein-Gordon denkleminin fiziksel açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemini inceleyelim.

α kesirli türevi temsil eden bir parametre ve θ_1 ve θ_2 keyfi sabitler olmak üzere lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi [65]

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \theta_1 u(x,t) + \theta_2 u^3(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilsin. (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denkleminin analitik çözümleri için GKM'yi kullanalım. Şimdi (4.1.1) denklemi için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x,t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.1.3)$$

bulunur ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = \sigma_x \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^{2\alpha} \eta}{\partial t^{2\alpha}},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (3.1.2), (4.1.3) ve (4.1.4) dönüşümlerini (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$(\lambda^2 - k^2)u'' - \theta_1 u - \theta_2 u^3 = 0 \quad (4.1.5)$$

bulunur. Burada k ve λ keyfi sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.1.5) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 3N - 3M \Rightarrow N = M + 1 \quad (4.1.6)$$

olduğu görülür. (4.1.6) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 2$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q} \quad (4.1.7)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right] \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) = & \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2) \right] \\ & + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1Q)^3} \left[2a_2(b_0 + b_1Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2) \right] \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

bulunur. (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Durum 1

$$a_0 = \pm \frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}}, a_1 = \mp \frac{i\sqrt{\theta_1}(2b_0 + b_1)}{\sqrt{\theta_2}}, a_2 = 0, \lambda = -\sqrt{k^2 - 2\theta_1} \quad (4.1.10)$$

(4.1.10) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_1(x, t) = \frac{\pm \frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}} \mp \frac{i\sqrt{\theta_1}(2b_0 + b_1)}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.11)$$

elde edilir. Buradan (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_3(x, t) = \frac{K \tanh(k_1x - \lambda_1t^\alpha) + L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1x - \lambda_1t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1x - \lambda_1t^\alpha) \right]} \quad (4.3.17)$$

$$u_4(x, t) = \frac{K \coth(k_1x - \lambda_1t^\alpha) + L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1x - \lambda_1t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1x - \lambda_1t^\alpha) \right]} \quad (4.3.18)$$

şeklindedir. Burada

$$K = \pm \frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}}, L = \mp \frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, \lambda_1 = -\frac{\sqrt{k^2 - 2\theta_1}}{2\Gamma(1+\alpha)} \text{ ve } k_1 = \frac{k}{2},$$

dir.

Durum 2

$$a_0 = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}}, a_1 = \frac{i\sqrt{\theta_1}(-2b_0 + b_1)}{\sqrt{\theta_2}}, a_2 = -\frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, \lambda = \sqrt{k^2 - 2\theta_1} \quad (4.1.14)$$

(4.1.14) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_3(x, t) = \frac{\frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}} + \frac{i\sqrt{\theta_1}(-2b_0 + b_1)}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right) - \frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.15)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_3(x, t) = \frac{\tanh(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \left(C + D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \right] \right)}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \right]} \quad (4.1.16)$$

$$u_4(x, t) = \frac{\coth(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \left(C + D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \right] \right)}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1x - \lambda_2t^\alpha) \right]} \quad (4.1.17)$$

şeklindedir. Burada

$$C = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_0}{\sqrt{\theta_2}}, D = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{\sqrt{k^2 - 2\theta_1}}{2\Gamma(1+\alpha)}$$

dir.

Durum 3

$$a_0 = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{2\sqrt{\theta_2}}, a_1 = -\frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, a_2 = \frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, b_0 = -\frac{b_1}{2}, \lambda = -\sqrt{k^2 - 2\theta_1} \quad (4.1.18)$$

(4.1.18) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_5(x, t) = \frac{\frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{2\sqrt{\theta_2}} - \frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right) + \frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.19)$$

elde edilir. Buradan (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_5(x, t) = -E \left(\tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right) \quad (4.1.20)$$

$$u_6(x, t) = -E \left(\coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right) \quad (4.1.21)$$

burada $E = i \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$ dir.

Durum 4

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, a_2 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, b_0 = -\frac{b_1}{2}, \lambda = -\sqrt{k^2 + \theta_1} \quad (4.1.22)$$

(4.1.22) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_5(x, t) = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 + \theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right) - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 + \theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \sqrt{k^2 + \theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.23)$$

elde edilir.

Buradan (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_7(x, t) = -F \left(\operatorname{csch} \left[2(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right] \right) \quad (4.1.24)$$

burada $F = \sqrt{\frac{2\theta_1}{\theta_2}}$ ve $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{k^2 + \theta_1}}{2\Gamma(1+\alpha)}$ dir.

Durum 5

$$a_0 = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, a_1 = 0, a_2 = -\frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}}, b_0 = -\frac{b_1}{2}, \lambda = \sqrt{k^2 - 2\theta_1} \quad (4.1.25)$$

(4.1.25) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_8(x, t) = \frac{\frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} - \frac{2i\sqrt{\theta_1}b_1}{\sqrt{\theta_2}} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.26)$$

elde edilir. Buradan (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümü

$$u_8(x, t) = -E \left[2 + \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) - \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right] \quad (4.1.27)$$

dir.

Durum 6

$$a_0 = \frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{2\sqrt{\theta_2}}, a_1 = a_2 = 0, b_0 = -\frac{b_1}{2}, \lambda = \sqrt{k^2 - 2\theta_1} \quad (4.1.28)$$

(4.1.28) eşitliklerini (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u_9(x, t) = \frac{\frac{i\sqrt{\theta_1}b_1}{2\sqrt{\theta_2}}}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \sqrt{k^2 - 2\theta_1}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.1.29)$$

elde edilir. Buradan (4.1.1) lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_9(x, t) = -E\left(\tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)\right) \quad (4.1.30)$$

$$u_{10}(x, t) = -E\left(\coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha)\right) \quad (4.1.31)$$

dır.

4.2. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli KdV Denklemine GKM'nin Uygulanması

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi lineer olmayan dalgaların evrimi ve etkileşimi için bir model olarak fiziksel olayları geniş bir alanda açıklamak için kullanılmıştır. Bu denklem bir sığ su kanalı içinde yayılan bir boyutlu, küçük genlikli, uzun yüzeyli yer çekimi dalgalarını ileten bir evrim denklemi olarak bilinir. KdV denklemi çarpışan hidromanyetik dalgalar, çok katlı aralık dalgaları, iyon akustik dalgalar, plazma fizik, kafes dinamiği gibi birçok fiziksel bilim alanlarında ortaya çıkar. Kuantum mekaniği alanındaki bazı teorik fiziksel olaylar bir KdV modeli ile açıklanır. Bu model şok dalga oluşumu, solitonlar, türbülans, sınır tabaka hareketi ve kütle yayılımı için bir model olarak akışkanlar dinamiği, aerodinamik ve sürekli ortamlar mekaniğinde kullanılır [66].

Şimdi KdV denkleminin fiziksel açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız lineer olmayan zaman-kesirli KdV denklemini inceleyelim.

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere lineer olmayan zaman-kesirli KdV denklemi [66]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilsin. (4.2.1) lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin analitik çözümlerini bulmak için GKM'yi göz önüne alalım. Şimdi (4.2.1) denklemi için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^3 \frac{\partial^3 u(\eta)}{\partial \eta^3}, \quad (4.2.4)$$

bulunur ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. (3.1.2), (4.2.2), (4.2.4) ve (4.2.5) dönüşümlerini (4.2.1) lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$-\lambda u + 3ku^2 + k^3 u'' = 0 \quad (4.2.6)$$

bulunur. Burada k ve λ keyfi sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.2.6) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 2N - 2M \Rightarrow N = M + 2 \quad (4.2.7)$$

olduğu görülür. (4.2.7) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 3$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q}, \quad (4.2.8)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right] \quad (4.2.9)$$

$$u''(\eta) = \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right] \\ + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1Q)^3} \left[(b_0 + b_1Q)^2 (2a_2 + 6a_3Q) - 2b_1(b_0 + b_1Q)(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right]. \quad (4.2.10)$$

bulunur. (4.2.1) lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_0 = -\frac{k^2 b_0}{3}, a_1 = \frac{1}{3} k^2 (6b_0 - b_1), a_2 = 2k^2 (b_1 - b_0), a_3 = -2k^2 b_1, \lambda = -k^3 \quad (4.2.11)$$

(4.2.11) eşitliklerini (4.2.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u(x, t) = \frac{-\frac{k^2 b_0}{3} + \frac{1}{3} k^2 (6b_0 - b_1) \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) + 2k^2 (b_1 - b_0) \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.2.12) \\ - \frac{2k^2 b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^3}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}$$

elde edilir. Buradan (4.2.1) lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = A \left[\left[\tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right]^2 - \frac{1}{3} \right] \quad (4.2.13)$$

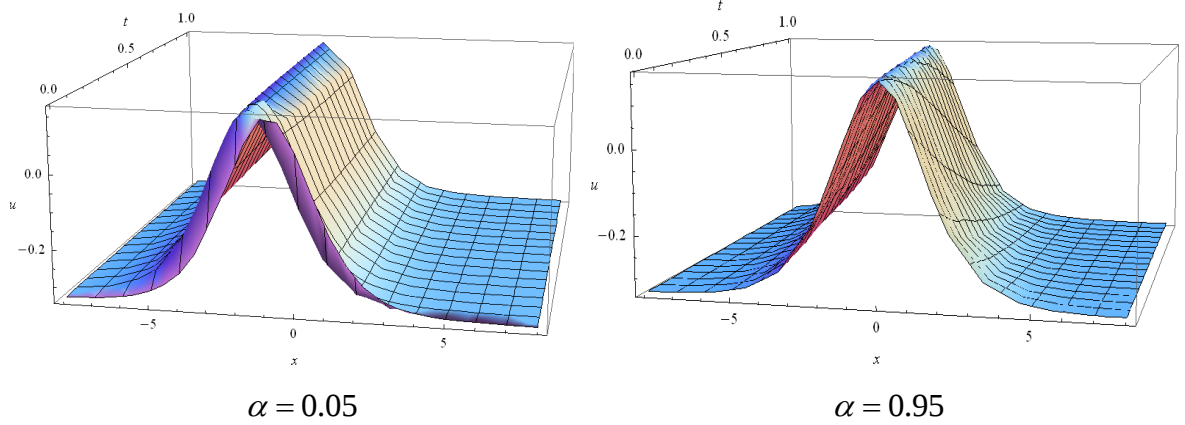
$$u_2(x, t) = A \left[\left[\coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right]^2 - \frac{1}{3} \right] \quad (4.2.14)$$

şeklindedir. Burada

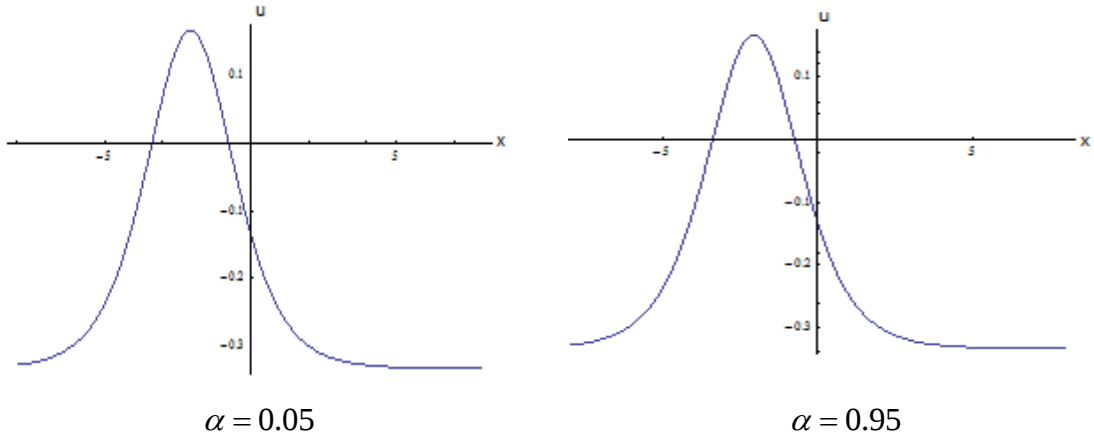
$$A = -\frac{k^2}{2}, k_1 = \frac{k}{2} \text{ and } \lambda_1 = -\frac{k^3}{2\Gamma(1+\alpha)}$$

dır.

Lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.2.1. Lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) analitik çözümünün $k=1$, $0 < t < 1$, $-8 < x < 8$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.95$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.2.2. Lineer olmayan zaman-kesirli KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) analitik çözümünün $k=1$, $-8 < x < 8$, $t=1$, $\alpha=0.05$ ve $\alpha=0.95$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.3. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli mKdV Denklemine GKM'nin Uygulanması

ε, ν keyfi sabitler, α ve β zaman ve uzay kesirli mertebeden türevler olmak üzere $t > 0, 0 < \alpha, \beta \leq 1, m = 0, 1, 2$ için

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + \varepsilon [u(x,t)]^m \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta} + \nu u_{xxx} = g(x,t)$$

kesirli mertebeden genelleştirilmiş KdV denklemi verilsin. Eğer $m=0, m=1$ ve $m=2$ ise bu denklem sırasıyla kesirli mertebeden lineer KdV, kesirli mertebeden lineer olmayan KdV ve kesirli mertebeden modifiye edilmiş KdV (mKdV) denklemine dönüşür. $u(x,t)$ fonksiyonu zaman ve uzayın keyfi bir fonksiyonu olarak kabul edilir. $\alpha=1$ ve $\beta=1$ durumunda ise bu denklem klasik mKdV denklemine dönüşür [66].

Şimdi ise mKdV denkleminin nasıl ortaya çıktığının açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denklemini inceleyelim.

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denklemini [66]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.3.1)$$

şeklinde verilsin. (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin analitik çözümleri için GKM'yi kullanalım. Şimdi (4.3.1) denklemi için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x,t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^3 \frac{\partial^3 u(\eta)}{\partial \eta^3}, \quad (4.3.4)$$

bulunur ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

elde edilir. (3.1.2), (4.3.2), (4.3.4) ve (4.3.5) dönüşümlerini (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$-\lambda u + 2ku^3 + k^3 u'' = 0 \quad (4.3.6)$$

bulunur. Burada k ve λ keyfi sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.3.6) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 3N - 3M \Rightarrow N = M + 1 \quad (4.3.7)$$

olduğu görülür. (4.3.7) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 2$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q} \quad (4.3.8)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right] \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) = & \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right] \\ & + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[2a_2(b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right] \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

bulunur. (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Durum 1

$$a_0 = \frac{1}{2} i k b_0, a_1 = \frac{1}{2} i k (b_1 - 2b_0), a_2 = -i k b_1, \lambda = -\frac{k^3}{2} \quad (4.3.11)$$

(4.3.11) eşitliklerini (4.3.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u_1(x, t) = \frac{\frac{1}{2}ikb_0 + \frac{1}{2}ik(b_1 - 2b_0) \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) - ikb_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.3.12)$$

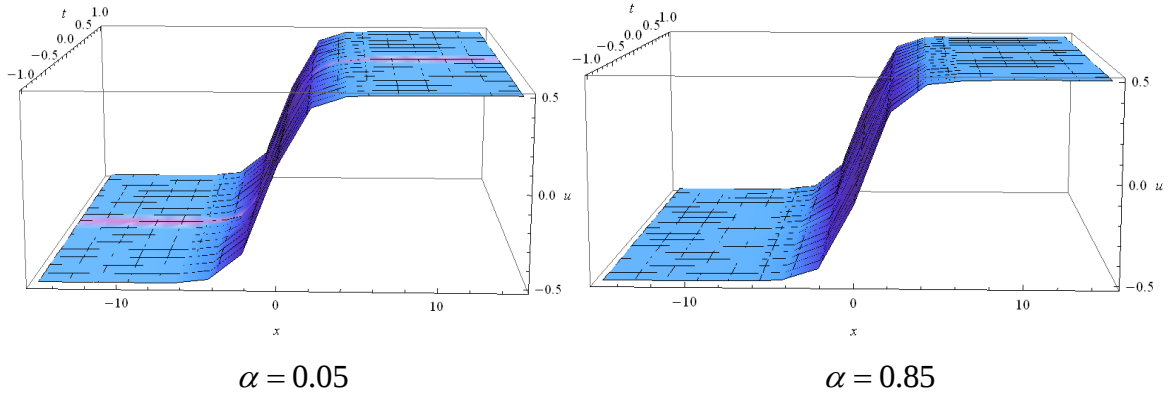
elde edilir. Buradan (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = H \tan \left[i \left(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha \right) \right] \quad (4.3.13)$$

$$u_2(x, t) = H \cot \left[i \left(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha \right) \right] \quad (4.3.14)$$

şeklindedir. Burada $H = \frac{k}{2}$ ve $\lambda_2 = -\frac{k^3}{4\Gamma(1+\alpha)}$ dir.

Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) analitik çözümü için üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.1. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) analitik çözümünün $k=1$, $-1 < t < 1$, $-15 < x < 15$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü

Durum 2

$$a_0 = \frac{1}{2}ikb_0, a_1 = -\frac{1}{2}ik(b_1 + 2b_0), a_2 = 0, \lambda = -\frac{k^3}{2} \quad (4.3.15)$$

(4.3.15) değerlerini (4.3.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u_3(x, t) = \frac{\frac{1}{2}ikb_0 - \frac{1}{2}ik(b_1 + 2b_0) \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}} \right)}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.3.16)$$

elde edilir. O zaman (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_3(x, t) = \frac{J \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) + F \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]} \quad (4.3.17)$$

$$u_4(x, t) = \frac{J \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) + F \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]} \quad (4.3.18)$$

şeklindedir. Burada $J = \frac{1}{2}ikb_0$ ve $F = -\frac{1}{2}ikb_1$ dir.

Durum3

$$a_0 = \pm \frac{1}{2}ikb_0, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -2b_0, \lambda = -\frac{k^3}{2} \quad (4.3.19)$$

(4.3.19) değerlerini (4.3.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u_5(x, t) = \frac{\pm \frac{1}{2} i k b_0}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.3.20)$$

bulunur.

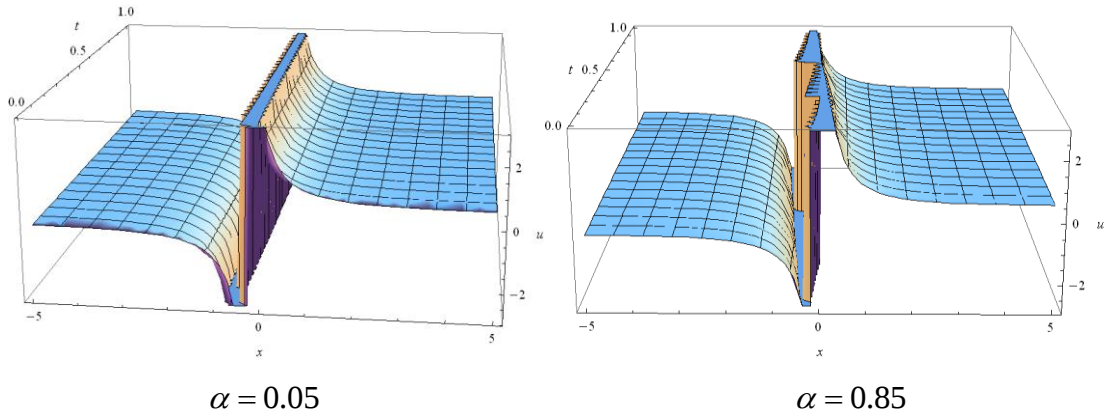
Buradan (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_5(x, t) = H \cot \left[i \left(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha \right) \right] \quad (4.3.21)$$

$$u_6(x, t) = H \tan \left[i \left(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha \right) \right] \quad (4.3.22)$$

şeklindedir.

Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.21) analitik çözümü için üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.2. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.21) analitik çözümünün $k=1$, $0 < t < 1$, $-5 < x < 5$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü

Durum 4

$$a_0 = 0, a_1 = -2ikb_0, a_2 = 2ikb_0, b_1 = -2b_0, \lambda = k^3 \quad (4.3.23)$$

(4.3.23) değerlerini (4.3.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u_7(x, t) = \frac{-2ikb_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{kx - \frac{k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right) + 2ikb_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{kx - \frac{k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{kx - \frac{k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}} \right)} \quad (4.3.24)$$

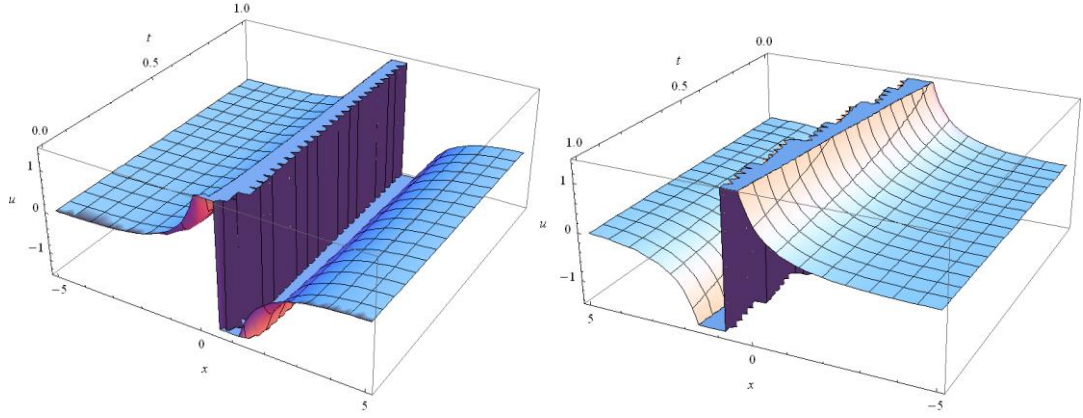
elde edilir. Buradan (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_7(x, t) = \frac{H \left[\left[\tanh(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2 - 1 \right]}{\tanh[k_1 x - \lambda_3 t^\alpha]} \quad (4.3.25)$$

$$u_8(x, t) = \frac{H \left[\left[\coth(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2 - 1 \right]}{\coth[k_1 x - \lambda_3 t^\alpha]} \quad (4.3.26)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_3 = \frac{k^3}{2\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.25) analitik çözümü için üç boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



$\alpha = 0.05$

$\alpha = 0.85$

Şekil 4.3.3. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen

(4.3.25) analitik çözümünün $k = 1$, $0 < t < 1$, $-5 < x < 5$, $\alpha = 0.05$ ve

$\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü

Durum 5

$$a_0 = ikb_0, a_1 = -2ikb_0, a_2 = 2ikb_0, b_1 = -2b_0, \lambda = -2k^3 \quad (4.3.27)$$

(4.3.27) değerlerini (4.3.8) denkleminde yerine yazarsak

$$u_9(x, t) = \frac{ikb_0 - 2ikb_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) + 2ikb_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^3 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.3.28)$$

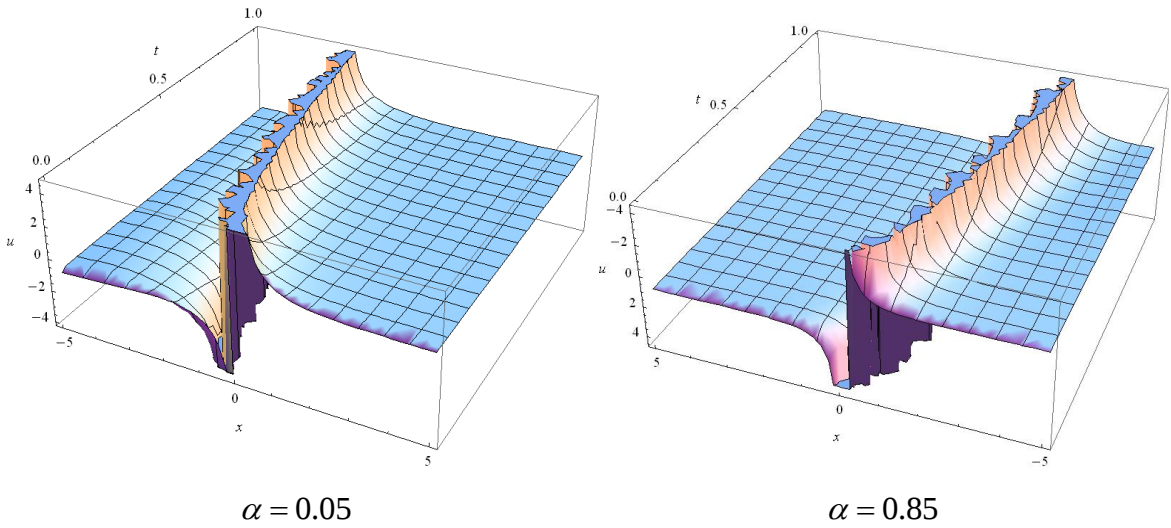
elde edilir. Buradan (4.3.1) lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_9(x, t) = \frac{H \left[1 + \left[\tanh(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha) \right]^2 \right]}{\tanh[k_1 x - \lambda_4 t^\alpha]} \quad (4.3.29)$$

$$u_{10}(x,t) = \frac{H\left[1 + \left[\coth(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)\right]^2\right]}{\coth[k_1 x - \lambda_4 t^\alpha]} \quad (4.3.30)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_4 = -\frac{k^3}{\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.29) analitik çözümü için üç boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.4. Lineer olmayan zaman-kesirli mKdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.29) analitik çözümünün $k = 1$, $0 < t < 1$, $-5 < x < 5$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü

4.4. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Genelleştirilmiş Burgers Denklemine GKM'nin Uygulanması

Burgers denklemi ilk olarak 1948 yılında J. M. Burgers tarafından akışmaz sıvıların turbulans olayı için bir model olarak sunulmuştur. Burgers denklemi lineer olmayan dağıtıcı sistemlerde dalga yayılımının uzaklık alanını tanımlar. Bu denklemin Cole-Hopf dönüşümünü kullanarak ısı denklemine lineerleştirilebildiği iyi bilinir. Bu denklem evrendeki geniş kümelerin oluşumu ve trafik akışı gibi çok sayıda uygulama alanında incelenmiştir [64].

Şimdi Burgers denkleminin fiziksel açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız lineer olmayan zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemini inceleyelim.

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemi [64]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - \beta u^p u_x = 0, \quad t > 0, \quad p > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.4.1)$$

şeklinde verilsin. (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümleri için GKM'yi ele alalım. Şimdi (4.4.1) denklemi için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x,t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.4.3)$$

bulunur ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\
&= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\
&= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\
&= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\
&= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

bulunur. (3.1.2), (4.4.2), (4.4.3) ve (4.4.4) dönüşümlerini (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$-\lambda u - k^2 u' - \beta k \frac{u^{p+1}}{p+1} = 0. \tag{4.4.5}$$

yazılır. Buradan tekrar $u(\eta) = v^{\frac{1}{p}}(\eta)$ dönüşümü dikkate alınır

$$-\lambda p(p+1)v - k^2(p+1)v' - \beta p k v^2 = 0. \tag{4.4.6}$$

elde edilir. Burada k ve λ keyfî sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.4.6) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 1 = 2N - 2M \Rightarrow N = M + 1. \tag{4.4.7}$$

olduğu görülür. (4.4.7) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 2$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q} \tag{4.4.8}$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right] \tag{4.4.9}$$

$$\begin{aligned}
u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1 (a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right] \\
&+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[2a_2 (b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1 (a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) + 2b_1^2 (a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right]
\end{aligned}
\tag{4.4.10}$$

bulunur. (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Durum 1

$$a_0 = 0, a_2 = 0, b_1 = -\frac{\beta p a_1}{k(1+p)} - b_0, \lambda = \frac{k^2}{p}. \tag{4.4.11}$$

(4.4.11) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_1(x, t) = \frac{a_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}} \right)}{b_0 - \left(\frac{\beta p a_1}{k(1+p)} + b_0 \right) \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}} \right)}. \tag{4.4.12}$$

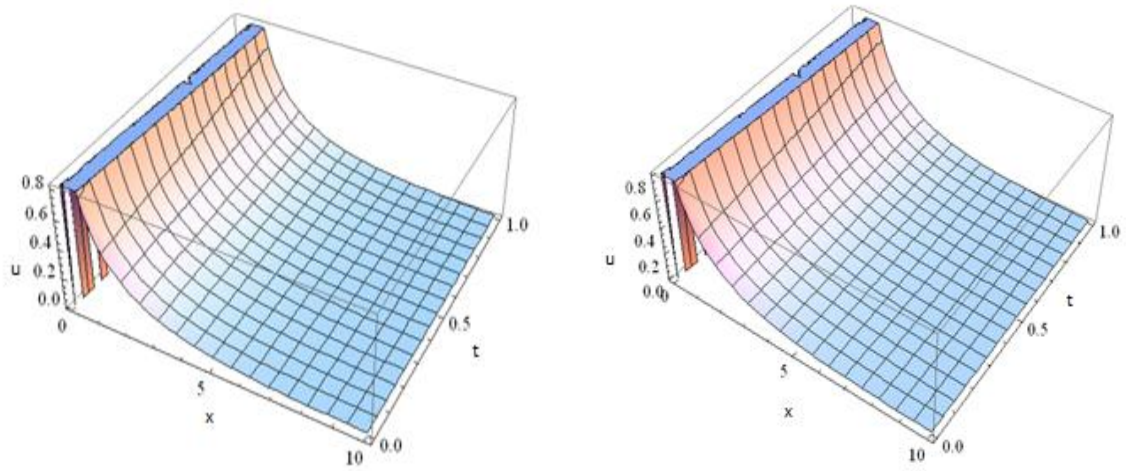
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = \left[\frac{1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)}{K [1 + \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)] + L [1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.4.13}$$

$$u_2(x, t) = \left[\frac{1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)}{K [1 + \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)] + L [1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha)]} \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.4.14}$$

şeklindedir. Burada $K = \frac{b_0}{a_1}$, $L = -\frac{\beta p}{k(1+p)}$, $k_1 = \frac{k}{2}$ ve $\lambda_1 = \frac{k^2}{2p\Gamma(1+\alpha)}$ dir.

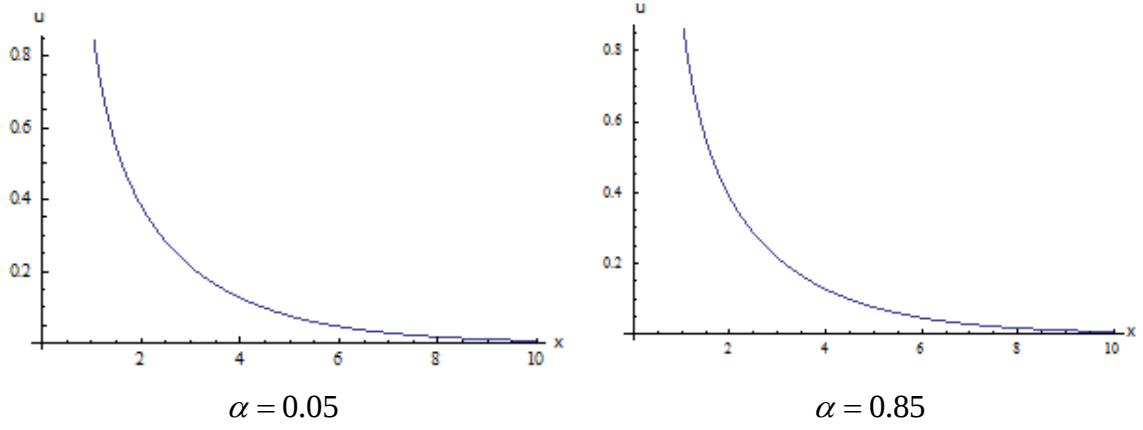
Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



$$\alpha = 0.05$$

$$\alpha = 0.85$$

Şekil 4.4.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 2$, $a_1 = 1$, $b_0 = 2$, $\beta = 3$, $0 < x < 10$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 2$, $a_1 = 1$, $b_0 = 2$, $\beta = 3$, $0 < x < 10$, $t = 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 2

$$a_0 = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}, \quad a_1 = \frac{-k(a+p)b_0}{\beta p}, \quad a_2 = 0, \quad \lambda = -\frac{k^2}{p}. \quad (4.4.15)$$

(4.4.15) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_2(x, t) = \frac{\frac{k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{k(1+p)b_0}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}. \quad (4.4.16)$$

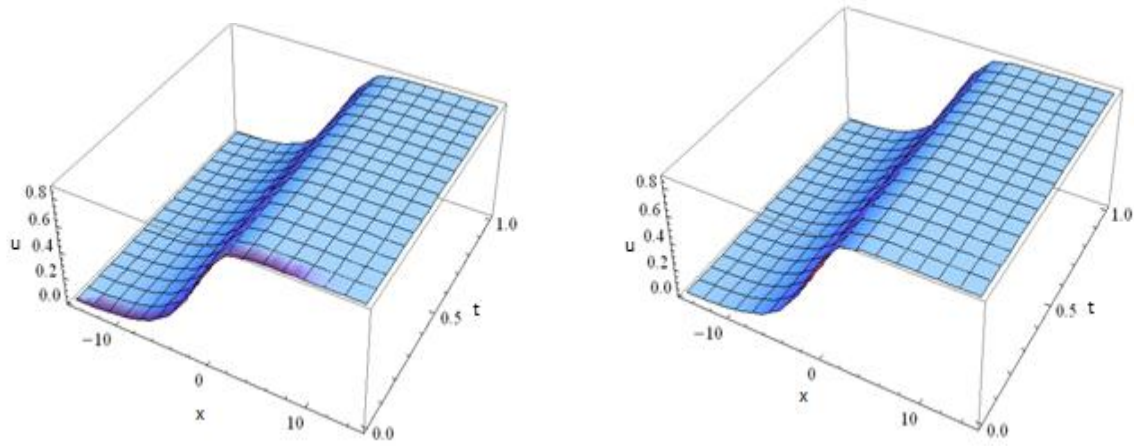
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_3(x, t) = \left[\frac{Y \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.17)$$

$$u_4(x,t) = \left[\frac{Y \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]}{b_0 + b_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right]} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.18)$$

şeklindedir. Burada $Y = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}$ ve $\lambda_2 = -\frac{k^2}{2p\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

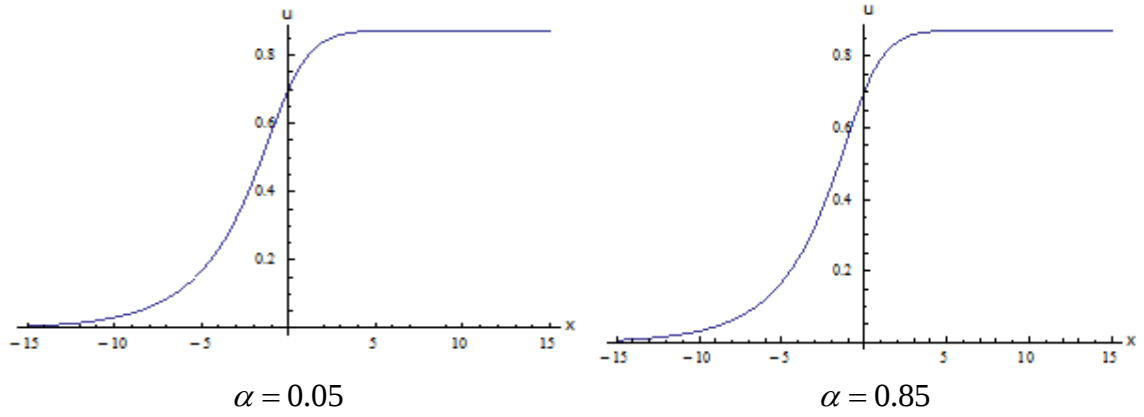
Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.17) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



$\alpha = 0.05$

$\alpha = 0.85$

Şekil 4.4.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.17) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 3$, $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $\beta = 2$, $-15 < x < 15$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.4. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.17) analitik çözümünün $k=1$, $p=3$, $b_0=3$, $b_1=1$, $\beta=2$, $-15 < x < 15$, $t=1$, $\alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum3

$$a_0=0, a_1=0, a_2=\frac{-k(1+p)b_1}{\beta p}, b_0=\frac{-b_1}{2}, \lambda=\frac{2k^2}{p}. \quad (4.4.19)$$

(4.4.19) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_3(x,t) = \frac{\frac{-k(1+p)b_1}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - 2k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}} \right)^2}{-\frac{b_1}{2} + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - 2k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}} \right)}. \quad (4.4.20)$$

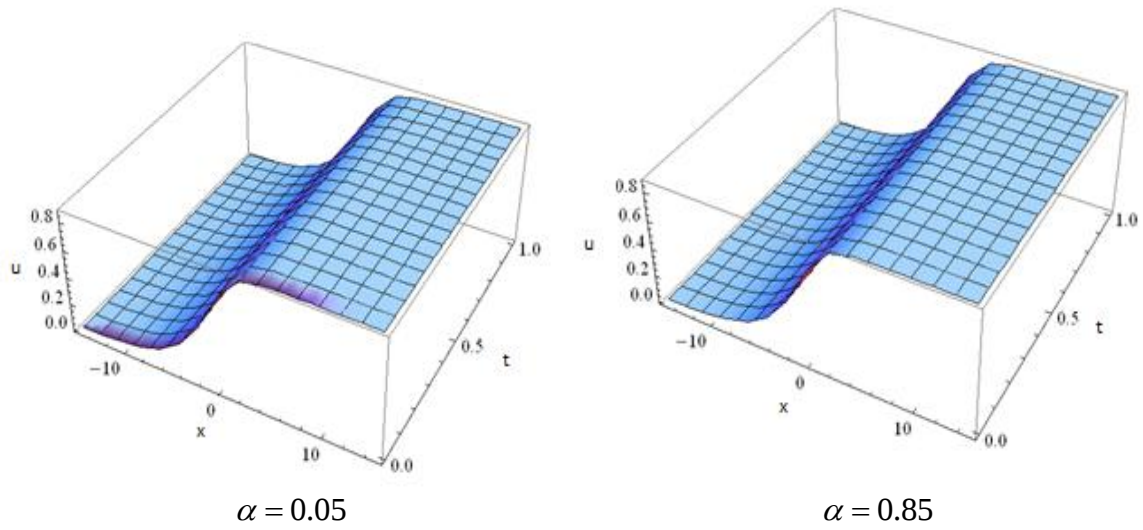
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_5(x,t) = \left[\frac{Z \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2}{\tanh(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.21)$$

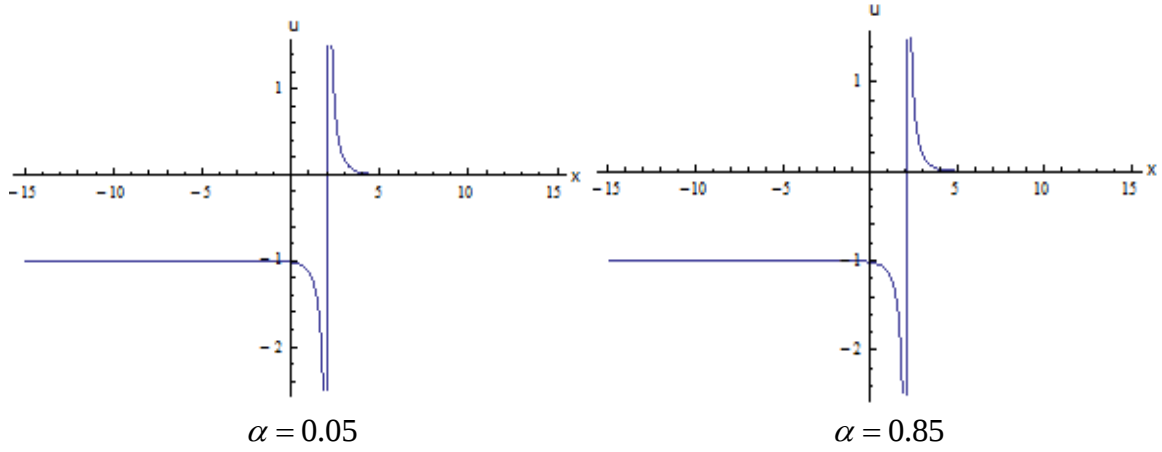
$$u_6(x, t) = \left[\frac{Z \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha) \right]^2}{\coth(k_1 x - \lambda_3 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.22)$$

şeklindedir. Burada $Z = \frac{2k(1+p)}{\beta p}$ ve $\lambda_3 = \frac{k^2}{p\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.21) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.5. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.21) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 1$, $\beta = 4$, $-15 < x < 15$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.6. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.21) analitik çözümünün $k=1$, $p=1$, $\beta=4$, $-15 < x < 15$, $t=1$, $\alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 4

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{k(1+p)b_1}{2\beta p}, a_2 = \frac{-k(1+p)b_1}{\beta p}, b_0 = \frac{-b_1}{2}, \lambda = \frac{k^2}{p} \quad (4.4.23)$$

(4.4.23) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_4(x, t) = \frac{\frac{k(1+p)b_1}{2\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) - \frac{k(1+p)b_1}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{-\frac{b_1}{2} + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx - \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}. \quad (4.4.24)$$

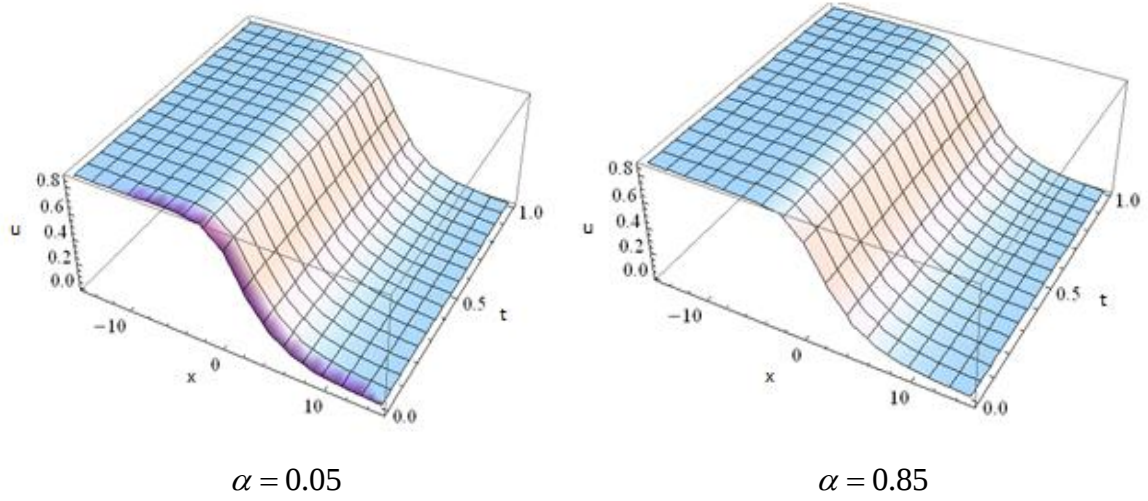
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_7(x, t) = \left[X \left(1 - \tanh(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.25)$$

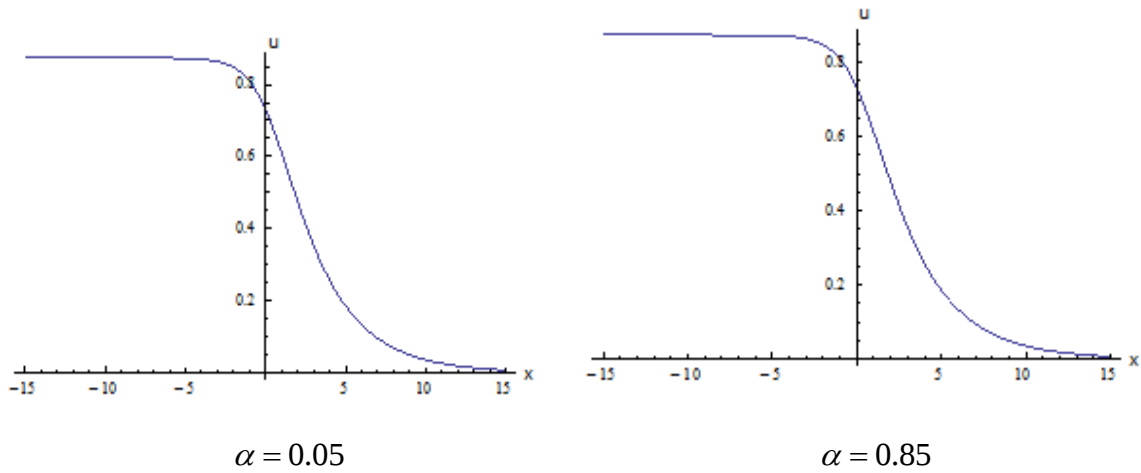
$$u_8(x, t) = \left[X \left(1 - \coth(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.26)$$

şeklindedir. Burada $X = \frac{-k(1+p)}{2\beta p}$ dir.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.25) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.7. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.25) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 3$, $\beta = -2$, $-15 < x < 15$, $0 < t < 1$ $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.8. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.25) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 3$, $\beta = -2$, $-15 < x < 15$, $t = 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 5

$$a_0 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, a_1 = \frac{-4k(1+p)b_0}{\beta p}, a_2 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, b_1 = -2b_0, \lambda = \frac{-2k^2}{p}. \quad (4.4.27)$$

(4.4.27) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_5(x, t) = \frac{\frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{4k(1+p)b_0}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) + \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{2k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.4.28)$$

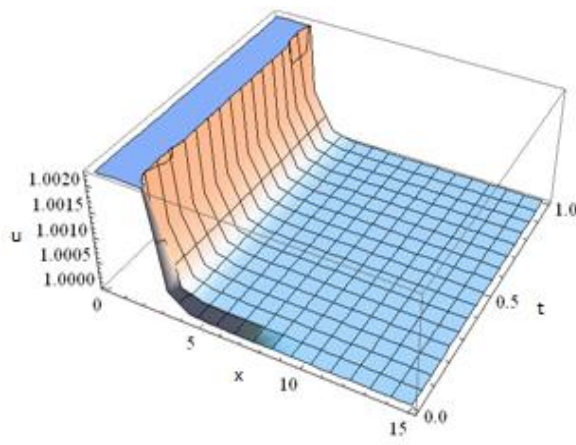
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_9(x, t) = \left[\frac{Z \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha) \right]^2}{\tanh(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.29)$$

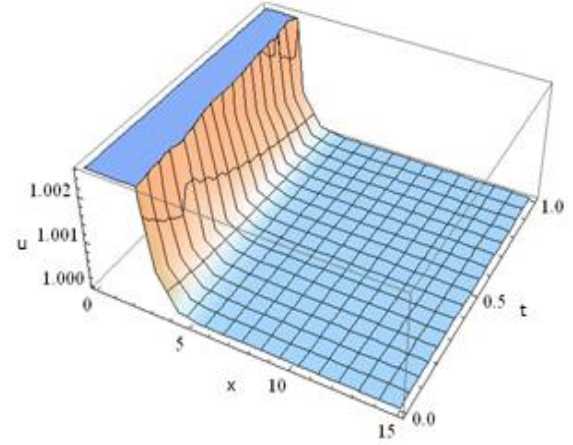
$$u_{10}(x, t) = \left[\frac{Z \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha) \right]^2}{\coth(k_1 x - \lambda_4 t^\alpha)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.30)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_4 = -\frac{k^2}{p\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.29) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.

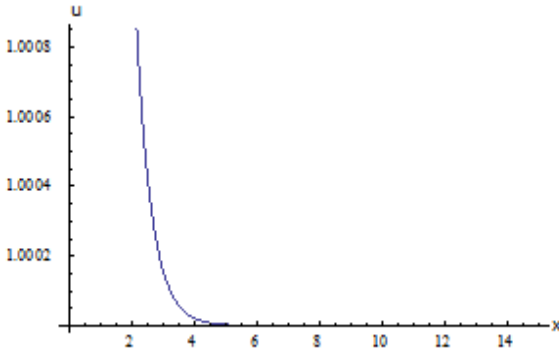


$$\alpha = 0.05$$

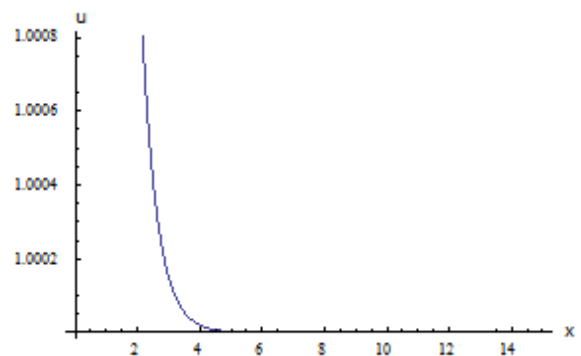


$$\alpha = 0.85$$

Şekil 4.4.9. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.29) analitik çözümünün $k=1$, $p=2$, $\beta=3$, $0 < x < 15$, $0 < t < 1$, $\alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



$$\alpha = 0.05$$



$$\alpha = 0.85$$

Şekil 4.4.10. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.29) analitik çözümünün $k=1$, $p=2$, $\beta=3$, $0 < x < 15$, $t=1$, $\alpha=0.05$ ve $\alpha=0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 6

$$a_0 = \frac{k(1+p)b_0}{\beta p}, a_1 = \frac{-3k(1+p)b_0}{\beta p}, a_2 = \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p}, b_1 = -2b_0, \lambda = \frac{-k^2}{p}. \quad (4.4.31)$$

(4.4.31) değerlerini (4.4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$v_6(x,t) = \frac{\frac{k(1+p)b_0}{\beta p} - \frac{3k(1+p)b_0}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right) + \frac{2k(1+p)b_0}{\beta p} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2}{b_0 - 2b_0 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^2 t^\alpha}{p\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.4.32)$$

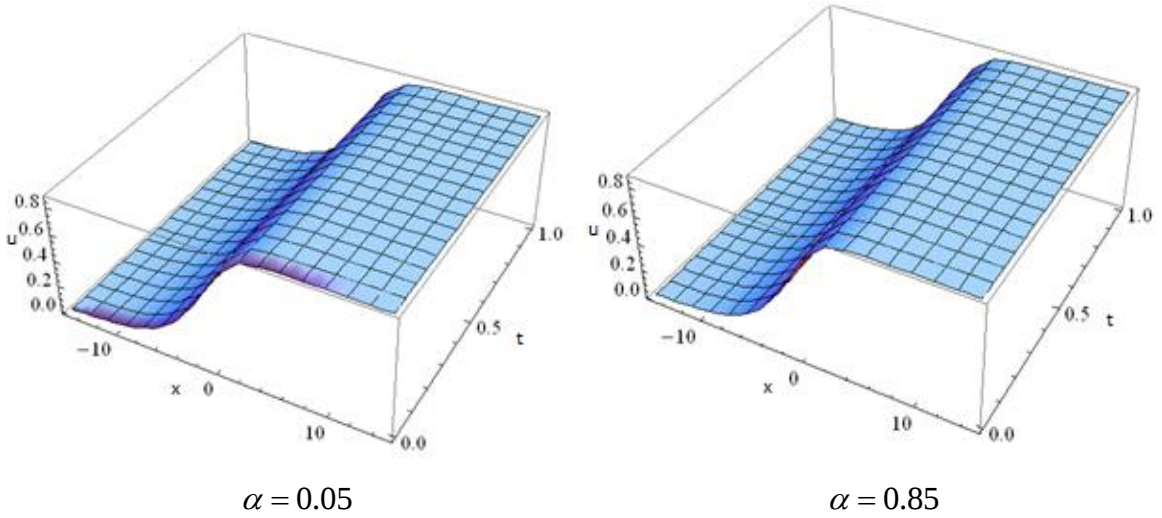
elde edilir. Buradan (4.4.1) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_{11}(x,t) = \left[G \left(1 + \tanh(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.33)$$

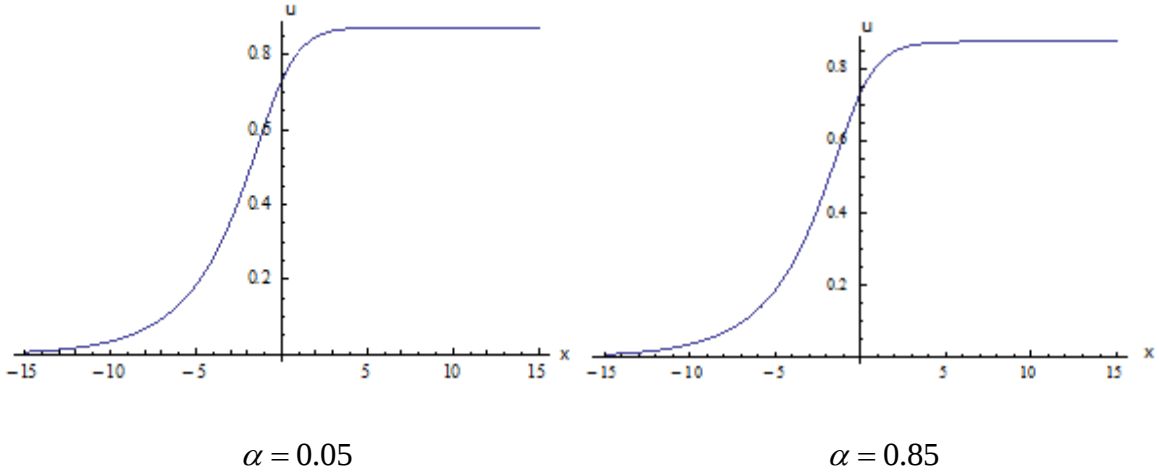
$$u_{12}(x,t) = \left[G \left(1 + \coth(k_1 x - \lambda_2 t^\alpha) \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.4.34)$$

şeklindedir. Burada $G = \frac{k(1+p)}{2\beta p}$ dir.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.33) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.11. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.33) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 3$, $\beta = 2$, $-15 < x < 15$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.12. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.33) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 3$, $\beta = 2$, $-15 < x < 15$, $t = 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.5. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli Cahn-Hilliard Denklemine GKM'nin Uygulanması

Cahn-Hilliard denklemi ilk olarak 1958 yılında kritik sıcaklık altında ikili alaşımın faz ayrılması işlemi için bir model olarak sunulmuştur. Bu denklem çok farklı uzunluk ölçekleri ile diğer birçok kaynağın modellenmesinden açığa çıkar. Örneğin modeller Cahn-Hilliard denkleminin bakteri filminin çözücü bileşenleri ve biyokütlesinin dinamiğinin modellenmesindeki biyomatematikte ya da iki popülasyonun dinamiğinin modellenmesindeki ekolojide ya da galaksiler arası maddenin iki bileşeninin evrimini sunmak için kullanılması durumunda geliştirilir [64].

Şimdi Cahn-Hilliard denkleminin fiziksel açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız lineer olmayan zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemini inceleyelim.

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemi [64]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx}, \quad t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.5.1)$$

şeklinde verilsin.

(4.5.1) zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin analitik çözümleri için GKM'yi kullanalım. Şimdi (4.5.1) denklemini için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^3 \frac{\partial^3 u(\eta)}{\partial \eta^3}, \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^3 u(\eta)}{\partial \eta^3} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^4 \frac{\partial^4 u(\eta)}{\partial \eta^4}, \quad (4.5.5)$$

elde edilir ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

elde edilir. (3.1.2), (4.5.2), (4.5.3),(4.5.5) ve (4.5.6) dönüşümlerini (4.5.1) zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$(\lambda + k)u + 3k^2u^2u' - k^2u' - k^4u''' = 0 \quad (4.5.7)$$

elde edilir. Burada k ve λ keyfi sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.5.7) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 3 = 3N - 3M + 1 \Rightarrow N = M + 1. \quad (4.5.8)$$

olduğu görülür. (4.5.8) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 2$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2}{b_0 + b_1Q} \quad (4.5.9)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right] \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) = & \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2) \right] \\ & + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1Q)^3} \left[2a_2(b_0 + b_1Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2) \right] \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

$$\begin{aligned} u'''(\eta) = & (Q^2 - Q)(6Q^2 - 6Q + 1) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right] \\ & + 3(Q^2 - Q)^2(2Q + 1) \left[\frac{2a_2(b_0 + b_1Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2Q)(b_0 + b_1Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2)}{(b_0 + b_1Q)^3} \right] \\ & + (Q^2 - Q)^3 \left[\frac{-6a_2b_1(b_0 + b_1Q) + 6b_1^2(a_1 + 2a_2Q)}{(b_0 + b_1Q)^3} - \frac{6b_1^3(a_0 + a_1Q + a_2Q^2)}{(b_0 + b_1Q)^4} \right] \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

bulunur. (4.5.1) zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_1 = \frac{a_0 \left[-(1+k^2)b_0 + \sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)} \right]}{(1+k^2)b_0}, a_2 = 0, \quad (4.5.13)$$

$$b_1 = -b_0 + \frac{\sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}}{(1+k^2)}, \lambda = -k,$$

olmak üzere (4.5.13) eşitlikleri (4.5.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x, t) = \frac{a_0 \left[-(1+k^2)b_0 + \sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)} \right] \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{kt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}{b_0 + \left[-b_0 + \frac{\sqrt{(1+k^2)(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}}{(1+k^2)} \right] \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{kt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}}} \right)}, \quad (4.5.14)$$

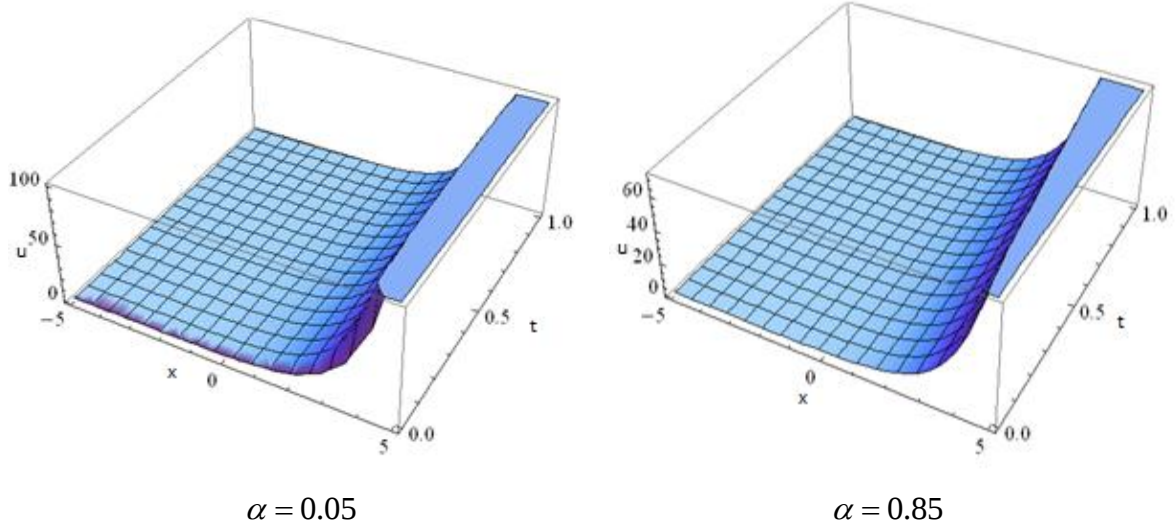
elde edilir. Buradan (4.5.1) zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = P \left[\frac{1 + 1 \tanh(k_1 x - \lambda_5 t^\alpha)}{1 - \tanh(k_1 x - \lambda_5 t^\alpha)} \right] + R, \quad (4.5.15)$$

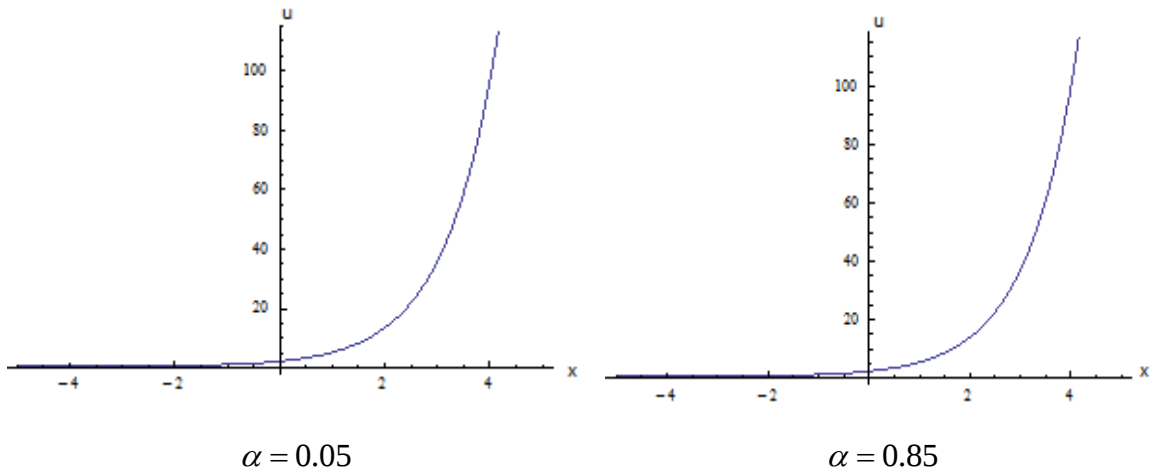
$$u_2(x, t) = P \left[\frac{1 + 1 \coth(k_1 x - \lambda_5 t^\alpha)}{1 - \coth(k_1 x - \lambda_5 t^\alpha)} \right] + R, \quad (4.5.16)$$

şeklindedir. Burada $P = a_0 \sqrt{\frac{(1+k^2)}{(-3a_0^2 + (1+k^2)b_0^2)}}$, $R = \frac{a_0}{b_0}$ ve $\lambda_5 = -\frac{k}{2\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Lineer olmayan zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.15) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.5.1. Zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.15) analitik çözümünün $k = 1$, $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $-5 < x < 5$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.5.2. Zaman-kesirli Cahn-Hilliard denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.15) analitik çözümünün $k = 1$, $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $-5 < x < 5$, $t = 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.6. Lineer Olmayan Zaman-Kesirli 3. Mertebeden Genelleştirilmiş KdV Denkleminin GKM'nin Uygulanması

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV denklemi [64]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - u_{xxx} - \gamma u^p u_x = 0, \quad t > 0, \quad p > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.6.1)$$

şeklinde verilsin. (4.6.1) zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV denkleminin analitik çözümleri için GKM'yi ele alalım. Şimdi (4.6.1) denklemi için aşağıdaki (3.1.2)

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.6.3)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^3 \frac{\partial^3 u(\eta)}{\partial \eta^3}, \quad (4.6.4)$$

elde edilir ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [147]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

yazılır. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

bulunur. (3.1.2), (4.6.2), (4.6.4), ve (4.6.5) dönüşümlerini (4.6.1) zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV denkleminde yerine yazıp η 'ya göre integre edersek

$$\lambda(p+1)u + k^3(p+1)u'' + \gamma k \frac{u^{p+1}}{p+1} = 0. \quad (4.6.6)$$

bulunur. $u(\eta) = v^{\frac{1}{p}}(\eta)$ dönüşümü dikkate alınır

$$\lambda p^2(p+1)v^2 + k^3(1-p^2)(v')^2 + k^3 p(p+1)vv'' + \gamma kv^3 = 0. \quad (4.6.7)$$

elde edilir. Burada k ve λ keyfi sabittir. (3.1.4) ve (3.1.7) eşitlikleri (4.6.7) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanır

$$2N - 2M + 2 = 3N - 3M + 1 \Rightarrow N = M + 2. \quad (4.6.8)$$

olduğu görülür. (4.6.8) denkleminde bulunan M ve N 'nin farklı değerleri (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Eğer $M = 1$ ve $N = 3$ seçersek,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q}, \quad (4.6.9)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right], \quad (4.6.10)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[(b_0 + b_1 Q)^2 (2a_2 + 6a_3 Q) - 2b_1(b_0 + b_1 Q)(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

bulunur. (4.6.1) zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} a_0 = 0, a_1 &= \frac{2k^2(1+p)(2+p)b_0}{\gamma}, a_2 = -\frac{2k^2(1+p)(2+p)(b_0 - b_1)}{\gamma}, \\ a_3 &= -\frac{2k^2(1+p)(2+p)b_1}{\gamma}, \lambda = -\frac{k^3}{p^2}, \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

olmak üzere (4.6.12) değerlerini (4.6.9) denkleminde yerine yazarsak

$$v(x,t) = \frac{\frac{2k^2(1+p)(2+p)b_0}{\gamma} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{p^2 \Gamma(1+\alpha)}}}} \right) - \frac{2k^2(1+p)(2+p)(b_0 - b_1)}{\gamma} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{p^2 \Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^2 - \frac{2k^2(1+p)(2+p)b_1}{\gamma} \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{p^2 \Gamma(1+\alpha)}}}} \right)^3}{b_0 + b_1 \left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{kx + \frac{k^3 t^\alpha}{p^2 \Gamma(1+\alpha)}}}} \right)} \quad (4.6.13)$$

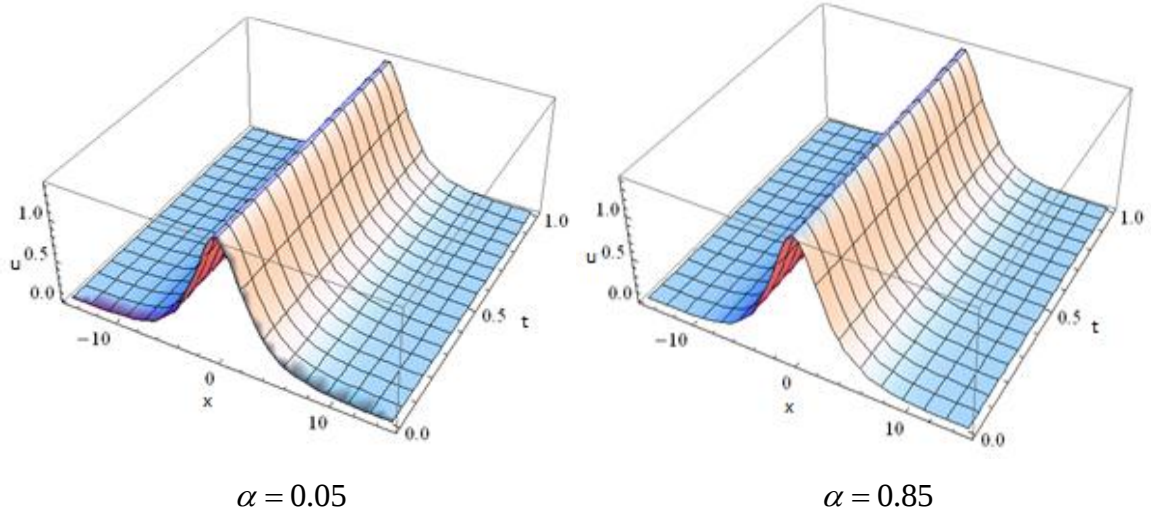
elde edilir. Buradan (4.6.1) zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV dekleminin GKM ile elde edilen analitik çözümleri

$$u_1(x,t) = \left[S \left(1 - \left[\tanh(k_1 x - \lambda_6 t^\alpha) \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.6.14)$$

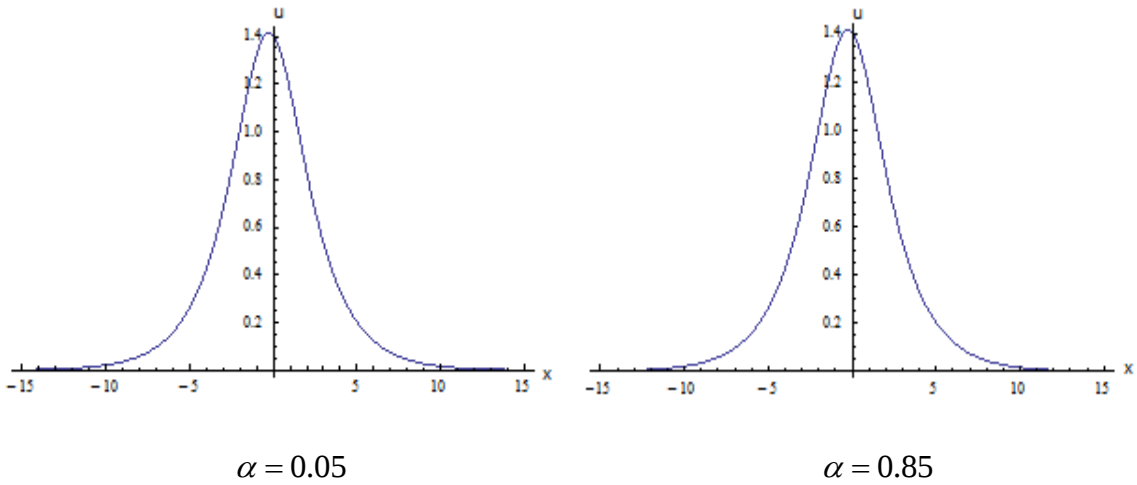
$$u_2(x,t) = \left[S \left(1 - \left[\coth(k_1 x - \lambda_6 t^\alpha) \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.6.15)$$

şeklindedir. Burada $S = \frac{k^2(1+p)(2+p)}{2\gamma}$ ve $\lambda_6 = -\frac{k^3}{2p^2\Gamma(1+\alpha)}$ dır.

Lineer olmayan zaman-kesirli 3. mertebeden genelleştirilmiş KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.6.14) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.6.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.6.14) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 2$, $\gamma = 3$, $-15 < x < 15$, $0 < t < 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.6.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin GKM ile elde edilen (4.6.14) analitik çözümünün $k = 1$, $p = 2$, $\gamma = 3$, $-15 < x < 15$, $t = 1$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.85$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.7. Kesirli Mertebeden Homojen Diferansiyel Denkleme SDM'nin Uygulanması

$y(0^+) = 0$ başlangıç şartı ile verilen kesirli mertebeden homojen diferansiyel denklemi [92,148]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^{1/2}y(t)}{dt^{1/2}} - 2y(t) = 0, \quad \frac{d^{1/2}y(0^+)}{dt^{1/2}} = c, \quad t > 0, \quad (4.7.1)$$

şeklinde verilsin.

Kesirli mertebeden homojen (4.7.1) diferansiyel denkleminin analitik çözümünü bulmak için, bu denklemin her iki tarafının Sumudu dönüşümünü alırsak,

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + S\left(\frac{d^{1/2}y(t)}{dt^{1/2}}\right) - 2S(y(t)) &= 0, \\
\frac{1}{u}\left[F(u) - f(0)\right] + \frac{F(u)}{u^{1/2}} - \frac{D^{-1/2}[f(t)]}{u}\bigg|_{t=0} - 2F(u) &= 0, \\
\frac{F(u)}{u} + \frac{F(u)}{u^{1/2}} - \frac{c}{u} - 2F(u) &= 0, \\
(1 + u^{1/2} - 2u)F(u) = c \Rightarrow F(u) = \frac{c}{1 + u^{1/2} - 2u} = \frac{2c}{3(1 + 2\sqrt{u})} + \frac{c}{3(1 - \sqrt{u})}, \\
F(u) = \frac{2c}{3}\left(\frac{1 - 2\sqrt{u}}{1 - 4u}\right) + \frac{c}{3}\left(\frac{1 + \sqrt{u}}{1 - u}\right), \\
F(u) = \frac{2c}{3}\left(\frac{1}{1 - 4u} - \frac{2\sqrt{u}}{1 - 4u}\right) + \frac{c}{3}\left(\frac{1}{1 - u} - \frac{\sqrt{u}}{1 - u}\right), \tag{4.7.2}
\end{aligned}$$

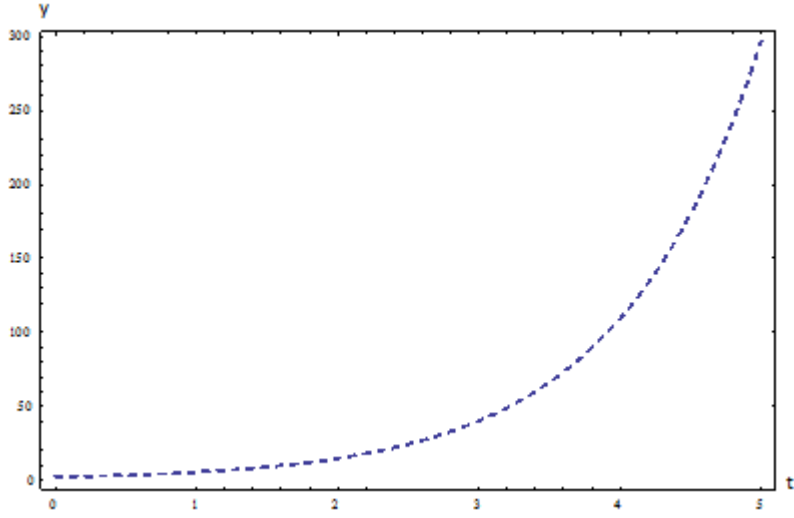
elde edilir.

Referans [76] daki ters dönüşüm tablosunu kullanarak (4.7.2) denkleminin ters Sumudu dönüşümü alınır. Kesirli mertebeden homojen (4.7.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen analitik çözümü

$$y(t) = \frac{2c}{3}\left[e^{4t} - e^{4t} \operatorname{erf}(2\sqrt{t})\right] + \frac{c}{3}\left[e^t + e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})\right] \tag{4.7.3}$$

şeklindedir.

Kesirli mertebeden homojen (4.7.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.7.3) analitik çözümü için iki boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.7.1. Kesirli mertebeden homojen (4.7.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.7.3) analitik çözümünün $0 < t < 5$ ve $c = 3$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.8. Kesirli Mertebeden Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemlere SDM'nin Uygulanması

Örnek 4.8.1.

Kesirli mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemi [92,148]

$${}_0D_t^{1/2}y(t) - y(t) = -1, \quad [{}_0D_t^{-1/2}y(t)]_{t=0} = 0, \quad t > 0, \quad (4.8.1)$$

şeklinde verilsin.

Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.1) diferansiyel denkleminin analitik çözümünü bulmak için, bu denklemin her iki tarafının Sumudu dönüşümünü alırsak,

$$\begin{aligned} S[D^{1/2}y(t)] - S[y(t)] &= -S[1], \\ S[D^{1/2}y(t)] - F(u) &= -S[1], \\ \frac{F(u)}{u^{1/2}} - \frac{D^{-1/2}[f(t)]}{u} \Big|_{t=0} - F(u) &= -S[1], \end{aligned}$$

$$\frac{F(u)}{u^{1/2}} - F(u) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{u^{1/2}} - 1 \right) F(u) = -1 \Rightarrow (1 - u^{1/2}) F(u) = -u^{1/2},$$

$$F(u) = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} = \frac{\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)}{u-1} = \frac{u+\sqrt{u}}{u-1} = \frac{u-1+1+\sqrt{u}}{u-1} = 1 - \frac{1}{1-u} - \frac{\sqrt{u}}{1-u}, \quad (4.8.2)$$

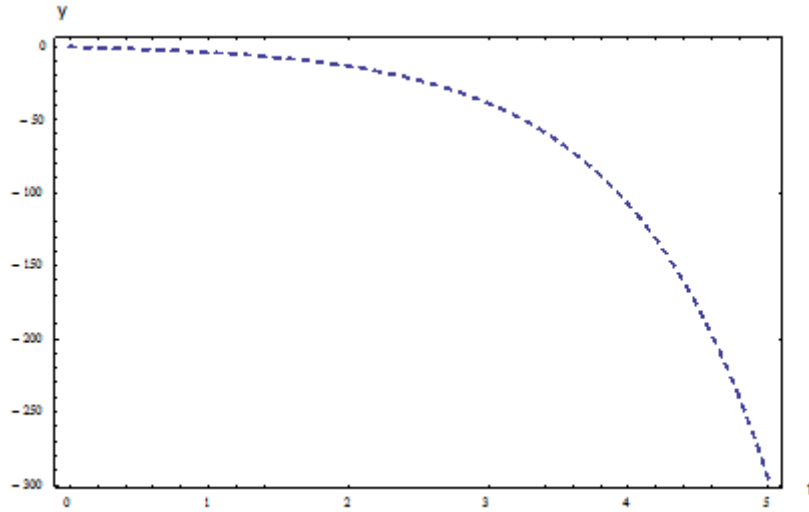
elde edilir.

Referans [76] daki ters dönüşüm tablosunu kullanarak (4.8.2) denkleminin ters Sumudu dönüşümü alınırsa kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen analitik çözümü

$$y(t) = 1 - e^t - e^t \operatorname{erf} \sqrt{t} \quad (4.8.3)$$

şeklinde elde edilir.

Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.3) analitik çözümü için iki boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.8.1. Kesirli mertebeden homojen (4.8.1) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.3) analitik çözümünün $0 < t < 5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Örnek 4.8.2.

$y(0) = y'(0) = 1$ başlangıç şartı ile verilen kesirli mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemi [92,149]

$$D^2 y(t) + D^{3/2} y(t) + y(t) = t + 1, \left[{}_0 D_t^{-1/2} y(t) \right]_{t=0} = 0, t > 0, \quad (4.8.4)$$

şeklinde verilsin.

Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.4) diferansiyel denkleminin analitik çözümünü bulmak için, (4.8.4) denkleminin her iki tarafının Sumudu dönüşümünü alırsak

$$\begin{aligned} S[D^2 y(t)] + S[D^{3/2} y(t)] + S[y(t)] &= S[t] + S[1], \\ \frac{1}{u^2} \left[F(u) - f(0) - u \frac{df(t)}{dt} \right]_{t=0} + \frac{F(u)}{u^{3/2}} - \frac{D^{1/2}[f(t)]}{u} \Big|_{t=0} + F(u) &= u + 1, \\ \frac{1}{u^2} [F(u) - 1 - u] + \frac{F(u)}{u^{3/2}} - \frac{1}{u} \left[\frac{F(u)}{u^{1/2}} - \frac{D^{-1/2}[f(t)]}{u} \right]_{t=0} + F(u) &= u + 1, \\ \frac{1}{u^2} [F(u) - 1 - u] + \frac{D^{-1/2}[f(t)]}{u} \Big|_{t=0} + F(u) &= u + 1, \\ \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) F(u) = 1 + u + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \Rightarrow (1 + u^2) F(u) &= 1 + u + u^2 + u^3, \\ F(u) = \frac{1 + u + u^2 + u^3}{(1 + u^2)} &= 1 + u. \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

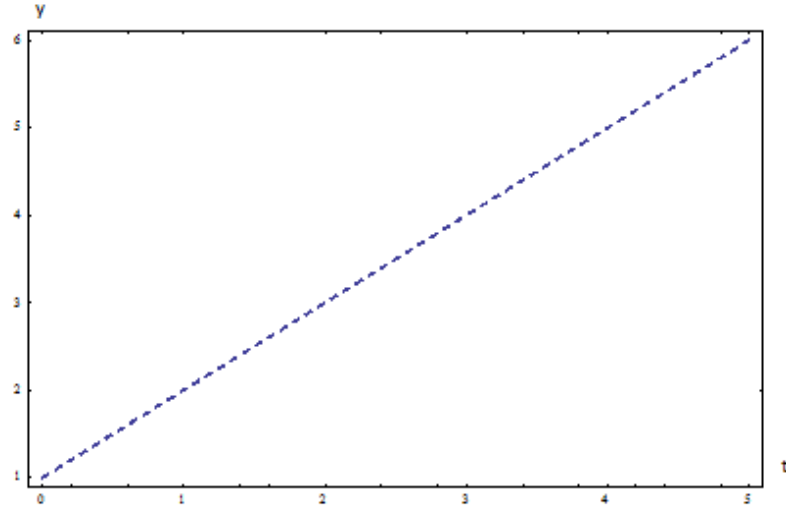
elde edilir.

Referans [76] daki ters dönüşüm tablosunu kullanarak (4.8.5) denkleminin ters Sumudu dönüşümü alınırsa kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.4) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen analitik çözümü

$$y(t) = 1 + t. \quad (4.8.6)$$

şeklinde elde edilir.

Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.4) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.6) analitik çözümü için iki boyutlu grafiği aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.8.2. Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.8.4) diferansiyel denkleminin SDM ile elde edilen (4.8.6) analitik çözümünün $0 < t < 5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.9. Kesirli Mertebeden Homojen Adi Diferansiyel Denkleme VIM'in Uygulanması

$y(0)=1$ başlangıç şartı ile verilen kesirli mertebeden homojen diferansiyel denklemi [116]

$$D_t^\alpha y(t) = -y(t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.9.1)$$

şeklinde verilsin.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre, (4.9.1) denkleminin iterasyon yapısı

$$y_{k+1}(t) = y_k(t) + \int_0^t \lambda(\tau) \left[\frac{\partial^\alpha y_k(\tau)}{\partial \tau^\alpha} + y_k(\tau) \right] d\tau, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.9.2)$$

şeklinde yazılır.

y_k 'ya göre varyasyon hesaplamak için durum şartları

$$\begin{cases} 1 + \lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0, \\ \lambda'(\tau) = 0. \end{cases} \quad (4.9.3)$$

şeklindedir.

Lagrange çarpanı

$$\lambda(\tau) = -1. \quad (4.9.4)$$

olarak tanımlanır.

(4.9.4) denklemi (4.9.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_{k+1}(t) = y_k(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_k(\tau)}{\partial \tau^\alpha} + y_k(\tau) \right] d\tau, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.9.5)$$

iterasyon formülü elde edilir.

$y(0) = 1$ başlangıç şartını (4.9.5) denkleminde yazarsak, Mathematica programı yardımıyla kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_0(\tau)}{\partial \tau^\alpha} + y_0(\tau) \right] d\tau = 1 - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha 1}{\partial \tau^\alpha} + 1 \right] d\tau \\ y_1 &= 1 - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha 1}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau - t = 1 - t - \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) \\ y_1 &= 2 - t - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} + y_1(\tau) \right] d\tau \\ y_2 &= 2 - t - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau - \int_0^t \left[2 - \tau - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right] d\tau \\ y_2 &= 2 - 3t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_1}. \end{aligned} \quad (4.9.7)$$

bulunur.

Kesirli kalkulus ve Leibnitz kuralını kullanarak I_1 terimini hesaplırsak

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau = \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left(2 - \tau - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha 2}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{1-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau \\ &= 2 \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) - \left(\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - t \right) - \left(\frac{1}{\Gamma(3-2\alpha)} t^{2-2\alpha} - t^{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 2 - \left(\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - t \right) - \left(\frac{1}{\Gamma(3-2\alpha)} t^{2-2\alpha} - t^{1-\alpha} \right) \\
&= -2 + t + t^{1-\alpha} + \frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)},
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. I_1 terimini (4.9.7) denkleminde yerine yazarsak

$$y_2(t) = 4 - 4t + \frac{t^2}{2} - t^{1-\alpha} - \frac{3t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}, \quad (4.9.8)$$

şeklinde bulunur.

(4.9.5) iterasyon formülünün diğer terimleri Mathematica programı yardımıyla benzer şekilde elde edilebilir. Kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

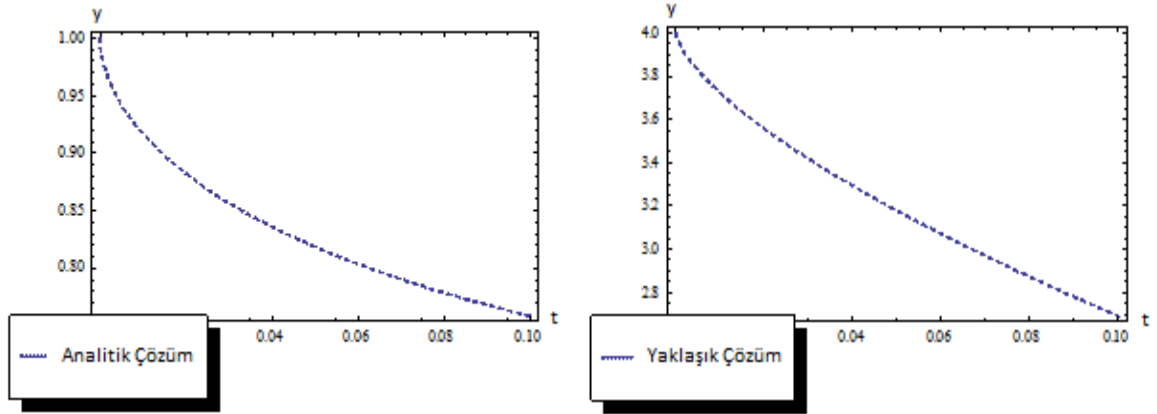
$$y(t) = E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (4.9.9)$$

ile verilir. $k=2$ için kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$y(t) = 1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \quad (4.9.10)$$

şeklindedir.

Kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin (4.9.10) analitik çözümü ve VIM ile elde edilen (4.9.8) yaklaşık çözümü için iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.9.1. Kesirli mertebeden homojen (4.9.1) adi diferansiyel denkleminin (4.9.10) analitik çözümü ile VIM yardımıyla elde edilen (4.9.8) yaklaşık çözümünün $0 < t < 0.1$ ve $\alpha = 0.35$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.10. Kesirli Mertebeden Homojen Olmayan Adi Diferansiyel Denkleme VIM'in Uygulanması

$y(0)=0$ başlangıç şartı ile verilen kesirli mertebeden homojen olmayan adi diferansiyel denklem [116]

$$D^\alpha y(t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma[3-\alpha]} - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma[2-\alpha]} - y(t) + t^2 - t, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.10.1)$$

şeklinde verilsin.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre, (4.10.1) denkleminin iterasyon yapısı

$$y_{k+1} = y_k + \int_0^t \lambda(\tau) \left[\frac{\partial^\alpha y_k(\tau)}{\partial \tau^\alpha} - \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma[3-\alpha]} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma[2-\alpha]} + y_k(\tau) - \tau^2 + \tau \right] d\tau \quad (4.10.2)$$

şeklindedir.

y_k 'ya göre varyasyon hesaplamak için durum şartları

$$\begin{cases} 1 + \lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0, \\ \lambda'(\tau) = 0. \end{cases} \quad (4.10.3)$$

şeklindedir.

Lagrange çarpanı

$$\lambda(\tau) = -1. \quad (4.10.4)$$

olarak tanımlanır.

(4.10.4) denklemi (4.10.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_{k+1} = y_k - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_k(\tau)}{\partial \tau^\alpha} - \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + y_k(\tau) - \tau^2 + \tau \right] d\tau, \quad (4.10.5)$$

iterasyon formülü elde edilir.

$y(0) = 0$ başlangıç şartını (4.10.5) denkleminde yerleştirirsek, Mathematica programı yardımıyla kesirli mertebeden homojen olmayan (4.10.1) adi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_0(\tau)}{\partial \tau^\alpha} - \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + y_0(\tau) - \tau^2 + \tau \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau^2 - \tau \right] d\tau \\ &= \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} - \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + y_1(\tau) - \tau^2 + \tau \right] d\tau \\ &= \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha y_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left[y_1(\tau) - \tau^2 + \tau - \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right] d\tau \\ &= \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left(\frac{2\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^2}{2} \right) \right] d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left[\tau - \frac{3\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{3\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] d\tau \\ &= -t^2 + \frac{5t^3}{6} - \frac{t^4}{12} - \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{5t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{\Gamma(4-\alpha)} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{3-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_1} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{2-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_2} - \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^3}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_3} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^2}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_4} \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

bulunur.

Kesirli kalkulus ve Leibnitz kuralını kullanarak I_1, I_2, I_3 ve I_4 terimlerini hesaplarsak,

$$I_1 = \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{3-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau = \frac{1}{(4-\alpha)} \frac{\partial^\alpha t^{4-\alpha}}{\partial t^\alpha} - t^{3-\alpha} = \frac{1}{(4-\alpha)} \frac{\Gamma(5-\alpha)}{\Gamma(5-2\alpha)} t^{4-2\alpha} - t^{3-\alpha} = \frac{\Gamma(4-\alpha)}{\Gamma(5-2\alpha)} t^{4-2\alpha} - t^{3-\alpha}$$

$$I_2 = \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{2-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau = \frac{1}{(3-\alpha)} \frac{\partial^\alpha t^{3-\alpha}}{\partial t^\alpha} - t^{2-\alpha} = \frac{1}{(3-\alpha)} \frac{\Gamma(4-\alpha)}{\Gamma(4-2\alpha)} t^{3-2\alpha} - t^{2-\alpha} = \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(4-2\alpha)} t^{3-2\alpha} - t^{2-\alpha}$$

$$I_3 = \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^3}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau = \frac{1}{4} \frac{\partial^\alpha t^4}{\partial t^\alpha} - t^3 = \frac{3!}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} - t^3$$

$$I_4 = \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^2}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau = \frac{1}{3} \frac{\partial^\alpha t^3}{\partial t^\alpha} - t^2 = \frac{2!}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} - t^2$$

şeklinde elde edilir. I_1, I_2, I_3 ve I_4 terimlerini (4.10.7) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} y_2 &= -t^2 + \frac{5t^3}{6} - \frac{t^4}{12} - \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{5t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{\Gamma(4-\alpha)} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{3-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_1} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^{2-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_2} - \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^3}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_3} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha \tau^2}{\partial \tau^\alpha} \right] d\tau}_{I_4} \\ &= -t^2 + \frac{5t^3}{6} - \frac{t^4}{12} - \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{5t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{\Gamma(4-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(4-\alpha)}{\Gamma(5-2\alpha)} t^{4-2\alpha} - t^{3-\alpha} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(4-2\alpha)} t^{3-2\alpha} - t^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{3!}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} - t^3 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{2!}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} - t^2 \right] \\ &= -t^2 + \frac{5t^3}{6} - \frac{t^4}{12} - \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{5t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{2}{\Gamma(5-2\alpha)} t^{4-2\alpha} + \frac{2}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(4-2\alpha)} t^{3-2\alpha} - \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{2}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} - \frac{1}{2} t^2 \\ &= -\frac{3}{2} t^2 + \frac{7}{6} t^3 - \frac{t^4}{12} - \frac{3t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{8t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{4t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(4-2\alpha)} t^{3-2\alpha} - \frac{2}{\Gamma(5-2\alpha)} t^{4-2\alpha} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve buradan

$$y_2(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{6}t^3 - \frac{t^4}{12} - \frac{3t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{8t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{4t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(4-2\alpha)}t^{3-2\alpha} - \frac{2}{\Gamma(5-2\alpha)}t^{4-2\alpha} \quad (4.10.8)$$

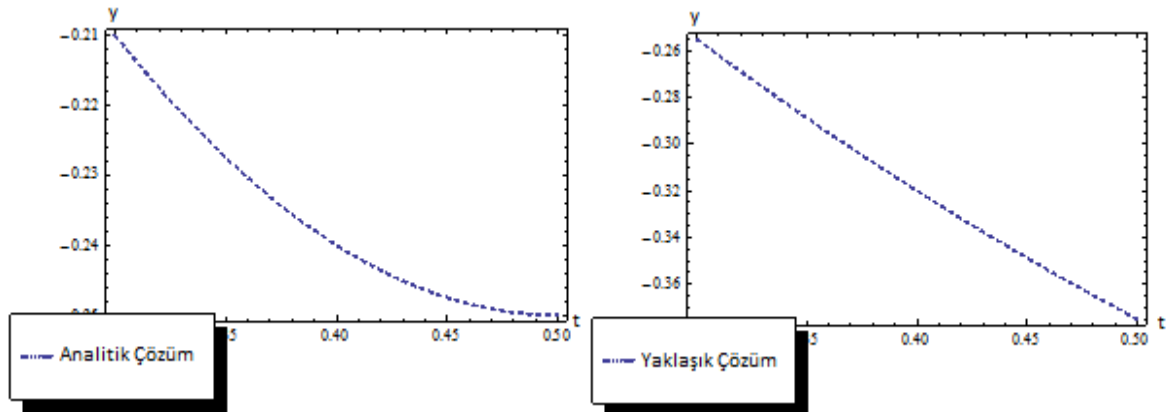
olarak elde edilir.

(4.10.5) iterasyon formülünün diğer terimleri Mathematica programı yardımıyla benzer şekilde elde edilir. Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.10.1) adi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$y(t) = t^2 - t, \quad (4.10.9)$$

şeklindedir.

Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.10.1) adi diferansiyel denkleminin (4.10.9) analitik çözümü ve VIM ile elde edilen (4.10.8) yaklaşık çözümü için iki boyutlu grafikleri Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.10.1. Kesirli mertebeden homojen olmayan (4.10.1) adi diferansiyel denkleminin (4.10.9) analitik çözümü ile VIM yardımıyla elde edilen (4.10.8) yaklaşık çözümünün $0.3 < t < 0.5$ ve $\alpha = 0.1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

4.11. Kesirli Mertebeden Kadomtsev-Petviashvili Diferansiyel Denkleminin Homotopi Ayrışım Metodu'nun Uygulanması

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi çapraz koordinatlar üzerindeki genliğin dalgaları genişleten lineer olmayan gelişmesini örnekleyen bir sıcaklık koordinatı ve iki uzaysaldaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem çoğunlukla çeşitli terimlerin önündeki farklı katsayılarla tam olarak belirli değildir. Fakat bu katsayılar bağımlı ve bağımsız değişkenler uygun şekilde yeniden ölçeklendirilerek değiştirilebildiğinden özel değerlere gerek yoktur. KP denklemi iki uzaysal boyutta yaygın bir integrallenebilir yapıya sahiptir. Ayrıca bu denklem bir paraksiyal dalga yaklaşımındaki ayırıcı dalgalara meydan veren kuadratik nonlineerlik ile sistemin bir indirgemesi olarak açığa çıkan lineer olmayan dalga teorisindeki yaygın modellerden biridir. KP denklemi en yüksek mertebeden terimlerin birbirine geçirildiği ve zayıf dağılım, kuadratik nonlineerlik ve kırılma ile kuşatılan bir asimptotik kararlılığın farz edildiği böyle sistemlerin asimptotik ifadesindeki iyi bilinen bir sınır olarak ortaya çıkar [117].

Şimdi Kadomtsev-Petviashvili denkleminin fiziksel açıklamasından sonra bu kısımda ele alacağımız kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denklemini inceleyelim.

Kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili diferansiyel denklemini [117]

$$\partial_{tx}^{\alpha+1}u + (\partial_x u)^2 + u\partial_{xx}u + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 u + \lambda \partial_{yy}^2 u = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.11.1)$$

ele alalım.

Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili diferansiyel denkleminin Homotopi Ayrışım Metodu ile yaklaşık çözümünü bulmak için, kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili diferansiyel denkleminin her iki tarafına $\partial_{tx}^{\alpha+1}$ türevinin ters operatörünü uygularsak

$$u(x, y, t) = u(x, y, 0) + u(0, y, t) - u(0, y, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} \left((\partial_v u)^2 + u\partial_{vv}u + \varepsilon^2 \partial_{vvvv}^4 u + \lambda \partial_{yy}^2 u \right) dv dl \quad (4.11.2)$$

elde edilir. (4.11.2) denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için denklemin çözümü

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) \quad (4.11.3)$$

seri formunda olsun.

Homotopinin yapısı gereğince (4.11.3) denklemini (4.11.2) denkleminde yerine yazıp p 'nin aynı kuvvetten terimlerini yerine koyarsak

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, 0) + u(0, y, t) - u(0, y, 0) \quad (4.11.4)$$

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} \left((\partial_v u_0)^2 + u \partial_{vv} u_0 + \varepsilon^2 \partial_{vvv}^4 u_0 + \lambda \partial_{yy}^2 u_0 \right) dv dl \quad (4.11.5)$$

$\vdots$

$$u_n(x, y, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} \left(H_{n-1}^1 + H_{n-1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{vvv}^4 u_{n-1} + \lambda \partial_{yy}^2 u_{n-1} \right) dv dl, \quad n \geq 1 \quad (4.11.6)$$

denklemleri elde edilir.

(4.11.6) denklemindeki iterasyon formülü (4.11.3) denklemindeki bütün terimleri elde etmek için kullanılan genel formüldür. Burada

$$\begin{aligned} H_{n-1}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \partial_v u_k \partial_v u_{n-k-1}, \\ H_{n-1}^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \partial_v u_k u_{n-k-1}, \end{aligned} \quad (4.11.7)$$

şeklindedir.

Şimdi elde ettiğimiz çözümlerin her bir bileşenini daha açık olarak göstermek için bu çözümlerin Mathematica programında yapılan algoritmasının her bir adımını açıklayalım.

Algoritma 4.11.1.

(i) $I(x, y, t) = u(x, y, 0) + u(0, y, t) - (0, y, 0)$ şeklinde alınır.

(ii) Seri hesaplamalarında k – terim sayısıdır.

(iii) Özel çözüm $u_{part}(x, y, t)$ şeklinde alınır.

Adım 1

$u_0(x, y, t) = I(x, y, t)$ ve $u_{part}(x, y, t) = u_0(x, y, t)$ yerine koyulur.

Adım 2

Adım 3, 4, 5 $k = 0$ 'dan $n - 1$ 'e kadar yapılır.

Adım 3

$$H_{n-1}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \partial_v u_k \partial_v u_{n-k-1},$$

$$H_{n-1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \partial_v u_k u_{n-k-1},$$

$$b_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} (H_{n-1}^1 + H_{n-1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{vvv}^4 u_{n-1} + \lambda \partial_{yy}^2 u_{n-1}) dv dl, n \geq 1,$$

terimleri hesaplanır.

Adım 4

$$u_{n+1}(x, t) = v_n + u_n,$$

terimi hesaplanır.

Adım 5

$$u_{part}(x, y, t) = u_{part}(x, y, t) + u_{n+1}(x, y, t)$$

terimi hesaplanır.

4.11.1. Kesirli Mertebeden Kadomtsev-Petviashvili Diferansiyel Denklemi İçin Homotopi Ayırışım Metodunun Yakınsaklığı

Kesirli lineer olmayan dalga hareketine uygulanan ve burada uygulanan Homotopi Ayırışım Metodu'nun yakınsaklığını inceleyelim.

Bu fonksiyonların kümesi olarak tanımlanan $H = L^2((a, b) \times (0, T))$ Hilbert uzayının kesirli H_α alt Hilbert uzayını

$$v : (a, b) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \int_0^t (t-l)^{\alpha-1} v^2 dl ds < \infty, \quad (4.11.1.1)$$

olarak kabul edelim.

L^2 normunda sınırlanan türev operatörlerini ele alalım. Bu varsayımların ışığında kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denklemini inceleyelim ve denklemin operatör formunu

$$B(u) = -\partial_{tx}^{\alpha+1}(u) = (\partial_x u)^2 + u \partial_{xx} u + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 u + \lambda \partial_{yy}^2 u \quad (4.11.1.2)$$

olarak yazalım.

Teorem 4.11.1.1

Eğer aşağıdaki iki durum sağlanırsa, burada kullanılan Homotopi ayrışım metodu yakınsaktır [117].

(H1) Her $(u, v) \in H_\alpha$ için $(B(u) - B(v), u - v) \leq q \|u - v\|, q > 0$ 'dır.

(H2) Her pozitif $M > 0$ sabiti için bir $P > 0$ sabiti vardır öyleki $u, v \in H$ için $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$ olmak üzere

$$(B(u) - B(v), w) \leq P \|u - v\| \|w\|, \forall w \in H_\alpha \quad (4.11.1.3)$$

sağlanır.

İspat

B operatörünün tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} B(u) - B(v) &= (\partial_x u)^2 - (\partial_x v)^2 + u \partial_{xx} u - v \partial_{xx} v + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v) + \lambda \partial_{yy}^2 (u - v) \\ &= \partial_x (u \partial_x u - v \partial_x v) + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v) + \lambda \partial_{yy}^2 (u - v) \\ &= \partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right) + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v) + \lambda \partial_{yy}^2 (u - v) \end{aligned} \quad (4.11.1.4)$$

bulunur.

(H1) hipotezini elde edebilmek için $(B(u) - B(v), u - v)$

$$\begin{aligned} (B(u) - B(v), u - v) &= \left(\partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right), u - v \right) + (\varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v), u - v) \\ &\quad + (\lambda \partial_{yy}^2 (u - v), u - v) \end{aligned} \quad (4.11.1.5)$$

değerini hesaplayalım. Şimdi

$$\left(\partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right), u - v \right) \quad (4.11.1.6)$$

bileşenlerini ele alalım.

Burada dalğanın sonlu uzayda yayıldığı vurgulanmalıdır. Bu yüzden u ve v sınırlıdır. Sonuç olarak pozitif N sabiti vardır öyleki $(u,u),(v,v) < N^2$ sağlanır. Daha sonra (2.11) ile verilen $|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$ Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\left(\partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right), u - v \right) \leq \left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right) \right\| \|u - v\| \quad (4.11.1.7)$$

elde edilir.

Türev ve norm özelliklerini kullanarak

$$\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right) \right\| \leq O_1 \left\| \frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right\| \quad (4.11.1.8)$$

denklemini sağlayan bir pozitif reel O_1 sayısı bulunur.

Aynı türev ve norm özelliklerini kullanarak

$$\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right) \right\| \leq \frac{O_1 O_2}{2} \|u^2 - v^2\| \quad (4.11.1.9)$$

denklemini sağlayan ikinci bir pozitif reel O_2 sayısı bulunur. Buradan da

$$\left\| \partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right) \right\| \leq \frac{O_1 O_2}{2} \|u - v\| \|u + v\| \quad (4.11.1.10)$$

denklemini elde edilir.

$\|u - v\| \|u + v\| \leq 4N^4$ ifadesini elde etmek için lineer olmayan dalga yayılır öyleki

$$\left(\partial_x \left(\frac{\partial_x u^2 - \partial_x v^2}{2} \right), u - v \right) \leq 4N^4 \frac{O_1 O_2}{2} \|u - v\| \quad (4.11.1.11)$$

yazılabilir.

$$(\varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v), u - v) \quad (4.11.1.12)$$

durumu ile ispata devam edilir.

Şüphesiz ki

$$(\varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v), u - v) \leq \varepsilon^2 O_3 O_4 O_5 O_6 \|u - v\| \|u - v\| \quad (4.11.1.13)$$

denklemini sağlayan pozitif reel O_3, O_4, O_5 ve O_6 sayıları bulunur.

$(u,u),(v,v) < N^2$ ifadesini elde etmek için

$$(\varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 (u - v), u - v) \leq 2N^2 \varepsilon^2 O_3 O_4 O_5 O_6 \|u - v\| \quad (4.11.1.14)$$

$$\left(\lambda \partial_{yy}^2 (u-v), u-v\right) \leq 2N^2 \lambda O_7 O_8 \|u-v\| \quad (4.11.1.15)$$

kullanılır.

(4.11.1.11), (4.11.1.14) ve (4.11.1.15) denklemlerini (4.11.1.5) denkleminde yerine yazarsak

$$\left(B(u)-B(v), u-v\right) \leq \left(2N^2 \varepsilon^2 O_3 O_4 O_5 O_6 + 2N^2 \lambda O_7 O_8 + 4N^4 \frac{O_1 O_2}{2}\right) \|u-v\| \quad (4.11.1.16)$$

bulunur. Buradan açıktır ki

$$q = 2N^2 \varepsilon^2 O_3 O_4 O_5 O_6 + 2N^2 \lambda O_7 O_8 + 4N^4 \frac{O_1 O_2}{2} \quad (4.11.1.17)$$

alınırsa (H1) hipotezi sağlanır.

(H2) hipotezi de kolayca ispatlanır ki

$$\begin{aligned} \left(B(u)-B(v), w\right) &\leq P \|u-v\| \|w\|, \\ P &= 2M^2 \frac{O_9 O_{10}}{2} + \varepsilon^2 O_{11} O_{12} O_{13} O_{14} + \lambda O_{15} O_{16} \end{aligned} \quad (4.11.1.18)$$

gerçeklenir. Yani (H2) hipotezi de sağlanır. Buradan teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 4.11.1.1

$\Omega = [a, b] \ (-\infty \leq a < b \leq \infty)$ ve $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ reel ekseninin sonlu veya sonsuz bir aralığı olsun. $\|f\|_p < \infty$ olmak üzere Ω üzerinde Lebesgue kompleks değerli ölçülebilir f fonksiyonlar kümesi $L_p(a, b) \ (1 \leq p \leq \infty)$ ile gösterilir. Burada

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p \leq \infty) \quad (4.11.1.19)$$

şeklindedir [117].

Teorem 4.11.1.2

$h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ ve $h_1(t) \in L_p(\mathbb{R})$ bunların birleşimi $(h * h_1)(x) \in L_p(\mathbb{R}) \ (1 \leq p \leq \infty)$
 $(h * h_1)(x) \in L_p(\mathbb{R}) \ (1 \leq p \leq \infty)$ ise

$$\|f(h * h_1)(x)\|_p < \|h\|_1 \|h_1\|_p, \quad (4.11.1.20)$$

sağlanır.

$h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ ve $h_1(t) \in L_2(\mathbb{R})$ bunların birleşimi $(h * h_1)(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ise

$$\|f(h * h_1)(x)\|_2 < \|h\|_1 \|h_1\|_2, \quad (4.11.1.20)$$

dir [117].

Lemma 4.11.1.1

$\Re(\alpha) > 0$ ile kesirli integrasyon operatörleri $L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$)'de sınırlıdır.

Buradan

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq K \|f\|_p, \quad K = \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha) \Gamma(\alpha)}, \quad (4.11.1.21)$$

yazılır [117].

Teorem 4.11.1.3

$$B(u) = (\partial_x u)^2 + u \partial_{xx} u + \varepsilon^2 \partial_{xxxx}^4 u + \lambda \partial_{yy}^2 u \quad (4.11.1.22)$$

denklemini inceleyerek kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denklemi için başlangıç ve sınır şartı alınır. Homotopi ayrışım metodu kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denkleminin bir özel çözümünü sağlar [117].

Bu teoremin ispatı (H1), (H2) hipotezleri ve Lemma 4.11.1.1 kullanılarak kolayca ispatlanır.

Teorem 4.11.1.4

Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denklemi için başlangıç şartı dikkate alındığında bu denklemin yakınsak olan özel çözümü tektir [117].

4.11.2. Kesirli Mertebeden Kadomtsev-Petviashvili Diferansiyel Denkleminin Özel Çözümünün Homotopi Ayrışım Metodu ile Bulunması

Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denkleminin özel çözümü Algoritma 4 kullanılarak bulunur.

$$u(x, y, 0) = xy \quad (4.11.2.1)$$

başlangıç şartı ile kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denklemini ele alalım. Daha sonra algoritmayı kullanarak Mathematica yardımıyla

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{4\alpha\Gamma[\alpha]} t^\alpha \times (-\sin[2y] + \sin[2(x+y)] + 2(x + \sin[x]\sin[x+2y])) \quad (4.11.2.2)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, t) = & \frac{1}{24\Gamma[1+\alpha]^2} t^{2\alpha} \times (-3\cos[x-y] + 12\cos[y] + 4\cos[3y] - 9\cos[x+y] \\ & - 7\cos[3(x+y)] + 3\cos[x+3y] + 3\sin[x-y] - 36\sin[y] - 4\sin[3y] \\ & + 39\sin[x+y] + 12x(-2\cos[2y] + 2\sin[2y] + \sin[x+y]) + \sin[3(x+y)] \\ & + 72\sin[x](-\cos[x+2y] + \sin[x+2y]) + 3\sin[x+3y]) \end{aligned} \quad (4.11.2.3)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, y, t) = & \frac{1}{96\Gamma(1+\alpha)^3} t^{3\alpha} \times 6(15 + 38x + 6x^2 - 12\cos[x] - 3\cos[2x] + 4\sin[x]) \\ & + 48\cos[y]((-4+x)(-1+\cos[x]) - (9+x)\sin[x]) + 4\cos[2y](-189 \\ & - 135x + 48x^2 + 16\cos[x] + (173-9x)\cos[2x] + 8\sin[x] + (-190+9x) \\ & \sin[2x]) - 24\cos[3y](-8+6x + (3+2x)\cos[x] + 5\cos[3x] + (5+2x) \\ & \sin[x] + 35\sin[3x]) + \cos[4y](21+8\cos[x] - 29\cos[4x] + 8\sin[x] \\ & + 18\sin[2x] - 14\sin[4x]) + 48(8+3x + (-8+x)\cos[x] + (11+x)\sin[x] \\ & \times \sin[y] + 4(186-153x-48x^2 + 4\cos[x] + (-190+9x)\cos[2x] - 20 \\ & \times \sin[x] + (-173+9x)\sin[2x]) \times \sin[2y] - 24(-40-6x + (5+2x) \\ & \times \cos[x] + 35 \times \cos[3x] - (3+2x)\sin[3y] \times \sin[x] - 5\sin[3x]) + (8\cos[x] \\ & + 18\cos[2x] - 2(6+7\cos[4x] + 4\sin[x]) + 29\sin[4x])\sin[4y] \end{aligned} \quad (4.11.2.4)$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, y, t) = & \frac{1}{2880\Gamma[1+\alpha]^4} t^{4\alpha} (-120 \cos[2y](1173 + 2x(-351 + x(-12 + 32x)) \\
& - 96 \cos[x] + 3(-359 + 24x) \cos[2x] + 24(2 + x + 6x \cos[x]) \sin[x] \\
& - 489 \sin[2x]) + 360(-39 - 36x + (26 + 6x) \cos[x] + (13 + 6x) \cos[2x] \\
& - 2(1 + x) \sin[x] - 5 \sin[2x]) - 30 \cos[y](892 - 24(-5 + x)x + 12(-83 \\
& + 66x + 8x^2) \cos[x] + 84 \cos[2x] + 20 \cos[3x] - 3(-405 + 4x(62 + 13x)) \\
& \times \sin[x] + 36 \sin[2x] + 15 \sin[3x]) + 5 \cos[3y](8(-15883 + 18x(-71 \\
& + 27x)) + 36(45 + x(53 + 16x)) \cos[x] + 216 \cos[2x] + 4(31307 - 105x) \\
& \times \cos[3x] + 9(-37 + 4x(85 + 16x)) \sin[x] + 432 \sin[2x] + 5(-3665 \\
& + 12x) \sin[3x]) - 180 \cos[4y](111 + 56x + 12(7 + x) \cos[x] + 6 \cos[2x] \\
& - 201 \cos[4x] + 4(7 + 3x) \sin[x] + 2(13 + 6x) \sin[2x] + 417 \sin[4x]) \\
& + 3 \cos[5y](288 + 90 \cos[x] - 150 \cos[3x] - 228 \cos[5x] + 105 \sin[x] \\
& + 120 \sin[2x] + 200 \sin[3x] - 369 \sin[5x]) - 30((609 + 12x(-41 + 3x)) \\
& \times \cos[x] + 36 \cos[2x] + 15 \cos[3x] + 12(-55 + 50x + 6x^2 + (105 + x \\
& \times (51 + 8x)) \sin[x] - 5 \sin[2x]) - 20 \sin[3x]) \sin[y] + 120(-453 \\
& - 630x + 330x^2 + 64x^3 + 12(-3 + x) \cos[x] + (489 - 72x) \cos[2x] \\
& + 12(19 + 3x) \sin[x] + 3(-359 + 24x) \sin[2x]) \sin[2y] + 5(9(-51 \\
& + 4x(85 + 16x)) \cos[x] + 432 \cos[2x] + 5(-3665 + 12x) \cos[3x] \\
& + 4(4588 - 36x(361 + 27x) - 9(48 + x(53 + 16x)) \sin[x] - 54 \sin[2x] \\
& + (-31307 + 105x) \sin[3x])) \sin[3y] - 180(4(7 + 3x) \\
& \times \cos[x] + 2(13 + 6x) \cos[2x] - 3(157 + 12x - 139 \cos[4x] + 4(7 + x) \\
& \times \sin[x] + 2 \sin[2x] - 67 \sin[4x])) \sin[4y] + 3(-56 + 105 \cos[x] \\
& + 120 \cos[2x] + 200 \cos[3x] - 369 \cos[5x] - 90 \sin[x] + 150 \sin[3x] \\
& + 228 \sin[5x]) \sin[5y])
\end{aligned}
\tag{4.11.2.5}$$

elde edilir. Homotopi Ayırışım Metodu kullanılarak geri kalan terimler de bulunabilir [116].

O halde (4.11.2.1)-(4.11.2.5) denklemleri (3.4.6) denkleminde yerine yazılarak (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denkleminin Homotopi Ayırışım Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü

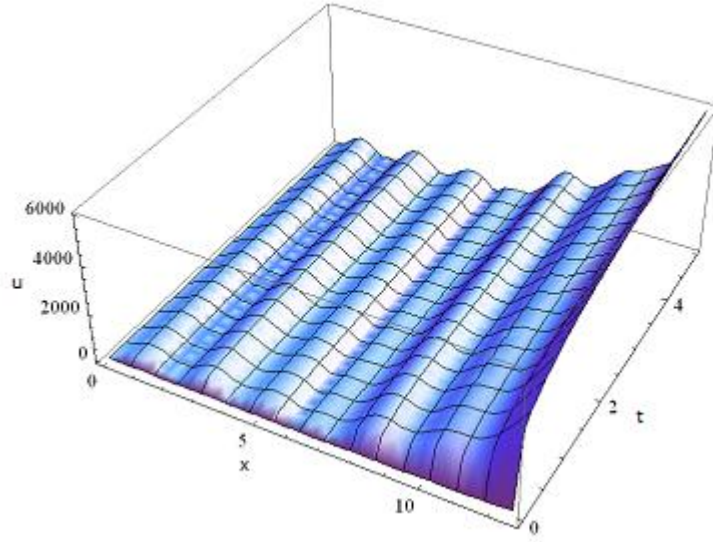
$$U(x, t, p) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t),$$

$$U(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} U(x, t, p),$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

şeklinde elde edilir.

Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denklemini Homotopi Ayırışım Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü için üç boyutlu grafiği Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.11.1. Kesirli mertebeden (4.11.1) Kadomtsev-Petviashvili denkleminin Homotopi Ayırışım Metodu ile elde edilen yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.05$ ve $y = \pi$ için elde edilen üç boyutlu görünümü

5. SONUÇ

Lineer olmayan zaman-kesirli Klein-Gordon denklemi, zaman-kesirli KdV ve mKdV denklemleri, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemi, zaman-kesirli Cahn-Hilliard denklemi ve zaman-kesirli genelleştirilmiş 3. mertebeden KdV denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu kullanılarak bulunan analitik çözümler için Mathematica 9 programı yardımıyla iki ve üç boyutlu grafikler çizilmiştir. Kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için Sumudu Dönüşüm Metodu kullanılmıştır ve Sumudu Dönüşüm Metodu kullanılarak bulunan analitik çözümler için Mathematica 9 programı yardımıyla iki boyutlu grafikler çizilmiştir. Kesirli mertebeden homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılmıştır. Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılarak bulunan yaklaşık çözümler için Mathematica 9 programı yardımıyla iki boyutlu grafikler çizilmiştir. Son olarak, kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için Homotopi Ayrışım Metodu kullanılmıştır. Homotopi Ayrışım Metodu kullanılarak bulunan yaklaşık çözüm için Mathematica 9 programı yardımıyla üç boyutlu grafik çizilmiştir.

Ayrıca, elde edilen verilerin ışığında Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu kesirli mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi bakımından büyük bir öneme sahiptir. Vurgulamalıyız ki bu metod soliton ve hiperbolik çözümler gibi yeni çözümlerin bulunması bakımından oldukça uygun ve çok etkilidir. Ayrıca Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu kesirli mertebeden lineer olmayan diğer diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

Buna ilaveten, kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denkleminin Homotopi Ayrışım Metodu kullanılarak elde edilen seri çözümünün yakınsaklığı ayrıntılı bir şekilde ispatlanmıştır. Verilen başlangıç şartı ile birlikte kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denklemi özel çözümü sağladığı görülmüştür. Kesirli mertebeden Kadomtsev-Petviashvili denklemi için başlangıç şartı göz önüne alındığında bu denklemin yakınsak olan özel çözümü tektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Weilbeer, M.**, 2005. Efficient Numerical methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, PhD Thesis, Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität Braunschweig, Germany.
- [2] **Euler, L.**, 1738. De progressionibus transcendendibus seu quarum termini generales algebraicae dari nequeunt, Comm. Acad. Sci. Petropolitanae, 5, 36-57. Translated to english by S. G. Langton, University of San Diego, www.sandiego.edu/~langton.
- [3] **Lagrange, J. L.**, 1849. Sur une: Nouvelle espèce de calcul relatif. A la différentiation et a l'intégration des quantités variables, Gauthier-Villars, Paris.
- [4] **Laplace, P. S.**, 1820. Théorie analytique des probabilités, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.
- [5] **Lacroix, S. F.**, 1819. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Imprimeur-Libraire pour les sciences, Paris.
- [6] **Fourier, J. B. J.**, 1822. Théorie analytique de la chaleur, pages 561.562. Didot, Paris.
- [7] **Abel, N. H.**, 1826. Auflösung einer mechanischen Aufgabe, J. für reine und angew. Math., 1, 153-157.
- [8] **Abel, N. H.**, 1881. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Oeuvres Complètes, 1, 16-18.
- [9] **Samko, S., Kilbas, A. and Marichev, O.**, 1993. Fractional Integrals and derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.
- [10] **Liouville, J.**, 1832. Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, J. L'Ecole Roy. Polytechn., 13, 71-162.
- [11] **Liouville, J.**, 1832. Mémoire sur l'integration de l'équation: $(mx^2 + nx + p)d^2x / dx^2 + (qx + pr)dy / dx + sy = 0$ à l'aide des différentielles indices quelconques, J. L'Ecole Roy. Polytechn., 13, 163-186.
- [12] **Liouville, J.**, 1832. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, J. L'Ecole Roy. Polytechn., 13, 1-69.
- [13] **Liouville, J.**, 1834. Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires, J. für reine und angew. Math., 11, 1-19.

- [14] **Liouville, J.**, 1834. Mémoire sur une formule d'analyse, J. für reine und angew. Math., **12(4)**, 273-287.
- [15] **Liouville, J.**, 1835. Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des différentielles indices quelconques, J. L'Ecole Roy. Polytechn., **15(24)**, 17-54.
- [16] **Liouville, J.**, 1835. M'emoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de fourier, dan le calcul des différentielles à indices quelconques, J. für reine und angew. Math., **13(1-3)**, 219-232.
- [17] **Liouville, J.**, 1837. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires, J. L'Ecole Roy. Polytechn., **15(55)**, 58-84.
- [18] **Weber, H.**, 1876. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass-Bernhard Riemann, Teubner, Leipzig, Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation.
- [19] **Sonin, N. Y.**, 1869. On differentiation with arbitrary index, Moscow Matem. Sbornik, **6(1)**, 1-38.
- [20] **Letnikov, A. V.**, 1872. An explanation of the concepts of the theory of differentiation of arbitrary index, Moscow Matem. Sbornik, **6**, 413-445.
- [21] **Grünwald, A. K.**, 1867. Ueber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung, Z. angew. Math. und Phys., **12**, 441-480.
- [22] **Letnikov, A. V.**, 1868. Theory of differentiation with an arbitrary index, Moscow Matem. Sbornik, **3**, 1-66.
- [23] **Heaviside, O.**, 1892. Electrical papers, The Macmillan Company.
- [24] **Weyl, H.**, 1917. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung, Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich, **62**, 296-302.
- [25] **Marchaud, A.**, 1927. Sur les dérivées et sur les différences des fonctions des variables réelles, J. math. pures et appl., **6(4)**, 371-382.
- [26] **Hardy, G. and Littlewood, J.**, 1928. Some properties of fractional integrals, I. Math. Z., **27(4)**, 565-606.
- [27] **Watanabe, Y.**, 1931. Notes on the generalized derivative of Riemann-Liouville and its application to Leibnitz's formula, I and II. Tôhoku Math. J., **34**, 8-41.
- [28] **Riesz, M.**, 1936. L'intégrales de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, C. R. Congrès Intern. Math., **2**, 44-45.

- [29] **Riesz, M.**, 1936. Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green, C. R. Congrès Intern. Math, **2**, 62-63.
- [30] **Nagy, B. S.**, 1938. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I: Periodischer Fall. Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl., **90**, 103-134.
- [31] **Caputo, M.**, 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II. Geophys. J. Royal astr. Soc., **13**, 529-539.
- [32] **Ross, B.**, 1975. Fractional calculus and its applications: proceedings of the international conference held at the University of New Haven, volume 457 of Lecture notes in mathematics, Springer Verlag, Berlin.
- [33] **Oldham, K. B., Spanier, J.**, 1974. The Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, New York: Academic Press, New York, London.
- [34] **Nishimoto, K.**, 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama, JAPAN.
- [35] **Miller, K.S., Ross, B.**, 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, New York, USA.
- [36] **Podlubny, I.**, 1994. Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers, UEF-03-94, The Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, Kosice, Slovak Republic.
- [37] **Podlubny, I.**, 1994. The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order, UEF-02-94, The Academy of Scien. Inst. of Exp. Phys., Kosice, Slovak Republic.
- [38] **Mainardi, F.**, 1996. Fractional Calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, CISM Lecture Notes, Udine, Italy, 1996.
- [39] **Podlubny, I.**, 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA.
- [40] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.**, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Press.
- [41] **Tarasov, V. E.**, 2010. Fractional Dynamics; Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, Springer, New York, USA.

- [42] **Monje, A. Chen,YQ., Vinagre, B. M. Xue, D. F. Vicente,** 2010. Fundamentals of fractional-order systems in fractional-order systems and controls fundamentals and applications, Advances in Industrial Control, Springer, UK.
- [43] **Diethelm, K.,** 2010. The Analysis of fractional differential equations, an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Germany.
- [44] **Mainardi, F.,** 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity An Introduction to Mathematical Models, Imperial College Press, USA.
- [45] **George, A.A.,** 2011. Advances on Fractional Inequalities, Springer,USA.
- [46] **Ortigueira, M. D.,** 2011. Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Springer Science and Business Media B.V, New York, USA.
- [47] **Kaczorek, T.,** 2011. Selected Problems of Fractional Systems Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Poland.
- [48] **Chen, X., Zheng, L., Zhang X.,** 2007. Convergence of the Homotopi Decomposition Method for Solving Nonlinear Equations, Advances in Dynamical Systems and Applications, **2(1)**, 59-64.
- [49] **Atangana, A. and Belhaouari, S. B.,** 2013. Solving Partial Differential Equation with Space- and Time-Fractional Derivatives via Homotopi Decomposition Method, Mathematical Problems in Engineering, **2013**, Article ID 318590, 9 pages.
- [50] **Atangana, A. and Kilicman, A.,** 2013. Analytical Solutions of Boundary Values Problem of 2D and 3D Poisson and Biharmonic Equations by Homotopi Decomposition Method, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 380484, 9 pages.
- [51] **Atangana, A. and Bildik, N.,** 2013. Approximate Solution of Tuberculosis Disease Population Dynamics Model, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 759801, 8 pages.
- [52] **Atangana, A. and Noutchie, S. C. O.,** 2013. Two-Dimension Hydrodynamic Dispersion Equation with Seepage Velocity and Dispersion Coefficient as Function of Space and Time, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 206942, 7 pages.
- [53] **Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E.,** 2013. The extended trial equation method for some time fractional differential equations, Discrete Dynamics in Nature and Society, **2013**,13 pages.

- [54] **Pandir, Y.**, 2014. New exact solutions of the generalized Zakharov-Kuznetsov modified equal width equation, *Pramana-Journal of Physics*, 82(6), 949-964.
- [55] **Bulut, H., Pandir, Y. and Tuluçe Demiray, S.**, 2014. Exact Solutions of Nonlinear Schrodinger's Equation with Dual Power-Law Nonlinearity by Extended Trial Equation Method, *Waves in Random and Complex Media*, doi:10.1080/17455030.2014.939246, 1-13.
- [56] **Bulut, H., Pandir, Y. and Tuluçe, S.**, 2013. Exact Solutions of Zakharov-Kuznetsov and Zakharov-Kuznetsov Equations by using extended trial equation method, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM 2013)*, Istanbul, Turkey.
- [57] **Bulut, H., Baskonus, H. M. and Pandir, Y.**, 2013. The modified trial equation method for fractional wave equation and time-fractional generalized Burgers equation, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 8 Pages.
- [58] **Pandir, Y. and Tandogan, Y. A.**, 2013. Exact solutions of the time-fractional Fitzhugh-Nagumo equation, *AIP Conference Proceedings*, 1558, 1919-1922.
- [59] **Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E.**, 2013. A multiple extended trial equation method for the fractional Sharma-Tasso-Olver equation, *AIP Conference Proceedings*, 1558, 1927-1930.
- [60] **Bulut, H., Pandir, Y. and Baskonus, H. M.**, 2013. Symmetrical hyperbolic Fibonacci function solutions of generalized Fisher equation with fractional order, *AIP Conference Proceedings*, 1558, 1914-1918.
- [61] **Tandogan, Y. A., Pandir, Y. and Gurefe, Y.**, 2013. Solutions of the nonlinear differential equations by use of modified Kudryashov method, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, Article ID 20130021, 7 pages.
- [62] **Pandir, Y.**, 2014. Symmetric Fibonacci Function Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8(5), 2237-2241.
- [63] **Kudryashov, N. A.**, 2012. One method for finding exact solutions of non-linear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 2248–2253.
- [64] **Tuluçe Demiray, S., Pandir, Y. and Bulut, H.**, 2014. Generalized Kudryashov Method for Time-Fractional Differential Equations, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 901540, 13 pages.

- [65] **Tuluçe Demiray, S., Pandir, Y. and Bulut, H.,** 2014. The Investigation of Exact Solutions of Nonlinear Time-Fractional Klein-Gordon Equation by Using Generalized Kudryashov Method (ICNPAA 2014) World Congress: 10th International Conference On Mathematical Problems In Engineering, Aerospace And Sciences, 15 –18 July, Narvik, Norway.
- [66] **Bulut, H., Pandir, Y. and Tuluçe Demiray, S.,** 2014. Exact Solutions of Time-Fractional KdV Equations by Using Generalized Kudryashov Method , International Journal of Modeling and Optimization, **4(4)**, 315-320.
- [67] **Watugala, G.,** 1993. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **24(1)**, 35-43.
- [68] **Watugala, G.,** 1998. Sumudu transform- a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, Mathematical Engineering in Industry, **6(4)**, 319-329.
- [69] **Watugala, G.,** 2002. The Sumudu transform for functions of two variables, Mathematical Engineering in Industry, **8(4)**, 293-302, 2002.
- [70] **Weerakon, S.,** 1994. Application of Sumudu transform to partial differential equations, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **25(2)**, 277-283.
- [71] **Weerakon, S.,** 1998. Complex inversion formula for Sumudu transform, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **29(4)**, 618-621.
- [72] **Asiru, M. A.,** 2001. Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **32(6)**, 906-910.
- [73] **Asiru, M. A.,** 2002. Further properties of the Sumudu transform and its applications, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **33(3)**, 441-449.
- [74] **Asiru, M. A.,** 2003. Application of the Sumudu Transform to Discrete Dynamical Systems, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **34(6)**, 944-949.

- [75] **Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A., Kalla, S. L.**, 2003. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral integral production equations, *Mathematical Problems in Engineering*, **3**, 103-118.
- [76] **Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A.**, 2006. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications, *Journal of Applied Mathematics and Stochastics Analysis*, **Article ID 91083**, 23 pages.
- [77] **Belgacem, F. B. M.**, 2006. Introducing and Analysing Deeper Sumudu Properties, *Nonlinear Studies*, **13(1)**, 23-41, 2006.
- [78] **Hussain, M. G. M., Belgacem, F. B. M.**, 2007. Transient solutions of Maxwell's equations based on Sumudu transform, *Progress in Electromagnetics Research*, **74**, 273-289.
- [79] **Belgacem, F. B. M.**, 2009. Sumudu applications to Maxwell's equations, *Progress in Electromagnetics Research Symposium*, **5(4)**, 355-360, 2009.
- [80] **Belgacem, F. B. M.**, 2010. Sumudu transform applications to Bessel functions and equations, *Applied Mathematical Sciences*, **4(74)**, 3665-3686.
- [81] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Tuluçe, S.**, 2012. Homotopi perturbation sumudu transform Method For one-two-three-dimensional initial value problems, *e-Journal of New World Sciences Academy* , **7(2)**, 55-65.
- [82] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Tuluçe, S.**, 2012. The solution of wave equations by Sumudu transform method, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, **4(3)**, 66-72.
- [83] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Tuluçe, S.**, 2012. The Solutions of Partial Differential Equations with Variable Coefficient by Sumudu Transform Method, *AIP Proceeding*, **1493(91)**, doi: 10.1063/1.4765475.
- [84] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Tuluçe, S.**, 2012. Homotopi perturbation sumudu transform method for one and two dimensional homogeneous heat equations, *International Journal of Basic & Applied Sciences*, **12(01)**, 6-16.
- [85] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Tuluçe, S.**, 2013. Homotopi Perturbation Sumudu Transform Method For Heat Equations, *Mathematics In Engineering, Science And Aerospace*, **4(1)**, 49-60.

- [86] **Bulut, H., Tuluçe, S., Baskonus, H. M.**, 2012. The Solutions of Initial Value Problems by Sumudu Transform Method, International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, 04-09 September, Mersin, TURKEY.
- [87] **Katatbeh, Q. D., Belgacem, F. B. M.**, 2011. Applications of the Sumudu transform to fractional differential equations, *Nonlinear Studies*, **18(1)**, 99-112.
- [88] **Chaurasia, V. B. L., Dubey, R. S., Belgacem, F. B. M.**, 2012. Fractional radial diffusion equation analytical solution via Hankel and Sumudu transforms, *International Journal of Mathematics in Eng. Science, & Aerospace*, **3 (02)**, 179-188.
- [89] **Goswami, P., Belgacem, F. B. M.**, 2012. Fractional Differential Equations Solutions through a Sumudu Rational, *Nonlinear Studies Journal*, **19(4)**, 591-598.
- [90] **Gupta, V.G., Sharma, B., Belgacem, F. B. M.**, 2011. On the Solutions of Generalized Fractional Kinetic Equations, *Applied Mathematical Sciences*, **5(19)**, 899 – 910.
- [91] **Bulut, H., Baskonus, H. M., Belgacem, F. B. M.**, 2013. The Analytical solution of some fractional ordinary differential equations by the Sumudu transform method, *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 6 pages.
- [92] **Tuluçe Demiray, S., Bulut, H., Belgacem, F. B. M.**, 2014. Sumudu Transform Method for Analytical Solutions of Fractional Type Ordinary Differential Equations, *Mathematical Problems in Engineering*, **in press**, 2014, 14 pages.
- [93] **Mousa, M. M., Kaltayev, A. and Ragab, S.F.**, 2009. Investigation of a transition from steady convection to chaos in porous media using piecewise variational iteration method, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **58**, 1088–1097.
- [94] **He, J. H.**, 1997. Variational iteration method for delay differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **2(4)**, 235–236.
- [95] **He, J. H.**, 1997. Semi-inverse method for establishing generalized principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics, *Int. J. Turbo Jet-Engines*, **14(1)**, 23–28.
- [96] **He, J. H.**, 1998. Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **167 (1–2)**, 69–73.
- [97] **He, J. H.**, 1998. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **167**, 57-68.

- [98] **He, J. H.**, 1999. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique:some examples, *Int. J. Mech.*, **34**, 699-708.
- [99] **He, J. H.**, 2000. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation*, **114**, 115-123.
- [100] **He, J. H.**, 2001. Variational theory for linear magneto-electro-elasticity, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **2(4)**, 309-316.
- [101] **He, J. H.**, 2003. Variational principle for Nano thin film lubrication, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **4(3)**, 313-314.
- [102] **He, J. H.**, 2004. Variational principle for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19(4)**, 847-851.
- [103] **He, J. H. and Wu, X. H.**, 2007. Variational iteration method: New development and applications, *Comput. Math. Appl.*, **54(7-8)**, 881–894.
- [104] **He, J. H.**, 2011. A short remark on fractional variational iteration method, *Physics Letters A*, **375**, 3362-3364.
- [105] **Abdou, M. A. and Soliman, A. A.**, 2005. Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **181(2)**, 245–51.
- [106] **Odibat, Z. and Momani, S.**, 2006. Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *Int. J. Non-linear Sci. Numer. Simul.*, **7(1)**, 27–34.
- [107] **Momani, S. and Odibat, Z.**, 2006. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, *Phys. Lett. A*, **355**, 271-279.
- [108] **Momani, S. and Odibat, Z.**, 2007. Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order, *Chaos, Solitons & Fractals*, **31**, 1248-1255.
- [109] **Momani, S. and Abuasad, S.**, 2006. Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation, *Chaos Solitons Fractals*, **27(5)**, 1119-1123.
- [110] **Momani, S. and Odibat, Z.**, 2007. Comparison between the Homotopy perturbation method and the variational iteration method for linear fractional partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **54**, 910-919.
- [111] **Odibat, Z.**, 2011. On Legendre polynomial approximation with the VIM or HAM for numerical treatment of nonlinear fractional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 2956-2968.

- [112] **Wu, G.**, 2011. A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 2186-2190.
- [113] **Bulut, H., Tuluçe, S., Baskonus, H. M.**, 2013. The implemented of variational iteration method to nonlinear fractional differential equation systems, 4th International Conference On Mathematical and Computational Applications (ICMCA 2013), 11-13 June 2013, Manisa, TURKEY.
- [114] **Wazwaz, A.M.**, 2007. The variational iteration method for exact solutions of Laplace equation, *Phys. Lett. A*, **363(4)**, 260–262.
- [115] **Inc, M.**, 2008. The approximate and exact solutions of the space- and time fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method, *J. Math. Anal. Appl.*, **345**, 476–484.
- [116] **Bulut, H., Baskonus, H. M. and Tuluçe, S.**, 2013. The solutions of homogenous and nonhomogeneous linear fractional differential equations by variational iteration method, *Acta Universitatis Apulensis*, **30**, 235-243.
- [117] **Atangana, A., Tuluçe Demiray, S., and Bulut, H.**, 2014. Modelling the Nonlinear Wave Motion within the Scope of the Fractional Calculus, *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID 481657, 7 pages.
- [118] **Yaşar, B. İ.**, 2005, *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [119] **Debnath, L.**, 2004. *Non-linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser, USA.
- [120] **Koca, K.**, 2003, *Kısmi Türevli Denklemler*, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [121] **Başarır, M., and Türker, E. S.**, 2003, *Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler*, Değişim Yayınları, İstanbul.
- [122] **Mucuk, O.**, 2009. *Topoloji*, Nobel Yayınları.
- [123] **Kreyzig, E.**, 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons.
- [124] **Balcı, M.**, 2010. *Matematik Analiz 1*, Balcı Yayınları, Ankara.
- [125] **Orhun, N.**, 1998. *Vektör Uzayları, Lineer Cebir*, Sayfa: 89-110, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir.

- [126] **Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V.**, 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, and Rochester, N. Y., USA.
- [127] **Balcı, M.**, 1988. Analiz II, Balcı Yayınları, Ankara, Türkiye.
- [128] **Uğurlu, Y.**, 2010. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [129] **Cavlak, E.**, 2013. Kesirli Kuvvetlere Sahip Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi, Doktora Tezi, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [130] **Atkinson, K.E.**, 1989. An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [131] **Soykan, Y.**, 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları, Ankara.
- [132] **İdemen, M.**, 1999. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Işık Üniv., İstanbul.
- [133] **Fowler, A. F.**, 1975. A Study of Fractional Calculus: Its Definitions and Properties, PhD Thesis, Texas State University, Texas.
- [134] **Kimeu, J. M.**, 2009. Fractional Calculus: Definitions and Applications, Master Theses&Specialist Projects, Western Kentucky University.
- [135] **Ross, B.**, 1973. Unpublished notes on fractional calculus, University on New Haven, Connecticut.
- [136] **Ross, B.**, 1974. The Development, Theory and Applications of the Gamma Function and a Profile of Fractional Calculus, PhD Thesis, New York University, New York.
- [137] **Weber, H.**, 1953. Collected Works of Bernhard Riemann, Dover Publications.
- [138] **Petrás, I.**, 2011. Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab, Engineering Education and Research using Matlab, pp. 239-264, InTech, Rijeka, Croatia, Hırvatistan.
- [139] **Gorenflo, R., and Mainardi, F.**, 2008. Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order, CISM LECTURE NOTES; International Centre for Mechanical Sciences, 223-276.
- [140] **Taşbozan, O.**, 2011. Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi İle Çözümü, Yüksek lisans Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

- [141] **Mittal, R.C. and Nigam, R.**, 2008. Solution of fractional integro-differential equations by Adomian decomposition method, The International Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **4(2)**, 87-94.
- [142] **Lee, J. and Sakthivel, R.**, 2013. Exact travelling wave solutions for some important, nonlinear physical models, Pramana-Journal of Physics, **80**, 757-769.
- [143] **Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I. and Kochanov, M. B.**, 2011. Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations, App. Math. and Com., **218**, 3965-3972.
- [144] **Baydemir, B.**, 2014. Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşüm Metodu ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, F. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [145] http://en.wikipedia.org/wiki/Sumudu_transform ,Sumudu transform, 7 Mayıs 2014.
- [146] **Jafari, H., Hosseinzadeh, H. and Salehpour, E.**, 2008. A New Approach to the Gas Dynamics Equation: An Application of the Variational Iteration Method, Applied Mathematical Sciences, **2(48)**, 2397 – 2400.
- [147] **He, J.H., Elagan, S.K., Li, Z.B.**, 2012. Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus, Physics Letters A, **376(2012)**, 257–259.
- [148] **Magin, R. L.**, 2006. Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Inc., Redding, CT.
- [149] **Diethelm, K., Luchko, Y.**, 2004. Numerical solution of linear multi-term initial value problems of fractional order, Journal of Computational Analysis and Applications, **6(3)**, 243-263.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Osmaniye’de doğdu. İlköğretimi İskenderun Demirçelik İlköğretim okulunda tamamladı. Ortaöğretimi İskenderun Demirçelik Anadolu Lisesinde okudu. Lisans öğrenimini 2008 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı. Yüksek lisans öğrenimini 2010 yılında Selçuk Üniversitesi Matematik Anabilim dalında bitirdi. 2010 yılında Fırat Üniversitesine Araştırma Görevlisi olarak atandı ve bu üniversitede Uygulamalı Matematik Anabilim dalında doktora başladı. Halen aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY