

İKİ SIRALI MARKOV ZİNCİRLERİ

Feyza GÜNAY

Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR

TEMMUZ-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ SIRALI MARKOV ZİNCİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feyza GÜNAY

091133106

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: Olasılık Teorisi Ve Olasılık Süreçleri

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 16 Temmuz 2012

TEMMUZ-2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİSİRALI MARKOV ZİNCİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feyza GÜNAY

(091133106)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Temmuz 2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Ağustos 2012

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Cemil ÇOLAK (İ.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü)

TEMMUZ-2012

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamalarında benden yardımlarını esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR'e ve her türlü desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN'a, teşekkürü bir borç bilirim.

Feyza GÜNAY

ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY.....	IV
TABLO LİSTESİ.....	V
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE METOT.....	2
2.1. Olasılık Teorisinin Bazı Önemli Kavramları.....	2
2.1.1. Tam Olasılık Formülü	2
2.1.2. Beklenen Değer.....	3
2.1.3. Üreten Fonksiyon.....	5
2.2. Stokastik Süreçler ve Önemli Karakteristikleri	7
2.3. Markov Zincirleri.....	8
2.3.1. İki Durumlu Markov Zinciri.....	9
3. BULGULAR.....	12
3.1. İki Sıralı Markov Zincirleri	12
3.2. İki Durumlu İki Sıralı Markov Zinciri	13
3.2.1. Zincirin Dağılımının Belirlenmesi	13
3.2.2. Zincirin Üç Boyutlu Dağılımı.....	19
3.2.3. Zincirin Dört Boyutlu Dağılımı	19
3.2.4. Zincirin Durumları Arasındaki Geçiş.....	20
3.2.5. Zincirin Durağan Dağılımı	22
3.2.6. Yutucu Durumlu Zincir	23
3.3. Uygulama	26
4. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	35
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	38

ÖZET

Çalışmada olasılık ve stokastik süreçler teorisi içerisinde önemli bir konuma sahip olan kesikli parametrelili Markov zincirleri incelenmiştir. Markov zincirlerinin yapısı ve uygulama alanları üzerinde durularak bir takım belirgin özellikleri iki durumlu Markov zincirlerinde gösterilmiştir.

Bunların yanı sıra Markov özelliği iki sıralı Markov özelliği olarak değiştirilerek birtakım bulgulara ulaşılmıştır. Bu bulgular kısaca, iki sıralı bir Markov zincirinde geçiş matrisinin oluşturulması, zincirin dağılımının belirlenmesi, durumlar arası geçişlerin incelenmesi, iki sıralı Markov zincirine eşdeğer olan zincirin kurulması, yutucu durumlu iki sıralı zincirin analizi olarak sıralanabilir. Çalışmanın sonunda ilave olarak uzunlamasına üretilen bir veride iki sıralı bir Markov zinciri yapısının nasıl kullanılabileceği vurgulanmıştır. Elde edilen tüm bulguları çalışmanın son kısmında ele alınarak vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İki sıralı Markov zinciri, Stokastik süreçler, Markov zincirleri

SUMMARY

SECOND ORDER MARKOV CHAIN

In this study, it was investigated Markov chain with discrete parameter which is of great importance in the theory of probability and stochastic processes. After considering on the structure of Markov chains and their applications, some of the its prominent features was proposed on the second order Markov chains.

Additionally, Markov property was changed as second order Markov chains property and it was reached some evidence about it. These were briefly following by: Creation of a transititon matrix in the second-order Markov chains, determination of the distribution chain, investigation of transitions between states, the establishment of a chain of Markov chain which is equivalent to second order, the analysis of absorbing state of the second order chain. However; lastly, it was highlighted that how you could use a second order Markov chain in the data produced as longitudinal.

Key Words: Second order Markov chain, Stochastic processes, Markov chains

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1: İki durumlu Markov zincirinin üç boyutlu dağılımı	11
Tablo 3.1: X_{n-1}, X_n, X_{n+1} ardışık değişkenlerinin iki durum için mümkün halleri	13
Tablo 3.2: X_{n-1}, X_n, X_{n+1} Değişkenlerinin üç boyutlu dağılımı	19
Tablo 3.3: $X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$ Değişkenlerinin dört boyutlu dağılımı	20
Tablo 3.4: Zincirin durumlar arası mümkün geçişleri ve olasılıkları	21
Tablo 3.5: İki sıralı zincir için gözlenen veri	27
Tablo 3.6: İki sıralı zincir için gözlenen verinin devamı	28
Tablo 3.7: İki adım geçiş matrisinin değerleri	30
Tablo 3.9: Dört adım geçiş matrisinin değerleri	30
Tablo 3.10: Beş adım geçiş matrisinin değerleri	31
Tablo 3.11: Altı adım geçiş matrisinin değerleri	31
Tablo 3.12: Yedi adım geçiş matrisinin değerleri	31
Tablo 3.13: Sekiz adım geçiş matrisinin değerleri	31
Tablo 3.14: Dokuz adım geçiş matrisinin değerleri	32
Tablo 3.15: On adım geçiş matrisinin değerleri	32
Tablo 3.16: Onbir adım geçiş matrisinin değerleri	32
Tablo 3.17: Oniki adım geçiş matrisinin değerleri	32
Tablo 3.18: Onüç adım geçiş matrisinin değerleri	33
Tablo 3.19: Ondört adım geçiş matrisinin değerleri	33
Tablo 3.20: Onbeş adım geçiş matrisinin değerleri	33
Tablo 3.21: Onaltı adım geçiş matrisinin değerleri	33

1. GİRİŞ

Olasılık teorisi ve stokastik süreçler istatistiksel ve matematiksel analizin önemli inceleme alanlarından olup modern bilimin geniş bir alanına hitap etmektedir. Özellikle Kolmogorov'un aksiyomatik olasılık tanımını yapmasının ardından bu inceleme alanı birçok yeni probleme çözüm ve farklı bakış açısı getirmiştir. Stokastik süreçler teorisi ise gerek matematiksel istatistik problemlerinin gerekse tesadüfi değişkenlerin analiz edilmesi aşamasında yeni birçok tanımlamaya ve çözüme imkân vermiştir.

Markov zincirleri teorisi stokastik süreçler içerisinde önemli ve geniş bir alana sahiptir. Andrei Markov'un bu konudaki dâhiliği hiç şüphe yoktur ki olasılık ve stokastik süreçler teorilerinde oldukça zengin bir inceleme alanını araştırmacılara sunmuştur.

Bağımsız değişkenlerin toplamı şeklinde tanımlanan stokastik süreçler genellikle Markov özelliğini sağlamaktadır. Bu tip süreçlerin başında binom süreci, tesadüfi yürüyüş, dallanan süreçler gelmektedir. Bu süreçler reel alanlarda başarıyla uygulanabilmektedir.

Uzunlamasına gözlemlenmiş verilerin modellenmesinde de sıkça kullanılan Markov zinciri yapısı gerek kayıp gözlemlerin tahmin edilmesinde gerekse ileriye yönelik tahmin yapılmasında oldukça yararlı sonuçlar verebilmektedir. Ancak bazı verilerde Markov özelliği göstermemektedir. Bu durumda Markov özelliğinin korunabilmesi için gözlemlenen durumun sadece bir gözlem değil bazen iki gözlem olması gerekebilir. Bundan dolayı iki sıralı Markov zinciri yapısı bu tipli uzunlamasına verilerde oldukça kullanışlı ve uygulanabilir olmaktadır.

Bu çalışmada iki sıralı Markov zincirleri üzerinde durularak zincirin bir takım göstergeleri hesaplanmaya çalışılacaktır. İki sıralı Markov zinciri Markov zinciri yapısından farklı olduğundan birtakım hesaplamaları Markov zincirlerinde olduğu kadar kolay olmamaktadır. Bundan dolayı literatürde bu konuyla ilgili olarak pek fazla kaynak ve çalışma bulunmamaktadır. Konunun bu hassasiyeti dikkate alındığında teorik olarak yapılandırılması önemli bir kazanç olacaktır. Markov zincirinde bilinen birçok parametrenin iki sıralı Markov zincirinde de incelenebilmesi yeni birçok tanımlamanın yapılması ihtiyacını ortaya çıkartmaktadır. Çalışmada bu durumlar göz önünde bulundurularak bazı özellikler iki sıralı Markov zincirinde yeniden tanımlanmış ve yapılandırılmıştır.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Olasılık Teorisinin Bazı Önemli Kavramları

Olasılık teorisi modern bilimin önemli bir parçası olup gerek teorik gerekse uygulamalı çalışmalarda sürekli olarak başvurulanan bir alandır. Bu bölümde olasılık teorisinin önemli kavramlarından olan tam olasılık formülü, beklenen değer ve üreten fonksiyon kavramları üzerinde durulacaktır.

2.1.1. Tam Olasılık Formülü

(Ω, F, P) bir olasılık uzayı olsun. $H_1, \dots, H_n$ olayları, $H_1 + \dots + H_n = \Omega$ özelliğini sağlayacak şekilde pozitif olasılıklı ayırık olaylar olsun. Bu durumda keyfi $A \subseteq H_1 + \dots + H_n$ olayının olasılığı $AH_1, \dots, AH_n$ ayırık parçaların cinsinden aşağıdaki formda ifade edilebilir,

$$Pr(A) = \sum_{j=1}^n Pr\{A|H_j\} Pr\{H_j\}$$

Tam olasılık formülü Bayes olasılık formülü dâhil birçok olasılık hesaplamalarında kolaylık sağladığı için kullanılmaktadır. Örnek uzayı $H_1, \dots, H_n$ gibi n -tane ayırık olaya bölündüğünden tam olasılık formülünün bu ifadesi tam olasılık formülünün kesikli versiyonu olarak adlandırılır. Aynı zamanda tam olasılık formülünün sürekli versiyonu ise şu şekilde ifade edilebilir,

$$Pr(A) = \int_{-\infty}^{\infty} Pr\{A|X = x\} dF_X(x)$$

Burada $F_X(x)$ fonksiyonu X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Bu formülde örnek uzayının ayırık bir bölüntüsü $H_x = \{X = x\}$ şeklinde alınmıştır.

Tam olasılık formülü oldukça kullanışlı bir yöntem olup pek çok yerde sıkça kullanılmaktadır. Kullanıldığı yerlerin başında X ve Y gibi iki tesadüfi değişkenin konvolüsyon formülünün elde edilmesi gelmektedir. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin toplamının dağılım fonksiyonu şu şekilde elde edilebilir,

$$\begin{aligned} Pr\{X + Y < t\} &= \int_{-\infty}^{\infty} Pr\{X + Y < t|Y = y\} dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Pr\{X < t - y\} dF_Y(y) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-y) dF_Y(y)$$

Tam olasılık formülünün kullanıldığı ikinci önemli bir yer ise $X_1, X_2, \dots$ tesadüfi değişkenler dizisinden alınan keyfi bir X_n tesadüfi değişkeninin olasılıklarının hesaplanmasında kullanılmasıdır. Örnek olarak (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlı $X_1, X_2, \dots$ tesadüfi değişkenler dizisinin durum uzayı kesikli $\mathcal{L}$ kümesi olsun. Bu durumda $k \in \mathcal{L}$ olmak üzere X_n tesadüfi değişkeninin k değerini alma olasılığı şu şekilde yazılır,

$$\begin{aligned} Pr\{X_n = k\} &= \sum_{j \in \mathcal{L}} Pr\{X_n = k, X_{n-1} = j\} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{L}} Pr\{X_n = k | X_{n-1} = j\} Pr\{X_{n-1} = j\} \end{aligned}$$

Bu formül X_n tesadüfi değişkeninin olasılıklarının X_{n-1} tesadüfi değişkeninin olasılıklarına bağlı olarak elde edilebilmesi açısından oldukça önemlidir.

2.1.2. Beklenen Değer

(Ω, F, P) bir olasılık uzayı olsun. Bu uzayda tanımlı bir X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ olmak üzere beklenen değeri

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$$

olmak üzere şu şekilde tanımlanır,

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

X bir tesadüfi değişken olmak üzere

$$g: R \rightarrow R$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlı $g(X)$ fonksiyonu da bir tesadüfi değişken oluyorsa $g(X)$ tesadüfi değişkeninin beklenen değeri yine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dF_X(x) < \infty$$

şartı altında aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x)$$

Beklenen değerin tanımından görüldüğü gibi bir Stieltjes integralidir. Bu integralin parçalanma özelliğini kullanarak beklenen değeri aşağıdaki şekilde iki parçaya ayırabiliriz,

$$EX = \int_{-\infty}^0 x dF_X(x) + \int_0^{\infty} x dF_X(x)$$

Kısmi integral alma yöntemiyle aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$\int_0^{\infty} x dF_X(x) = \int_0^{\infty} \{1 - F_X(x)\} dx - x\{1 - F_X(x)\}_0^{\infty}$$

Aynı zamanda $x > 0$ pozitif değerleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$0 \leq x \{1 - F_X(x)\} = t \int_t^{\infty} dF_X(x) \leq \int_t^{\infty} x dF_X(x)$$

$EX < \infty$ olma şartı altında $x \rightarrow \infty$ limiti için $x \{1 - F_X(x)\}$ ifadesi sıfıra yaklaşır. Buna göre aşağıdaki sonuç yazılabilir,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x dF_X(x) &= \int_0^{\infty} \{1 - F_X(x)\} dx \\ &= \int_0^{\infty} Pr\{X > x\} dx \end{aligned}$$

Benzer yolla aşağıdaki eşitlikte yazılabilir,

$$\int_{-\infty}^0 x dF_X(x) = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx = - \int_{-\infty}^0 Pr\{X < x\} dx$$

Bu iki sonuç beklenen değerde yerine yazılacak olursa aşağıdaki beklenen değer özelliği elde edilmiş olur,

$$EX = \int_0^{\infty} Pr\{X > x\} dx - \int_{-\infty}^0 Pr\{X < x\} dx$$

Pozitif tanımlı tesadüfi değişkenler için beklenen değer kısaca aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilebilir,

$$EX = \int_0^{\infty} Pr\{X > x\} dx$$

Pozitif olasılıklı, $Pr(B) > 0$, bir B olayının gerçekleşmesi şartı altında X tesadüfi değişkeninin şartlı beklenen değeri ise,

$$E\{X|B\} = \frac{E\{X I_B\}}{Pr(B)}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada I_B ile B olayının karakteristik veya indikatör fonksiyonu gösterilmektedir,

$$I_B = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

X ve Y aynı olasılık uzayında tanımlı iki tesadüfi değişken olmak üzere X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri koşullu beklenen değer ifadesi yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilebilir,

$$EX = EE\{X|Y\}$$

(Ω, F, P) olasılık uzayının bir parçalanışı $H_1, H_2, \dots$ olsun. Buna göre bu uzayda tanımlı bir X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri şu şekilde yazılabilir,

$$EX = \sum_{j=1}^{\infty} E\{X|H_j\} Pr\{H_j\}$$

Bu formül tam beklenen değer formülü olarak da adlandırılır.

2.1.3. Üreten Fonksiyon

Üreten fonksiyonlar matematiksel ve istatistiksel teoremin birçok alanında önemli bir yöntem olarak sıkça kullanılmaktadır. Üreten fonksiyon yöntemi özellikle olasılık teorisinin Markov zincirleri, tesadüfi yürüyüş, dallanan süreçler ve stokastik servis sistemleri gibi çeşitli alanlarında başarıyla uygulanmaktadır.

$a_0, a_1, \dots$ reel sayı dizisi olmak üzere

$$a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

Kuvvet serisi $(-L, L)$ aralığında yakınsak ise $a(s)$ fonksiyonuna (a_n) dizisinin üreten fonksiyonu denir. Şayet (a_n) dizisi sınırlı ise üreten fonksiyon en az bir $|x| < 1$ için yakınsaktır.

$a(s)$ ve $b(s)$ sırasıyla (a_n) ve (b_n) dizilerinin üreten fonksiyonları olsun. $a_n * b_n$ konvolüsyonunun üreten fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} a_n * b_n &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) s^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) s^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} s^{n-k} \\ &= a(s) b(s) \end{aligned}$$

(Ω, F, P) olasılık uzayı olsun. Bu uzayda alınan bir X tesadüfi değişkeninin üreten fonksiyonu,

$$g_X(s) = E s^X = \int_{-\infty}^{\infty} s^x dF_X(x)$$

beklenen değeri ile tanımlanır.

Şimdi üreten fonksiyonlar için önemli olan Abel ve Tauber teoremlerini ifade edelim,

Abel Teoremi: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ limiti mevcut ise aşağıdaki limit geçerlidir,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Tauber Teoremi: Eğer,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = b$$

limiti mevcut ve (a_n) dizisi, $a_n - a_{n-1} = o(1/n)$, $n \rightarrow \infty$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda aşağıdaki limit mevcuttur,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

Abel teoreminin bir uygulamasını aşağıdaki stokastik matris üzerinde gösterelim,

$$P = \begin{bmatrix} u & 1-u \\ 1-v & v \end{bmatrix}$$

Bu stokastik matrisin kuvvetlerinden oluşan $P^n, n \geq 0$ dizinin üreten fonksiyonunu bulalım,

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P^n s^n \\ &= (I - sP)^{-1}, \quad 0 < s < 1 \end{aligned}$$

Bu durumda $(I - sP)$ matrisinin tersini hesaplamalıyız. Matrisin determinanı,

$$\begin{aligned} \det(I - sP) &= (1 - us)(1 - vs) - (1 - u)s(1 - v)s \\ &= (1 - s)(1 + s) - (1 - s)vs - (1 - s)us \\ &= (1 - s)(1 + (1 - u - v)s) \end{aligned}$$

olduğundan $(I - sP)$ matrisinin tersi aşağıdaki şekilde olur,

$$P(s) = \frac{1}{(1 - s)(1 + (1 - u - v)s)} \begin{bmatrix} 1 - vs & (1 - u)s \\ (1 - v)s & 1 - us \end{bmatrix}$$

Buradan ve Abel teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilecektir,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n &= \lim_{s \rightarrow 1} (1 - s)P(s) \\ &= \frac{1}{2 - u - v} \begin{bmatrix} 1 - v & 1 - u \\ 1 - v & 1 - u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2. Stokastik Süreçler ve Önemli Karakteristikleri

Stokastik süreçler teorisi yirminci yüzyılın başlarından itibaren William Feller, Andrey N. Kolmogorov, David G. Kendall, Boris Vladimirovich Gnedenko, Anatoly V. Skorokhot gibi araştırmacılar tarafından incelenerek geliştirilmiştir. Stokastik süreç aynı olasılık uzayında tanımlı tesadüfi değişkenlerin bir dizisi olup $\{X_n; n \geq 0\}$ şeklinde ifade edilir. Burada bulunan n ile gösterilen dizinin indisine stokastik sürecin parametresi denir. Stokastik süreçler temel olarak parametresinin sürekli veya kesikli olmasına göre iki temel gruba ayrılmaktadır. Stokastik süreçlerin önemli karakteristiklerinin başında sürecin ortalaması ve kovaryansı gelmektedir. Bazı stokastik süreçler parametreden bağımsız ortak bir ortalamaya sahip olurken bazıları bu özelliği sağlayamamaktadır. Yine aynı şekilde bazı stokastik süreçlerin kovaryans fonksiyonu parametrelerden bağımsız olup sadece parametreler arası farka göre değer almaktadır. Bu iki özellik, sürecin ortak bir beklenen değere

sahip olması ve kovaryans fonksiyonunun parametrelerin farkına bağlı olarak değer alması, stokastik süreçler içerisinde önemli bir sınıfın oluşmasına neden olmuştur. Bir stokastik sürecin ortalaması,

$$\mu_n EX_n, n \geq 0$$

kovaryans fonksiyonu $n, m \geq 0$ olmak üzere

$$r(n, m) = cov(X_n, X_m)$$

ve çarpım momenti

$$R(n, m) = EX_n X_m$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Buradan aşağıdaki eşitlik yazılır,

$$r(n, m) = R(n, m) - \mu_n \mu_m$$

$r(n, m) = r(n - m)$ ve $R(n, m) = R(n - m)$ olması bir stokastik süreç için ayırt edici bir özelliktir.

2.3. Markov Zincirleri

AndreyAndreyevich Markov 1856-1922 yılları arasında yaşamış olan önemli bir araştırmacı ve bilim adamıdır. Markov $\{X_n: n \geq 0\}$ stokastik sürecinde herhangi bir adımda sürecin durumunun belirlenmesi şartıyla sürecin belli olan bu durumdan sonraki ve önceki durumlarının birbirinden bağımsız olduğunu kabul ederek stokastik süreçler içerisinde Markov zincirleri olarak adlandırılan yeni bir sınıf oluşturmuştur. Markov özelliği olarak da adlandırılan bu özellik aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir,

$$Pr\{X_{n+1}|X_0, \dots, X_{n-1}, X_n\} = Pr\{X_{n+1}|X_n\}$$

Bu özellikten dolayı süreç $Pr\{X_{n+1}|X_n\}$ şartlı geçiş olasılıkları ile tanımlanabilmektedir. Markov zincirinin bir adım şartlı geçiş olasılıkları ile oluşturulan matrise bir adım geçiş matrisi denilerek şu şekilde ifade edilir,

$$P = [Pr\{X_{n+1} = j|X_n = i\}] = [p_{ij}]$$

Burada i, j zincirin durumlarını göstermektedir.

Markov zincirleri durumlarına göre de sınıflandırılmaktadır. Markov zincirlerinin durumları temel olarak dönüşümlü (recurrent) ve geçişli (transient) olarak iki ana gruba ayrılmaktadır. Markov zincirinin dönüşümlü durumlarında zincir sürekli bir hareket içerisinde. Dönüşümlü bir durumda tekrar tekrar değer alabilir. Ancak zincirin geçişli bir durumu için bu söz konusu değildir. Zincir geçişli bir durumdan çıktıktan sonra bir daha bu duruma geri dönemez.

Benzer şekilde bazı durumlarda kalma olasılığı bir olabilir. Bu gibi durumlarda zincir bu durumdan başka bir duruma çıkamamaktadır. Bu gibi durumlara ise yutucu durumlar denir. Zincirin yutucu durumdan çıkış olasılığı sıfır olacağından Markov zinciri bu durumda hapsolür.

2.3.1. İki Durumlu Markov Zinciri

$\{X_n: n \geq 0\}$ kesikli parametrelili Markov zincirinin durum uzayı $D = \{0, 1\}$ olsun. Bu durumda Markov zincirine iki durumlu markov zinciri denir. İki durumlu Markov zincirinin geçiş olasılıkları şu şekilde yazılabilir,

$$Pr\{X_{n+1} = 0|X_n = 0\} = p_{00} = 1 - p$$

$$Pr\{X_{n+1} = 1|X_n = 0\} = p_{01} = p$$

$$Pr\{X_{n+1} = 0|X_n = 1\} = p_{10} = q$$

$$Pr\{X_{n+1} = 1|X_n = 1\} = p_{11} = 1 - q$$

Buna göre Markov zincirinin bir adım geçiş matrisi aşağıdaki şekilde olur,

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Zincirin başlangıç dağılımı X_0 tesadüfi değişkeninin olasılık dağılımı olup aşağıdaki şekilde alınsın,

$$Pr\{X_0 = 0\} = \pi_0(0)$$

$$Pr\{X_0 = 1\} = \pi_0(1)$$

Buna göre başlangıç dağılım vektörü şu şekilde olur,

$$\Pi_0 = (\pi_0(0), \pi_0(1))$$

Başlangıç dağılımını ve Markov zincirinin bir adım geçiş matrisini kullanarak X_1 tesadüfi değişkeninin dağılımını hesaplayabiliriz. Bunun için tam olasılık formülünü aşağıdaki şekilde kullanmalıyız,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 = 0\} &= Pr\{X_1 = 0, (X_0 = 0 \text{ veya } X_0 = 1)\} \\
&= Pr\{X_1 = 0 | X_0 = 0\}Pr\{X_0 = 0\} + Pr\{X_1 = 0 | X_0 = 1\}Pr\{X_0 = 1\} \\
&= (1 - p)\pi_0(0) + q\pi_0(1) \\
&= (1 - p)\pi_0(0) + q(1 - \pi_0(0)) \\
&= (1 - p - q)\pi_0(0) + q
\end{aligned}$$

Benzer işlemleri X_2 tesadüfi değişkeni için uygularsak aşağıdaki olasılığı elde ederiz,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_2 = 0\} &= Pr\{X_2 = 0 | X_1 = 0\}Pr\{X_1 = 0\} + Pr\{X_2 = 0 | X_1 = 1\}Pr\{X_1 = 1\} \\
&= (1 - p)Pr\{X_1 = 0\} + q(1 - Pr\{X_1 = 0\}) \\
&= (1 - p - q)Pr\{X_1 = 0\} + q \\
&= (1 - p - q)[(1 - p - q)\pi_0(0) + q] + q \\
&= (1 - p - q)^2\pi_0(0) + q + q((1 - p - q))
\end{aligned}$$

Genel olarak X_n tesadüfi değişkeninin olasılıklarını benzer şekilde aşağıdaki gibi bulabiliriz,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_n = 0\} &= (1 - p - q)^n\pi_0(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1 - p - q)^j \\
&= (1 - p - q)^n\pi_0(0) + q \frac{1 - (1 - p - q)^n}{p + q} \\
&= \frac{q}{p + q} + (1 - p - q)^n[\pi_0(0) - \frac{q}{p + q}] \\
Pr\{X_n = 1\} &= \frac{p}{p + q} + (1 - p - q)^n[\pi_0(1) - \frac{p}{p + q}]
\end{aligned}$$

Elde edilen bu son iki eşitlik yardımıyla iki durumlu Markov zincirinin limit dağılımını şu şekilde yazabiliriz, $|1 - p - q| < 1$ şartı altında,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\{X_n = 0\} &= \frac{q}{p + q} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\{X_n = 1\} &= \frac{p}{p + q}
\end{aligned}$$

İki durumlu Markov zinciri bulunan X_n tesadüfi değişkeninin dağılımından da görüleceği gibi ortak bir beklenen değere sahip değildir. Ancak $n \rightarrow \infty$ limit konumunda sürecin beklenen değeri parametreden bağımsız olacaktır,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \frac{p}{p+q}$$

$Pr\{X_n = 0\}$ ve $Pr\{X_n = 1\}$ olasılıklarına dikkat edilecek olursa parametreye bağılı olan $(1 - p - q)^n$ teriminin ortadan kaldırılabilmesi için başlangıç dağılımının

$$\pi_0(0) = \frac{q}{p+q}$$

$$\pi_0(1) = \frac{p}{p+q}$$

şeklinde alınmasının yeterli olacağı görülür. Seçilen bu başlangıç dağılımı aynı zamanda sürecin durağan dağılımıdır.

İki durumlu Markov zincirinde X_0, X_1, X_2 tesadüfi değişkenlerinin ortak dağılım tablosunu aşağıdaki şekilde elde edebiliriz,

Tablo 2.1: İki durumlu Markov zincirinin üç boyutlu dağılımı

X_0	X_1	X_2	$Pr\{X_0, X_1, X_2\}$
0	0	0	$\pi_0(0)(1-p)^2$
0	0	1	$\pi_0(0)(1-p)p$
0	1	0	$\pi_0(0)pq$
0	1	1	$\pi_0(0)p(1-q)$
1	0	0	$(1-\pi_0(0))q(1-p)$
1	0	1	$(1-\pi_0(0))qp$
1	1	0	$(1-\pi_0(0))(1-q)q$
1	1	1	$(1-\pi_0(0))(1-q)^2$

3. BULGULAR

3.1. İki Sıralı Markov Zincirleri

Markov zincirleri hiç şüphe yoktur ki stokastik süreçler teorisinin içerisinde önemli bir sınıfa oluşturmaktadır. Gerek teorik yapısı gerekse uygulama alanları olsun bu konunun modern bilimsel teoriye getirdiği yenilikler oldukça fazladır. Markov zincirlerinin uygulama alanı oldukça geniş bir saha oluşturmaktadır. Markov özelliği gerçek hayatta karşılaşılan birçok uygulama sahasında başarıyla kullanılmaktadır. Ancak gerçek hayattaki bazı problemlerde Markov özelliğinin yetersiz kalabildiğini görebilmekteyiz. Şöyle ki, bir stokastik süreç gözlenirken belli bir andaki durumu sabit olarak belirlendiğinde sürecin bu adımdan sonraki durumunun bu adımdan önceki durumlarından bağımsız olması genellikle toplam şeklinde artarak her adımda çoğalan süreçler için yeterli ve kullanışlı olmaktadır. Ancak bazı stokastik süreçler incelenirken herhangi bir andaki tek bir gözlemin belli olması sürecin bundan sonraki durumunun bundan önceki durumlarından bağımsız olmasını gerektirmemektedir. Buna karşılık ilişki oldukça zayıf olabildiğinden bağımlı olmasını da gerektirmemektedir. Bu durumda ya bağımlılık yapısı göz ardı edilecek ve sürecin Markov zinciri özelliğini sağladığı kabul edilecek ya da bağımlılık göz ardı edilmeyip sürecin Markov zinciri olmadığı kabul edilecektir.

Bu aşamada incelenen sürecin gözlem anından sonraki alabileceği durumları ile gözlem anından önceki durumlarının bağımsız olması için gözlem değerlerinin artırılması yöntemi uygun olabilmektedir. Buna göre iki sıralı Markov zinciri tanımını aşağıdaki şekilde yapabiliriz,

$\{X_n: n \geq 0\}$ stokastik süreci (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlı kesikli parametrelili bir stokastik süreç olsun. Bu süreç

$$Pr\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\} = Pr\{X_{n+1} = j | X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\}$$

Özelliğini sağladığı takdirde iki sıralı Markov zinciri denir. Burada $j, i_0, \dots, i_{n-1}, i_n$ sürecin durumlarını göstermektedir.

Benzer olarak bu tanım üç ve daha yüksek sıralı adımlar için yapılabilir. Ancak sıra sayısının artması sürecin önemli özelliklerinin yitirilmesini sağlayacağından süreç için olumlu bir durum olmamaktadır.

3.2. İki Durumlu İki Sıralı Markov Zinciri

(Ω, F, P) olasılık uzayı olsun. Bu uzayda tanımlı kesikli parametrelili $\{X_n: n \geq 0\}$ iki sıralı Markov zincirinin durum uzayı $D = \{0, 1\}$ ise bu zincire iki durumlu iki sıralı Markov zinciri denir. Bu durumda iki sıralı Markov zincirinin mevcut durumları ve geçebileceği mevcut durumlarını aşağıdaki Tablo ile belirtelim,

Tablo 3.1: X_{n-1}, X_n, X_{n+1} ardışık değişkenlerinin iki durum için mümkün halleri

Sıra No:	$X_{n-1} = i$	$X_n = j$	$X_{n+1} = k$	p_{ijk}	$Pr\{X_{n+1} = k X_{n-1} = i, X_n = j\}$
1	0	0	0	p_{000}	$Pr\{X_{n+1} = 0 X_{n-1} = 0, X_n = 0\}$
2	0	0	1	p_{001}	$Pr\{X_{n+1} = 1 X_{n-1} = 0, X_n = 0\}$
3	0	1	0	p_{010}	$Pr\{X_{n+1} = 0 X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$
4	0	1	1	p_{011}	$Pr\{X_{n+1} = 1 X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$
5	1	0	0	p_{100}	$Pr\{X_{n+1} = 0 X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$
6	1	0	1	p_{101}	$Pr\{X_{n+1} = 1 X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$
7	1	1	0	p_{110}	$Pr\{X_{n+1} = 0 X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$
8	1	1	1	p_{111}	$Pr\{X_{n+1} = 1 X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$

Tabloda belirtilen mümkün durumlar ve geçişler göz önüne alındığında iki sıralı Markov zincirinin bir adım geçiş olasılıklarından oluşan bir adım geçiş matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulacaktır,

$$P = \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

3.2.1. Zincirin Dağılımının Belirlenmesi

İki durumlu ve iki sıralı Markov zincirinin başlangıç dağılımı belirlendikten sonra, bir adım geçiş matrisi ve başlangıç dağılımı yardımıyla dağılımının belirlenmesi zincirin analiz edilebilmesi için oldukça önemlidir. Bu işlem Markov zincirlerinde olduğu gibi sadece X_0 değişkeninin dağılımının belirlenmesiyle mümkün olmamaktadır. İki sıralı Markov zincirlerinde dağılımın belirlenebilmesi için başlangıç dağılımı olarak X_0 ve X_1 değişkenlerinin ortak dağılımın bilinmesi gerekmektedir. Buna göre X_0 ve X_1 değişkenlerinin ortak dağılımını aşağıdaki şekilde alalım,

$$\Pi_{01} = (\pi_{01}(0,0), \pi_{01}(0,1), \pi_{01}(1,0), \pi_{01}(1,1))$$

Burada

$$\pi_{01}(i, j) = Pr\{X_0 = i, X_1 = j\}$$

iki boyutlu olasılıklar şeklinde tanımlıdır.

Yukarıda bulunan dağılım vektörü X_0 ve X_1 değişkenlerinin ortak dağılımı olup bunun yardımıyla X_2 değişkeninin dağılımını belirleyelim, bunun için ilk önce $X_2 = 0$ olasılığını aşağıdaki şekilde tam olasılık formülünü kullanarak bulalım,

$$\begin{aligned} Pr\{X_2 = 0\} &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_2 = 0, X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_2 = 0 | X_0 = i, X_1 = j\} Pr\{X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} p_{ij0} Pr\{X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= p_{000} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 0\} + p_{010} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} + \\ &\quad + p_{100} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0\} + p_{110} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1\} \\ &= \pi_{01}(0,0)p_{000} + \pi_{01}(0,1)p_{010} + \pi_{01}(1,0)p_{100} + \pi_{01}(1,1)p_{110} \end{aligned}$$

Aynı yöntemle $X_2 = 1$ olasılığını aşağıdaki şekilde tam olasılık formülünü kullanarak bulalım,

$$\begin{aligned} Pr\{X_2 = 1\} &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_2 = 1, X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_2 = 1 | X_0 = i, X_1 = j\} Pr\{X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} p_{ij1} Pr\{X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= p_{001} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 0\} + p_{011} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} + \\ &\quad + p_{101} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0\} + p_{111} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1\} \\ &= \pi_{01}(0,0)p_{001} + \pi_{01}(0,1)p_{011} + \pi_{01}(1,0)p_{101} + \pi_{01}(1,1)p_{111} \end{aligned}$$

Bulunan her iki eşitlik birlikte X_2 değişkeninin dağılım vektörünü oluşturmak için kullanılacak olursa X_2 değişkeninin dağılım vektörü,

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= (Pr\{X_2 = 0\}, Pr\{X_2 = 1\}) \\ &= (\pi_2(0), \pi_2(1))\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\Pi_2 = (\pi_{01}(0,0), \pi_{01}(0,1), \pi_{01}(1,0), \pi_{01}(1,1)) \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \Pi_{01}P$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi X_3 değişkeninin dağılımını belirlemeye çalışalım. Bunun için yine iki sıralı Markov zincirinin bir adım geçiş matrisini ve X_1 ile X_2 değişkenlerinin ortak dağılımını kullanmalıyız. $X_3 = 0$ ve $X_3 = 1$ olaylarının olasılıklarını tam olasılık formülünü kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\begin{aligned}Pr\{X_3 = 0\} &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_3 = 0, X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_3 = 0 | X_1 = i, X_2 = j\} Pr\{X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} p_{ij0} Pr\{X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= p_{000} Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} + p_{010} Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + \\ &\quad + p_{100} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\} + p_{110} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \\ &= \pi_{12}(0,0)p_{000} + \pi_{12}(0,1)p_{010} + \pi_{12}(1,0)p_{100} + \pi_{12}(1,1)p_{110}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Pr\{X_3 = 1\} &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_3 = 1, X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} Pr\{X_3 = 1 | X_1 = i, X_2 = j\} Pr\{X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= \sum_{i,j \in D} p_{ij1} Pr\{X_1 = i, X_2 = j\} \\ &= p_{001} Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} + p_{011} Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + \\ &\quad + p_{101} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\} + p_{111} Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\}\end{aligned}$$

$$= \pi_{12}(0,0)p_{001} + \pi_{12}(0,1)p_{011} + \pi_{12}(1,0)p_{101} + \pi_{12}(1,1)p_{111}$$

X_3 değişkeninin dağılım vektörü,

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= (Pr\{X_3 = 0\}, Pr\{X_3 = 1\}) \\ &= (\pi_3(0), \pi_3(1))\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\Pi_3 = (\pi_{12}(0,0), \pi_{12}(0,1), \pi_{12}(1,0), \pi_{12}(1,1)) \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_3 = \Pi_{12}P$$

şeklinde elde edilir.

X_2 ve X_3 değişkenlerinin dağılım vektörleri arasında bir bağıntı kurulmak istenirse X_0 ve X_1 değişkenlerinin ortak dağılım vektörü olan Π_{01} vektörü ile X_1 ve X_2 değişkenlerinin ortak dağılım vektörü olan Π_{12} vektörü arasında bir bağıntı kurulmalıdır. Bunun için aşağıdaki ortak olasılıkları dikkate alalım,

$$\begin{aligned}Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} &= Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0, (X_0 = 0 \text{ veya } X_0 = 1)\} \\ &= Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_0 = 0\} + Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_0 = 1\} \\ &= Pr\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 0\}Pr\{X_0 = 0, X_1 = 0\} + \\ &\quad + Pr\{X_2 = 0 | X_0 = 1, X_1 = 0\}Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0\} \\ &= \pi_{01}(0,0)p_{000} + \pi_{01}(1,0)p_{100}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\} &= Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1, (X_0 = 0 \text{ veya } X_0 = 1)\} \\ &= Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1, X_0 = 0\} + Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1, X_0 = 1\} \\ &= Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 0, X_1 = 0\}Pr\{X_0 = 0, X_1 = 0\} + \\ &\quad + Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 1, X_1 = 0\}Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0\} \\ &= \pi_{01}(0,0)p_{001} + \pi_{01}(1,0)p_{101}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\} &= Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0, (X_0 = 0 \text{ veya } X_0 = 1)\} \\
&= Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_0 = 0\} + Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_0 = 1\} \\
&= Pr\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} + \\
&\quad + Pr\{X_2 = 0 | X_0 = 1, X_1 = 1\} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1\} \\
&= \pi_{01}(0,1)p_{010} + \pi_{01}(1,1)p_{110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\} &= Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, (X_0 = 0 \text{ veya } X_0 = 1)\} \\
&= Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_0 = 0\} + Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_0 = 1\} \\
&= Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 0, X_1 = 1\} Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1\} + \\
&\quad + Pr\{X_2 = 1 | X_0 = 1, X_1 = 1\} Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1\} \\
&= \pi_{01}(0,1)p_{011} + \pi_{01}(1,1)p_{111}
\end{aligned}$$

Burada ilk olarak $\prod_{12}$ dağılım vektörünün bileşenlerini yukarıdaki işlemler sonucunda

$$Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = \pi_{12}(0,0) = \pi_{01}(0,0)p_{000} + \pi_{01}(1,0)p_{100}$$

$$Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = \pi_{12}(0,1) = \pi_{01}(0,0)p_{001} + \pi_{01}(1,0)p_{101}$$

$$Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \pi_{12}(1,0) = \pi_{01}(0,1)p_{010} + \pi_{01}(1,1)p_{110}$$

$$Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \pi_{12}(1,1) = \pi_{01}(0,1)p_{011} + \pi_{01}(1,1)p_{111}$$

şeklinde elde etmiştik. Her bir bileşende sağ tarafta olan toplamların elde edilebilmesi için aşağıdaki matrisleri tanımlayalım,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanımlanan bu matrisler yardımıyla $Pr\{X_1 = 0, X_2 = 0\}$ ve $Pr\{X_1 = 0, X_2 = 1\}$ olasılıklarının bir vektörünü aşağıdaki çarpım şeklinde bulabiliriz,

$$(\pi_{12}(0,0), \pi_{12}(0,1)) = (\pi_{01}(0,0), \pi_{01}(0,1), \pi_{01}(1,0), \pi_{01}(1,1))E_1P$$

Aynı şekilde $Pr\{X_1 = 1, X_2 = 0\}$ ve $Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1\}$ olasılıklarının bir vektörünü ise aşağıdaki çarpım şeklinde bulabiliriz,

$$(\pi_{12}(1,0), \pi_{12}(1,1)) = (\pi_{01}(0,0), \pi_{01}(0,1), \pi_{01}(1,0), \pi_{01}(1,1))E_2P$$

Elde edilen bu iki vektörü ise aşağıdaki işlem yardımıyla birleştirebiliriz,

$$(\pi_{12}(0,0), \pi_{12}(0,1), \pi_{12}(1,0), \pi_{12}(1,1)) = \Pi_{01}E_1Pe_1 + \Pi_{01}E_2Pe_2$$

$$\Pi_{12} = \Pi_{01}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)$$

Bulunan bu son eşitlik Π_{12} ve Π_{01} dağılım vektörleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu eşitlik Π_3 dağılım vektöründe yerine yazılacak olursa aşağıdaki önemli sonucu elde etmiş oluruz,

$$\Pi_3 = \Pi_{12}P$$

$$\Pi_3 = \Pi_{01}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)P$$

Aynı hesaplamalar bir kez daha tekrarlandığında,

$$\Pi_4 = \Pi_{23}P$$

$$\Pi_{23} = \Pi_{12}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)$$

$$= \Pi_{01}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)^2$$

$$\Pi_4 = \Pi_{01}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)^2P$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, iki sıralı Markov zincirinde X_n tesadüfi değişkeninin dağılım vektörü aşağıdaki formda elde edilir,

$$\Pi_n = \Pi_{01}(E_1Pe_1 + E_2Pe_2)^{n-2}P$$

Burada Π_{01} iki durumlu ve iki sıralı Markov zincirinin başlangıç dağılımıdır. Bu sonuç X_n tesadüfi değişkeninin dağılım vektörünün başlangıç dağılımı ve bir adım geçiş matrisi türünden ifadesini göstermektedir.

3.2.2. Zincirin Üç Boyutlu Dağılımı

$\{X_n: n \geq 0\}$ kesikli parametrelili iki durumlu ve iki sıralı Markov zincirinin ardışık X_{n-1}, X_n, X_{n+1} üç tane tesadüfî değişkeninin ortak olasılık dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{n+1} = k, X_n = j, X_{n-1} = i\} &= Pr\{X_{n+1} = k | X_{n-1} = i, X_n = j\} Pr\{X_{n-1} = i, X_n = j\} \\ &= p_{ijk} \pi_{n-1,n}(i, j) \end{aligned}$$

Tablo 3.2: X_{n-1}, X_n, X_{n+1} Değişkenlerinin üç boyutlu dağılımı

$X_{n-1} = i$	$X_n = j$	$X_{n+1} = k$	$Pr\{X_{n-1} = i, X_n = j, X_{n+1} = k\}$
0	0	0	$\pi_{n-1,n}(0,0)p_{000}$
0	0	1	$\pi_{n-1,n}(1,0)p_{100}$
0	1	0	$\pi_{n-1,n}(0,1)p_{010}$
0	1	1	$\pi_{n-1,n}(1,1)p_{110}$
1	0	0	$\pi_{n-1,n}(0,0)p_{001}$
1	0	1	$\pi_{n-1,n}(1,0)p_{101}$
1	1	0	$\pi_{n-1,n}(0,1)p_{011}$
1	1	1	$\pi_{n-1,n}(1,1)p_{111}$

3.2.3. Zincirin Dört Boyutlu Dağılımı

$\{X_n: n \geq 0\}$ kesikli parametrelili iki durumlu ve iki sıralı Markov zincirinin ardışık $X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$ dört tane tesadüfî değişkeninin ortak olasılık dağılımı aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{n+2} = l, X_{n+1} = k, X_n = j, X_{n-1} = i\} &= \\ &= Pr\{X_{n+2} = l | X_n = j, X_{n+1} = k\} Pr\{X_{n+1} = k | X_n = j, X_{n-1} = i\} Pr\{X_{n-1} = i, X_n = j\} \\ &= p_{jkl} p_{ijk} \pi_{n-1,n}(i, j) \end{aligned}$$

İki durumlu zincirin bir adım geçiş matrisini aşağıdaki formatta seçelim. Bu durumda yukarıda hesaplanan dörtlü olasılıkların oluşturduğu tabloyu aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz,

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & 1 - u_1 \\ u_2 & 1 - u_2 \\ u_3 & 1 - u_3 \\ u_4 & 1 - u_4 \end{bmatrix}$$

Tablo 3.3: $X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$ Değişkenlerinin dört boyutlu dağılımı

$X_{n-1} = i$	$X_n = j$	$X_{n+1} = k$	$X_{n+2} = l$	$Pr\{X_{n-1} = i, X_n = j, X_{n+1} = k, X_{n+2} = l\}$
0	0	0	0	$\pi_{n-1,n}(0,0)u_1^2$
0	0	0	1	$\pi_{n-1,n}(0,0)u_1(1-u_1)$
0	0	1	0	$\pi_{n-1,n}(0,0)(1-u_1)u_2$
0	1	0	0	$\pi_{n-1,n}(0,1)u_2u_3$
1	0	0	0	$\pi_{n-1,n}(1,0)u_3u_1$
1	1	0	0	$\pi_{n-1,n}(1,1)u_4u_3$
0	1	1	0	$\pi_{n-1,n}(0,1)(1-u_2)u_4$
0	0	1	1	$\pi_{n-1,n}(0,0)(1-u_1)(1-u_2)$
1	0	1	0	$\pi_{n-1,n}(1,0)(1-u_3)u_2$
1	0	0	1	$\pi_{n-1,n}(1,0)u_3(1-u_1)$
0	1	0	1	$\pi_{n-1,n}(0,1)u_2(1-u_3)$
0	1	1	1	$\pi_{n-1,n}(0,1)(1-u_2)(1-u_4)$
1	0	1	1	$\pi_{n-1,n}(1,0)(1-u_3)(1-u_2)$
1	1	0	1	$\pi_{n-1,n}(1,1)u_4(1-u_3)$
1	1	1	0	$\pi_{n-1,n}(1,1)(1-u_4)u_4$
1	1	1	1	$\pi_{n-1,n}(1,1)(1-u_4)^2$

3.2.4. Zincirin Durumları Arasındaki Geçiş

Durum uzayı $D = \{0,1\}$ olan iki sıralı Markov zincirinin durumları arasındaki geçişleri ve olasılıkları gösterebilmek için zincirin mevcut durumlarını ilk önce belirlemeliyiz. Markov zinciri iki sıralı olduğundan zincirin mevcut durumu ardışık iki tesadüfi değişkene bağlı olacaktır. Bundan dolayı durum uzayı $D = \{0,1\}$ olan bir zincirin mevcut durumu dört farklı şekilde olur. Bunlar aşağıdaki durumlardır,

$$A_{00} = \{X_{n-1} = 0, X_n = 0\}$$

$$A_{01} = \{X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$$

$$A_{10} = \{X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$$

$$A_{11} = \{X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$$

Varsayalım ki gözlenen zincir A_{00} durumunda olsun. Bu durumda bulunan zincir bir sonraki adımda “0” veya “1” durumuna geçebilir. A_{00} durumundan bir sonraki adımda “0” durumuna geçen

zincir, zincirin iki sıralı olma özelliğinden, tekrar A_{00} durumuna dönmüş olacaktır. A_{00} durumundan bir sonraki adımda “1” durumuna geçen zincir yine zincirin iki sıralı olduğu dikkate alındığında A_{01} durumuna geçtiği gözlemlenecektir. Bu durumda A_{00} mevcut durumunda bulunan zincir bir sonraki adımda ya A_{00} durumunda bulunacak ya da A_{01} durumuna geçiş yapacaktır.

Aynı şekilde zincirin mevcut durumunu A_{01} olarak kabul edelim. Zincir bu durumdan yine “0” veya “1” durumlarından birisine geçiş yapabilir. Eğer “0” durumuna geçiş yaparsa zincirin bir sonraki adımda bulunacağı konumu A_{10} olacaktır. “0” durumuna değil de “1” durumuna geçiş yaptığında zincirin bir sonraki adımda konumu A_{11} olacaktır. Bu durumda da A_{01} konumunda bulunan zincir bir sonraki adımda A_{10} veya A_{11} konumlarından birisinde olur.

Zincirin A_{10} mevcut durumunda olduğunu kabul edelim. Zincir bu durumundan bir sonraki adımda “0” durumun geçerse A_{00} durumuna, “1” durumuna geçiş yaparsa A_{01} durumuna geçmiş olur. Böylelikle A_{10} durumunda olan bir zincir bir sonraki adımda A_{00} veya A_{01} durumlarından birisine geçiş yapabilir.

Son olarak zincirin A_{11} durumunda olduğunu varsayalım. Zinciri oluşturan bir sonraki tesadüfi değişken “0” değerini aldığımda zincirin konumu A_{10} olur. Aynı tesadüfi değişken “1” değerini aldığımda ise zincirin konumu A_{11} olacaktır. Bu durumda da zincir A_{11} durumundan ya A_{10} durumuna geçer ya da A_{11} durumunda kalır.

Bu durumlar göz önüne alındığında iki durumlu olan iki sıralı Markov zincirinin durumları arasındaki geçişler dört durum söz konusu olduğundan dört durumlu bir tek sıralı Markov zincirinin geçiş olasılıkları ile temsil edilebilir. Buna göre mümkün olan geçişler ve olasılıkları aşağıdaki tablodaki gibi olacaktır,

Tablo 3.4: Zincirin durumlar arası mümkün geçişleri ve olasılıkları

Durumlar	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	p_{000}	p_{001}	0	0
A_{01}	0	0	p_{010}	p_{011}
A_{10}	p_{100}	p_{101}	0	0
A_{11}	0	0	p_{110}	p_{111}

Buna göre bir adım geçiş matrisi aşağıdaki şekilde oluşturulur,

$$P = \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

Oluşturulan bu matris

$$E_1 P e_1 + E_2 P e_2 = \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden de elde edilecektir.

3.2.5.Zincirin Durağan Dağılımı

İki sıralı ve iki durumlu Markov zincirinin durağan dağılımını bulmak için

$$\Pi P = \Pi$$

denklemini çözmeliyiz. Burada Π dört boyutlu dağılım vektörüdür. Bu denklemi çözmek için kolaylık açısından bir adım geçiş matrisini aşağıdaki şekilde alalım,

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & 1 - u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 1 - u_2 \\ u_3 & 1 - u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 1 - u_4 \end{bmatrix}$$

Bu durumda çözülmesi gereken denklem sistemi şu şekilde elde edilecektir,

$$\pi(0,0)u_1 + \pi(1,0)u_3 = \pi(0,0)$$

$$\pi(0,0)(1 - u_1) + \pi(1,0)(1 - u_3) = \pi(0,1)$$

$$\pi(0,1)u_2 + \pi(1,1)u_4 = \pi(1,0)$$

$$\pi(0,1)(1 - u_2) + \pi(1,1)(1 - u_4) = \pi(1,1)$$

$$\pi(0,0) + \pi(0,1) + \pi(1,0) + \pi(1,1) = 1$$

Bu denklem sisteminin çözümünden aşağıdaki durağan dağılım elde edilir,

$$\pi(0,0) = \frac{u_3 u_4}{u_3 u_4 + (1 - u_1)(1 - u_2 + 2u_4)}$$

$$\pi(0,1) = \frac{(1 - u_1)u_4}{u_3 u_4 + (1 - u_1)(1 - u_2 + 2u_4)}$$

$$\pi(1,0) = \frac{(1 - u_1)u_4}{u_3 u_4 + (1 - u_1)(1 - u_2 + 2u_4)}$$

$$\pi(1,1) = \frac{(1 - u_1)(1 - u_2)}{u_3u_4 + (1 - u_1)(1 - u_2 + 2u_4)}$$

3.2.6.Yutucu Durumlu Zincir

Stokastik süreçler teorisinde önemli bir inceleme alanına sahip olan yutucu durumların analiz edilmesi reel sistemlerde de sıkça uygulanmaktadır. Yutucu durumların incelenmesi daha çok Markov zincirleri içerisinde daha farklı bir konuma sahiptir. Durumlar arası geçiş olasılıklarının önemli olduğu Markov zincirlerinde yutucu olan bir duruma geçiş olasılığının hesaplanması zincirin devamı için oldukça önemli bir göstergedir.

İki sıralı Markov zincirlerinde yutucu bir durumun tanımlanabilmesi tek sıralı zincirlerden biraz farklıdır. Tek sıralı zincirlerde herhangi bir durumdan çıkma olasılığı sıfır olduğunda bu durumlara yutucu durumlar denilir. Ancak iki sıralı Markov zincirlerinde herhangi bir durumdan çıkma olasılığı ardışık iki adıma başlı olduğundan bu tanımlı kullanmak biraz güçleşecektir. Bundan dolayı iki sıralı bir Markov zincirinde yutucu bir durumun belirlenebilmesi için ardışık iki adımda aynı durumda bulunan zincirin bir sonraki adımda farklı bir duruma geçiş olasılığının sıfır olması gerekmektedir.

Buna göre iki sıralı bir Markov zincirinin herhangi bir "j" durumunun yutucu durum olabilmesi için bir adım geçiş matrisinde $p_{jj} = 1$ olasılığına sahip olması gerekmektedir.

Tanıma göre durum uzayı $D = \{0,1\}$ olan iki durumlu zincirlerde sıfır durumunun yutucu durum olabilmesi için bir adım geçiş matrisi aşağıdaki şekilde olmalıdır,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ p_{110} & p_{111} \end{bmatrix}$$

Yine aynı şekilde bir durumunun yutucu durum olabilmesi için zincirin bir adım geçiş matrisinin aşağıdaki şekilde olması gerekmektedir,

$$P = \begin{bmatrix} p_{000} & p_{001} \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sıfır durumunun yutucu durum olduğu iki durumlu zinciri göz önüne alalım. Zincirin durağan dağılımının aşağıdaki şekilde olacağını biliyoruz,

$$\Pi = \frac{1}{u_3u_4 + (1 - u_1)(1 - u_2 + 2u_4)} (u_3u_4, (1 - u_1)u_4, (1 - u_1)u_4, (1 - u_1)(1 - u_2))$$

Sıfır durumu yutucu durum olarak kabul edildiğinden $p_{000} = u_1 = 1$ olup bu değer durağan dağılımın aşağıdaki şekilde olmasını sağlar,

$$\Pi = \frac{1}{u_3 u_4} (u_3 u_4, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

Bir durumunun yutucu durum olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda $p_{111} = 1$ olacaktır. Bu durumda $1 - u_4 = 1$ ve $u_4 = 0$ olur. Zincirin durağan dağılımı ise aşağıdaki şekilde olur,

$$\Pi = \frac{1}{(1 - u_1)(1 - u_2)} (0, 0, 0, (1 - u_1)(1 - u_2)) = (0, 0, 0, 1)$$

Sonuç olarak iki durumlu ve iki sıralı bir Markov zincirinde sıfır durumu yutucun durum olduğunda zincirin durağan dağılımı,

$$\Pi = (1, 0, 0, 0)$$

ve bir durumu yutucu durum olduğunda zincirin durağan dağılımı,

$$\Pi = (0, 0, 0, 1)$$

şeklinde olur.

İki sıralı ve iki durumlu bir Markov zincirinin sıfır durumu yutucu ise buna eşdeğer olan zincirin A_{00} durumu yutucu olmalıdır. Buna göre zincirin A_{00} durumunda yutulması olasılığı hesaplanabilir. A_{00} durumu yutucu olan bir zincirin bir adım geçiş matrisi şu şekilde olur,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 1 - u_2 \\ u_3 & 1 - u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 1 - u_4 \end{bmatrix}$$

Bu durumda iki sıralı zincirin sıfır durumunda yutulma olasılığı eşdeğer zincirin A_{00} durumunda yutulma olasılığı ile aynı olacaktır. Bir durumundan harekete başlayan iki sıralı bir zincirin sıfır durumunda yutulması olasılığı iki sıralı bir zincir için önemli bir göstergedir. Bunun yanı sıra yutuluncaya kadar geçen adım sayısı ve ortalama süre de zincir için oldukça önemli bir göstergedir. Zincirin yutuluncaya kadar geçen adımlarının sayısını $\uparrow$ ile gösterelim. Bu sayının sonlu olması zincirin yutulma durumunu, sonsuz olması ise zincirin yutulmama durumunu ifade edecektir. Aynı şekilde $\uparrow$ sayısının sonlu olma ihtimali, yutucu durumlu zincirin yutulma olasılığını ve sayısının sonsuz olma olasılığı ise zincirin yutulmama olasılığını gösterir. Buna göre zincirin yutulma olasılığı aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\uparrow = Pr\{\uparrow < \infty\}$$

Burada iki sıralı zincirin iki durumlu olduğu göz önünde bulundurulursa sıfır durumu yutucu olduğunda geriye yutucu olmayan bir durumu kalmaktadır. Bundan dolayı zincirin başlangıç durumunun daima bir durumu olması gerekir. Aksi halde zincir başlangıçta yutucu durumda olmak zorunda kalır. Bu ise zincirin tüm durumlarının sıfır durumu olması demektir.

Şimdi eşdeğer zincirin A_{00} durumunda yutulma olasılığını hesaplayalım. Eşdeğer zincirde yutucu olmayan A_{01}, A_{10}, A_{11} durumları bulunmaktadır. Yutulma olasılığı başlangıç durumuna bağlı olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

$$\dagger_j = Pr\{\dagger < \infty | X_0 = j\}$$

Aynı şekilde A_{01}, A_{10}, A_{11} durumları dikkate alınırsa yutulma olasılıkları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$\dagger_{00} = 1$$

$$\dagger_{01} = Pr\{\dagger < \infty | A_{01}\}$$

$$\dagger_{10} = Pr\{\dagger < \infty | A_{10}\}$$

$$\dagger_{11} = Pr\{\dagger < \infty | A_{11}\}$$

Yutucu olmayan herhangi bir durumdan harekete başlayan zincir yine yutucu olmayan durumlar arasında hareket ederek herhangi bir adımda yutucu duruma düşebilmektedir. Bundan dolayı mümkün olan geçişler göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki olasılıklar elde edilir,

$$\dagger_{00} = 1$$

$$\dagger_{01} = u_2 \dagger_{10} + (1 - u_2) \dagger_{11}$$

$$\dagger_{10} = u_3 + (1 - u_3) \dagger_{01}$$

$$\dagger_{11} = u_4 \dagger_{10} + (1 - u_4) \dagger_{11}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$\dagger_{01} = \dagger_{10} = \dagger_{11} = \begin{cases} 1, & u_3 \neq 0 \\ 0, & u_3 = 0 \end{cases}$$

Benzer olarak iki sıralı ve iki durumlu bir Markov zincirinin bir durumu yutucu ise buna eşdeğer olan zincirin A_{11} durumu yutucu olmalıdır. Buna göre zincirin A_{11} durumunda yutulması olasılığı hesaplanabilir. A_{11} durumu yutucu olan bir zincirin bir adım geçiş matrisi şu şekilde olur,

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & 1 - u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 1 - u_2 \\ u_3 & 1 - u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Buradan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir,

$$\dagger_{11} = 1$$

$$\dagger_{01} = u_2 \dagger_{10} + 1 - u_2$$

$$\dagger_{10} = u_3 \dagger_{00} + (1 - u_3) \dagger_{01}$$

$$\dagger_{00} = u_1 \dagger_{00} + (1 - u_1) \dagger_{01}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden ise aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$\dagger_{01} = \dagger_{10} = \dagger_{11} = \begin{cases} 1, & u_2 \neq 1 \\ 0, & u_2 = 1 \end{cases}$$

3.3.Uygulama

Markov zincirlerinin uygulama alanları oldukça geniştir. Özellikle birbirine bağlı olan ardışık gözlemlerin incelenmesinde başarılı bir şekilde kullanılabilmektedir. Ancak özel olarak bazı uygulama alanlarında bir adım geçiş olasılığının önemi ardışık iki durumun bilinmesi halinde daha artabilmektedir. Bu gibi durumlarda iki sıralı Markov zincirleri rahatlıkla kullanılabilir. Örnek olarak para borsalarındaki fiyat dalgalanmalarını gösterebiliriz. Bu dalgalanmaların bir sonraki adımda iyi bir tahmininin yapılabilmesi ancak mevcut durumun ve mevcut durumdan bir önceki durumun bilinmesi halinde daha sağlıklı olacaktır. Burada uygulama olarak hipotetik üretilmiş iki durumlu bir veri üzerinde iki sıralı bir Markov zincirinin geçiş olasılıklarını hesaplayacağız. Üretilen veri tablo ile aşağıda verilmektedir,

Tablo 3.5: İki sıralı zincir için gözlenen veri

Sıra No:	X_n	Sıra No:	X_n	Sıra No:	X_n
1	0	33	1	65	1
2	0	34	1	66	1
3	0	35	0	67	0
4	0	36	0	68	0
5	1	37	0	69	0
6	1	38	0	70	0
7	1	39	0	71	1
8	1	40	1	72	1
9	0	41	0	73	0
10	1	42	0	74	1
11	0	43	1	75	0
12	1	44	0	76	0
13	1	45	1	77	1
14	1	46	0	78	1
15	1	47	1	79	1
16	0	48	0	80	0
17	1	49	1	81	0
18	0	50	1	82	0
19	0	51	1	83	0
20	0	52	1	84	1
21	0	53	1	85	1
22	1	54	1	86	1
23	1	55	1	87	0
24	1	56	1	88	1
25	1	57	1	89	0
26	1	58	1	90	1
27	1	59	1	91	0
28	0	60	0	92	1
29	0	61	0	93	0
30	0	62	1	94	0
31	0	63	1	95	0
32	0	64	1	96	1

Tablo 3.6: İki sıralı zincir için gözlenen verinin devamı

Sıra No:	X_n	Sıra No:	X_n	Sıra No:	X_n
97	1	129	0	161	1
98	1	130	1	162	1
99	1	131	0	163	0
100	1	132	0	164	0
101	1	133	0	165	0
102	1	134	0	166	0
103	1	135	0	167	0
104	0	136	0	168	0
105	1	137	0	169	0
106	1	138	0	170	0
107	1	139	0	171	0
108	0	140	1	172	1
109	0	141	1	173	1
110	0	142	1	174	1
111	0	143	1	175	0
112	1	144	1	176	1
113	1	145	1	177	1
114	0	146	1	178	0
115	1	147	0	179	0
116	0	148	1	180	0
117	1	149	1	181	1
118	0	150	0	182	1
119	0	151	0	183	0
120	1	152	0	184	0
121	1	153	1	185	1
122	1	154	0	186	1
123	1	155	1	187	0
124	0	156	0	188	0
125	0	157	1	189	1
126	1	158	0	190	1
127	1	159	1	191	1
128	0	160	1	192	1

Üretilen 192 adet veri incelendiğinde ardışık üçlü geçişler göz önüne alınırsa iki sıralı Markov zincirinin mevcut durumlarından sıfır ve bir durumlarına geçiş olasılıkları aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$P = \begin{bmatrix} 0.623 & 0.377 \\ 0.421 & 0.579 \\ 0.500 & 0.500 \\ 0.339 & 0.661 \end{bmatrix}$$

Tabloda ardışık olarak “00” durumundan “0” durumuna geçen 33 adet gözlem ve “1” durumuna geçen 20 adet gözlem bulunmaktadır. Aynı şekilde “01” durumundan “0” durumuna geçen 16 adet gözlem, “1” durumuna geçen 22 adet gözlem, “10” durumundan “0” ve “1” durumuna geçen 19 adet gözlem. “11” durumundan “0” durumuna geçen 21 adet gözlem, “1” durumuna geçen 41 adet gözlem bulunmaktadır.

Hesaplanan bir adım geçiş olasılığına göre zincirin “00” konumundan “0” konumuna geçiş olasılığı 0.623 ve “1” konumuna geçiş olasılığı ise 0.377 olmaktadır. “01” konumundan “0” konumuna geçiş olasılığı 0.421 ve “1” konumuna geçiş olasılığı ise 0.579 olarak hesaplanmıştır. “10” konumundan “0” konumuna ve “1” konumuna geçiş olasılıkları eşit olarak gözlemlenmiştir. “11” konumundan “0” konumuna geçiş olasılığı 0.339 ve “1” konumuna geçiş olasılığı ise 0.661 olarak bulunmuştur. Bu durumda zincir “00” konumundan yüksek olasılıkla yine “0” konumuna geçecektir. “11” konumundan ise yine yüksek olasılıkla “1” konumuna geçecektir. “01” veya “10” konumundan “0” veya “1” konumlarına geçme olasılıkları ise yaklaşık olarak eşit bulunmuştur.

Bu sonuç ardışık olarak iki adımda “00” konumunda bulunan zincirin bir sonraki adımda yine “0” konumunda olmasını ve ardışık olarak iki adımda “1” konumunda bulunan zincirin bir sonraki adımda yine “1” konumunda bulunması olasılığını güçlendirmektedir. Tablodaki gözlemler tek sıralı bir Markov zinciri modeliyle incelenmiş olsaydı sıfır durumundan sıfır veya bir durumuna geçiş olasılığı yaklaşık olarak eşit hesaplanacaktı. Yine aynı şekilde bir durumundan sıfır veya bir durumuna geçiş olasılıkları yaklaşık olarak aynı hesaplanacaktı. Bu durumda bilinen durumla bir sonraki adımın bir bağımlılığı gözlenemeyecekti. Sonuç olarak gözlemlenen verilerin bağımlılığını iki sıralı Markov zinciri yapısı bu örnekte daha gerçekçi şekilde ortaya koyabilmektedir.

Gözlemlenen veriler yardımıyla oluşturulan iki sıralı Markov zincirine eşdeğer olan zincirin bir adım geçiş matrisi ise aşağıdaki şekilde oluşturulur,

$$P = \begin{bmatrix} 0.623 & 0.377 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.421 & 0.579 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.339 & 0.661 \end{bmatrix}$$

Eşdeğer zincirin kuvvetleri sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır,

Tablo 3.7: İki adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 2$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.388129	0.234871	0.158717	0.218283
A_{01}	0.2105	0.2105	0.196281	0.382719
A_{10}	0.3115	0.1885	0.2105	0.2895
A_{11}	0.1695	0.1695	0.224079	0.436921

Tablo 3.8: Üç adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 3$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.321162867	0.225683133	0.172878628	0.280275372
A_{01}	0.229282	0.177499	0.218362241	0.374856759
A_{10}	0.2993145	0.2226855	0.177499	0.300501
A_{11}	0.217638	0.175941	0.219475719	0.386945281

Tablo 3.9: Dört adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 4$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.286523780	0.207517714	0.190025950	0.315932554
A_{01}	0.252023806	0.195620434	0.201803520	0.350552238
A_{10}	0.275222433	0.201591066	0.195620434	0.327566065
A_{11}	0.245326333	0.191787385	0.205245611	0.357640669

Tablo 3.10: Beş adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 5$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.273517290	0.203032440	0.194466094	0.328984175
A_{01}	0.257912591	0.195914735	0.201193411	0.344979261
A_{10}	0.269273793	0.201569074	0.195914735	0.333242396
A_{11}	0.255461111	0.195110833	0.201982676	0.347445378

Tablo 3.11: Altı adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 6$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.267634318	0.200349065	0.197002292	0.335014323
A_{01}	0.261276250	0.197829753	0.199428073	0.341465923
A_{10}	0.265714940	0.199473587	0.197829753	0.336981718
A_{11}	0.260143610	0.197300177	0.199925644	0.342630568

Tablo 3.12: Yedi adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 7$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.267634318	0.200349065	0.197002292	0.335014323
A_{01}	0.261276250	0.197829753	0.199428073	0.341465923
A_{10}	0.265714940	0.199473587	0.197829753	0.336981718
A_{11}	0.260143610	0.197300177	0.199925644	0.342630568

Tablo 3.13: Sekiz adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 8$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.265237327	0.199399284	0.197916812	0.337446576
A_{01}	0.262489140	0.198215183	0.199043274	0.340252402
A_{10}	0.264455284	0.199089409	0.198215183	0.338240123
A_{11}	0.262032291	0.198036963	0.199215137	0.340715608

Tablo 3.14: Dokuz adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 9$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.264201260	0.198952878	0.198341488	0.338504372
A_{01}	0.263052371	0.198480043	0.198794156	0.339673428
A_{10}	0.263863233	0.198807233	0.198480043	0.338849489
A_{11}	0.262853686	0.198393742	0.198876152	0.339876418

Tablo 3.15: On adım geiş matrisinin değerleri

$n = 10$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263768129	0.198774619	0.198512144	0.338945106
A_{01}	0.263278705	0.198567822	0.198709390	0.339444081
A_{10}	0.263626816	0.198716460	0.198567822	0.339088900
A_{11}	0.263195922	0.198533916	0.198741871	0.339528289

Tablo 3.16: Onbir adım geiş matrisinin değerleri

$n = 11$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263583616	0.198696656	0.198586506	0.339133220
A_{01}	0.263377328	0.198610767	0.198668596	0.339343306
A_{10}	0.263523417	0.198671220	0.198610767	0.339194594
A_{11}	0.263341995	0.198595798	0.198682868	0.339379336

Tablo 3.17: Oniki adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 12$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263505846	0.198664276	0.198617454	0.339212423
A_{01}	0.263418374	0.198627551	0.198652514	0.339301560
A_{10}	0.263480472	0.198653712	0.198627551	0.339238263
A_{11}	0.263403497	0.198621366	0.198658426	0.339316709

Tablo 3.18: Onüç adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 13$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263472869	0.198650431	0.198630671	0.339246027
A_{01}	0.263435904	0.198634984	0.198645428	0.339283683
A_{10}	0.263462110	0.198645914	0.198634984	0.339256991
A_{11}	0.263429592	0.198632331	0.198647959	0.339290116

Tablo 3.19: Ondört adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 14$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263458933	0.198644607	0.198636234	0.339260223
A_{01}	0.263443282	0.198638049	0.198642497	0.339276170
A_{10}	0.263454386	0.198642707	0.198638049	0.339264855
A_{11}	0.263440615	0.198636936	0.198643561	0.339278886

Tablo 3.20: Onbeş adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 15$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.263453033	0.198642135	0.198638595	0.339266235
A_{01}	0.263446413	0.198639366	0.198641240	0.339272979
A_{10}	0.263451107	0.198641328	0.198639366	0.339268197
A_{11}	0.263445284	0.198688892	0.198641692	0.339274130

Tablo 3.21: Onaltı adım geçiş matrisinin değerleri

$n = 16$	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}
A_{00}	0.2634	0.1986	0.1986	0.3392
A_{01}	0.2634	0.1986	0.1986	0.3392
A_{10}	0.2634	0.1986	0.1986	0.3392
A_{11}	0.2634	0.1986	0.1986	0.3392

Tablolardan görüldüğü gibi matrisin değerleri on beşinci kuvvetten sonra durağanlaşmaktadır. Tablo 3.5 ve Tablo 3.6’da gözlemlenen verilere göre zincirin başlangıç dağılımı aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$\Pi_{01} = (0.2774, 0.1989, 0.1937, 0.33)$$

Zincirin başlangıç dağılımı kullanılarak limit dağılımını aşağıdaki eşitlikten elde edebiliriz,

$$\Pi_{\infty} = \Pi_{01}P^{\infty}P = (0.462, 0.538)$$

Buradan sonuç olarak iki sıralı zincirin on beşinci adımdan sonra sıfır durumunu alma olasılığının 0.462 ve bir değerini alma olasılığının 0.538 olduğunu söyleyebiliriz. Olasılıklar birbirine yakın olduğundan zincirin ileriki adımlarında belli bir değerde sabitleşmesi söz konusu değildir.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Markov zincirleri bağımlı verilerin zamana bağlı olarak incelenmesinde kullanılan temel yöntemlerin başında gelmektedir. Özellikle uzunlamasına gözlemlenen verilerin modellenmesinde de başarılı bir şekilde kullanılabilir. Markov zincirinin kesikli parametrelili olması zincirin incelenmesini adım sayısına indirgediğinden birçok uygulama alanında kolaylık sağlamaktadır. Bunun yanı sıra zincir sürekli parametrelili olarak da analiz edilebilir. Bu şekilde reel sistemlere uygulanma imkânı bulunan Markov zincirleri matematiksel analizin de önemli bir inceleme alanıdır.

Özellikle stokastik süreçler içerisinde önemli bir sınıfı oluşturan zincir teorik bakımdan önemli birçok sonucu barındırmaktadır.

Çalışmada Markov zincirlerinin, Markov özelliği olarak da bilinen,

$$Pr\{X_{n+1}|X_0, \dots, X_{n-1}, X_n\} = Pr\{X_{n+1}|X_n\}$$

özelligi

$$Pr\{X_{n+1} = j|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\} = Pr\{X_{n+1} = j|X_n = i_n\}$$

şekline çevrilerek zincirin temel parametrelerinin hesaplanması gerçekleştirilmiştir. Markov özelliğinin bu şekilde iki sıralı alınması sonucunda zincirin birtakım parametrelerinin yeniden tanımlanması ve hesaplanması teorik olarak Markov zincirleri teorisine bir takım yeni bulgular kazandırmıştır. Bu bulgular iki durumlu zincir üzerinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Çalışmada yer alan bulguların bazıları şu şekilde özetlenebilir,

- İki sıralı zincirin bir adım geçiş matrisinin oluşturulması,
- İki sıralı zincirin dağılımının belirlenmesi,
- Zincirin üç ve dört boyutlu ortak dağılımının belirlenmesi,
- Zincirin durumları arasındaki geçişlerin incelenmesi,
- Eşdeğer zincirin kurulması,
- Zincirin durağan dağılımının belirlenmesi,
- Yutucu durumlu zincirin incelenmesi,
- İki durumlu ve iki sıralı bir zincirin gözlemlenmesine ait hipotetik bir uygulama.

İki durumlu bir Markov zincirinin analizinde durumlar genellikle sıfır ve bir gibi adlandırılmaktadır. Zincirin mevcut olan ve bilinen konumu sıfır veya bir durumu olmaktadır. Ancak çalışmada da incelenen iki durumlu ve iki sıralı Markov zincirinde zincirin mevcut bilinen konumu sıfır ve bir konumlarından farklı olarak 00 , 01 , 10 , 11 gibi dört adet olmaktadır. Bu mevcut konumlardan yeni geçilecek konumlar ise sıfır ve bir gibi iki adet olmaktadır. Bundan dolayı zincirin geçiş matrisi kare bir matris olmak yerine dört satır ve iki sütundan oluşan dikdörtgen bir matris

olmaktadır. Bu durum ise Markov zincirinde kolaylıkla gerçekleştirilen birçok matris işleminin iki sıralı Markov zincirinde uygulanamaması sorununu ortaya çıkartmaktadır. Bu sorun çalışmada incelenen birkaç alternatif yöntemle ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Bunlardan en önemlisi iki sıralı Bir Markov zincirine eşdeğer olan bir başka Markov zincirinin oluşturulmasıdır.

Markov zincirinin iki sıralı olarak farklı bir yapıya getirilmesi bazı reel uygulamalarda da oldukça önem göstermektedir. Bir sonraki adımla zincirin önceki adımlarının ilişkisinin koparılması bazı uygulamalarda gerçek yapıya uymamaktadır. Bu durumda iki sıralı Markov zincirinin kullanılması uygulama açısından incelenen reel modeli daha gerçekçi yansıtabilecektir.

Örnek uygulama alanı olarak borsada yatırımcısına kazandıran bir şirketin bir sonraki adımda kazandırması veya kaybettirmesi mevcut bilinen bir duruma bağlı olarak modellenemez. Böyle bir modellemenin yapılabilmesi ardışık bilinen iki durumun bilinmesi halinde daha güvenilir olacaktır.

Bunun yanı sıra bilinen bazı Markov zinciri modelleri de yapısından ötürü iki sıralı olacak şekilde düzenlenememektedir. Örneğin binom sürecinde sürecin herhangi bir adımdaki değeri biliniyorsa bu adımdan sonraki değerlere geçme olasılıkları bilinen duruma göre hesaplanmaktadır. Bu zincirde ardışık iki durumun bilinmesi geçiş olasılıklarında herhangi bir değişiklik yapmamaktadır. Bundan dolayı binom süreci iki sıralı bir Markov zinciri olarak alınamaz.

Aynı şekilde tesadüfi yürüyüşte de yürüyüşün konumu herhangi bir adımda biliniyorsa bundan önceki hiçbir konumunun geçiş olasılığına etkisi olmamaktadır. Bu gibi örnekler dallanan süreçler gibi tesadüfi değişkenlerin toplamı şeklinde oluşturulan bazı süreçlerle genişletilebilir.

İki sıralı Markov zinciri daha çok uygulama alanlarında yer bulacak Markov zinciri yapısının önemli bir versiyonudur. Özelliklerinin araştırılması ve geliştirilmesi birçok yeni bulgunun teoriye kazandırılmasına neden olacaktır.

Uzunlamasına veri analizinde basit bir istatistiksel modelleme yöntemi olarak kullanılan Markov zinciri yöntemi uzunlamasına verilerin kayıp gözlemlerinin tahmin edilmesinde de kullanılabilir. Aynı şekilde uzunlamasına bir veride kayıp gözlemin tahmin edilmesinde iki sıralı bir Markov zinciri modelinin kullanılması sonuçları istatistiksel olarak daha anlamlı hale getirmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] A. A. Shahbazov (2005). "Olasılık Teorisine Giriş" Birsen yayınevi, Ankara.
- [2] Paul C. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone (1972). "Introduction to Stochastic Processes" Houghton Miffling Company, Boston.
- [3] J. R. Norris (1997). "Markov Chains" Cambridge University Press, United Kingdom.
- [4] K. L. Chung (1967). "Markov Chains with Stationary Transition Probabilities" Springer, Berlin.
- [5] T. E. Harris (1989). "The Theory of Branching Processes" Dover, New York.
- [6] John G. Kemeny and J. Laurie Snell (1960). "Finite Markov Chains" D. Van Nostrand Company, London.
- [7] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov (1954). "Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables" Reading, Mass. Addison Wesley.
- [8] I. I. Gligman and A. V. Skorohod (1965). "Introduction to the Theory of Random Processes" Fizmatgiz.
- [9] K. Ito (1954). "Stationary Random Distributions" Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 28, 206-223.
- [10] J. H. Kinney (1953). "Continuity Properties of Sample Functions of Markov Processes" Trans. Amer. Math. Soc. 74, 280-302.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ'da doğan yazar; ilk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladıktan sonra, 2005-2009 yılları arasında Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nde lisans öğrenimini bitirmiştir. 2009 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, Olasılık Teorisi ve Olasılık Süreçleri Bilim Dalı'nda yüksek lisansa başlamıştır. 2011'in Aralık ayında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atanan yazar, halen bu görevine devam etmektedir.