

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN
SPEKTRAL TEORİSİ

Funda METİN TÜRK

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Erdal BAŞ

ŞUBAT-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN
SPEKTRAL TEORİSİ

DOKTORA TEZİ
Funda METİN TÜRK
(121121204)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.01.2017

Tezin Savunulduğu Tarih : 10.02.2017

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Erdal BAŞ (F.Ü) 
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Hasan BULUT (F.Ü) 
Doç.Dr. Abdullah KABLAN (GAZÜ) 
Y.Doç.Dr. Ünal İÇ (F.Ü) 
Y.Doç.Dr. Keziban TAŞ (M.Ü) 

ŞUBAT-2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanmasında bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım yanında çalışmaktan dolayı onur duyduğum saygıdeğer hocam Doç. Dr. Erdal BAŞ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini ve yardımını hiçbir zaman esirgemeyen sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI hocamıza ve Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN'a teşekkür ederim.

Funda METİN TÜRK

ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	17
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	18
3. GENEL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	30
3.1. Sturm-Liouville Problemi ve Spektral Özellikleri	30
3.2. Özfonksiyonların Sıfırları	39
4. KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	43
4.1. α . mertebeden Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Spektral Değerlendirilmesi	43
4.2. Difüzyon Operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	50
4.3. Coulomb Potansiyeli için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	58
4.4. Hidrojen Atom Denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	65
4.5. Kesirli Sturm-Liouville Problemi için Mukayese Kriterleri	73
5. IMPULSIVE ŞARTLARI ALTINDA KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ	76
5.1. Impulsive Şartları Altında Difüzyon Operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi	76
5.2. Impulsive Şartları Altında Difüzyon Operatörü için p-Laplasiyan Kesirli Sturm-Liouville Problemi	93
6. SONUÇ	107
7. ÖNERİLER	108
KAYNAKLAR	109
ÖZGEÇMİŞ	115

ÖZET

Kesirli Sturm-Liouville Problemlerinin Spektral Teorisi

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kesirli hesaplamalar ve spektral teori ile ilgili genel bilgiler, tarihçe ve uygulamaları hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, kesirli analiz ve Sturm-Liouville teorisi hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Sturm-Liouville teorisi tanıtılmış ve Sturm-Liouville probleminin spektral özellikleri incelenmiştir.

Son iki bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville operatörü tanımlanarak spektral özellikleri incelenmiştir. Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville operatörü tanımlanarak spektral özellikleri incelenmiş ve ilgili teoremlerin ispatları detaylı bir şekilde yapılmıştır. Ayrıca hidrojen atom potansiyeline sahip kesirli Sturm-Liouville operatörü için benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölüm ise iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda impulsive şartları altında difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville probleminin çözümünün varlığı Schaefer sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlanmıştır. İkinci kısımda ise impulsive şartları altında difüzyon operatörü için p -Laplasiyan kesirli Sturm-Liouville probleminin çözümünün varlığı Schaefer sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville, Özdeğer, Kesirli hesaplama, Caputo, Riemann Liouville, Potansiyel.

SUMMARY

The Spectral Theory of Fractional Sturm-Liouville Problems

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to fractional calculus, general information for spectral theory, historical background and applications of the subject.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems on fractional calculus and Sturm-Liouville theory are given.

In the third chapter, Sturm -Liouville theory is introduced and spectral properties of Sturm-Liouville problem are examined.

The last two chapters include original part of the thesis.

In the fourth chapter, fractional Sturm-Liouville operator is defined and its spectral properties are examined. Fractional Sturm-Liouville operator with Coulomb potential is introduced, spectral properties are examined and theorems related to this subject are proved in detail. In addition, similar results are obtained for fractional Sturm-Liouville operator having hydrogen atom potential.

The fifth chapter consists of two parts. In the first part, the existence of solution of fractional Sturm-Liouville operator for diffusion operator under impulsive condition is proved by the help of Schaefer fixed point theorem. In the second part, the existence of the solution of p -Laplacian fractional Sturm-Liouville problem for diffusion operator under impulsive conditions is demonstrated by using Schaefer fixed point theorem.

Key Words: Sturm-Liouville, Eigenvalue, Fractional Calculus, Caputo, Riemann-Liouville, Potential.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
Γ	: Gamma
λ	: Özdeğer
θ	: Teta
α	: Alfa
β	: Beta
π	: Pi
$\sum$	: Toplam sembolü
$\int$	: İntegral
D	: Türev operatörü
${}_0D_t^{-\alpha}$	: α . kattan integral
${}_0D_t^{\alpha}$	: α . mertebeden türev
${}_0^cD_t^{\alpha}$	: α . mertebeden Caputo türevi
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon

1. GİRİŞ

Kesirli analiz, geçmişten günümüze kadar birçok matematikçinin ilgi odağı haline gelmiş, türev ve integral operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabileceğini ifade eden matematiksel bir alandır. Bu konu ile ilgili pek çok matematikçi kendi notasyon ve yaklaşımlarıyla çeşitli tanımlamalar yapmış ancak bu tanımlar ve araştırmaların hepsi günümüze kadar ulaşamamıştır.

Günümüzde pek çok alanda kendini gösteren kesirli analizin uygulamalarındaki önemli gelişmeler geçtiğimiz yüzyılda ortaya çıksa da, temel matematiksel tarihi 300 yıla dayanmaktadır. Türevin ilk tanımı, $y = f(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

eşitliği ile Leibniz tarafından 1695 yılında yapıldıktan sonra L'Hospital Leibniz'e yazdığı ve türevin mertebesinin kesirli olup olamayacağını sorduğu mektup kesirli analizin çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz bu tanımı yaptıktan sonra türev ve integralin kullanım alanları geliştikçe türevin ve integralin daha da geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bazı problemlerin çözümünde bilinen türev ve integral tanımları yeterli olmayınca yeni tanımlamalara gerek duyulmuştur. Bu dönemde ortaya atılan kesirli mertebeden türev ve integral fikri 19. yüzyılda fazla gelişmemesine rağmen 20. yy'da bu konuda pek çok matematikçi önemli çalışmalar yapmıştır. Geliştirilen bu türev ve integral tanımları ve buna bağlı olarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemler birçok problemlerin çözümünde önemli rol oynamıştır. Ayrıca klasik analizde yapılan çalışmaların kesirli analizde de uygulanması birçok problemin çözümünde de daha hassas sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır. Ayrıca kesirli analiz, karmaşık yapıdaki problemleri anlamaya yönelik yeni bir bakış açısı sunmuş, modelleri daha iyi ifade edebilmiş, çeşitli problemlerle ilgili daha tutarlı sonuçlar vermiştir.

İlk kesirli mertebeden denklem çözümü, Tautochrone probleminin formülü ile 1823 yılında Abel tarafından bir integral denklemi ile verilmiştir. 1844 Boole, sabit kat sayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için sembolik yöntemler geliştirerek problemin çözümünde kesirli hesaplamayı kullanmıştır. 1892'de Heaviside, elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini çözmek için kesirli hesaplamayı kullanmış ve bu uygulama-

mayla kesirli hesaplamada önemli bir adım atmıştır. 1920’de ise iletkenlik teorisinde, kesirli hesaplamalardan yararlanmıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda 1936’da Gemant esneklik problemlerinde kesirli diferansiyelden faydalanmıştır. Littlewood (1925), Kober (1940), Erdelyi (1964), Higgins (1967) gibi birçok matematikçi kesirli hesaplama tekniğini uygulamalı alana taşımıştır [1-6].

Kesirli Analizin Tarihçesi

Kesirli analizin gelişim tarihi incelendiğinde, ilgili literatürden aşağıda aydınlatıcı bilgiler verilmiştir [1].

1695-G. W. Leibniz, ilk olarak $d^{1/2}x$ ifadesinin $x^2\sqrt{dx} : x$ ’e eşit olabileceğini ve buradan elde edeceği sonuçlarla da faydalı çözümlemelere ulaşabileceğini düşünmüştür.

1697’de kesirli diferansiyelden söz etmiş ve $\frac{1}{2}$. mertebeden bir türevi göstermek için $d^{1/2}y$ notasyonunu kullanmıştır. Bundan sonra sonsuz serilerin kesirli hesaplamayı ifade edebileceğini düşünmüştür. Ama sonsuz seriler, pozitif ve negatif tamsayı olan üsleri içermektedir.

1730-L. Euler, n pozitif bir tamsayı ve x ’in bir fonksiyonu da p olmak üzere, $d^n p$ ’nin dx^n ’e oranı, cebirsel olarak her zaman ifade edilebilir. Fakat, eğer n , kesirli bir ifade olursa nasıl bir oran oluşturmak gerekir? n pozitif bir tamsayı iken, sürekli diferansiyel yardımıyla d^n bulunabilir. Ancak bu yöntem, n kesirli bir ifade iken geçerli değildir. Dolayısıyla bu sorun, serilerin interpolasyonundan yararlanılarak kolaylaştırılabilir şeklinde düşünmüştür.

1772-J. L. Lagrange, geliştirmiş olduğu,

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y,$$

şeklindeki mertebesi tamsayı olan diferansiyel operatörler için üsler kuralı ile bu konuya dolaylı olarak katkı sağlamıştır. Kesirli hesaplama teorisini bu yönde başlatmış, m ve n kesirli olduğunda, kuralın geçerli olup olmadığını sorgulamaya başlamıştır.

1812-P. S. Laplace, bir integral vasıtasıyla bazı kesirli türev ifadeleri tanımlamıştır ve ilk olarak 1819’da keyfi mertebeli bir türevden söz etmiştir.

1819-S. F. Lacroix, tümevarımdan faydalanarak $y = x^m$ ve m pozitif bir tamsayı olmak üzere, x^m ’nin n . mertebeden türevini,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n$$

şeklinde geliştirmiştir. Daha sonra Gamma fonksiyonunu kullanarak polinom fonksiyonlar için,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

formülünü vermiştir. Buradan da $n = 1/2$ alarak,

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

tanımına ulaşmıştır ($\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$). Fakat keyfi mertebeden bir türevin uygulaması konusunda bu metot yeterli olmamıştır.

1822-J. B. J. Fourier, keyfi mertebeli türevlerden söz etmiştir ve tanımını,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x - \alpha) dp,$$

formülünden yararlanarak elde etmiştir.

n bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x - \alpha) = p^n \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{1}{2}n\pi \right],$$

şeklinde alıp bunu da genelleştirip n yerine keyfi u değerini alarak,

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{1}{2}u\pi \right] dp,$$

tanımını vermiştir. Fourier, buradaki u sayısının pozitif veya negatif herhangi bir değer olabileceğini belirtmiştir.

1823-N. H. Abel, kesirli işlemleri ilk olarak kullanan bilim adamıdır. Abel, bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamayı kullanmıştır. Abel'in integral denkleminin,

$$k = \int_0^x (x - t)^{-1/2} f(t) dt,$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Abel, bu denklemin sağ tarafına $\sqrt{\pi} [d^{-1/2}/dx^{-1/2}] f(x)$ yazarak düzenleme yapmış,

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x),$$

formülünü vermiştir. Abel, bu denklemde $f(x)$ 'i belirleyerek kesirli hesaplamada önemli bir başarı sağlamıştır.

1832-J. Liouville, kesirli hesaplamadaki ilk büyük çalışmayı gerçekleştirmiştir. $(d^{1/2}/dx^{1/2}) e^{2x}$ ifadesini düşünmüş ve kesirli operatörleri kullanarak mekanik ve geometrinin bazı problemlerini çözmüştür. Kesirli operatör tanımına eklemek için tamamlayıcı bir fonksiyonun varlığından da söz etmiştir. Bu tamamlayıcı fonksiyonun varlığını ispatlamaya çalışmıştır. Ancak başarılı bir sonuca ulaşamamıştır. Ayrıca Liouville, iki fonksiyonun çarpımının kesirli türevi için de bir metot geliştirmiştir. Daha sonra 1834 yılında izokron problemlerinden bahsetmiştir. Ayrıca keyfi mertebelerden türevler için,

$$D^v e^{\alpha x} = \alpha^v e^{\alpha x},$$

tanımını geliştirmiştir. Liouville, kesirli bir türev için,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\alpha_n x}, \quad \operatorname{Re} \alpha_n > 0 \\ D^v f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n^v e^{\alpha_n x}, \end{aligned}$$

formundaki seride, bir $f(x)$ fonksiyonunun keyfi türevinin açık olarak yazılabileceği fikrini ortaya atmıştır. Liouville, ikinci bir tanım elde etmek için gama fonksiyonu ile ilişkili,

$$I = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du, \quad \alpha > 0, x > 0$$

belirli integralini kullanmıştır. Burada $xu = t$ alarak,

$$I = x^{-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = x^{-\alpha} \Gamma(\alpha),$$

veya,

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} I,$$

formüllerini vermiştir. Liouville, bu son denkleme D^v operatörünü uygulayarak,

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+v-1} e^{-xu} du,$$

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v \Gamma(\alpha + v)}{\Gamma(\alpha)} x^{-a-v}, \quad \alpha > 0$$

tanımını bulmuştur. Ayrıca,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

integral denkleminin $y_c = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$ şeklinde tamamlayıcı bir çözüme sahip olduğunu belirtmiş ve keyfi u değeri için,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

denkleminin de tamamlayıcı bir çözüme sahip olup olmadığını incelemiştir.

1839-S. S. Greatheed, Liouville'nin tanımını kullanarak, kesirli diferansiyel için bazı formüller geliştirmiştir. Bu çalışmasında kesirli türevleri kullanarak Taylor teoremini de eklemiştir.

1841-D. F. Gregory, operatörler hesabı tanımının kurucusudur. Sembolik formu,

$$u(x, t) = Ae^{x\alpha p^{1/2}} + Be^{x\alpha p^{-1/2}},$$

şeklinde olan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

ile tanımlanan ısı denklemini vermiştir. Bu form daha sonra, Heaviside tarafından da kullanılmıştır.

1842-A. De Morgan, kesirli operatör sistemlerinden bahsetmiş ve $D^u x^u$ şeklinde bir form geliştirmiştir.

1846-P. Kelland, daha önce Peacock tarafından da kullanılan, cebir için uygulanan eşdeğer formların süreklilik ilkesinin, bütün sembolik operatörler için geçerli olduğunu varsaymıştır. Kelland, bu ilkenin sonucu olan cebirsel formüllerin, sembolik operatörlerin cebirsel sembollerle yer değiştirmesi ile doğru formlara dönüşeceğini düşünmüştür. Daha sonra ise bu düşüncesinde bazı hatalar saptanmıştır.

1847-B. Riemann, kesirli integral teorisi üzerine olan çalışmalarına öğrencilik yıllarında başlamıştır. Taylor serilerini genelleştirerek kesirli integral tanımını,

$$\frac{d^{-v}}{dx^{-v}} = D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt,$$

şeklinde vermiştir. Bu tanıma tamamlayıcı bir fonksiyon eklemeyi uygun görmüştür.

Burada, integralin alt limiti olan c 'nin ve tamamlayıcı fonksiyonun değeri 0 alınarak, bugün bu formül, yaygın bir şekilde kesirli integrasyon tanımına uygun olarak kullanılmaktadır.

1848-C. J. Hargreave, n . mertebeden genelleştirilmiş Leibniz türevi üzerine çalışmıştır (n , pozitif bir tamsayı değildir). Böylece,

$$D^v f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} D^n f(x) D^{v-n} g(x),$$

formülünü vermiştir. Burada D^n , n . mertebeden diferansiyel operatör, D^{v-n} kesirli bir operatör ve $\binom{v}{n}$ de $\Gamma(v+n)/n!\Gamma(v-n+1)$ şeklindedir.

1848-W. Center, kesirli operatörlerin tartışılan iki sistemini açıkça tanımlamıştır. Birincisi, Peacock tarafından geliştirilen,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\theta+1)} x^{v-\theta}, \theta > 0,$$

şeklinde, $v = 0$ iken sonlu sonuçlar veren sistemdir. İkincisi ise, $v = 0$ iken,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\theta} x^{-v} = \frac{(-1)^{\theta} \Gamma(v+\theta)}{\Gamma(v)} x^{-\theta-v}, \theta > 0, v+\theta > 0,$$

şeklindeki, Liouville tarafından geliştirilen sistemdir.

1859-H. R. Greer, başlangıç olarak, Liouville'nin geliştirdiği,

$$D^v e^{\alpha x} = \alpha^v e^{\alpha x},$$

eşitliğini kullanarak $\sin x$ ve $\cos x$ 'in adi türevleri için çeşitli formüller üretmiştir. Ayrıca $\frac{1}{2}$. mertebeden sonlu farklardan da bahsetmiştir.

1861-Z. Wastchenxo, Greer'in formüllerine çeşitli ekler yaparak çalışmıştır.

1865-H. Holmgren, adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli hesaplama tekniği ile ilgilenmiş ve çeşitli yazılar yazmıştır.

Holmgren, bu yazılarında, kendinden öncekilerin buldukları sonuçların kısıtlı olduğunu dile getirmiş ve amacının tam bir çözüm bulmak olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmaları doğrultusunda,

$$D^v y'' = D^v D^2 y = D^{v+2} y,$$

kuralını tanımlamıştır. Her ne kadar v tamsayı olduğunda bu kural geçerli olsa da, modern matematikçiler v keyfi olduğunda da bu kuralın geçerliliğini ispatlamaya çalışmışlardır.

1867-A. K. Grunwald, kesirli operatörler üzerine yaptığı çalışmalar neticesinde,

$$\theta = \int_0^x (x-t)^v f(t) dt,$$

formülünü elde etmiştir ki burada θ , x 'in bilinen fonksiyonudur.

1868-A. V. Letnikov, keyfi mertebeler için,

$$[D^q D^p f(x)]_{x_0}^x = [D^{q+p} f(x)]_{x_0}^x,$$

formülünü ispatlamıştır. Liouville, Peacock ve Kelland'ın çalışmalarını da incelemiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Cauchy integral formülünün ana teması üzerine çalışmıştır. Böylece, bazı diferansiyel denklemlerin çözümü için kesirli hesaplama tekniğini kullanmıştır.

1880-A. Cayley, Riemann'ın 1847'deki tezine atıf yaparak Riemann'ın teorisindeki en büyük sıkıntının, keyfi sabitlerin sonsuzluğunu içeren tamamlayıcı bir fonksiyonun tanımından kaynaklandığını ifade etmiştir.

1884-H. Laurent, Cauchy integral formülünü genelleştirmiştir. Genelleştirilmiş Leibniz çarpım kuralı üzerine çalışmış ancak integral formda bir sonuç elde edememiştir.

1887-K. Nishimoto, Cauchy integral formülünden yararlanarak,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw,$$

tanımını vermiştir ve n yerine v yazarak,

$$D^v f(z) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_C^+ \frac{f(w)}{(w-z)^{v+1}} dw,$$

formülünü elde etmiştir.

1888-P. A. Nekrassov, Liouville'nin v . mertebeden diferansiyel için geliştirdiği,

$$D^v e^{\alpha x} = \alpha^v e^{\alpha x},$$

formülünü kullanarak $(x - \alpha)^q$ 'nin keyfi mertebeli türevini bulmuştur.

1892-O. Heaviside'nin kablolardaki elektrik akımının iletkenlik teorisindeki metodları mühendislere çok fayda sağlamıştır.

α^2 bir sabit ve u ise sıcaklık olmak üzere bir boyutlu ısı denklemini,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

olarak belirlemiştir ki eğer $\frac{\partial}{\partial t} = p$ alınırsa,

$$D^2 u = \alpha^2 p,$$

olur. Heaviside, $p^{1/2} = d^{1/2}/dx^{1/2} = D^{1/2}$ eşitlikleriyle doğru sonuçlar elde etmiştir. Heaviside'nin işlemleri, Riemann'ın ${}_0D_x^v$ işlemi ile bağdaştırılabilir. Ancak sonuçları doğru olsa da Heaviside, yöntemini ispatlayamamıştır.

1902-R. E. Moritz, yaptığı çalışmalarda anlaşılması güç olan yeni sembol ve terimler kullanmıştır.

1918-E. Schuyler,

$$(d^{1/2}/dx^{1/2}) (d^{1/2}y/dx^{1/2}) = dy/dx,$$

eşitliğini ispatlamaya ve bu ifadeyi yorumlamaya çalışmıştır. Bu problem 1919'da, Post tarafından da ele alınmış ve çözümü yapılmıştır.

1918-L. O'Shaughnesy,

$$d^{1/2}y/dx^{1/2} = y/x,$$

denklemini çözmeye çalışmıştır ve bu problem de 1919'da Post tarafından incelenip çözülmüştür.

1919-E. Post, kesirli hesaplama operatörleri ile alakalı iki probleme iki farklı çözüm üretmeye çalışmıştır. İlk çözümünde,

$${}_cD_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt,$$

şeklindeki Liouville'nin kesirli mertebeli integrasyon tanımını, $c = -\infty$ olarak kullanmıştır. İkinci çözümünde ise Riemann tanımından yararlanmıştır.

1919-M. T. Naraniengar,

$$D^{\frac{1}{2}}(x^n) = R(n) x^{n-\frac{1}{2}},$$

denklemini üzerine çalışmış ve $\Gamma(n+1)/\Gamma(n+\frac{1}{2})$ değerine karşılık gelen $R(n)$ katsayısını geliştirmiştir.

1919-T. J. I. Bromwich, bazı fiziksel problemlerin çözümünde kesirli operatörlerini kullanmayı amaçlamıştır.

1922-G. H. Hardy, özellikle toplam ve süreklilik teoremlerinin kesirli mertebeden integral özelliklerini, tamsayı mertebeden olanlarla benzerliklerini göz önünde bulundurarak incelemiştir.

1922-W. C. Brenke, fizikte kullanmak için,

$$Q(h) = c \int_0^h (h-t)^{\frac{1}{2}} f(t) dt,$$

şeklindeki denklem ve bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmıştır.

1923-P. Levy, e^{iz} ifadesinin kesirli türevini düşünmüş ve bunun üzerine çeşitli çalışmalar yapmıştır.

1924-H. T. Davis, bazı integral denklemlerin çözümüne uygulamak için geliştirilen teori çalışmalarının eksiklerini gidermeye yönelik çalışmalar yapmıştır.

1925-E. Stephens, genel ve kesirli diferansiyellerle alakalı bir kaynakça çalışması yapmıştır. Ancak bu kaynakçada pek çok hata ve eksikliğe rastlanmıştır.

1927-W. O. Pennell, kesirli hesaplama operatörleri üzerine bazı teoremler üretmiştir, öyle ki

$$p^2y + xy = 1, p = d/dx,$$

şeklindeki lineer bir denklemin çözümü için, p 'nin bir seriye nasıl genişletilebileceğini ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır.

1927-H. T. Davis, kesirli hesaplama operatörlerini tanımlamada kullanılan çeşitli notasyonları ele almıştır. $\frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt$ 'yi tanımlamak için ${}_cD_x^{-v} f(x)$ notasyonunu kullanmıştır. ${}_cD_x^{\frac{1}{2}} u + \lambda u = f(x)$ gibi kesirli üsse sahip bazı diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için de bu notasyonu uygulamıştır.

1928-G. H. Hardy ve J. E. Littlewood, standart sınıftan bazı fonksiyonların keyfi mertebeli türev ve integrali için tanımlanan Riemann-Liouville tanımını geliştirme-yi amaçlamıştır.

1933-K. S. Cole, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketini incelemeye, kesirli hesaplamadan yararlanmıştır.

1935-A. Zygmund, Weyl tarafından ortaya atılan ve trigonometrik seriler için çok uygun olan bir kesirli integrasyon üzerinde çalışmıştır.

1936-W. Fabian, kesirli integralin özellikleri üzerine çalışmıştır ve integral ve serilerin toplamından bazı sonuçlar elde etmiştir. Riemann tanımını genişleterek kompleks düzlemde herhangi bir eğri boyunca kesirli integrasyon kavramı üzerine çalışmıştır.

1940-H. Kober, Hardy ve Littlewood'un bulduğu bazı sonuçları genişletmiş, Mellin

dönüşümlerinden,

$$g(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

denkleminin çözüm için bir teoremden bahsetmiştir.

1941-D. V. Widder, kesirli integraller ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiyi ele almıştır.

1949-M. Riesz, Hagstrom ile iş birliği yaparak kesirli hesabın temel yönlerini vermiştir. Riemann uzayındaki dalga denklemini, izafiyet teorisi, Lorenz uzayı ve olasılık teorisinde,

$$I^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x (x-t)^{v-1} f(t) dt,$$

şeklindeki kesirli integralin çeşitli yönlerinden bahsetmiştir.

1950-N. Stuloff,

$$\Delta^\alpha x_n \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{\alpha}{v} x_{n+v},$$

deşliği ile kesirli mertebenin farklarını ele almıştır.

1953-B. Kuttner, kesirli türev tanımlarından hareketle,

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} f(t) dt,$$

ve

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_x^1 (t-x)^{n-k-1} f(t) dt,$$

şeklindeki iki integral arasındaki ilişkiyi düşünmüştür.

1954-A. Erdelyi, kesirli integrallerle alakalı bir kaynakça çalışması yapmış ve Heaviside'nin $(d/dt)^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki operatörünü ele almıştır. Kesirli integrasyon ve ikili integral denklemler üzerine de bazı çalışmalar yapmıştır.

1959-J. L. Lions, Navier-Stokes denklemlerinin açık bir çözümü olarak bir $u(t)$ fonksiyonu belirlemiş ve bu çözümün, t ile ilgili kesirli bir türevelere sahip olup olmayacağı sorusunu ortaya atmıştır.

1961-M. A. Bassam, Holmgren ve Riesz tarafından verilen, keyfi mertebeden iki belirli integral arasındaki eşitliği göstermiştir. Böylece, birleştirilmiş tek bir tanım elde etmiş ve 'Holmgren-Riesz Dönüşümleri' adlı bir tez yazmıştır.

1964-I. M. Gel'fand ve G. E. Shilov, hipergeometrik ve Bessel fonksiyonları gibi birçok fonksiyonu, elemanter fonksiyonların keyfi mertebeli türevleri olarak yazmışlardır.

1964-R. G. Buschman, sınır-değer problemlerinin analizinde, J alışımlı Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} y^p J_u(xy) f(y) dy = g(x),$$

ve

$$\int_0^{\infty} y^s J_v(xy) f(y) dy = h(x),$$

gibi iki integral denklemini tek bir denkleme indirgemek için kesirli hesaplama operatörlerini kullanmış ve

$$\int_0^{\infty} y^t J_{\lambda}(xy) f(y) dy = F(x),$$

denklemini elde etmiştir.

1967-M. Caputo, kesirli hesaplama tekniği ile alakalı,

$${}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, (n - 1 \leq \alpha < n),$$

şeklindeki formülü tanımlamıştır. Bu tanım çok sayıda çalışmada kullanılmıştır.

1967-T. P. Higgins, homojen olmayan diferansiyel denklemlerin bazı uygulamalarını ele almış ve kesirli hesaplama operatörleriyle elde edilen sonuçların, formüller üzerinde basit sadeleştirmeler yapılarak diğer alışımlı yöntemlerle de elde edilebileceğini iddia etmiştir.

1968-G. V. Welland, $[1/\Gamma(\beta)] \int_{-\infty}^x (x - t)^{\beta-1} f(t) dt$ kesirli integrasyonu için Liouville'nin tanımından yararlanmış ve Zygmund'un bazı çalışmalarını genişletmiştir.

1970-K. B. Oldham ve J. Spainer, adi diferansiyel olarak adlandırdıkları, $\frac{1}{2}$ mertebeli $d_z^{\frac{1}{2}} f(t) / dt^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki operatör yardımıyla elektrokimyasal kinetikleri açıklayabilecekleri yeni bir yöntem bulduklarını iddia etmişlerdir.

1970-T. J. Osler, çarpım durumundaki iki fonksiyonun türevi için, Leibniz kuralının bazı genellemelerini incelemiş ve bunları, bazı sonsuz serilerin açılımında kullanmıştır. Genelleştirilmiş bir zincir kuralı elde etmiş ve bu kuralın bazı özel durumlarını araştırmıştır. Genelleştirilmiş Cauchy integral formülünden yararlanarak, kesirli bir türev tanımlamıştır.

1971-E. R. Love, kesirli diferansiyeli, mertebenin sadece imajiner olduğu durumlar için tanımlamış ve alışılmış tanımları da imajiner merteye durumuna genişletmiştir.

1971-M. Shinbrot, Lions'un çalışmalarını ilerletmiş ve mertebesi $\frac{1}{2}$ olan kesirli diferansiyelleri ispatlamaya çalışmıştır.

1972-T. R. Prabhakar, kesirli integrasyonu kullanarak iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonları içeren bazı integral denklemler üzerine çalışmıştır.

1993-K. S. Miller ve B. Ross, kesirli hesaplamalar üzerine yapmış oldukları çalışmalar neticesinde,

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

eşitliğini vermişlerdir.

Bu çalışmaların içerisinde günümüzde yaygın olarak Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo ve Miller-Ross tanımları kullanılmaktadır. Uygulamalarda, materyalin fiziksel özelliklerini ifade etmede kesirli türevin daha iyi sonuç verdiği bilinmekte olup matematiksel modelleme ile elde edilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemler başlangıç koşulları ile birlikte formüle edilir. Yani uygulamadaki problemler, fiziksel yorumlamaya imkan veren başlangıç koşullarını kullanmayı gerektiren kesirli mertebeden türev tanımına ihtiyaç duyar. Bu yüzden son yıllarda, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville türev operatörü yerine Caputo türev operatörü daha çok kullanılmaktadır. Riemann-Liouville türevinde $t = a$ uç noktasındaki limit değerinin ilavesi gereklidir. Caputo türevi ise tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler ile aynı formda başlangıç koşullarına sahiptir. Grunwald-Letnikov tanımı da daha çok nümerik algoritmalarda kullanılmaktadır.

Kesirli hesaplama tekniğinin anlaşılmasında bir de bu dönemde Oldham ve Spanier (1974), Oustaloup (1991, 1994, 1995), Miller ve Ross (1993), Samko, Kilbas ve Marichev (1993), Kiryakova (1994), Carpinteri ve Mainardi (1997), Podlubny (1999) ve Hilfer (2000) gibi önemli matematikçiler tarafından yazılan kitaplar önemli bir rol oynamaktadır. Bu kitaplar kesirli hesaplama tekniğini, kesirli diferansiyel denklemlerin uygulamalarını ve çözüm metotlarını vermiştir. Ayrıca kesirli hesaplama tekniğindeki bu gelişmeler doğrultusunda 20. yy bitmeden çeşitli üniversitelerde konferanslar da düzenlenmiştir. 1974 yılında kesirli hesaplama konusundaki ilk uluslararası konferans Ulusal Bilim Kuruluşunun sponsorluğunda Connecticut'taki New Haven Üniver-

sitesinde yapılmış, konferansa dair sonuçlar Springer-Verlag tarafından yayımlanmıştır. 1984'te ise ikinci uluslararası konferans Strathclyde Üniversitesinin sponsorluğunda İskoçya'nın Glasgow şehrinde düzenlenmiştir. Bu konferansa da Heywood, Kalla, Lamb, Lowndes, Nishimoto, Rooney ve Srivastava gibi o dönemin ünlü matematikçileri katılmıştır. Yine 1980'lerde dikkate değer matematiksel aktiviteler Japonya'da Owa, Saigo ve Nishimoto tarafından gerçekleştirilmiştir. 4 ciltlik dergide kesirli türevin adı ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanışı incelenmiştir. 3. uluslararası konferans Tokyo'da Nihon Üniversitesinde gerçekleştirilmiştir. Bu konferansta da Al-Bassam, Bagley, Brychkov, Campos, Gorenflo, Joshi, Kalla, Love, Mikolas, Nishimoto, Owa, Prudnikov, Ross, Samko ve Srivastava gibi matematikçiler çalışmalarını birbirleriyle paylaşmışlardır [1-6].

Kesirli hesaplama tekniği, 20. yüzyılın ortalarından sonra bilimin her alanında kullanılmaya başlandı. Fizik, kimya ve mühendislik alanlarında çeşitli uygulamalara olanak sağladı. Bunların bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz:

- İnsan kemiğinde ultrasonik dalga yayılımı,
N.Sebaa, Z.E.A.Fellah, W.Lauriks, C.Depollier [7].
- Kesirli hesaplama kullanılarak kalp dokusunda elektrot arayüzünün modellenmesi,
R.L.Magin [9].
- Sert gözenekli malzemede ses dalgası yayılımında kesirli hesaplama uygulaması,
Z.E.A.Fellah, C.Depollier [8].
- Otomotik araçların yatay ve dikey kontrollerinde kesirli hesaplama kullanımı,
J.I.Suarez, B.M.Vinagre, A.J.Calderon, C.A.Monje and Y.Q.Chen [12].
- Viskoelastik teoride kesirli hesaplamaların uygulamaları,
E.Soczkaiewicz [11].
- Ayırıt sezimi için kesirli diferansiyel,
- B.Mathieu, P.Melchior, A.Oustaloup, Ch. Ceyra [10].

Ayrıca birçok dinamik sistem, kesirli hesaplamaaya dayanan kesirli mertebeden dinamik modeller kullanılarak daha iyi karakterize edilmiştir. Kesirli türev, sık bağımlı sıkıştırılmış materyallerin hareketleri, bir Newton akışkanındaki ince geniş tabaka halindeki viskoelastik materyallerin sürünme ve gevşeme fonksiyonları ve dinamik sistem ve benzerlerinin kontrolcüsü için $PI^\lambda D^u$ kontrolcüsü gibi birçok fiziksel problemde, elektromanyetik, akustik, elektrokimya ve madde bilimlerindeki fenomenlerde, sıvıların kimyasal analizi, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler, biyoloji, Schrödinger denklemi, tıp gibi daha birçok alanda kullanılmaktadır.

Şimdi tezimizin diğer bir omurgasını teşkil eden Sturm-Liouville teorisinden kısaca bahsedelim.

Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi ve analizi için matematiksel olarak modellenmesine ihtiyaç vardır. Bu şekilde matematiksel fiziğin, mühendisliğin ve birçok bilimin pek çok probleminin modellenmesi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. Bu problemlerin çözümü, 1830 'lu yıllara kadar analitik olarak ifade edilebilmesi ile sınırlı kalmıştır fakat 1836 yılında iki yakın arkadaş olan İsveçli matematikçi Charles François Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville çözümlerin analitik olarak ifade edilemediği durumlarda bu çözümlerin özelliklerinin bulunması ile ilgili çalışmalar yapmış ve Sturm-Liouville teorisini kurmuşlardır.

Klasik bir Sturm-Liouville diferansiyel denklemi genel olarak sonlu veya sonsuz $a < x < b$ aralığında tanımlı y fonksiyonları için,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0,$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde $p(x)$, $q(x)$ ve $w(x)$, verilen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların reel değerli ve ayrıca (a, b) aralığında parçalı sürekli olduğu varsayılmaktadır. Bununla birlikte $p(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonlarının (a, b) aralığında daima pozitif olduğu varsayılmaktadır. Bu denklemdeki λ sayıları da parametrelerdir.

Sturm ve Liouville diklik, özdeğerlerin gerçelliği ve Fourier katsayılarının belirlenmesi gibi bazı teoremleri ortak kullanıyorlarsa da Sturm özdeğerlerin özellikleri, özdeğer ve özfonksiyonların nitel davranışlarına yönelirken, Liouville keyfi fonksiyonların, özfonksiyonların bir sonsuz seri açılımına ağırlık vermiştir. Sturm, homojen olmayan ince bir teldeki ısı iletimi problemini göz önüne almış ve bu problemin çözümü için

kısmi diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırma metodu kullanarak adi diferansiyel denkleme dönuştürmüştür. Sturm-Liouville kuramının gelişmesinde D'Alembert, Fourier ve Poisson'un çalışmaları öncülük etmiş ve katkı sağlamıştır. Fourier, homojen ortamlarda ısı iletim problemlerini silindirik ve küresel koordinatları kullanarak incelemiş ve ısı teorisi ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu sonuçlar Poisson tarafından devam ettirilmiş ve geliştirilmiştir. Homojen ve homojen olmayan bir teldeki titreşim problemini ilk kez D'Alembert ve aynı dönemde Euler incelemiştir.

Sturm'un ikinci önemli çalışması spektral kuramı üzerine olmuştur. Liouville'nin çalışması ise keyfi fonksiyonların, özfonksiyonları cinsinden Fourier serisine açılımı, ortogonalite özellikleri ile farklı tipteki ve yüksek mertebeden denklemlere kuramın genelleştirilmesi üzerine olmuştur. Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak bir diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığını ilk kez Liouville kanıtlamıştır.

1880'lerde, Lord Rayleigh ve G.Kirchhoff titreşim problemini incelerken Sturm'un teoremlerinin benzerini yüksek basamaktan sınır değeri problemlerine uygulamışlardır. F.Klein diferansiyel denklemlerin polinom tipi çözümlerini sınır değeri problemleri kuramı ile birleştirmiştir. 1908'de Birkoff özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemlerin temel çözümleri için asimptotik eşitlikler elde etmiş, regüler sınır şartlarını tanımlamış ve regüler sınır-değeri problemleri için özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremler ispatlamıştır. 1946 yılında Titchmarsh doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlere göre ayrışım formülünü vermiştir. Ayrıca Naimark, Atkinson, Rietsz, Neumann, Friedrichs, Wintner, Leighton, Levitan Tamarkin gibi birçok matematikçi bu teorinin gelişmesini sağlamıştır.

Günümüzde de Sturm-Liouville teorisi ve problemi önemini korumaktadır. Bu alan hakkında çok fazla sayıda kitap ve makale yayınlanmasına rağmen Sturm-Liouville problemleri hem diferansiyel denklemler teorisinin hem de uygulamalı matematiğin en önemli ve en güncel konusu olmaya devam etmektedir. Bunun sebebi matematiksel fiziğin özellikle de kuantum mekaniğinin ortaya koyduğu yeni ve güncel problemlerdir. Sturm-Liouville teorisi ilk olarak ısı iletimi problemlerinde yoğun bir şekilde uygulansa da, günümüzde ısı akışı problemlerinin yanı sıra farklı matematik, fizik problemlerinin çözümü için de etkin bir yöntem oluşturmaktadır. Akustik bilimi, aerodinamik, elastik, elektrodinamik, akışkan dinamiği, jeofizik (sismik dalga yayılımı), ısı transferi, mete-

oroloji, okyanus bilimi, optik, petrol mühendisliği, plazma fiziği, kuantum mekaniği gibi birçok alanda Sturm-Liouville teorisi kullanılmaktadır. Sonuç olarak gerek kesirli mertebeden gerekse tamsayılı mertebeden sınır değeri problemleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır [21-27, 30, 31, 34, 36-47].



2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Gamma Fonksiyonu)

$\operatorname{Re} z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Gamma fonksiyonu denir [2].

Tanım 2.1.2. (Mittag-Leffler Fonksiyonu)

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel yönteminde çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. Üstel fonksiyon e^z , tamsayı dereceden diferansiyel denklem teorisinde önemli bir role sahip olup bu fonksiyonun bir parametrelili genelleştirilmiş hali

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

şeklinde tanımlanır.

Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyona genelleştirme ise ilk olarak Agarwal ve Humbert tarafından Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak yapılmış olup, kesirli dereceden diferansiyel hesaplamada önemli bir yere sahiptir. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

seri açılımı şeklindedir [2].

Tanım 2.1.3. (Beta Fonksiyonu)

m, n kompleks sayı olmak üzere

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad (\operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0),$$

şeklinde tanımlı fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir

Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasında

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad \operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0,$$

şeklinde bir bağıntı vardır ve

$$B(m, 1 - m) = \Gamma(m) \Gamma(1 - m) \quad \operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0,$$

eşitliği sağlanır [3].

Tanım 2.1.4. (Riemann-Liouville Türevi)

Riemann Liouville kesirli türevi, $q > 0$, $q \in \mathbb{R}$ ve $n - 1 \leq q \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-n+q}} dt,$$

şeklindedir [2].

Ayrıca $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere sağ ve sol taraflı Riemann Liouville kesirli türevi

$$D_{a,+}^\alpha f(x) = D(I_{a,+}^{1-\alpha} f)(x), \quad x > a, \quad (2.1.3)$$

$$D_{b,-}^\alpha f(x) = -D(I_{b,-}^{1-\alpha} f)(x), \quad x < b, \quad (2.1.4)$$

eşitliklerini sağlar. Riemann-Liouville yaklaşımının bazı özellikleri şöyledir:

I. $p > 0, q > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^{-q} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t),$$

şeklinde gösterilebilir.

II. $p > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t),$$

bulunur. Fakat $(k - 1 \leq p < k)$ için

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)},$$

şeklindedir. Eğer $0 \leq p < 1$ ise yukarıdaki ifade

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)},$$

olarak elde edilir.

III. $p > 0, q > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t),$$

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad 0 \leq k-1 \leq q < k,$$

olur.

IV. n tamsayı olmak üzere eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = \left({}_a D_t^p \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t).$$

Ayrıca $m-1 \leq p < m$ ve $n-1 \leq q < n$ olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)}, \quad (2.1.5)$$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(-q-j+1)}, \quad (2.1.6)$$

eşitlikleri vardır. Ayrıca (2.1.5) ve (2.1.6) denklemlerinin eşit olması için

$$[{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$[{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

şartlarının sağlanması gerekir [2, 5].

Tanım 2.1.5. (Riemann-Liouville İntegrali)

$\text{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere Riemann Liouville sağ ve sol kesirli integrali,

$$(I_{a,+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad x > a, \quad (2.1.7)$$

$$(I_{b,-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (s-x)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad x < b, \quad (2.1.8)$$

şeklinde [3].

Tanım 2.1.6. (Grunwald-Letnikov Türevi)

$m, m \leq p < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, \dots, m+1)$ türevleri de $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde $f(t)$

fonksiyonunun p -inci mertebeden Grunwald-Letnikov kesirli türevi,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

şeklindedir [2]. Burada

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!},$$

olarak alınmıştır. Ayrıca polinomlar için $f(t) = (t-a)^\beta$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevini,

$${}_a D_t^p (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)} (t-a)^{\beta-p},$$

şeklinde tanımlamıştır.

$f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun p . mertebeden Grunwald-Letnikov kesirli integrali

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r+1)}{r!},$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh), \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $f'(t)$ türevi $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ise o zaman (2.1.10) denkleminde bir defa kısmi integrasyon uygularsak

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a) (t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau,$$

elde edilir. $f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında $m+1$ defa sürekli diferansiyellenebilir ise o zaman (2.1.10) denkleminde

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau,$$

elde edilir. Grunwald-Letnikov yaklaşımının bazı özellikleri şöyledir;

I. Grunwald-Letnikov kesir mertebeden türev operatörü lineerdir.

II. n tamsayı ve $p > 0$ olmak üzere $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ise

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t),$$

bulunur.

III. $0 \leq m < p < m+1$ ve $0 \leq n < q < n+1$ olsun.

Eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, r-1; r = \max(n, m))$ ise

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t),$$

eşitliği mevcuttur.

IV. $0 \leq m < p < m+1$ ve $q < 0$ olsun. Eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t),$$

olur. $p < 0$ ve q herhangi bir reel sayı olmak üzere

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t),$$

elde edilir.

Grunwald-Letnikov ile Riemann-Liouville yaklaşımı arasındaki bağıntı gözönüne alınsın. $f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında $m+1$ defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere bu takdirde her $p, (0 \leq m \leq p < m+1)$ için ${}_a D_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grunwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. Gerçekten de Riemann-Liouville kesirli türev tanımında $m+1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau, \\
&= {}_a D_t^p f(t),
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

elde edilir. Sonuç olarak eğer $t \geq a$ için $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ mertebeden sürekli türevlere sahipse o zaman (2.1.9)'da verilen Grunwald-Letnikov kesirli türev tanımı ile (2.1.11)'de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı birbirine denktir. Bunun yanında (2.1.11)'de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı $f(t)$ fonksiyonu üzerinde bazı şartlar gerektirir. Gerçektende $f(t)$ fonksiyonunun integrallenebilir olması (2.1.11)'de verilen integralin varlığı için yeterlidir ve bu integral $m+1$ kez diferensiyellenebilir.

Şimdi (2.1.12) denkleminin özel halini düşünelim. $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $f'(t)$, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. O zaman her p , ($0 < p < 1$) için Riemann-Liouville kesirli türevi ve Grunwald-Letnikov kesirli türevi mevcut ve

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \frac{f(a) (t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau,$$

olarak yazılır.

$f(t)$ fonksiyonu $m+1$ mertebeden sürekli türevlere sahip ve $m \leq p < m+1$ olmak üzere

$$[{}_a D_t^p f(t)]_{t=a} = 0, \tag{2.1.13}$$

şartı

$$f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m-1), \tag{2.1.14}$$

şartına denktir. Gerçekten de (2.1.14) şartı sağlanır ve sonra (2.1.12)'da $t \rightarrow a$ alınırsa (2.1.13) elde edilir. Diğer taraftan (2.1.13) şartı sağlanırsa (2.1.12)'nin her iki tarafı $(t-a)^{p-j}$, ($j = m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0$), ile çarpılır ve $t \rightarrow a$ için limit alınırsa $f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m-2)}(a) = 0$, ..., $f''(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f(a) = 0$ elde edilir. Böylece

$$[{}_a D_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \iff f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

elde edilir [2,5].

Tanım 2.1.7. (Caputo Türevi)

Riemann Liouville yaklaşımı $t = a$ 'da kesirli türevin limit değerleriyle verilen başlangıç şartlarını içermektedir. Örneğin;

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n.\end{aligned}$$

Burada b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 'dir. Böylece başlangıç koşullarından oluşan başlangıç değer problemi Riemann-Liouville yaklaşımı ile başarıyla çözülebilir. Bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü böyle başlangıç şartlarının fiziksel karşılığı mevcut değildir. Bu durum M. Caputo tarafından geliştirilen, $y'(a)$, $y''(a)$, ..., gibi tamsayı mertebeden türevlerin $t = a$ noktasındaki limit değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler için verilen başlangıç-değer problemlerinin başlangıç şartlarını formülize eden Caputo yaklaşımı ile çözülmüştür. Caputo kesirli türev tanımı, $f(t)$ fonksiyonu n defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere $n - 1 \leq q \leq n$ için

$${}^C D_t^p = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}},$$

olarak Caputo tarafından tanımlanmıştır.

Ayrıca

$$({}^C D_{a,+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a,+}^{1-\alpha} D f)(x), \quad x > a, \quad (2.1.15)$$

$$({}^C D_{b,-}^{\alpha} f)(x) = (I_{b,-}^{1-\alpha} (-D) f)(x), \quad x < b, \quad (2.1.16)$$

eşitlikleri sağlanır [2,5].

Tanım 2.1.8. (Jumarie Türevi)

m , $m - 1 < p < m$ ve $m \geq 1$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, p herhangi bir pozitif sayı, $t \in [0, 1]$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun p . mertebeden Jumarie kesirli türevi,

$$f^{(p)}(t) = \frac{1}{\Gamma(m - p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} [f(\tau) - f(a)] d\tau,$$

şeklinde tanımlanır [61].

Tanım 2.1.9. (Mellin-Ross Fonksiyonu)

$E_t(\nu, \alpha)$ ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu $e^{\alpha t}$ üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılır. Bu fonksiyonun özelliği hem Gamma fonksiyonu hem de Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılmalıdır. Bu fonksiyon

$$\begin{aligned} E_t(\nu, \alpha) &= t^\nu e^{\alpha t} \Gamma^*(\nu, \alpha t), \\ E_t(\nu, \alpha) &= t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)}, \\ &= t^\nu E_{1, \nu+1}(\alpha t) \end{aligned}$$

şeklinde olup, burada

$$\Gamma^*(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^\nu} \int_0^t e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \nu > 0$$

ifadesine de tamamlanmış Gamma fonksiyonu denir [5].

Tanım 2.1.10. (Hata Fonksiyonu)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hata fonksiyonu denir. Bu fonksiyona ilişkin aşağıdaki değerler ve eşitlikler mevcuttur [2],

- I. $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$,
- II. $\operatorname{erf}(0) = 0$,
- III. $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Tanım 2.1.11. (Wright Fonksiyonu)

$$w(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k!}}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)},$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Wright fonksiyonu denir [5].

Tanım 2.1.12.

$z \in \mathbb{C}$, $a_l, b_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($l = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$) olmak üzere genel anlamda Wright fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır [5],

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1)_{1,p} \\ (b_1, \beta_1)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^p \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}.$$

Teorem 2.1.13.

$a_l, b_j \in \mathbb{C}$, ve $\alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($l = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$) ve

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{l=1}^p \alpha_l, \\ \delta &= \prod_{l=1}^p |\alpha_l|^{-\alpha_l} \prod_{j=1}^q |\beta_j|^{\beta_j}, \\ \mu &= \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{l=1}^p a_l + \frac{p-q}{2},\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

I. Eğer $\Delta > -1$ ise bu taktirde (2.1.17) serisi tüm $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.

II. Eğer $\Delta = -1$ ise bu taktirde (2.1.17) serisi $|z| < \delta$ ve $|z| = \delta$ ve $\Re(\mu) > 1/2$ için yakınsaktır [5].

Özellik 2.1.14.

(2.1.3) – (2.1.8), (2.1.15), (2.1.16) da tanımlanan kesirli diferansiyel operatörler

$$\int_a^b f(x) D_{b,-}^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x)^C D_{a,+}^\alpha f(x) dx - f(x) I_{b,-}^{1-\alpha} g(x) \Big|_a^b,$$

veya

$$\begin{aligned}& \int_a^b f(x) D_{b,-}^\alpha g(x)^C D_{a,+}^\alpha k(x) dx, \\ &= \int_a^b g(x)^C D_{a,+}^\alpha f(x)^C D_{a,+}^\alpha k(x) dx - f(x) I_{b,-}^{1-\alpha} g(x)^C D_{a,+}^\alpha k(x) \Big|_a^b, \\ & \int_a^b f(x) D_{a,+}^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x)^C D_{b,-}^\alpha f(x) dx + f(x) I_{a,+}^{1-\alpha} g(x) \Big|_a^b,\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar [38].

Özellik 2.1.15.

Kesirli türev ve integral arasında aşağıdaki özdeşlikler vardır [5].

$D_{a,+}^\alpha I_{a,+}^\alpha f(x) = f(x)$	${}^C D_{a,+}^\alpha I_{a,+}^\alpha f(x) = f(x)$
$D_{b,-}^\alpha I_{b,-}^\alpha f(x) = f(x)$	${}^C D_{b,-}^\alpha I_{b,-}^\alpha f(x) = f(x)$
$D_{a,+}^\alpha I_{a,+}^\beta f(x) = I_{a,+}^{\beta-\alpha} f(x)$	$I_{a,+}^\alpha I_{a,+}^\beta = I_{a,+}^{\alpha+\beta}$
$D_{b,-}^\alpha I_{b,-}^\beta f(x) = I_{b,-}^{\beta-\alpha} f(x)$	$I_{b,-}^\alpha I_{b,-}^\beta = I_{b,-}^{\alpha+\beta}.$

Tanım 2.1.16. (Daralma Dönüşümü)

X bir metrik uzay olsun. Eğer T operatörü aşağıda verilen koşulları sağlarsa bu operatöre "Daralma Dönüşümü" denir.

$$\text{I } T : X \rightarrow X$$

$$\text{II. } \forall x, y \in X \text{ için } 0 < \alpha < 1 \text{ olmak üzere}$$

$$d(T[x], T[y]) \leq \alpha d(x, y),$$

olur [32].

Tanım 2.1.17. (Kesirli Laplace Dönüşümü)

$f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

ile verilir. Burada $F(s)$ kompleks s değişkeninin bir fonksiyonudur. Diğer bir özelliği olarak $f(t)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0,$$

şeklindedir. Kesirli hesaplama tekniğinde Laplace dönüşümleri, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$L\{{}_0D_t^{-\alpha} f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s),$$

denklemini Riemann-Liouville ve Grunwald-Letnikov tarafından kesirli integrallerin Laplace dönüşümü olarak verilir.

Riemann-Liouville kesirli türevlerinin Laplace dönüşümü, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$L\{{}_0D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n),$$

ile verilir.

Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm denklemi

$$L\{{}_0^C D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n),$$

ile verilmektedir. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümünün bu ifadesi $f(t)$ ve $f(t)$ 'nin türevlerini içermektedir. Bu haliyle bazı fiziksel süreçlere uygulanması çok

daha kolaydır. Örneğin, $f(0)$ başlangıç durumu, $f'(0)$ başlangıç hızı, $f''(0)$ başlangıç ivmesi olabilir. Bununla birlikte lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanışlı bir ifadedir [2].

Grunwald-Letnikov kesirli türevinin Laplace dönüşümü, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$L\{ {}_0D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s),$$

ile verilir [2,5].

Tanım 2.1.18. (Sobolev Uzay)

Sobolev uzayları 1930'larda Rus matematikçi Sergei Lvovich Sobolev tarafından eliptik diferansiyel denklemleri incelemek için ortaya atılmıştır. Sobolev uzayları Hilbert uzaylarının önemli bir türüdür.

Kabul edelim ki Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bir bölge ve $L_2(\Omega)$ uzayı bir Lebesgue uzayı olsun. $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayı, $u \in L_2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ özelliğine sahip olan tüm u fonksiyonlarının uzayıdır. Buradaki 1, mertebesi bir olan kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ uzayına ait olması gerektiğini göstermektedir. 2 ise, $L_2(\Omega)$ uzayına ait olma koşulundaki integrantın kuvvetini göstermektedir. $W^{1,2}(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzayları arasında $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ şeklinde bir ilişki vardır. $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$ olmak üzere $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayındaki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g dx + \int_{\Omega} \text{grad } f \cdot \text{grad } g dx,$$

veya

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} dx + \int_{\Omega} Df \cdot Dg dx,$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} f^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad } f|^2 dx \right)^{1/2},$$

olarak ifade edilir. Sobolev uzaylarına W -uzayları da denir [13].

Tanım 2.1.19. (Conformable Türevi)

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t > 0, \alpha \in (0, 1]$ olmak üzere f 'nin α mertebeden conformable türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır [14],

$$(T_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Tanım 2.1.20. (Ağırlık Fonksiyonu)

$f(x)$ fonksiyonu, (a, b) aralığında tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x)$ integrallenebilir ve integrali pozitif ise bu fonksiyona ağırlık fonksiyonu denir [32].

Lemma 2.1.21.

$\text{Re}(\alpha) > 0$, $n = \text{Re}(\alpha) + 1$ ve $f_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x)$ kesirli Riemann Liouville integrali olmak üzere

a) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ve $f(x) \in I_{b-}^{\alpha}(L_p)$ ise, bu takdirde

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

şeklindedir. Burada

$$I_{b-}^{\alpha}(L_p) = \{f : f = I_{b-}^{\alpha} \varphi, \varphi \in L_p(a, b)\},$$

dır.

b) Eğer $f(x) \in L_1(a, b)$ ve $f_{n,\dots,\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ ise bu takdirde

$$(I_{b-}^{\alpha} D_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j},$$

sağlanır [3].

Lemma 2.1.22.

$\alpha > 0$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n = [\alpha] + 1$ olmak üzere bu takdirde

$${}^C D^{\alpha} h(t) = 0,$$

diferansiyel denklemi

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^{n-1}$$

çözümüne sahiptir [50].

Lemma 2.1.23.

$\alpha > 0$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n = [\alpha] + 1$ olmak üzere

$$I^{\alpha C} D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^{n-1},$$

eşitliği vardır [50].

Tanım 2.1.24. (Eşsüreklilik)

Bir $\Omega \subset C(X, Y)$ alt uzayı, her $f \in \Omega$ fonksiyonu için verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen, $d(x, y) < \delta$ alındığında $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde f 'den bağımsız bir $\delta(\varepsilon, x) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu takdirde f fonksiyonu $x \in X$ noktasında eşsüreklidir denir [32].

Teorem 2.1.25. (Arzela-Ascoli Teoremi)

X kompakt uzay olsun ve $C(X)$ 'i supremum metriğine göre tam metrik uzay olarak alalım. $A \subset C(X)$ için aşağıdakilere denktir [28].

- (i) A kompakt.
- (ii) A kapalı, sınırlı ve eşsüreklidir.

Teorem 2.1.26. (Schaefer Sabit Nokta Teoremi)

X bir Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\{x \in X : x = \lambda T(x), \lambda \in [0, 1]\},$$

kümesi sınırlı ise bu takdirde T bir sabit noktaya sahiptir [28].

3. GENEL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bu bölümde Sturm-Liouville problemi ve spektral veriler tanıtılmış ayrıca özfonksiyonların sıfırları ve bununla ilişkili teoremler ve ispatları verilmiştir [17-20].

3.1. Sturm-Liouville Problemi ve Spektral Özellikleri

Sturm-Liouville operatörü,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

şeklinde tanımlı L operatörüne denir. Burada $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyondur.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (3.1.1)$$

denklemine de Sturm-Liouville denklemi denir. Bu denklem üç farklı türden sınır şartlarıyla ifade edilir.

I. Ayrık sınır şartları:

$$y(a, \lambda) \cos \alpha + y'(a, \lambda) \sin \alpha = 0, \quad (3.1.2)$$

$$y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0, \quad (3.1.3)$$

II. Periyodik ve antiperiyodik sınır şartları:

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda),$$

$$y(a, \lambda) = -y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = -y'(b, \lambda),$$

III. Uçları sabitlenmiş sınır şartları:

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0,$$

$$y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0,$$

biçiminde ifade edilir. (3.1.1) – (3.1.3) şeklinde tanımlı probleme Sturm-Liouville problemi denir. (3.1.2) sınır koşulunda her iki tarafı $\sin \alpha$ ' ya ve (3.1.3) koşulunda her iki tarafı $\sin \beta$ ' ya bölersek

$$y(a, \lambda) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + y'(a, \lambda) = 0,$$

$$y(b, \lambda) \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + y'(b, \lambda) = 0,$$

olur. Buradan

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -h, \quad \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = H,$$

olmak üzere,

$$y'(a, \lambda) - hy(a, \lambda) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$y'(b, \lambda) + Hy(b, \lambda) = 0, \quad (3.1.5)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $h = \infty$ ise ($\sin \alpha = 0$),

$$y(a, \lambda) = 0,$$

$H = \infty$ ise ($\sin \beta = 0$),

$$y(b, \lambda) = 0,$$

olur.

(3.1.1) – (3.1.3) Sturm-Liouville probleminde $q(x) \in C[a, b]$ ve h, H sonlu reel sayılar ise bu takdirde Sturm-Liouville problemine regüler, bu şartlardan biri sağlanmaz ise singüler problem denir.

$y \in L_2[a, b]$ olmak üzere

$$Ly = \lambda y,$$

denklemini sağlayan $y \neq 0$ fonksiyonu mevcutsa λ 'ya L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna da λ 'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ özfonksiyonlar ortogonaldır. Yani,

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad x \in [0, \pi],$$

eşitliği vardır.

İspat. f ve g sürekli ve ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. $Lf = f''(x) - q(x)f(x)$ eşitliği ele alınırsa İki fonksiyonun Wronskian determinanı

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix},$$

biçiminde tanımlanır. $Lfg(x)$ ifadesini $[0, \pi]$ aralığında integre ederek ve gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi Lfg(x)dx &= \int_0^\pi \{f''(x) - q(x)f(x)\}g(x)dx, \\
&= \int_0^\pi f''(x)g(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= \int_0^\pi g(x)df'(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'(x)f'(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'(x)df(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - g'(x)f(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)g''(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - g'(\pi)f(\pi) + g'(0)f(0) \\
&\quad + \int_0^\pi [g''(x) - q(x)g(x)]f(x)dx, \\
&= -W_\pi\{f, g\} + W_0\{f, g\} + \int_0^\pi Lgf(x)dx,
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

sonucuna ulaşılır.

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0,$$

sınır şartları gereği $W_\pi\{f, g\} = 0$ ve $W_0\{f, g\} = 0$ olup, (3.1.6) eşitliği gözönüne alındığında

$$\int_0^\pi Lfg(x)dx = \int_0^\pi Lgf(x)dx, \tag{3.1.7}$$

bulunur. $f(x)$ yerine $y(x, \lambda_1)$ ve $g(x)$ yerine $y(x, \lambda_2)$ alırsak ve

$$Ly(x, \lambda_1) = \lambda_1 y(x, \lambda_1), \quad Ly(x, \lambda_2) = \lambda_2 y(x, \lambda_2),$$

ifadeleri (3.1.7)'de yerine yazılırsa

$$\int_0^{\pi} \lambda_1 y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = \int_0^{\pi} \lambda_2 y(x, \lambda_2) y(x, \lambda_1) dx,$$

olduğundan

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0,$$

bulunur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$\int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0,$$

olur. Dolayısıyla $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldır.

Lemma 3.1.2.

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi],$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0,$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0,$$

sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. Kabul edelim ki $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. $q(x)$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon, α, β reel sayı olduğundan dolayı $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da özdeğer olur. Bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon $y(x, \overline{\lambda_1}) = \overline{y(x, \lambda_1)}$ 'dir. Bu takdirde Lemma 3.1.1 gereğince,

$$\int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) \overline{y(x, \lambda_1)} dx = 0,$$

olur. Yani;

$$\int_0^{\pi} |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0,$$

ise $y(x, \lambda_1) = 0$ olur. Halbuki $y(x, \lambda_1) \neq 0$ olduğundan bu bir çelişki doğurur. O halde özdeğer kompleks olamaz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.3. $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, reel değerli bir fonksiyon ve

$$L\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in [a, b], \quad (3.1.8)$$

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'_x(a, \lambda) = -\cos \alpha, \quad (3.1.9)$$

probleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde her reel α için $x \in [a, b]$ olacak biçimde bir tek $\varphi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Ayrıca her sabit $x \in [a, b]$ için $\varphi(x, \lambda)$ çözümü λ 'ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat. Başlangıç fonksiyonunu $\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha$ olarak seçelim.

Bu fonksiyon (3.1.8) denkleminin (3.1.9) koşullarını sağlayan çözümüdür. $n > 0$ için,

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_{n-1}(t, \lambda) (x - t) dt, \quad (3.1.10)$$

şeklinde olsun. $q(x) \in [a, b]$ aralığında sürekli olduğu için sınırlıdır.

Yani $|q(x)| < M'$ dir. $|\lambda| \leq N$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için $|\varphi_0(x, \lambda)| \leq K$ olur. Böylece $n = 1$ için (3.1.10) denklemi

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt,$$

biçimindedir. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt \right|, \\ &\leq \int_a^x \{|q(t)| + |\lambda|\} |\varphi_0(t, \lambda)| |x - t| dt, \\ &\leq (M + N) K \int_a^x (x - t) dt, \\ &= (M + N) K \left(-\frac{(x - t)^2}{2} \right) \Big|_a^x, \\ &= \frac{1}{2} (M + N) K (x - a)^2, \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $n = 2$ için

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_1(t, \lambda) (x - t) dt, \quad (3.1.11)$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt, \quad (3.1.12)$$

(3.1.11)'den (3.1.12) çıkarılıp eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x \{q(t) - \lambda\} [\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)] (x - t) dt \right|, \\ &\leq \int_a^x |q(t) - \lambda| |\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)| |x - t| dt, \\ &\leq \frac{1}{2} (M + N) (M + N) K \int_a^x (t - a)^2 (x - t) dt, \\ &= \frac{(M + N)^2 K (b - a) (x - a)^3}{2 \cdot 3}, \\ &= \frac{K (M + N)^2 (b - a) (x - a)^3}{3!}, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece bu süreci devam ettirirsek,

$$\begin{aligned} &\vdots \\ |\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| &\leq \frac{K (M + N)^n (b - a)^{n-1} (x - a)^{n+1}}{(n + 1)!}, \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)\}, \quad (3.1.13)$$

$x \in [a, b]$ için $|\lambda| \leq N$ olacak biçimde λ 'ya göre düzgün yakınsak olur. Şimdi $n \geq 2$ için $\varphi(x, \lambda)$ 'nin λ 'ya göre tamlılığını ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) &= \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)\} dt, \\ \varphi''_n(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-1}(x, \lambda), \\ \varphi''_{n-1}(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-2}(x, \lambda), \\ \varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} [\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)], \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.13) eşitliğini x 'e göre iki kez diferansiyellersek,

$$\begin{aligned}
\varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n''(x, \lambda) - \varphi_{n-1}''(x, \lambda)\}, \\
&= \varphi_1''(x, \lambda) - \varphi_0''(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi_n''(x, \lambda) - \varphi_{n-1}''(x, \lambda)\}, \\
&= [q(x) - \lambda] \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\} \right], \\
&= \{q(x) - \lambda\} \varphi(x, \lambda),
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\exists \varphi(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur. Yani $\varphi(x, \lambda)$, (3.1.8) denkleminin (3.1.9) başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür. Ayrıca (3.1.13) serisi düzgün yakınsak olduğu için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu λ 'ya göre tam fonksiyondur.

Teorem 3.1.4. (3.1.8) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad (3.1.14)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$,

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1, \quad (3.1.15)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde (3.1.8) – (3.1.14) ve (3.1.8) – (3.1.15) problemlerinin sırasıyla çözümleri olan $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonları için

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda}(x - \xi)] q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (3.1.16)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda}(x - \xi)] q(\xi) \psi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (3.1.17)$$

bağıntıları vardır.

İspat. Önce (3.1.16) eşitliğini göstereyim, $\varphi(x, \lambda)$, (3.1.8) denkleminin çözümü olduğu için,

$$-\varphi''(\xi, \lambda) + q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) = \lambda \varphi(\xi, \lambda),$$

denklemini,

$$q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) = \varphi''(\xi, \lambda) + \lambda \varphi(\xi, \lambda),$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.16) bağıntısının sağında bulunan integrali hesaplayalım,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \left[\sqrt{\lambda} (x - \xi) \right] q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi &= \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} [\varphi''(\xi, \lambda) + \lambda \varphi(\xi, \lambda)] d\xi, \\
&= \lambda \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \\
&\quad + \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi''(\xi, \lambda) d\xi, \quad (3.1.18)
\end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi''(\xi, \lambda) d\xi &= \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} d\varphi'(\xi, \lambda), \quad (3.1.19) \\
&= \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi'(\xi, \lambda) \Big|_0^x - \int_0^x \varphi'(\xi, \lambda) d \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\}, \\
&= \varphi'(x, \lambda) \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - x) \right\} - \varphi'(0, \lambda) \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - 0) \right\} \\
&\quad + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi'(\xi, \lambda) d\xi, \\
&= -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} d\varphi(\xi, \lambda) d\xi, \\
&= -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \left\{ \varphi(\xi, \lambda) \cos \left(\sqrt{\lambda} (x - \xi) \right) \Big|_0^x \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\lambda} \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) d \cos \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} d\xi \right\}, \\
&= -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \left\{ \varphi(x, \lambda) \cos \left(\sqrt{\lambda} (x - x) \right) \right. \\
&\quad \left. - \varphi(0, \lambda) \cos \left(\sqrt{\lambda} (x - 0) \right) - \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \right\}, \\
&= -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \left(\varphi(x, \lambda) - \cos \left(\sqrt{\lambda} x \right) \right) \\
&\quad - \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi(\xi, \lambda) d\xi,
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi (3.1.19)'u (3.1.18) formülünde yerine yazalım,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} q(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi &= -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \left(\sqrt{\lambda} x \right) \\
&\quad - \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi(\xi, \lambda) d\xi
\end{aligned}$$

$$+\lambda \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \varphi (\xi, \lambda) d\xi,$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} q (\xi) \varphi (\xi, \lambda) d\xi = -h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \sqrt{\lambda} \varphi (x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \left(\sqrt{\lambda} x \right),$$

buradan $\sqrt{\lambda} \varphi (x, \lambda)$ yalnız bırakılırsa

$$\sqrt{\lambda} \varphi (x, \lambda) = \sqrt{\lambda} \cos \left(\sqrt{\lambda} x \right) + h \sin \left(\sqrt{\lambda} x \right) + \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} q (\xi) \varphi (\xi, \lambda) d\xi,$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını $\sqrt{\lambda}$ ' ya bölersek (3.1.16) eşitliği elde edilir. Şimdi de (3.1.17) bağıntısının sağlandığını gösterelim. $\psi (x, \lambda)$, (3.1.8) denkleminin (3.1.15) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} -\psi'' (x, \lambda) + q (x) \psi (x, \lambda) &= \lambda \psi (x, \lambda), \\ q (x) \psi (x, \lambda) &= \psi'' (x, \lambda) + \lambda \psi (x, \lambda), \end{aligned}$$

hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \left[\sqrt{\lambda} (x - \xi) \right] q (\xi) \psi (\xi, \lambda) d\xi &= \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \psi'' (\xi, \lambda) d\xi \\ &+ \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \psi (\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned}$$

son bağıntının sağında bulunan birinci integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve (3.1.15) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \psi'' (\xi, \lambda) d\xi &= -\sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} \psi (x, \lambda) \\ &- \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} \psi (\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \xi) \right\} q (\xi) \psi (\xi, \lambda) d\xi = -\sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} \psi (x, \lambda),$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $\sqrt{\lambda}$ 'ya bölünüp, $\psi(\xi, \lambda)$ çekilirse (3.1.17) eşitliği bulunur.

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin oluşturduğu cümleye spektrum denir. Özdeğerler, öz fonksiyonlar ve normlaştırıcı sayılara spektral veriler denir. $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun bilinerek spektral verilerin hesaplanmasına *düz* spektral problem denir. Spektral verilerden hareketle $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun bulunmasına ise *ters* problem denir.

3.2. Özfonksiyonların Sıfırları

(3.1.1) – (3.1.3) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. $q(x) = 0$ olacak şekilde aşağıdaki sınır-değer problemi

$$y'' + \lambda y = 0,$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

dir. Bu problemin özdeğerleri $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2 \dots$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi(x, \lambda_0) = \varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi(x, \lambda_1) = \varphi_1(x) = \cos x,$$

$$\varphi(x, \lambda_2) = \varphi_2(x) = \cos 2x,$$

$$\vdots$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x) = \cos nx,$$

$$\vdots$$

şeklindedir. Böylece sıfırdan başlanacak biçimde özdeğerlerin artış sırasına göre özfonksiyonlar dizisi elde edilir.

$\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarının sıfırları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

I. n . özfonksiyon olan $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nin $[0, \pi]$ aralığında tam olarak n -tane sıfırı vardır.

II. n . ve $(n + 1)$. öz fonksiyonların sıfırları sıralıdır (veya çaprazlaşırlar).

Yani n . özfonksiyonun ardışık iki sıfırı arasında $(n + 1)$. özfonksiyonun bir sıfırı bulunur.

Teorem 3.2.2. (I.Mukayese Teoremi)

$$u'' + g(x)u = 0, \quad (3.2.1)$$

$$v'' + h(x)v = 0, \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilen iki denklemi ele alalım. Eğer $[a, b]$ aralığının tamamı üzerinde $g(x) < h(x)$ ise bu takdirde birinci denklemin aşikar olmayan herhangi bir çözümünün her iki sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı vardır.

İspat. (3.1.1) denklemini v ile (3.1.2) denklemini u ile çarpıp birbirinden çıkarılırsa

$$u''v - v''u + (g(x) - h(x))uv = 0,$$

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}(u'v - v'u) = (h(x) - g(x))uv, \quad (3.2.3)$$

bulunur. u 'nın ardışık iki sıfırını x_1 ve x_2 ile gösterelim.

Kabul edelim ki v 'nin (x_1, x_2) aralığında sıfırı bulunmasın. Bu takdirde (3.2.3) eşitliğini x_1 'den x_2 'ye kadar integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(u'v - v'u) dx &= (u'v - v'u)|_{x_1}^{x_2}, \\ &= u'(x_2)v(x_2) - v'(x_2)u(x_2) - u'(x_1)v(x_1) + v'(x_1)u(x_1), \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))u(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (x_1, x_2) aralığında v 'nin sifıra eşit olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan (x_1, x_2) aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ olsun. Dolayısıyla bir önceki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. $u(x) > 0$ olduğu için x_1 noktasında $u(x)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer şekilde x_2 noktasında da $u(x)$ fonksiyonu azalandır ve $u'(x_2) < 0$ olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla $u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (x_1, x_2) aralığında v 'nin sıfırlarının varlığı ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.3. $g(x) < -m^2 < 0$ ve $(-\infty < a \leq x \leq b < \infty)$ olmak üzere

$$y'' + g(x)y = 0,$$

denkleminin her çözümünün en fazla bir sıfırı vardır.

İspat. $g(x) < h(x) = -m^2 < 0$ ise

$$y'' - m^2 y = 0,$$

denkleminin çözümünün sıfırının olmadığını ispatlayalım. Bu denklemin çözüm fonksiyonu e^{mx} ise $m^2 e^{mx} - m^2 e^{mx} = 0$ olduğundan $e^{mx} \neq 0$ olur ve sıfırları var olmadığı için her sonlu aralıkta $y'' + g(x)y = 0$ denkleminin en fazla bir sıfırı vardır.

Teorem 3.2.4. (II. Mukayese Teoremi)

(3.2.1) ve (3.2.2) denkleminin

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha, \quad (3.2.4)$$

$$v(a) = \sin \alpha, \quad v'(a) = -\cos \alpha, \quad (3.2.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ ve $[a, b]$ aralığının tamamında $g(x) < h(x)$ olsunlar.

Eğer $u(x)$ fonksiyonu, $a < x \leq b$ aralığında m -tane sıfıra sahip ise, bu takdirde $v(x)$ fonksiyonunun aynı aralıkta en az m -tane sıfırı mevcut olup, $v(x)$ 'in k . sıfırı $u(x)$ 'in k . sıfırından küçüktür.

İspat. $u(x)$ 'in a noktasına en yakın ve a 'dan farklı sıfırını x_1 ile gösterelim. Bir önceki teoreme dayanarak $v(x)$ 'in (a, x_1) aralığında en az bir sıfıra sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Hipotez olarak bu aralıkta $v(x)$ 'in sıfıra sahip olmadığını kabul edelim.

Genelliği bozmadan (a, x_1) aralığında $u(x) > 0$ ve $v(x) > 0$ olsun. $u(x_1) = 0$ olduğundan $u(x)$ fonksiyonu x_1 noktasının bir komşuluğunda azalandır. Bu nedenle $u'(x_1) \leq 0$ 'dır. (3.2.3) bağıntıyı a 'dan x_1 'e integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) = \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx,$$

elde edilir. (a, x_1) aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ ve $g(x) < h(x)$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. Fakat sol tarafı pozitif değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.5. Eğer $x_0 (a < x_0 < b)$, $\varphi(x, \lambda)$ özfonksiyonunun sıfırı ise bu durumda yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ bulmak mümkün ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olacak şekilde $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ için sadece bir tek sıfırı vardır.

Teorem 3.2.6. (Sturm Osilasyon Teoremi)

(3.1.1) – (3.1.3) Sturm-Liouville probleminin sınırsız olarak artan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerleri vardır. Bu takdirde λ_m özdeğerlerine karşılık gelen $\varphi(x, \lambda_m)$ özfonksiyonunun $a < x < b$ aralığında m -tane sıfırı vardır.



4. KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

4.1. α . mertebeden Kesirli Sturm-Liouville Probleminin Spektral Değerlendirilmesi

O. P. Agrawal ve M. Klimek 2012-2013 yıllarında kesirli Sturm-Liouville problemleri ile ilgili önemli çalışmalar yapmışlardır [38, 48]. Bessel potansiyelli kesirli Sturm Liouville problemi için spektral teori ise 2013 yılında tanımlanmıştır [29]. Genel olarak bu çalışmaların ışığında, bu bölümde difüzyon operatörü, Coulomb potansiyeli ve hidrojen atom denklemi için kesirli Sturm-Liouville problemlerinin temel spektral teorisi verildi.

$\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\alpha = D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha + q(x), \quad (4.1.1)$$

operatörü ve

$$\mathcal{L}_\alpha f_\lambda(x) + \lambda w_\alpha(x) f_\lambda(x) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$c_1 f_\lambda(a) + c_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_\lambda(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad (4.1.3)$$

$$d_1 f_\lambda(b) + d_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_\lambda(x) \Big|_{x=b} = 0, \quad (4.1.4)$$

regüler kesirli Sturm-Liouville problemini ele alalım. Burada $p(x) \neq 0$, $w(\alpha) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere p , q , w_α , $[a, b]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlardır. λ , sıfır olmayan yani aşikar olmayan çözümlere karşılık gelen özdeğerlerdir.

Teorem 4.1.1. Regüler kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. Özellik (2.1.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \mathcal{L}_\alpha g(x) dx &= \int_a^b f(x) [D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha g(x) + q(x) g(x)] dx, \\ &= \int_a^b q(x) f(x) g(x) dx + \int_a^b p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f(x) {}^C D_{a,+}^\alpha g(x) dx \\ &\quad - f(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha g(x) \Big|_a^b, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

eşitliğini elde edilir. (4.1.2 – 4.1.4) sınır değer probleminin öz fonksiyonu y ve buna karşılık gelen özdeğeri λ olsun. Şimdi y ve y 'nin kompleks eşleniği $\bar{y}$ için aşağıdaki eşitlikler yazılsın

$$\mathcal{L}_\alpha y(x) + \lambda w_\alpha(x) y(x) = 0, \quad (4.1.6)$$

$$c_1 y(a) + c_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad (4.1.7)$$

$$d_1 y(b) + d_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) \Big|_{x=b} = 0, \quad (4.1.8)$$

$$\mathcal{L}_\alpha \bar{y}(x) + \bar{\lambda} w_\alpha(x) \bar{y}(x) = 0, \quad (4.1.9)$$

$$c_1 \bar{y}(a) + c_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad (4.1.10)$$

$$d_1 \bar{y}(b) + d_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_{x=b} = 0, \quad (4.1.11)$$

$c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ ve $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere (4.1.6) denklemi $\bar{y}$ ile (4.1.9) denklemi y ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(\lambda - \bar{\lambda} \right) w_\alpha(x) y(x) \bar{y}(x) = y(x) \mathcal{L}_\alpha \bar{y}(x) - \bar{y}(x) \mathcal{L}_\alpha y(x),$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının terim terim $[a, b]$ aralığında integralleri alınır ve (4.1.5) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \bar{\lambda} \right) \int_a^b w_\alpha(x) y(x) \bar{y}(x) dx &= \int_a^b y(x) \mathcal{L}_\alpha \bar{y}(x) dx - \int_a^b \bar{y}(x) \mathcal{L}_\alpha y(x) dx, \\ &= \int_a^b y(x) \left[D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) + q(x) \bar{y}(x) \right] dx \\ &\quad - \int_a^b \bar{y}(x) \left[D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) + q(x) y(x) \right] dx, \\ &= \int_a^b p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) dx \\ &\quad - y(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_a^b + \int_a^b q(x) y(x) \bar{y}(x) dx \\ &\quad - \int_a^b p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) dx + \bar{y}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) \Big|_a^b - \int_a^b q(x) y(x) \bar{y}(x) dx, \\ &= - y(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_a^b + \bar{y}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha y(x) \Big|_a^b, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.1.7), (4.1.8), (4.1.10), (4.1.11) sınır şartları kullanılırsa

$$\left(\lambda - \bar{\lambda} \right) \int_a^b w_\alpha(x) |y(x)|^2 dx = 0,$$

elde edilir. $y(x)$ aşikar olmayan bir çözümümüz ve $w(x) > 0$ olduğundan $\lambda = \bar{\lambda}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.2. Regüler kesirli Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları, $[a, b]$ üzerinde $w_\alpha(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortagonaldır. Yani

$$\int_a^b w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

dır. Burada f_{λ_j} , λ_j özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat. Kesirli Sturm-Liouville probleminin sırasıyla (λ_1, λ_2) özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları $(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2})$ olsun. O halde

$$\mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_1}(x) + \lambda_1 w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (4.1.12)$$

$$c_1 f_{\lambda_1}(a) + c_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad (4.1.13)$$

$$d_1 f_{\lambda_1}(b) + d_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_{x=b} = 0, \quad (4.1.14)$$

$$\mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_2}(x) + \lambda_2 w_\alpha(x) f_{\lambda_2}(x) = 0, \quad (4.1.15)$$

$$c_1 f_{\lambda_2}(a) + c_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad (4.1.16)$$

$$d_1 f_{\lambda_2}(b) + d_2 I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_{x=b} = 0, \quad (4.1.17)$$

şeklinde ele alınsın. (4.1.12) denklemi f_{λ_2} ile (4.1.15) denklemi f_{λ_1} ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) w_\alpha(x) f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_2} - f_{\lambda_2} \mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_1},$$

elde edilir. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafı terim terim $[a, b]$ aralığında integrallenip ve (4.1.5) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx &= \int_a^b f_{\lambda_1}(x) \mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_2}(x) dx - \int_a^b f_{\lambda_2}(x) \mathcal{L}_\alpha f_{\lambda_1}(x) dx, \\ &= \int_a^b f_{\lambda_1}(x) [D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) + q(x) f_{\lambda_2}(x)] dx \\ &\quad - \int_a^b f_{\lambda_2}(x) [D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) + q(x) f_{\lambda_1}(x)] dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) dx \\
&\quad - f_{\lambda_1}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_a^b + \int_a^b q(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx \\
&\quad - \int_a^b p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) dx + f_{\lambda_2}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_a^b \\
&\quad - \int_a^b q(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx, \\
&= - f_{\lambda_1}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_a^b + f_{\lambda_2}(x) I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_a^b,
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.13), (4.1.14), (4.1.16), (4.1.17) sınır şartları burada kullanılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

sonucuna ulaşılır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alınırsa

$$\int_a^b w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

olur ve ispat tamamlanır.

Şimdi bundan sonraki ispatlarda kullanacağımız bazı yardımcı fonksiyonlar verilirse

$$I_{a,+}^\alpha \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = (b-a)^{\alpha-1} (x-a)^\alpha {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha, -1) \quad (\alpha+1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{x-a}{b-a} \right],$$

burada ${}_1\Psi_2$ Fox-Wright fonksiyonudur bu fonksiyon:

$${}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1) \\ (b_1, \beta_1) \quad (b_2, \beta_2) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + \alpha_1 k)}{\Gamma(b_1 + \beta_1 k) \Gamma(b_2 + \beta_2 k)} \frac{z^k}{k!},$$

ve aşağıdaki parametreler ile tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 = -1, \\
\delta &= |\alpha_1|^{-\alpha_1} |\beta_1|^{\beta_1} |\beta_2|^{\beta_2} = 1, \\
\mu &= b_1 + b_2 - a_1 + \frac{1-2}{2} = 2\alpha - \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Bu fonksiyon Teorem 2.1.13'den $\mu > 1/2$ ve $\alpha > 1/2$ iken $[a, b]$ aralığında sürekli. $D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha$, Sturm-Liouville operatörünün diferansiyel kısmını sıfır yapan fonksiyonlar ϕ_0 ile tanımlansın;

$$D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \phi_0(x) = 0,$$

başka bir ifade ile

$$\phi_0(x) = \xi_1 + \xi_2 I_{a,+}^\alpha \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) p(x)} = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, a, x), \quad (4.1.19)$$

dır. İkinci bir yardımcı fonksiyon

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= I_{a,+}^\alpha I_{b,-}^\alpha 1 = I_{a,+}^\alpha \frac{(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = (b-a)^\alpha (x-a)^\alpha \\ &\quad \times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha+1, -1) \quad (\alpha+1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{x-a}{b-a} \right], \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

şeklinde tanımlanırsa (4.1.18)'e göre parametreler hesaplanırsa

$$\Delta = -1, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2\alpha + \frac{1}{2},$$

elde edilir. Sonuç olarak $\alpha > 0$ ise $\mu > \frac{1}{2}$ ve Fox-Wright fonksiyonu bazı pozitif α için $[a, b]$ aralığında sürekli.

Lemma 4.1.3. $\alpha > 1/2$ olsun

$$F_\lambda(f) = q(x) f_\lambda(x) + \lambda w_\alpha f_\lambda(x),$$

$$\tilde{\Delta} = c_1 d_2 - c_2 d_1 + c_1 d_1 \psi(\alpha, a, b),$$

ifade edilsin. $\tilde{\Delta} \neq 0$. Bu taktirde (4.1.2) – (4.1.4) regüler Sturm-Liouville problemi $C[a, b]$ uzayında aşağıdaki integral denklemine denktir.

$$f_\lambda(x) = -I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) + A(x) \int_a^b F_\lambda(f) dx + B(x) \left(I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) \right) \Big|_{x=b}, \quad (4.1.21)$$

burada $A(x)$ ve $B(x)$

$$A(x) = \frac{c_2}{\tilde{\Delta}} [d_2 + d_1 (\psi(\alpha, a, b) - \psi(\alpha, a, x))],$$

$$B(x) = \frac{d_1}{\Delta} [c_1 \psi(\alpha, a, x) - c_2],$$

şeklindedir. ψ fonksiyonunda (4.1.19) da tanımlanmıştır.

İspat. (4.1.2) denklemi tekrar ele alınsın,

$$D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha \left[f_\lambda(x) + I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) \right] = 0,$$

bu eşitlik $C[a, b]$ uzayında sağlanır ve parantez içindeki fonksiyon, $D_{b,-}^\alpha p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha$ kesirli diferansiyel operatörünü sıfır yapan bir fonksiyondur. Bu nedenle (4.1.19)'a göre

$$f_\lambda(x) + I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, a, x), \quad (4.1.22)$$

elde edilir. İspatı sonuçlandırmak için (4.1.3), (4.1.4) sınır şartlarıyla tanımlanan c_j, d_j , $j = 1, 2$ ve ξ_j , $j = 1, 2$ sabitleri arasında bir bağıntı kuralım. (2.1.15) özelliğinden ve denklem (4.1.22)'den aşağıdaki formül elde edilir.

$$I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_\lambda(x) = -I_{b,-}^1 F_\lambda(f) + \xi_2,$$

sürekli fonksiyon f_λ için

$$\begin{aligned} I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_\lambda(x) \Big|_{x=a} &= - \int_a^b F_\lambda(f) + \xi_2, \\ I_{b,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a,+}^\alpha f_\lambda(x) \Big|_{x=b} &= \xi_2, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

olur.

Sırasıyla f_λ için, (4.1.22) kullanılsa

$$f_\lambda(a) = \phi_0(a) = \xi_1, \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} f_\lambda(b) &= \phi_0(b) - I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) \Big|_{x=b}, \\ &= \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, a, b) - I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) \Big|_{x=b}, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

bulunur. ξ_j sabitleri için (4.1.23) – (4.1.26) dan aşağıdaki lineer denklem sistemine ulaşılır;

$$c_2 X = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2, \quad (4.1.27)$$

$$d_1 \xi_1 + \xi_2 (d_2 + d_1 \psi(\alpha, a, b)) = d_1 Y, \quad (4.1.28)$$

burada kullanılan notasyonlar

$$X = \int_a^b F_\lambda(f) dx,$$

$$Y = I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(f) \Big|_{x=b},$$

şeklindedir. $\tilde{\Delta} \neq 0$ olduğunda ξ_j sabitleri için çözüm tektir ve

$$\xi_1 = (Xc_2(d_2 + d_1\psi(\alpha, a, b)) - Yc_2d_1) / \tilde{\Delta},$$

$$\xi_2 = (Yc_1d_1 - Xc_2d_1) / \tilde{\Delta},$$

bulunur. Yukarıdaki çözümü (4.1.22)'de yerine yazarsak (4.1.21) integral denklemi elde edilir.

Şimdi aşağıdaki notasyonları tanımlayalım

$$A = \|A(x)\|, \quad m_p = \min_{x \in [a,b]} |p(x)|,$$

$$B = \|B(x)\|, \quad M_\varphi = \|\varphi(x)\|.$$

Teorem 4.1.4. (4.1.2)-(4.1.4) probleminde, $\alpha > 1/2$ ve $\tilde{\Delta} \neq 0$ olmak üzere

$$\|q + \lambda w_\alpha\| < \frac{m_p}{M_\varphi + B\varphi(b) + A(b-a)m_p}, \quad (4.1.29)$$

eşitsizliğini sağlayan her bir özdeğer basittir.

İspat. $C[a, b]$ fonksiyon uzayında (4.1.21) denklemi sabit nokta şartı dikkate alınırsa;

$$f_\lambda = T f_\lambda,$$

eşitliğini yazabiliriz. Eşitliğin sağ tarafındaki dönüşümlerin $g \in C[a, b]$ sürekli fonksiyonu için

$$Tg = -I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(g) + A(x) \int_a^b F_\lambda(g) dx + B(x) \left(I_{a,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^\alpha F_\lambda(g) \right) \Big|_{x=b},$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \|F_\lambda(g) - F_\lambda(h)\| &= \|(qg + \lambda w_\alpha g) - (qh + \lambda w_\alpha h)\|, \\ &= \|(q)(g - h) + \lambda w_\alpha (g - h)\| = \|(g - h)(q + \lambda w_\alpha)\|, \\ &\leq \|g - h\| \|q + \lambda w_\alpha\|, \end{aligned}$$

olur. $g, h \in C[a, b]$ sürekli fonksiyonlar çifti için Tg ve Th arasındaki uzaklık hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \|Tg - Th\| &= \left\| \left[-I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} F_{\lambda}(g) + A(x) \int_a^b F_{\lambda}(g) dx + B(x) \left(I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} F_{\lambda}(g) \right) \right] \Big|_{x=b} \right. \\ &\quad \left. - \left[-I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} F_{\lambda}(h) + A(x) \int_a^b F_{\lambda}(h) dx + B(x) \left(I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} F_{\lambda}(h) \right) \right] \Big|_{x=b} \right\|, \\ &= \left\| -I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} (F_{\lambda}(g) - F_{\lambda}(h)) \right. \\ &\quad \left. + A(x) \int_a^b (F_{\lambda}(g) - F_{\lambda}(h)) dx + B(x) \left(I_{a,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{b,-}^{\alpha} (F_{\lambda}(g) - F_{\lambda}(h)) \right) \right\|_{x=b}, \\ &\leq \|g - h\| \cdot \|q + \lambda w_{\alpha}\| \left(\frac{M_{\varphi}}{m_p} + A(b-a) + \frac{B\varphi(b)}{m_p} \right), \\ &\leq \|g - h\| L, \end{aligned}$$

bulunur. Burada $L = \|q + \lambda w_{\alpha}\| \left(\frac{M_{\varphi}}{m_p} + A(b-a) + \frac{B\varphi(b)}{m_p} \right)$ sabittir. (4.1.29) varsayımı kullanılırsa T bir büzülme dönüşümüdür.

$$\|Tg - Th\| \leq \|g - h\| L, \quad L \in (0, 1),$$

böylece (4.1.29) sağlanır. (4.1.3), (4.1.4) sınır şartlarını sağlayan (4.1.2), denkleminin çözümünün varlığı (4.1.21)'deki $f_{\lambda} \in C[a, b]$ olarak ifade edilen sabit noktanın tekliği ile gösterilmiş olur. Böylece özdeğerler basittir.

4.2. Difüzyon Operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{[\alpha, p, q]} = D_{\pi, -}^{\alpha} h(x) {}^C D_{0, +}^{\alpha} + (2\lambda p(x) + q(x)), \quad (4.2.1)$$

operatörünü ve

$$\mathcal{L}_{[\alpha, p, q]} y_{\lambda}(x) + \lambda w_{\alpha}(x) y_{\lambda}(x) = 0, \quad (4.2.2)$$

$$c_1 y_{\lambda}(0) - c_2 I_{\pi, -}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0, +}^{\alpha} y_{\lambda}(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.2.3)$$

$$d_1 y_{\lambda}(\pi) + d_2 I_{\pi, -}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0, +}^{\alpha} y_{\lambda}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.2.4)$$

şeklinde tanımlı kesirli Sturm-Liouville problemi ele alınsın. Burada $q(x) \in L^2[0, \pi]$, $p(x) \in W$ fonksiyonlarıdır ve $h(x), p(x) \neq 0, w_{\alpha}(x) > 0, \forall x \in [0, \pi], d_1^2 + d_2^2 \neq 0, c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ olmak üzere h fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.2.1. Difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville operatörü $L^2[0, \pi]$ üzerinde self-adjointtir.

İspat. Aşağıdaki iç çarpımlar hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^\pi \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \varphi, \phi dx, \\
&= \int_0^\pi \phi(x) [D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) + (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x)] dx, \\
&= \int_0^\pi \phi(x) D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx,
\end{aligned}$$

elde edilir. İlk integrale (2.1.14) özelliği uygulanır ve sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx - \phi(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) \Big|_0^\pi \\
&\quad + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx, \\
&= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx \\
&\quad + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx + \frac{d_1}{d_2} \varphi(\pi) \phi(\pi) + \frac{c_1}{c_2} \varphi(0) \phi(0),
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olur.

Şimdi de $\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \phi \rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \phi \rangle &= \int_0^\pi \varphi \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \phi dx, \\
&= \int_0^\pi \varphi(x) [D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) + (2\lambda p(x) + q(x)) \phi(x)] dx, \\
&= \int_0^\pi \varphi(x) D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) dx + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx,
\end{aligned}$$

bulunur.

Yine aynı şekilde ilk integrale (2.1.14) özelliği uygulanır ve sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \phi \rangle &= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) dx - \varphi(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) \Big|_0^\pi \\
&\quad + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx, \\
&= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) dx + \frac{d_1}{d_2} \varphi(\pi) \phi(\pi) + \frac{c_1}{c_2} \varphi(0) \phi(0) \\
&\quad + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) \varphi(x) \phi(x) dx, \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitliğinin sağ tarafları eşit olduğundan sol taraflarıda eşittir. O halde

$$\langle \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \varphi, \phi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} \phi \rangle,$$

dır. Bu da $\mathcal{L}_{[\alpha,p,q]}$ operatörünün self-adjoint olduğunu verir.

Teorem 4.2.2. Difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları, $[0, \pi]$ üzerinde $w_\alpha(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. f_{λ_j} , λ_j lere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\int_0^\pi w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

dır.

İspat. Özellik (2.1.14) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} g(x) dx &= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f(x) {}^C D_{0,+}^\alpha g(x) dx - f(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha g(x) \Big|_0^\pi \\
&\quad + \int_0^\pi (2\lambda p(x) + q(x)) g(x) f(x) dx. \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville probleminin sırasıyla (λ_1, λ_2) özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları $(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2})$ olsun. Buradan

$$\mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_1}(x) + \lambda_1 w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) = 0, \tag{4.2.8}$$

$$c_1 f_{\lambda_1}(0) - c_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_{x=0} = 0, \tag{4.2.9}$$

$$d_1 f_{\lambda_1}(\pi) + d_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \tag{4.2.10}$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_2}(x) + \lambda_2 w_\alpha(x) f_{\lambda_2}(x) = 0, \quad (4.2.11)$$

$$c_1 f_{\lambda_2}(0) - c_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (4.2.12)$$

$$d_1 f_{\lambda_2}(\pi) + d_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.2.13)$$

yazılır. (4.2.8) denklemini f_{λ_2} ile (4.2.11) denklemini f_{λ_1} ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) w_\alpha(x) f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_2} - f_{\lambda_2} \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_1},$$

bulunur. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafını terim terim $[0, \pi]$ aralığında integrallenirse ve (4.2.7) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi w_\alpha(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx, \\ &= \int_0^\pi f_{\lambda_1} \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_2}(x) dx - \int_0^\pi f_{\lambda_2}(x) \mathcal{L}_{[\alpha,p,q]} f_{\lambda_1}(x) dx, \\ &= \int_0^\pi f_{\lambda_1}(x) [D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) + (2\lambda_2 p(x) + q(x)) f_{\lambda_2}(x)] dx \\ &\quad - \int_0^\pi f_{\lambda_2}(x) [D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) + (2\lambda_1 p(x) + q(x)) f_{\lambda_1}(x)] dx, \\ &= \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) dx - f_{\lambda_1} I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \int_0^\pi 2\lambda_2 p(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx + \int_0^\pi q(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx \\ &\quad - \int_0^\pi h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) dx + f_{\lambda_2}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi 2\lambda_1 p(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx - \int_0^\pi q(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx, \\ &= \int_0^\pi 2\lambda_2 p(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx - \int_0^\pi 2\lambda_1 p(x) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx \\ &\quad - f_{\lambda_1}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_2}(x) \Big|_0^\pi + f_{\lambda_2}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha f_{\lambda_1}(x) \Big|_0^\pi, \end{aligned}$$

olur. (4.2.9), (4.2.10), (4.2.12), (4.2.13) sınır şartları burada kullanılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi (w_\alpha(x) + 2p(x)) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alınırsa

$$\int_0^\pi (w_\alpha(x) + 2p(x)) f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

olur ve ispat tamamlanır.

Şimdi bundan sonraki ispatlarda kullanacağımız yardımcı fonksiyonları verelim.

$$I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = (\pi - 0)^{\alpha-1} (x - 0)^\alpha {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha, -1) \quad (\alpha + 1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{x}{\pi} \right],$$

burada ${}_1\Psi_2$ Fox-Wright fonksiyonudur bu fonksiyon:

$${}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1) \\ (b_1, \beta_1) \quad (b_2, \beta_2) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + \alpha_1 k)}{\Gamma(b_1 + \beta_1 k) \Gamma(b_2 + \beta_2 k)} \frac{z^k}{k!},$$

şeklinde bağıntıyı sağlar. Aşağıdaki parametreler ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 = -1, \\ \delta &= |\alpha_1|^{-\alpha_1} |\beta_1|^{\beta_1} |\beta_2|^{\beta_2} = 1, \\ \mu &= b_1 + b_2 - a_1 + \frac{1-2}{2} = 2\alpha - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Bu fonksiyon Teorem 2.1.14'den $\mu > 1/2$ ve $\alpha > 1/2$ iken $[0, \pi]$ aralığında süreklidir.

$$D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi_0(x) = 0,$$

olacak şekilde difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville operatörünün diferansiyel kısmını sıfır yapan fonksiyonları

$$\phi_0(x) = \xi_1 + \xi_2 I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) h(x)} = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x), \quad (4.2.15)$$

şeklinde ifade edilsin.

İkinci bir yardımcı fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= I_{0,+}^\alpha I_{\pi,-}^\alpha 1 = I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} = (\pi - 0)^\alpha (x - 0)^\alpha \\ &\times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha + 1, -1) \quad (\alpha + 1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{x-0}{\pi-0} \right], \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

şeklinde tanımlansın. Teorem 2.1.13 kullanılırsa ve (4.2.14)'e göre parametreler hesaplanırsa

$$\Delta = -1, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2\alpha + \frac{1}{2},$$

elde edilir. Sonuç olarak $\alpha > 0 \implies \mu > \frac{1}{2}$ ve Fox-Wright fonksiyonu bazı pozitif α için $[0, \pi]$ aralığında süreklidir.

Lemma 4.2.3. $\alpha > 1/2$ olsun ve $\tilde{\Delta} \neq 0$ olmak üzere

$$Y_\lambda(y) = (2\lambda p(x) + q(x))y_\lambda(x) + \lambda w_\alpha y_\lambda(x),$$

$$\tilde{\Delta} = c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_1 d_1 \psi(\alpha, 0, \pi),$$

ifade edilsin. Bu taktirde (4.2.2) – (4.2.4) kesirli difüzyon operatörü için Sturm-Liouville problemi $C[0, \pi]$ uzayında

$$y_\lambda(x) = -I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) + A(x) \int_0^\pi Y_\lambda(y) dx + B(x) \left(I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \right) \Big|_{x=\pi}, \quad (4.2.17)$$

şeklinde tanımlı integral denkleminde denktir. Burada $A(x)$ ve $B(x)$

$$A(x) = \frac{c_2}{\tilde{\Delta}} [-d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, x) - \psi(\alpha, 0, \pi)],$$

$$B(x) = \frac{d_1}{\tilde{\Delta}} [c_1 \psi(\alpha, 0, x) + c_2],$$

şeklindedir. ψ fonksiyonunda (4.2.15)'de tanımlanmıştır.

İspat. (4.2.2) denklemini yeniden yazalım

$$D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \left[y_\lambda(x) + I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \right] = 0,$$

bu eşitlik $C[0, \pi]$ uzayında sağlanır ve parantez içindeki fonksiyon, $D_{\pi,-}^\alpha h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha$ kesirli diferansiyel operatörünü sıfır yapan bir fonksiyondur. (4.2.15)'e göre

$$\phi_0 = \xi_1 + \xi_2 I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) h(x)} = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x),$$

olarak yazılabilir ve (4.2.2)'den

$$y_\lambda(x) + I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x), \quad (4.2.18)$$

elde edilir. Son olarak (4.2.3), (4.2.4) sınır şartlarıyla tanımlanan c_j, d_j $j = 1, 2$ değerleriyle ξ_j $j = 1, 2$ sabitleri arasında bir bağıntı kuralım. (2.1.15) özelliğinden ve denklem (4.2.18) den aşağıdaki formülü elde edilir.

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) = -I_{\pi,-}^1 Y_\lambda(y) + \xi_2,$$

stürekli fonksiyon y_λ için

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) \Big|_{x=0} = - \int_0^\pi Y_\lambda(y) + \xi_2, \quad (4.2.19)$$

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} h(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) \Big|_{x=\pi} = \xi_2, \quad (4.2.20)$$

elde edilir. Sırasıyla y_λ için, (4.2.18) kullanılarak

$$y_\lambda(0) = \phi_0(0) = \xi_1, \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} y_\lambda(\pi) &= \phi_0(\pi) - I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi}, \\ &= \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, \pi) - I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi}, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} X &= \int_0^\pi Y_\lambda(y) dx, \\ F &= I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi}, \end{aligned}$$

olmak üzere ξ_j sabitleri (4.2.19) – (4.2.22)’den aşağıdaki lineer denklem sistemini oluşturur.

$$c_2 X = c_2 \xi_2 - c_1 \xi_1, \quad (4.2.23)$$

$$d_1 \xi_1 + \xi_2 (d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, \pi)) = d_1 F, \quad (4.2.24)$$

$\tilde{\Delta} \neq 0$ olduğunda ξ_j sabitleri için çözüm tektir ve

$$\xi_1 = (F c_2 d_1 - c_2 X (d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, \pi))) / \tilde{\Delta},$$

$$\xi_2 = (c_1 d_1 F + c_2 d_1 X) / \tilde{\Delta},$$

şeklindedir. Yukarıdaki çözümü (4.2.18)’de yerine yazarsak (4.2.17) integral denklemini elde edilir.

Şimdi ilerde kullanacağımız aşağıdaki notasyonları tanımlayalım,

$$A = \|A(x)\|, \quad m_h = \min_{x \in [0, \pi]} |h(x)|,$$

$$B = \|B(x)\|, \quad M_\varphi = \|\varphi(x)\|.$$

Teorem 4.2.4. (4.2.2) – (4.2.4) probleminde, $\alpha > 1/2$ ve $\tilde{\Delta} \neq 0$ olmak üzere,

$$\|(2\lambda p(x) + q(x)) + \lambda w_\alpha\| < \frac{m_h}{M_\varphi + B_\varphi(\pi) + A(\pi)m_h}, \quad (4.2.25)$$

eşitsizliğini sağlayan her bir özdeğer basittir.

İspat. $C[0, \pi]$ fonksiyon uzayında (4.2.17) denklemi sabit nokta şartı dikkate alınırsa

$$y_\lambda = T y_\lambda,$$

eşitliği yazılabilir.

Son eşitliğin sağ tarafındaki dönüşümlerin $g \in C[0, \pi]$ sürekli fonksiyonlar için

$$Tg = -I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(g) + A(x) \int_0^\pi Y_\lambda(g) dx + B(x) \left(I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(g) \right) \Big|_{x=\pi},$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \|Y_\lambda(g) - Y_\lambda(r)\| &= \|((2\lambda p(x) + q(x))g + \lambda w_\alpha g) - ((2\lambda p(x) + q(x))r + \lambda w_\alpha r)\|, \\ &= \|(2\lambda p(x) + q(x))(g - r) + \lambda w_\alpha(g - r)\|, \\ &= \|(g - r)((2\lambda p(x) + q(x)) + \lambda w_\alpha)\|, \\ &\leq \|g - r\| \|(2\lambda p(x) + q(x)) + \lambda w_\alpha\|, \end{aligned}$$

elde edilir. $g, r \in C[0, \pi]$ sürekli fonksiyonlar çifti için Tg ve Tr arasındaki uzaklığı

hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \|Tg - Tr\| &= \left\| \left[-I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(g) + A(x) \int_0^\pi Y_\lambda(g) dx + B(x) \left(I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(g) \right) \Big|_{x=\pi} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[-I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(r) + A(x) \int_0^\pi Y_\lambda(r) dx + B(x) \left(I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(r) \right) \Big|_{x=\pi} \right] \right\|, \\ &= \left\| -I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha (Y_\lambda(g) - Y_\lambda(r)) + A(x) \int_0^\pi (Y_\lambda(g) - Y_\lambda(r)) dx \right. \\ &\quad \left. + B(x) \left(I_{0,+}^\alpha \frac{1}{h(x)} I_{\pi,-}^\alpha (Y_\lambda(g) - Y_\lambda(r)) \right) \Big|_{x=\pi} \right\|, \\ &\leq \|g - r\| \cdot \|(2\lambda p(x) + q(x)) + \lambda w_\alpha\| \left(\frac{M_\varphi}{m_h} + A\pi + \frac{B_\varphi(\pi)}{m_h} \right), \\ &\leq \|g - r\| L, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $L = \|(2\lambda p(x) + q(x)) + \lambda w_\alpha\| \left(\frac{M_\varphi}{m_h} + A\pi + \frac{B_\varphi(\pi)}{m_h} \right)$ sabittir. (4.2.25)

kullanılırsa T bir büzülme dönüşümü olduğu görülür.

$$\|Tg - Tr\| \leq \|g - r\| L, \quad L \in (0, 1),$$

Böylece (4.2.25) gözönüne alınırsa, (4.2.3), (4.2.4) sınır şartlarını sağlayan (4.2.2), (4.2.17) denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve $y_\lambda \in C[0, \pi]$ olarak ifade edilen sabit noktanın tekliğini sağlar. Böylece özdeğerler basittir.

4.3. Coulomb Potansiyeli için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

Coulomb potansiyeli altında elektron taşınım hareketleri hakkındaki bilgiler kuantum teoride büyük öneme sahiptir. Bu tip problemlerin çözümü bize sadece hidrojen atomunun değil ayrıca basit değerlik elektron atomlarında enerji seviyelerini bulmak için de olanak sağlar. Hidrojen atomu için, Coulomb potansiyeli

$$U = \frac{-e^2}{r}$$

ile verilir. Burada r çekirdeğin yarıçapı, e elektron yüküdür. Buna göre zamana bağlı Schrödinger denklemi Ψ dalga fonksiyonu, $\hbar$ Planck sabiti ve m elektron kütlesi olmak üzere

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x, y, z) \Psi, \quad \int_{R^3} |\Psi|^2 dx dy dz = 1,$$

şeklinde ifade edilir. Bu denkleme

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \Psi dt,$$

Fourier dönüşümü uygulanırsa bu duruma bağlı

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\Psi} + \tilde{U} \tilde{\Psi} = E \tilde{\Psi},$$

şeklindeki enerji denklemine dönüştür. Bu taktirde Coulomb potansiyelli enerji denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\Psi} + \left(E + \frac{-e^2}{r} \right) \tilde{\Psi} = 0,$$

şeklinde olur. Eğer bu hidrojen atomu diğer potansiyel alanda yerine yazılırsa, bu taktirde enerji denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tilde{\Psi} + \left(E + \frac{-e^2}{r} + q(x, y, z) \right) \tilde{\Psi} = 0,$$

bulunur.

$\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{[\alpha, C]} = D_{\pi, -}^\alpha p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha + \left(\frac{C}{x} + q(x) \right), \quad (4.3.1)$$

operatörünü ve

$$\mathcal{L}_{[\alpha,C]} y_\lambda(x) + \lambda w_\alpha(x) y_\lambda(x) = 0, \quad (4.3.2)$$

$$y_\lambda(0) = 0, \quad (4.3.3)$$

$$d_1 y_\lambda(\pi) - d_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.3.4)$$

Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville problemini ele alalım. Burada $p(x) \neq 0$, $w_\alpha(x) > 0 \forall x \in (0, \pi]$, $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere p, q , fonksiyonları $(0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.3.1. Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville $\mathcal{L}_{[\alpha,C]}$ operatörü self-adjointtir.

İspat. Aşağıdaki iç çarpımlar hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{[\alpha,C]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^\pi \mathcal{L}_{[\alpha,C]} \varphi(x) \phi(x) dx, \\ &= \int_0^\pi \phi(x) \left[D_{\pi,-}^\alpha p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) + \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \varphi(x) \right] dx, \\ &= \int_0^\pi \phi(x) D_{\pi,-}^\alpha p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \varphi(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

elde edilir. İlk integrale (2.1.14) özelliği ve sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{[\alpha,C]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx \\ &\quad - \phi(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \varphi(x) \phi(x) dx, \quad (4.3.5) \\ &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(x) dx - \frac{d_1}{d_2} \varphi(\pi) \phi(\pi) \\ &\quad + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \varphi(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \phi \rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \phi \rangle &= \int_0^\pi \varphi(x) \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \phi(x) dx, \\
&= \int_0^\pi \varphi(x) \left[D_{\pi, -}^\alpha p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha \phi(x) + \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \phi(x) \right] dx, \\
&= \int_0^\pi \varphi(x) D_{\pi, -}^\alpha p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha \phi(x) dx + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \varphi(x) \phi(x) dx,
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine aynı şekilde ilk integrale (2.1.14) özelliği ve sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \phi \rangle &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha \varphi(x) {}^C D_{0, +}^\alpha \phi(x) dx - \frac{d_1}{d_2} \varphi(\pi) \phi(\pi) \\
&\quad + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) \phi(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Sonucuna ulaşılır. (4.3.5) ve (4.3.6) eşitliğinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Bu durum

$$\langle \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \varphi, \phi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, C]} \phi \rangle,$$

sonucunu verir. Dolayısıyla $\mathcal{L}_{[\alpha, C]}$ operatörünün self-adjoint olduğunu verir.

Teorem 4.3.2. Coulomb potansiyeli için (4.3.2 – 4.3.4) kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. Özellik (2.1.14) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x) \mathcal{L}_{[\alpha, C]} g(x) dx &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha f(x) {}^C D_{0, +}^\alpha g(x) dx - f(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha g(x) \Big|_0^\pi \\
&\quad + \int_0^\pi \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) g(x) f(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

bulunur. (4.3.2) – (4.3.4) sınır değer probleminin öz fonksiyonu y ve buna karşılık gelen özdeğeri λ olsun. Şimdi y ve y 'nin kompleks eşleniği $\bar{y}$ için aşağıdaki eşitlikler yazılırsa $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{[\alpha, C]} y(x) + \lambda w_\alpha(x) y(x) = 0, \tag{4.3.8}$$

$$y_\lambda(0) = 0, \quad (4.3.9)$$

$$d_1 y_\lambda(\pi) - d_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.3.10)$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,C]} \bar{y}(x) + \bar{\lambda} w_\alpha(x) \bar{y}(x) = 0, \quad (4.3.11)$$

$$\bar{y}_{\bar{\lambda}}(0) = 0, \quad (4.3.12)$$

$$d_1 \bar{y}_{\bar{\lambda}}(\pi) - d_2 I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.3.13)$$

(4.3.8) denklemi $\bar{y}$ ile (4.3.11) denklemi y ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) w_\alpha(x) y(x) \bar{y}(x) = y(x) \mathcal{L}_{[\alpha,C]} \bar{y}(x) - \bar{y}(x) \mathcal{L}_{[\alpha,C]} y(x).$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafını terim terim 0'dan π 'ye integralenip ve (4.3.7) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^\pi w_\alpha(x) y(x) \bar{y}(x) dx &= \int_0^\pi y(x) \mathcal{L}_{[\alpha,C]} \bar{y}(x) dx - \int_0^\pi \bar{y}(x) \mathcal{L}_{[\alpha,C]} y(x) dx, \\ &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) dx - y(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) dx + \bar{y}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) \Big|_0^\pi, \\ &= - y(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_\pi + y(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(x) \Big|_0 \\ &\quad + \bar{y}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) \Big|_\pi - \bar{y}(x) I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y(x) \Big|_0, \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.3.9), (4.3.10), (4.3.12), (4.3.13) sınır şartları kullanılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^\pi w_\alpha(x) |y(x)|^2 dx = 0,$$

elde edilir. y aşıkâr olmayan bir çözüm ve $w_\alpha(x) > 0$ olduğundan $\lambda = \bar{\lambda}$ olur, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.3. y_{λ_j} , λ_j lere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları, $(0, \pi]$ üzerinde $w_\alpha(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani

$$\int_0^\pi w_\alpha(x) y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) dx = 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

dır.

İspat. Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville probleminin sırasıyla (λ_1, λ_2) özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları $(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2})$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_1}(x) + \lambda_1 w_\alpha(x) y_{\lambda_1}(x) = 0, \quad (4.3.14)$$

$$y_{\lambda_1}(0) = 0, \quad (4.3.15)$$

$$d_1 y_{\lambda_1}(\pi) - d_2 I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.3.16)$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_2}(x) + \lambda_2 w_\alpha(x) y_{\lambda_2}(x) = 0, \quad (4.3.17)$$

$$y_{\lambda_2}(0) = 0, \quad (4.3.18)$$

$$d_1 y_{\lambda_2}(\pi) - d_2 I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.3.19)$$

bulunur. (4.3.14) denklemi y_{λ_2} ile (4.3.17) denklemi y_{λ_1} ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) w_\alpha(x) y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} = y_{\lambda_1} \mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_2} - y_{\lambda_2} \mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_1},$$

elde edilir. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafı terim terim $(0, \pi]$ aralığında integrallenir ve (4.3.7) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi w_\alpha(x) y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) dx &= \int_0^\pi y_{\lambda_1}(x) \mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_2}(x) dx - \int_0^\pi y_{\lambda_2}(x) \mathcal{L}_{[\alpha, C]} y_{\lambda_1}(x) dx, \\ &= \int_0^\pi y_{\lambda_1}(x) \left[D_{\pi, -}^\alpha p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) + \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) y_{\lambda_2}(x) \right] dx \\ &\quad - \int_0^\pi y_{\lambda_2}(x) \left[D_{\pi, -}^\alpha p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) + \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) y_{\lambda_1}(x) \right] dx, \\ &= \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) dx - y_{\lambda_1}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) \Big|_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) dx + y_{\lambda_2}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) \Big|_0^\pi, \\ &= - y_{\lambda_1}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) \Big|_0^\pi + y_{\lambda_2}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) \Big|_0^\pi, \\ &= - y_{\lambda_1}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) \Big|_\pi + y_{\lambda_1}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_2}(x) \Big|_0 \\ &\quad + y_{\lambda_2}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) \Big|_\pi - y_{\lambda_2}(x) I_{\pi, -}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0, +}^\alpha y_{\lambda_1}(x) \Big|_0, \end{aligned}$$

bulunur. (4.3.15), (4.3.16), (4.3.18), (4.3.19) sınır şartları yardımıyla

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi w_\alpha(x) y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alınırsa

$$\int_0^\pi w_\alpha(x) y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) dx = 0,$$

olur ve ispat tamamlanır.

Şimdi ilerde ispatlarda kullanacağımız bazı yardımcı fonksiyonları verelim.

$$I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = (\pi - 0)^{\alpha-1} (x - 0)^\alpha \times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha, -1) \end{matrix} \middle| -\frac{x-0}{\pi-0} \right],$$

burada ${}_1\Psi_2$ Fox-Wright fonksiyonudur bu fonksiyon,

$${}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1) \\ (b_1, \beta_1) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + \alpha_1 k)}{\Gamma(b_1 + \beta_1 k) \Gamma(b_2 + \beta_2 k)} \frac{z^k}{k!},$$

bağıntısını sağlar ve aşağıdaki parametreler ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 = -1, \\ \delta &= |\alpha_1|^{-\alpha_1} |\beta_1|^{\beta_1} |\beta_2|^{\beta_2} = 1, \\ \mu &= b_1 + b_2 - a_1 + \frac{1-2}{2} = 2\alpha - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Bu fonksiyon Teorem 2.1.13'den $\mu > 1/2$ ve $\alpha > 1/2$ iken $[0, \pi]$ aralığında süreklidir.

$$D_{\pi,-}^\alpha p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi_0(x) = 0,$$

olacak şekilde Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville operatörünün diferansiyel kısmını sıfır yapan fonksiyonları

$$\phi_0(x) = \xi_1 + \xi_2 I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x), \quad (4.3.21)$$

şeklinde gösterelim. İkinci bir yardımcı fonksiyon

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= I_{0,+}^\alpha I_{\pi,-}^\alpha 1 = I_{0,+}^\alpha \frac{(\pi - x)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} = (\pi - 0)^\alpha (x - 0)^\alpha \\ &\times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha + 1, -1) \end{matrix} \middle| -\frac{x-0}{\pi-0} \right], \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

şeklinde tanımlanırsa, Teorem 2.1.13 yardımıyla ve (4.3.20)' e göre parametreler hesaplanırsa

$$\Delta = -1, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2\alpha + \frac{1}{2},$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\alpha > 0$ ise $\mu > \frac{1}{2}$ ve Fox-Wright fonksiyonu bazı pozitif α için $(0, \pi]$ aralığında sürekli'dir.

Lemma 4.3.4. $\alpha > 1/2$ olsun ve $\tilde{\Delta} \neq 0$ olmak üzere

$$Y_{\lambda}(y) = \left(\frac{C}{x} + q(x) \right) y_{\lambda}(x) + \lambda w_{\alpha} y_{\lambda}(x),$$

$$\tilde{\Delta} = -d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, \pi),$$

ifade edilsin. Bu takdirde (4.3.2) – (4.3.4) Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville problemi C sürekli fonksiyonlar uzayında aşağıdaki integral denkleminde denktir.

$$y_{\lambda}(x) = -I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) + A(x) \left(I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \right) \Big|_{x=\pi}, \quad (4.3.23)$$

burada $A(x)$

$$A(x) = \frac{d_1}{\tilde{\Delta}} \psi(\alpha, 0, x),$$

şeklinde ve ψ fonksiyonunda (4.3.21)'de tanımlanmıştır.

İspat. (4.3.2) denklemi yeniden göz önüne alınırsa

$$D_{\pi,-}^{\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^{\alpha} \left[y_{\lambda}(x) + I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \right] = 0,$$

olur. Bu eşitlik C uzayında sağlanır ve parantez içindeki fonksiyon, $D_{\pi,-}^{\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^{\alpha}$ Coulomb potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville operatörünü sıfır yapan bir fonksiyondur. Buradan (4.3.21)'e göre aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$y_{\lambda}(x) + I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x). \quad (4.3.24)$$

Sonuç olarak (4.3.3), (4.3.4) sınır şartlarıyla tanımlanan d_j $j = 1, 2$ değerleriyle ξ_j $j = 1, 2$ sabitleri arasında bir bağıntı kuralım. (2.1.16) özelliğinden ve denklem (4.3.24) den aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^{\alpha} y_{\lambda}(x) = -I_{\pi,-}^1 Y_{\lambda}(y) + \xi_2.$$

Sürekli fonksiyon y_λ için

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) \Big|_{x=0} = - \int_0^\pi Y_\lambda(y) + \xi_2, \quad (4.3.25)$$

$$I_{\pi,-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(x) \Big|_{x=\pi} = \xi_2, \quad (4.3.26)$$

bulunur. Sırasıyla y_λ için, (4.3.24) kullanılırsa

$$y_\lambda(0) = \phi_0(0) = \xi_1, \quad (4.3.27)$$

$$\begin{aligned} y_\lambda(\pi) &= \phi_0(\pi) - I_{0,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi}, \\ &= \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, \pi) - I_{0,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi}, \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

elde edilir.

$$F = I_{0,+}^\alpha \frac{1}{p(x)} I_{\pi,-}^\alpha Y_\lambda(y) \Big|_{x=\pi},$$

olmak üzere ξ_j sabitleri (4.3.25) – (4.3.28)’den aşağıdaki lineer denklem sistemini oluşturur.

$$\xi_1 = 0, \quad (4.3.29)$$

$$d_1 \xi_1 + \xi_2 (-d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, \pi)) = d_1 F,$$

$\tilde{\Delta} \neq 0$ olduğunda ξ_j sabitleri için çözüm tektir ve

$$\xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = d_1 F / \tilde{\Delta},$$

şeklinde. Yukarıdaki çözümü (4.3.24) içinde yerine yazarsak (4.3.23) integral denklemi elde edilir [39].

4.4. Hidrojen Atom Denklemi için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{a}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R + \left(E + \frac{a}{r}\right) R = 0, \quad 0 < r < \infty,$$

singüler Sturm-Liouville problemini gözönüne alınsın. Bu Sturm-Liouville denklemi kuantum mekaniğinde hidrojen atomunun enerji seviyelerinin çalışıldığı denklemdir. Burada R kütle merkezinin kaynağa uzaklığı, ℓ , bir pozitif tamsayı, a , bir reel sayı, E , enerji sabiti, r , çekirdek ve elektron arasındaki uzaklıktır [33].

$\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{[\alpha, h]} = D_{1, -}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right), \quad (4.4.1)$$

operatörünü ve

$$\mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda}(r) + \lambda w_{\alpha}(r) y_{\lambda}(r) = 0, \quad (4.4.2)$$

$$y_{\lambda}(0) = 0, \quad (4.4.3)$$

$$d_1 y_{\lambda}(1) + d_2 I_{1, -}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} y_{\lambda}(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.4.4)$$

hidrojen atom denklemi için kesirli Sturm-Liouville problemini ele alınsın. Burada $p(r) \neq 0, w_{\alpha}(r) > 0, \forall r \in (0, 1], d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere p, q_0 fonksiyonları $(0, 1]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.4.1. Hidrojen atom potansiyeline sahip $\mathcal{L}_{[\alpha, h]}$ kesirli Sturm-Liouville operatörü self-adjointtir.

İspat. $\mathcal{L}_{[\alpha, h]}$ operatörünü ele alarak self adjoint olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^1 \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \varphi, \phi dr, \\ &= \int_0^1 \phi(r) \left[D_{1, -}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \varphi(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \varphi(r) \right] dr, \\ &= \int_0^1 \phi(r) D_{1, -}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \varphi(r) dr + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \varphi(r) \phi(r) dr, \end{aligned}$$

bulunur. İlk integrale (2.1.14) özelliği ve sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \varphi, \phi \rangle &= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \phi(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \varphi(r) dr - \phi(r) I_{1, -}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \varphi(r) \Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \varphi(r) \phi(r) dr, \\ &= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \phi(r) {}^C D_{0, +}^{\alpha} \varphi(r) dr + \frac{d_1}{d_2} \varphi(1) \phi(1) \\ &\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \varphi(r) \phi(r) dr, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

olur. Şimdi de $\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \phi \rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \phi \rangle &= \int_0^1 \varphi(r) \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \phi(r) dr, \\
&= \int_0^1 \varphi(r) \left[D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \phi(r) \right] dr, \\
&= \int_0^1 \varphi(r) D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(r) dr \\
&\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \phi(r) \varphi(r) dr,
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine aynı şekilde ilk integrale (2.1.14) özelliği ve sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \phi \rangle &= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \varphi(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \phi(r) dr + \frac{d_1}{d_2} \varphi(1) \phi(1) \\
&\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \phi(r) \varphi(r) dr, \tag{4.4.6}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.4.5) ve (4.4.6) eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol taraflarıda eşittir. O halde

$$\langle \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \varphi, \phi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{L}_{[\alpha, h]} \phi \rangle,$$

dır. Bu ise $\mathcal{L}_{[\alpha, h]}$ operatörünün self-adjoint olduğu sonucunu verir.

Teorem 4.4.2. Hidrojen atom potansiyeline sahip kesirli Sturm-Liouville probleminin (4.4.2) – (4.4.4) özdeğerleri reeldir.

İspat. Özellik (2.1.14) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(r) \mathcal{L}_{[\alpha, h]} g(r) dr &= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha f(r) {}^C D_{0,+}^\alpha g(r) dr - f(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha g(r) \Big|_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) g(r) f(r) dr, \tag{4.4.7}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.4.2) – (4.4.4) sınır değer probleminin özdeğeri λ ve buna karşılık gelen öz fonksiyonu y olsun. Şimdi y ve y 'nin kompleks eşleniği $\bar{y}$ için aşağıdaki eşitlikler yazılırsa ve $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_\lambda(r) + \lambda w_\alpha(r) y_\lambda(r) = 0, \tag{4.4.8}$$

$$y_\lambda(0) = 0, \quad (4.4.9)$$

$$d_1 y_\lambda(1) + d_2 I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_\lambda(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.4.10)$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,h]} \bar{y}_\lambda(r) + \bar{\lambda} w_\alpha(r) \bar{y}_\lambda(r) = 0, \quad (4.4.11)$$

$$\bar{y}_\lambda(0) = 0, \quad (4.4.12)$$

$$d_1 \bar{y}_\lambda(1) + d_2 I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}_\lambda(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.4.13)$$

(4.4.8) denklemi $\bar{y}$ ile (4.4.11) denklemi y ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) w_\alpha(r) y(r) \bar{y}(r) = y(r) \mathcal{L}_{[\alpha,h]} \bar{y}(r) - \bar{y}(r) \mathcal{L}_{[\alpha,h]} y(r),$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı terim terim $(0, 1]$ aralığında integralenir ve (4.4.7) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 w_\alpha(r) y(r) \bar{y}(r) dr &= \int_0^1 y(r) \mathcal{L}_{[\alpha,h]} \bar{y}(r) dr - \int_0^1 \bar{y}(r) \mathcal{L}_{[\alpha,h]} y(r) dr, \\ &= \int_0^1 y(r) \left[D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) \bar{y}(r) \right] dr \\ &\quad - \int_0^1 \bar{y}(r) \left[D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y(r) \right] dr, \\ &= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) dr - y(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) \Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y(r) \bar{y}(r) dr \\ &\quad - \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) dr + \bar{y}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) \Big|_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y(r) \bar{y}(r) dr, \\ &= -y(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) \Big|_1 + y(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha \bar{y}(r) \Big|_0 \\ &\quad + \bar{y}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) \Big|_1 - \bar{y}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y(r) \Big|_0, \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan (4.4.9), (4.4.10), (4.4.12), (4.4.13) sınır şartları kullanılırsa

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 w_\alpha(r) |y(r)|^2 dr = 0,$$

bulunur. y aşikar olmayan bir çözüm ve $w_\alpha(r) > 0$ olduğundan $\lambda = \bar{\lambda}$ olur, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3. Hidrojen atom potansiyeline sahip kesirli Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları, $(0, 1]$ üzerinde $w_\alpha(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani

$$\int_0^1 w_\alpha(r) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

dır. Burada y_{λ_j} , λ_j 'lere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat. Hidrojen atom denklemi için kesirli Sturm-Liouville probleminin sırasıyla (λ_1, λ_2) özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları $(y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2})$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_1}(r) + \lambda_1 w_\alpha(r) y_{\lambda_1}(r) = 0, \quad (4.4.14)$$

$$y_{\lambda_1}(0) = 0, \quad (4.4.15)$$

$$d_1 y_{\lambda_1}(1) + d_2 I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.4.16)$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_2}(r) + \lambda_2 w_\alpha(r) y_{\lambda_2}(r) = 0, \quad (4.4.17)$$

$$y_{\lambda_2}(0) = 0, \quad (4.4.18)$$

$$d_1 y_{\lambda_2}(1) + d_2 I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) \Big|_{r=1} = 0, \quad (4.4.19)$$

yazılır. (4.4.14) denklemi y_{λ_2} ile (4.4.17) denklemi y_{λ_1} ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2) w_\alpha(r) y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} = y_{\lambda_1} \mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_2} - y_{\lambda_2} \mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_1},$$

elde edilir. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafı terim terim $(0, 1]$ aralığında integrallenir ve (4.4.7) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 w_\alpha(r) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr &= \int_0^1 y_{\lambda_1}(r) \mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_2}(r) dr - \int_0^1 y_{\lambda_2}(r) \mathcal{L}_{[\alpha, h]} y_{\lambda_1}(r) dr, \\ &= \int_0^1 y_{\lambda_1}(r) \left[D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y_{\lambda_2}(r) \right] dr \\ &\quad - \int_0^1 y_{\lambda_2}(r) \left[D_{1,-}^\alpha p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) + \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y_{\lambda_1}(r) \right] dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) dr - y_{\lambda_1}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) \Big|_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr - \int_0^1 p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) dr \\
&\quad + y_{\lambda_2}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr, \\
&= - y_{\lambda_1}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) \Big|_0^1 + y_{\lambda_2}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) \Big|_0^1, \\
&= - y_{\lambda_1}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) \Big|_1 + y_{\lambda_1}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_2}(r) \Big|_0 \\
&\quad + y_{\lambda_2}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) \Big|_1 - y_{\lambda_2}(r) I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^\alpha y_{\lambda_1}(r) \Big|_0,
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (4.4.15), (4.4.16), (4.4.18), (4.4.19) sınır şartları kullanılırsa,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 w_\alpha(r) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr = 0,$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğumuzdan

$$\int_0^1 w_\alpha(r) y_{\lambda_1}(r) y_{\lambda_2}(r) dr = 0,$$

olur ve ispat tamamlanır.

Şimdi bundan sonraki ispatlarda kullanacağımız bazı yardımcı fonksiyonları vere-
lim.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 = -1, \\
\delta &= |\alpha_1|^{-\alpha_1} |\beta_1|^{\beta_1} |\beta_2|^{\beta_2} = 1, \\
\mu &= b_1 + b_2 - \alpha_1 + \frac{1-2}{2} = 2\alpha - \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_{0,+}^\alpha \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} &= (1-0)^{\alpha-1} (r-0)^\alpha \\
&\quad \times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1,1) \\ (\alpha, -1) \quad (\alpha+1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{r-0}{1-0} \right],
\end{aligned}$$

burada ${}_1\Psi_2$ Fox-Wright fonksiyonudur, bu fonksiyon

$${}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1) \\ (b_1, \beta_1) \quad (b_2, \beta_2) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + \alpha_1 k)}{\Gamma(b_1 + \beta_1 k) \Gamma(b_2 + \beta_2 k)} \frac{z^k}{k!},$$

şeklinde bir bağıntıyı sağlar ve Teorem 2.1.13'den $\mu > 1/2$ ve $\alpha > 1/2$ iken $(0, 1]$ aralığında süreklidir.

$$D_{1,-}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha} \phi_0(r) = 0,$$

olacak şekilde hidrojen atom potansiyeline sahip kesirli Sturm-Liouville operatörünün diferansiyel kısmını sıfır yapan fonksiyonları

$$\phi_0(r) = \xi_1 + \xi_2 I_{0,+}^{\alpha} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) p(x)} = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, x), \quad (4.4.21)$$

şeklinde gösterelim. İkinci bir yardımcı fonksiyon

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= I_{0,+}^{\alpha} I_{1,-}^{\alpha} 1 = I_{0,+}^{\alpha} \frac{(1-r)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = (1-0)^{\alpha} (r-0)^{\alpha} \\ &\quad \times {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha+1, -1) \quad (\alpha+1, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{r-0}{1-0} \right], \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 2.1.13 kullanılırsa ve (4.4.20)'e göre parametreler hesaplanırsa

$$\Delta = -1, \quad \delta = 1, \quad \mu = 2\alpha + \frac{1}{2},$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\alpha > 0 \implies \mu > \frac{1}{2}$ ve Fox-Wright fonksiyonu bazı pozitif α için $(0, 1]$ aralığında süreklidir.

Lemma 4.4.4. $\alpha > 1/2$ olsun ve $\tilde{\Delta} \neq 0$ olmak üzere

$$Y_{\lambda}(y) = \left(-\frac{2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + q_0(r) \right) y_{\lambda}(r) + \lambda w_{\alpha} y_{\lambda}(r),$$

$$\tilde{\Delta} = d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, 1),$$

ifade edilsin. Bu taktirde (4.4.2) – (4.4.4) hidrojen atom potansiyelli kesirli Sturm-Liouville problemi için C sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı

$$y_{\lambda}(r) = -I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) + A(r) \left(I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \right) \Big|_{r=1}, \quad (4.4.23)$$

şeklindeki integral denkleminde denktir. Burada $A(r)$

$$A(r) = \frac{d_1}{\tilde{\Delta}} \psi(\alpha, 0, r),$$

şeklindedir.

İspat. (4.4.2) denklemini yeniden yazalım:

$$D_{1,-}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha} \left[y_{\lambda}(r) + I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \right] = 0,$$

parantez içindeki fonksiyon, $D_{1,-}^{\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha}$ hidrojen atom potansiyeli için kesirli Sturm-Liouville operatörünü sıfır yapan bir fonksiyondur. (4.4.21)'e göre

$$y_{\lambda}(r) + I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) = \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, r), \quad (4.4.24)$$

elde edilir.

Son olarak (4.4.3), (4.4.4) sınır şartlarıyla tanımlanan d_j , $j = 1, 2$ değerleriyle ξ_j $j = 1, 2$ sabitleri arasında bir bağıntı kuralım. (2.1.15) özelliğinden ve denklem (4.4.24)'den

$$I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha} y_{\lambda}(r) = -I_{1,-}^1 Y_{\lambda}(y) + \xi_2,$$

eşitliği elde edilir. Sürekli fonksiyon y_{λ} için

$$I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha} y_{\lambda}(r) \Big|_{r=0} = - \int_0^1 Y_{\lambda}(y) + \xi_2, \quad (4.4.25)$$

$$I_{1,-}^{1-\alpha} p(r) {}^C D_{0,+}^{\alpha} y_{\lambda}(r) \Big|_{r=1} = \xi_2, \quad (4.4.26)$$

bulunur. Sırasıyla y_{λ} için, (4.4.24) kullanılırsa

$$y_{\lambda}(0) = \phi_0(0) = \xi_1, \quad (4.4.27)$$

$$\begin{aligned} y_{\lambda}(1) &= \phi_0(1) - I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \Big|_{r=1}, \\ &= \xi_1 + \xi_2 \psi(\alpha, 0, 1) - I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \Big|_{r=1}, \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

elde edilir. ξ_j sabitleri (4.4.25) – (4.4.28)'den

$$F = I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{p(r)} I_{1,-}^{\alpha} Y_{\lambda}(y) \Big|_{r=1},$$

olmak üzere aşağıdaki lineer denklem sistemini oluşturur.

$$\xi_1 = 0, \quad (4.4.29)$$

$$d_1 \xi_1 + \xi_2 (d_2 + d_1 \psi(\alpha, 0, 1)) = d_1 F, \quad (4.4.30)$$

$\tilde{\Delta} \neq 0$ olduğunda ξ_j sabitleri için çözüm tektir ve

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= d_1 F / \tilde{\Delta},\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki çözüm (4.4.24)'de yerine yazılırsa (4.4.23) integral denklemi elde edilir [47].

4.5. Kesirli Sturm-Liouville Problemi İçin Mukayese Kriterleri

Teorem 4.5.1 (I. Mukayese Teoremi)

$$D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) + g(x) u(x) = 0, \quad (4.5.1)$$

$$D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) + h(x) v(x) = 0, \quad (4.5.2)$$

şeklinde verilen iki denklemi gözönüne alınsın. Eğer $[a, b]$ aralığının tamamı üzerinde $g(x) < h(x)$ ise bu taktirde birinci denklemin aşikar olmayan herhangi bir çözümünün her iki sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı vardır.

İspat. (4.5.1) denklemi $v(x)$ ile (4.5.2) denklemi $u(x)$ ile çarpılıp birbirinden çıkarılırsa

$$\begin{aligned}v(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) + g(x) u(x) v(x) - u(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) - h(x) u(x) v(x) &= 0, \\ v(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) - u(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) &= [h(x) - g(x)] u(x) v(x),\end{aligned} \quad (4.5.3)$$

bulunur. $u(x)$ 'in ardışık iki sıfırını x_1 ve x_2 ile gösterelim. Kabul edelim ki $v(x)$ 'in (x_1, x_2) aralığında sıfırı bulunmasın. (4.5.3) eşitliğini x_1 den x_2 ye integralleyelim,

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} v(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x) D_{b-}^\alpha p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) dx, \\ = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] u(x) v(x) dx,\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliğin sol tarafındaki integrallere (2.1.14) özelliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) dx - v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ - \int_{x_1}^{x_2} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) dx + u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) \Big|_{x_1}^{x_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} v(x) \Big|_{x_1}^{x_2}, \\
&= -v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x) \Big|_{x_2} + v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x) \Big|_{x_1} \\
&\quad + u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} v(x) \Big|_{x_2} - u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} v(x) \Big|_{x_1},
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&-v(x_2) I_{b-}^{1-\alpha} p(x_2) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x_2) + v(x_1) I_{b-}^{1-\alpha} p(x_1) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x_1) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] u(x) v(x) dx,
\end{aligned}$$

bulunur. (x_1, x_2) aralığında v 'nin sifıra eşit olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan (x_1, x_2) aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ ve artan fonksiyon olarak ele alın-sın. Dolayısıyla bir önceki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. Fakat $v(x)$ fonksiyonunun x_2 noktasındaki yeteri kadar büyük değeri için sol taraf negatiftir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (x_1, x_2) aralığında $v(x)$ in sıfırlarının varlığı ispatlanmış olur.

Teorem 4.5.2. (II. Mukayese Teoremi)

(4.5.1) ve (4.5.2) denklemlerinin

$$\begin{aligned}
u(a, \lambda) &= 1, & {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x) \Big|_{x=a} &= 0, \\
v(a, \lambda) &= 1, & {}^C D_{a+}^{\alpha} v(x) \Big|_{x=a} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri iki artan fonksiyon $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığının tamamında $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $u(x)$ fonksiyonu, $a < x \leq b$ aralığında m tane sifıra sahip ise bu taktirde $v(x)$ fonksiyonunun aynı aralıkta en az m tane sıfırları mevcut olup, $v(x)$ in k . sıfırı $u(x)$ in k . sıfırından küçüktür.

İspat. $u(x)$ 'in a noktasına en yakın ve a 'dan farklı sıfırını x_1 ile gösterelim. Bir önceki teoreme dayanarak $v(x)$ in (a, x_1) aralığında en az bir sifıra sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine bu aralıkta $v(x)$ 'in sifıra sahip olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan (a, x_1) aralığında $v(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olsun. $u(x_1) = 0$ olur. (4.5.3) denklemini a 'dan x_1 'e integrallenirse

$$\int_a^{x_1} v(x) D_{b-}^{\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} u(x) dx - \int_a^{x_1} u(x) D_{b-}^{\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^{\alpha} v(x) dx$$

$$= \int_a^{x_1} [h(x) - g(x)] u(x) v(x) dx,$$

ve eşitliğin sol tarafındaki integrale (2.1.14) özelliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^{x_1} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) dx - v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_a^{x_1} \\ & - \int_a^{x_1} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) dx + u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) \Big|_a^{x_1} \\ = & - v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_{x_1} + v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_a \\ & + u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) \Big|_{x_1} - u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) \Big|_a \\ = & \int_a^{x_1} [h(x) - g(x)] u(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & - v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_{x_1} + v(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha u(x) \Big|_a \\ & - u(x) I_{b-}^{1-\alpha} p(x) {}^C D_{a+}^\alpha v(x) \Big|_a = \int_a^{x_1} [h(x) - g(x)] u(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

elde edilir. (a, x_1) aralığında $v(x) > 0$, $u(x) > 0$, $v(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarının artan fonksiyonlar oldukları dikkate alınırsa eşitliğin sol tarafının negatif olduğu aşıkardır. Diğer yandan $g(x) < h(x)$ olduğu gerçeği ile son eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Bu ise çelişkidir. O halde baştaki kabulümüz geçerli değildir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. IMPULSIVE ŞARTLARI ALTINDA KESİRLİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Bir çok fiziksel olaylarda zamanın belirli anında veya anlarında impulsalar yani sıçramalar gözlenir. Malzemeler veya birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımı ve ısı geçişi bu tür olaylara örnektir. Bunun gibi fiziksel olayların matematiksel modeli diferansiyel denklem şekline dönüştürüldüğünde ortaya impulsive denklemler çıkar. Bu denklemlerin çözümleri belirli noktalarda denklem dışı sıçrama tipi koşullara tabi tutulurlar. Yani denklemlerin çözümleri belirli noktalarda denklem dışı sıçramalara sahip olurlar. Bu nedenle impulsive denklemlerini içeren problemleri incelemek hem teorik hem uygulama açısından büyük öneme sahiptir. Impulsive diferansiyel denklemler içeren problemlerin incelenmesi son yıllarda daha da ilgi çekici hale gelmiştir ve bu konuda çok sayıda çalışmalar yapılmıştır [52-54, 56-58, 60].

5.1. Impulsive Şartları Altında Difüzyon Operatörü için Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$$-D_{\pi,-}^{\alpha} h(t) {}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) + (2\lambda p(t) + q(t)) y(t) = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k)), \quad \Delta y'|_{t=t_k} = I_k^*(y(t_k)), \quad t_k \in (0, \pi), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.2)$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \quad \alpha_2 y(\pi) + \beta_2 y'(\pi) = 0, \quad (5.1.3)$$

sınır değer problemini gözönüne alınsın. Burada $D_{\pi,-}^{\alpha}$ Riemann-Liouville türevi, ${}^C D_{0,+}^{\alpha}$ Caputo türevi, $h, [0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon, $p \in W, q \in L^2[0, \pi]$, $I_k, I_k^* : R \rightarrow R$ sürekli fonksiyonlar $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ ve $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \neq 0$, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$, $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_k + h)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \pi$, $\Delta y'|_{t=t_k}, y'(t)$ için benzer şekildedir. $J = [0, \pi]$ olmak üzere $PC(J, R) = \{y : J \rightarrow R : y \in C((t_k, t_{k+1}], R), k = 0, \dots, n+1, y(t_k^-) \text{ veya } y(t_k^+) \text{ vardır öyleki } k = 1, 2, \dots, n, y(t_k^-) = y(t_k)\}$. $PC(J, R)$, $\|y\|_{PC} = \sup_{t \in J} |y(t)|$ normu ile bir Banach uzaydır.

Lemma 5.1.1. $1 < \alpha \leq 2$, ve $y \in PC(J, R)$ olmak üzere y , (5.1.1)-(5.1.3) probleminin bir çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&- \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
&+ \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (t - t_i), \tag{5.1.4}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı integral denklemini sağlar.

İspat. y , (5.1.1) – (5.1.3) probleminin bir çözümü olsun. $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_{\pi,-}^{\alpha} h(t)^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) = (2\lambda p(t) + q(t)) y(t),$$

denklemini gözönüne alınsın. Her iki tarafına $I_{\pi,-}^{\alpha}$ integrali uygulanır ve Lemma 2.1.21 yardımıyla

$$\begin{aligned} h(t)^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) &= I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t), \\ {}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) &= \frac{1}{h(t)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t), \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi her iki tarafa $I_{0,+}^{\alpha}$ integral operatörü uygulanırsa $t \in (0, t_1]$ için

$$\begin{aligned} y(t) &= I_{0,+}^{\alpha} \frac{1}{h(t)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t) + b_0 + b_1 t, \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_0 + b_1 t, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

elde edilir. Buradan

$$y'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_1, \quad (5.1.6)$$

olur. $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ sabitleri için $t \in (t_1, t_2]$ aralığında ise

$$y(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + c_0 + c_1 (t - t_1), \quad (5.1.7)$$

$$y'(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + c_1, \quad (5.1.8)$$

olur. $\Delta y|_{t=t_1} = I_1(y(t_1))$ ve $\Delta y'|_{t=t_1} = I_1^*(y(t_1))$ impulsive şartları kullanılırsa $\Delta y|_{t=t_1} = I_1(y(t_1))$ şartı için (5.1.7) denkleminin (5.1.5) denklemini çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \Delta y|_{t=t_1} &= y(t_1^+) - y(t_1^-), \\ &= c_0 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - b_0 - b_1 t, \\ &= I_1(y(t_1)), \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_0 \\ &\quad + b_1 t + I_1(y(t_1)), \end{aligned}$$

aynı şekilde $\Delta y'|_{t=t_1} = I_1^*(y(t_1))$ şartı içinde (5.1.8) denkleminde (5.1.6) denklemi çıkarıldığında

$$\begin{aligned}\Delta y'|_{t=t_1} &= y'(t_1^+) - y'(t_1^-), \\ &= c_1 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - b_1, \\ &= I_1^*(y(t_1)),\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$c_1 = \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_1 + I_1^*(y(t_1)),$$

bulunur. Bunları (5.1.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_0 + b_1 t_1 + I_1(y(t_1)) \\ &\quad + (t-t_1) \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_1(t-t_1) + I_1^*(y(t_1))(t-t_1),\end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \left(\frac{(t-t_1)(t_1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_0 + b_1 t + I_1(y(t_1)) + I_1^*(y(t_1))(t-t_1),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}y'(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_1 + I_1^*(y(t_1)),\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t \in (t_k, t_{k+1}]$ ise

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ b_0 + b_1 t + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(t-t_i), \tag{5.1.9}
\end{aligned}$$

olur ve (5.1.9) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ b_1 + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

bulunur. (5.1.3) sınır şartı kullanılırsa, öncelikle $y(\pi)$ ve $y'(\pi)$ fonksiyonlarını bulmamız gerekir,

$$\begin{aligned}
y(\pi) &= \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ b_0 + b_1 \pi + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi-t_i), \\
y'(\pi) &= \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ b_1 + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonrasında (5.1.3) sınır şartı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \alpha_2 b_0 + \alpha_2 b_1 \pi + \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) \\
& + \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& + \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \beta_2 b_1 + \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& -\alpha_2 b_0 - \alpha_2 b_1 \pi - \beta_2 b_1 = \alpha_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& + \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

olur. $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 b_0 + \beta_1 b_1 = 0, \\
& -\alpha_2 b_0 - \alpha_2 b_1 \pi - \beta_2 b_1 = \alpha_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& +\beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \quad (5.1.10)
\end{aligned}$$

sonuç olarak denklem sistemi elde edilir. Şimdi bu denklem sistemini çözelim. İlk denklem α_2 ile ikinci denklem de α_1 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \alpha_1 b_0 + \alpha_2 \beta_1 b_1 = 0, \\
& -\alpha_1 \alpha_2 b_0 - \alpha_1 \alpha_2 b_1 \pi - \alpha_1 \beta_2 b_1 = \alpha_1 \alpha_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_1 \alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_1 \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \alpha_1 \alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& +\alpha_1 \beta_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \alpha_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \alpha_2 \pi - \alpha_1 \beta_2) b_1 = \alpha_1 \alpha_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_1 \alpha_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_1\alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \alpha_1\alpha_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \\
& +\alpha_1\beta_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_1\beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \alpha_1\beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\alpha_2\pi - \alpha_1\beta_2 = \mu$ olarak alalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
b_1 = & \frac{1}{\mu} \left\{ \alpha_1\alpha_2 \left[\int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \left. \right] \\
& +\alpha_1\beta_2 \left[\int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \left. \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

olur. (5.1.10) denklem sistemindeki ilk denklem $(\alpha_2\pi + \beta_2)$ ile ve ikinci denklem β_1 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\alpha_2\pi + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) b_0 = & \alpha_2\beta_1 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_2\beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\alpha_2\beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \alpha_2\beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \\
& +\beta_1\beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& +\beta_1\beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \beta_1\beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

bulunur. $(\alpha_1\alpha_2\pi + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = -\mu$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
b_0 = & -\frac{1}{\mu} \left\{ \alpha_2\beta_1 \left[\int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi-t_i) \left. \right] \\
& + \beta_1\beta_2 \left[\int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \left. \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. b_0 ve b_1 (5.1.9) denkleminde yerine yazılırsa (5.1.4) integral denklemi elde edilir.

Teorem 5.1.2.

$H_1)$ $p \in W$, $q \in L[0, \pi]$, h reel değerli sürekli fonksiyon,

$H_2)$ m, N, R, M pozitif sabitleri varolsun öyleki

$$\min |h(t)| = m, \quad |\lambda| \leq N, \quad |p(t)| \leq R, \quad |q(t)| \leq M,$$

eşitsizlikleri olmak üzere,

$H_3)$ $I_k, I_k^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve r_1, r_2 pozitif sabitleri varolsun. Öyleki

$$|I_k(y)| < r_1, \quad |I_k^*(y)| < r_2,$$

eşitsizlikleri olmak üzere,

$(H_1) - (H_3)$ şartları gerçekleşir ise bu taktirde (5.1.1) – (5.1.3) problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat. $T : PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$ operatörü

$$Ty(t) = \int_{t_n}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \\
& + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (t - t_i),
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. T operatörünün sabit bir noktaya sahip olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Bunun için Schaefer sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

Adım 1. T sürekli.

$PC(J, R)$ 'de $y_n \rightarrow y$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisini alalım. $\forall t \in J$ için

$$\begin{aligned}
& |T(y_n)(t) - T(y)(t)| \leq \int_{t_n}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n |I_i(y_n(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| (\pi - t_i) \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i(y_n(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| (\pi - t_i) \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} |I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s) + q(s))(y_n(s) - y(s))| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^n |I_i(y_n(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| (t - t_i),
\end{aligned}$$

elde edilir. I_k, I_k^* fonksiyonları sürekli ve $y_n \rightarrow y$ olduğu için

$$\|T(y_n) - T(y)\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

bulunur.

Adım 2. T dönüşümü sınırlıdır.

Her $\eta > 0$ için her bir $y \in B = \{y \in C[0, \pi] : \|y\|_\infty < \eta\}$ için pozitif bir γ sabitinin varolduğunu göstermek yeterlidir. Buradan $\|T(y)\|_\infty \leq \gamma$ dır. $\forall y \in B, t \in [0, \pi], |I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s)| \leq K$ için bir $K > 0$ sabiti vardır. Her $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned} |Ty(t)| \leq & \left| \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| -\frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^\pi \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| -\frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| -\frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \right| \\ & + \left| -\frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_n}^\pi \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| -\frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| + \left| -\frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \right| \\ & + \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \int_{t_n}^\pi \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) \right| + \left| \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \right| \\ & + \left| \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \int_{t_n}^\pi \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\ & + \left| \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| + \left| \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) \right| + \left| \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(t - t_i) \right|, \\
& |Ty(t)| \leq \int_{t_n}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n |I_i(y(t_i))| + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))| |(\pi - t_i)| \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))| \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i(y(t_i))| + \frac{\alpha_1 \alpha_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i)| \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds + \frac{\alpha_1 \beta_2 t}{\mu} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))| \\
& + \sum_{i=1}^n |I_i(y(t_i))| + \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))(t - t_i)| \\
& \leq \frac{K\pi^{\alpha}}{m\mu} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu(n+1) + \alpha_2\beta_1(1+n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (n(\mu + \alpha_2\beta_1) + (n+1)\alpha_1\beta_2) \right] \\
& + \frac{K\pi^{\alpha-1}}{m\mu\Gamma(\alpha)} (\beta_1\beta_2(n+1)) + \frac{K\pi^{\alpha+1}}{m\mu} \left(\frac{(n+1)\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\alpha_1\alpha_2 n}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
& + \frac{nr_2}{\mu} (\alpha_2\beta_1\pi + \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\pi^2 + \alpha_1\beta_2\pi + \pi\mu) + \frac{nr_1}{\mu} (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\pi + \mu),
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|T(y)\|_\infty &\leq \frac{K\pi^\alpha}{m\mu} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu(n+1) + \alpha_2\beta_1(1+n)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (n(\mu + \alpha_2\beta_1) + (n+1)\alpha_1\beta_2) \right] \\
&\quad + \frac{K\pi^{\alpha-1}}{m\mu\Gamma(\alpha)} (\beta_1\beta_2(n+1)) + \frac{K\pi^{\alpha+1}}{m\mu} \left(\frac{(n+1)\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\alpha_1\alpha_2n}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
&\quad + \frac{nr_2}{\mu} (\alpha_2\beta_1\pi + \beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\pi^2 + \alpha_1\beta_2\pi + \pi\mu) + \frac{nr_1}{\mu} (\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\pi + \mu) \\
&= \gamma,
\end{aligned}$$

Adım 3. T operatörü $PC(J, R)$ kümesinde eşşireklidir. $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$ olsun.

Adım 2'den $B, PC(J, R)$ kümesinde sınırlı ve $y \in B$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
|T(y)(\tau_2) - T(y)(\tau_1)| &= \left| \int_{t_k}^{\tau_2} \frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\tau_2-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_2}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_2}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_2}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_2}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_2}{\mu} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_2}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^\alpha (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_2}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\tau_2 - t_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_k}^{\tau_1} \frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\tau_1-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{1}{\mu} \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \beta_1 \beta_2 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_1}{\mu} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_1}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_1}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \tau_1}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& - \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_1}{\mu} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_1}{\mu} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{\alpha_1 \beta_2 \tau_1}{\mu} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) - \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\tau_1 - t_i) \Big|,
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& |T(y)(\tau_2) - T(y)(\tau_1)| \leq \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{\tau_1} |(\tau_2 - s)^{\alpha-1} - (\tau_1 - s)^{\alpha-1}| \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |(\tau_2 - s)^{\alpha-1}| \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n |I_i(y(t_i))| + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i)| \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
& + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\mu} (\tau_2 - \tau_1) \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))| + \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))(\tau_2 - \tau_1)|,
\end{aligned}$$

olur. $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ iken yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı sıfıra gider. Arzela-Ascoli teoremi ile adım 1 ve adım 3 ile birlikte $T : PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$ dönüşümü sürekli ve kompakt olduğu sonucuna varılır.

Adım 4. $L = \{y \in PC[J, R] : y = \theta T(y), 0 < \theta < 1\}$ kümesinin sınırlı olduğunu göstermeliyiz. $y \in L$ alalım bu taktirde $y = \theta T(y), 0 < \theta < 1$ olur. Bu yüzden $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
y(t) &= \theta \int_{t_n}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \theta \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&- \frac{1}{\mu} \theta \alpha_2 \beta_1 \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&- \frac{1}{\mu} \theta \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\mu} \theta \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \\
&- \frac{1}{\mu} \theta \alpha_2 \beta_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&- \frac{1}{\mu} \theta \beta_1 \beta_2 \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1}{h(s)} I_{\pi,-}^{\alpha} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\mu}\theta\beta_1\beta_2\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{h(s)}I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s)+q(s))y(s)ds-\frac{1}{\mu}\theta\beta_1\beta_2\sum_{i=1}^nI_i^*(y(t_i)) \\
& \quad +\frac{\theta\alpha_1\alpha_2t}{\mu}\int_{t_n}^{\pi}\frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{h(s)}I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s)+q(s))y(s)ds \\
& \quad +\frac{\theta\alpha_1\alpha_2t}{\mu}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\frac{1}{h(s)}I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s)+q(s))y(s)ds \\
& \quad +\frac{\theta\alpha_1\alpha_2t}{\mu}\sum_{i=1}^nI_i(y(t_i))+\frac{\theta\alpha_1\alpha_2t}{\mu}\sum_{i=1}^nI_i^*(y(t_i))(\pi-t_i) \\
& \quad +\frac{\theta\alpha_1\beta_2t}{\mu}\int_{t_k}^{\pi}\frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{h(s)}I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s)+q(s))y(s)ds \\
& \quad +\frac{\theta\alpha_1\beta_2t}{\mu}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{h(s)}I_{\pi,-}^{\alpha}(2\lambda p(s)+q(s))y(s)ds+\frac{\theta\alpha_1\beta_2t}{\mu}\sum_{i=1}^nI_i^*(y(t_i)) \\
& \quad +\theta\sum_{i=1}^nI_i(y(t_i))+\theta\sum_{i=1}^nI_i^*(y(t_i))(t-t_i),
\end{aligned}$$

sağlanır. (H_2) ve (H_3) şartları ve adım 2'den her $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
|y(t)| & \leq \frac{K\pi^{\alpha}}{m\mu}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(\mu(n+1)+\alpha_2\beta_1(1+n))\right. \\
& \quad \left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(n(\mu+\alpha_2\beta_1)+(n+1)\alpha_1\beta_2)\right] \\
& \quad +\frac{K\pi^{\alpha-1}}{m\mu\Gamma(\alpha)}(\beta_1\beta_2(n+1)) \\
& \quad +\frac{K\pi^{\alpha+1}}{m\mu}\left(\frac{(n+1)\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\alpha_1\alpha_2n}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \quad +\frac{nr_2}{\mu}(\alpha_2\beta_1\pi+\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2\pi^2+\alpha_1\beta_2\pi+\pi\mu) \\
& \quad +\frac{nr_1}{\mu}(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\alpha_2\pi+\mu) \\
& = \gamma,
\end{aligned}$$

Son eşitsizliğin sağ tarafı γ gibi bir sabit olduğu aşıkardır. Bu ise L kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. Schaefer sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak T sabit bir noktaya sahiptir. Bu ise (5.1.1) – (5.1.3) probleminin bir çözümü olduğu sonucunu verir. Böylece ispat tamamlanır.

5.2. Impulsive Şartları Altında Difüzyon Operatörü için p-Laplasian Kesirli Sturm-Liouville Problemi

Tamsayı mertebeden p -Laplasian sınır değer problemi matematik ve fiziğin uygulama ve teorisindeki büyük öneminden dolayı çok fazla çalışılmıştır [15,16]. $p \in [1, \infty)$ bir sabit, λ bir özdeğer ve $q \in L^2[0, 1]$ olmak üzere

$$-(u^{(p-1)})' = (p-1)(\lambda - q(x))u^{(p-1)},$$

denklemi p -Laplasian denklemi aynı zamanda bir boyutlu p -Laplasian özdeğer denklemi olarak bilinir. $p = 2$ alınırsa bu denklem

$$-u'' + q(x)u = \lambda u,$$

olarak bilinen Sturm-Liouville denklemine dönüşür. p -Laplasian difüzyon denkleminde $p > 1$, λ bir özdeğer ve $q \in L^2[0, 1]$ olmak üzere

$$-(u^{(p-1)})' = (p-1)(\lambda^2 - q(x) - 2\lambda r(x))u^{(p-1)},$$

şeklindedir. Bu denklemler için olan sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı gösterilmiş olup pek çok kez çalışılmıştır. Fakat p -Laplasian operatörlü kesirli diferansiyel denklem için sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı hakkında çeşitli çalışmalar vardır [51, 55, 59]. Bunlardan bazıları şöyledir;

$$D_{0+}^{\beta}(\phi_p(D_{0+}^{\alpha})) (t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = au(\xi), \quad D_{0+}^{\alpha}u(0) = 0,$$

sınır değer problemini tanıtmış ve pozitif çözümlerinin varlığını Krasnosel'skii ve Leggett-Williams sabit nokta teoremlerini kullanarak ispatlamıştır [15]. Diğer problem ise

$$D_{0+}^{\beta}(\phi_p(D_{0+}^{\alpha})) (t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = au(\xi), \quad D_{0+}^{\alpha}u(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha}u(1) = bD_{0+}^{\alpha}u(\eta),$$

sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığını ispatlamıştır. Bu çalışmanın bu bölümünde ise difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville probleminin impulsive şartları altında çözümünün varlığı Schauder sabit nokta teoremi ile ispatlanmıştır [16].

Bu kısımda

$$-D_{0,+}^{\beta} \phi_p {}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) + (2\lambda p(t) + q(t)) y(t) = 0, \quad (5.2.1)$$

$$\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k)), \quad \Delta y'|_{t=t_k} = I_k^*(y(t_k)), \quad t_k \in (0, \pi), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.2)$$

$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0, \quad (5.2.3)$$

sınır değer problemini gözönüne alınsın. Burada D_{0+}^{β} Riemann-Liouville türevi, ${}^C D_{0+}^{\alpha}$ Caputo türevi, $p \in W, q \in L^2[0, \pi]$, $I_k, I_k^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} y(t_k + h)$, $y(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} y(t_k + h)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \pi$, $\Delta y'|_{t=t_k}, y'(t)$ için benzer şekildedir. $J = [0, \pi]$ olmak üzere $PC(J, R) = \{y : J \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in C((t_k, t_{k+1}], R), k = 0, \dots, n+1, y(t_k^-) \text{ ve } y(t_k^+) \text{ vardır öyleki } k = 1, 2, \dots, n, y(t_k^-) = y(t_k)\}$. $PC(J, R)$, $\|y\|_{PC} = \sup_{t \in J} |y(t)|$ normu ile bir Banach uzaydır.

Lemma 5.2.1. $0 < \beta < 1$, $1 < \alpha \leq 2$ olmak üzere $y \in PC(J, R)$ fonksiyonu (5.2.1) – (5.2.3) probleminin çözümüdür ancak ve ancak $y(t)$ aşağıdaki kesirli integral denklemini sağlar.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1-t_i). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

İspat. y , (5.2.1) – (5.2.3) probleminin bir çözümü olsun. $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_{0,+}^{\beta} \phi_p {}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) = (2\lambda p(t) + q(t)) y(t),$$

denklemini gözönüne alalım. Her iki tarafına $I_{0,+}^{\beta}$ integral operatörü uygulanır ve Lemma (2.1.21) kullanılırsa

$$\phi_p {}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) = I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t),$$

elde edilir. Her iki tarafa ϕ_p 'nin tersi olan ϕ_q uygulanırsa

$${}^C D_{0,+}^{\alpha} y(t) = \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t),$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafa $I_{0,+}^{\alpha}$ integral operatörü uygulanırsa $t \in (0, t_1]$ için

$$\begin{aligned} y(t) &= I_{0,+}^{\alpha} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(t) + q(t)) y(t) + b_0 + b_1 t, \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_0 + b_1 t, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

elde edilir. Buradan

$$y'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_1, \quad (5.2.6)$$

olur. $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ sabitleri için $t \in (t_1, t_2]$ aralığında ise

$$y(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + c_0 + c_1 (t - t_1), \quad (5.2.7)$$

$$y'(t) = \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + c_1, \quad (5.2.8)$$

elde edilir. Şimdi (5.2.2) sınır şartı olan

$$\Delta y|_{t=t_1} = I_1(y(t_1)) \text{ ve } \Delta y'|_{t=t_1} = I_1^*(y(t_1)),$$

impulsive şartları kullanılsın. $\Delta y|_{t=t_1} = I_1(y(t_1))$ için (5.2.7) ve (5.2.5) denklemlerinde $t = t_1$ alıp (5.2.7) denkleminde (5.2.5) denklemini çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \Delta y|_{t=t_1} &= y(t_1^+) - y(t_1^-), \\ &= c_0 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - b_0 - b_1 t_1, \\ &= I_1(y(t_1)), \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_0 \\ &\quad + b_1 t_1 + I_1(y(t_1)), \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde $\Delta y'|_{t=t_1} = I_1^*(y(t_1))$ için benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \Delta y'|_{t=t_1} &= y'(t_1^+) - y'(t_1^-), \\ &= c_1 - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - b_1, \\ &= I_1^*(y(t_1)), \end{aligned}$$

$$c_1 = \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_1 + I_1^*(y(t_1)),$$

elde edilir. Bu sonuçlar (5.2.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_0 + b_1 t_1 + I_1(y(t_1)) \\ &\quad + (t - t_1) \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_1(t - t_1) + I_1^*(y(t_1))(t - t_1), \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + \int_0^{t_1} \left(\frac{(t - t_1)(t_1 - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &\quad + b_0 + b_1 t + I_1(y(t_1)) + I_1^*(y(t_1))(t - t_1), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \int_{t_1}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + b_1 + I_1^*(y(t_1)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $t \in (t_k, t_{k+1}]$ ise

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + b_0 + b_1 t + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(t-t_i), \tag{5.2.9}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + b_1 + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

olur. (5.2.3) sınır şartları için $y(\pi)$ ve $y'(\pi)$ değerleri

$$\begin{aligned}
y(\pi) &= \int_{t_k}^\pi \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + b_0 + b_1 \pi + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi-t_i),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
y'(\pi) &= \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + b_1 + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

olacak şekilde bulunur. (5.2.3) şartı yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ b_0 + b_1\pi + \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \\
&+ \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + b_1 + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
-b_0 - b_1\pi - b_1 &= \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi - t_i) \\
&+ \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

olur. $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ olduğundan (5.2.2) ve (5.2.3) sınır şartlarından

$$\begin{aligned}
b_0 + b_1 &= 0, \\
-b_0 - b_1\pi - b_1 &= \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi-t_i) \\
&+ \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)), \quad (5.2.10)
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözmek için iki denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
-b_1\pi &= \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(\pi-t_i) \\
&+ \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her iki taraf $-\pi$ 'ye bölünürse

$$\begin{aligned}
b_1 = & -\frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& -\frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. (5.2.10) denklem sisteminde ilk denklem $(\pi + 1)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa ve daha sonra her iki taraf π 'ye bölünürse

$$\begin{aligned}
b_0 = & \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)) (\pi - t_i) \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i)),
\end{aligned}$$

bulunur. b_0 ve b_1 sabitleri (5.2.9) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılsa (5.2.4) integral denkleminde ulaşılır.

Teorem 5.2.2.

$$H_1) \ p \in W, q \in L[0, \pi],$$

$$H_2) \ m, N, R, M \text{ pozitif sabitleri var ve öyleki}$$

$$|\lambda| \leq N, \ |p(t)| \leq R, \ |q(t)| \leq M,$$

eşitsizlikleri sağlansın.

$$H_3) \ I_k, I_k^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyonlar ve } r_1, r_2 \text{ pozitif sabitleri olmak üzere öyleki}$$

$$|I_k| < r_1, \ |I_k^*| < r_2,$$

eşitsizlikleri sağlansın.

$(H_1)-(H_3)$ şartları sağlanırsa bu taktirde (5.2.1)–(5.2.3) problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat. $T : PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$ operatörü

$$\begin{aligned} T(y(t)) &= \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\ &+ \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1-t_i), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. T 'nin sabit bir noktaya sahip olduğu gösterilirse teoreminiz ispatlanır. Bunun için Schaefer sabit nokta teoremi kullanılarak ispat dört adımda yapılacaktır.

Adım 1. T sürekli dir.

$PC(J, R)$ 'de $y_n \rightarrow y$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisini alalım. $\forall t \in J$ için

$$\begin{aligned}
|T(y_n)(t) - T(y)(t)| &\leq \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) (y_n(s) - y(s)) \right| ds \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) (y_n(s) - y(s)) \right| ds \\
&+ \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \left(\frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) (y_n(s) - y(s)) \right| ds \\
&+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) (y_n(s) - y(s)) \right| ds \\
&+ \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) (y_n(s) - y(s)) \right| ds \\
&+ \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n |I_i(y_n(t_i)) - I_i(y(t_i))| + \frac{(\pi+1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y_n(t_i)) - I_i^*(y(t_i))| (1-t_i),
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan I_k, I_k^* fonksiyonları sürekli ve $y_n \rightarrow y$ olduğu için

$$\|T(y_n) - T(y)\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

olur.

Adım 2. T dönüşümü sınırlıdır.

Her $\nu > 0$ ve herbir $y \in \Lambda = \{y \in C[0, \pi] : \|y\|_\infty < \nu\}$ için pozitif bir δ sabiti vardır öyleki $\|T(y)\|_\infty \leq \delta$ dir. $\forall y \in \Lambda, t \in [0, \pi], \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| \leq K$ için bir $K > 0$ sabiti vardır öyleki her $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
|Ty(t)| &\leq \left| \int_{t_k}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\
&+ \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\
&+ \left| \frac{(1-t)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \left(\frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\
&+ \left| \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right| \\
&+ \left| \frac{(1-t)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{\pi+1-t}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) \right| + \left| \frac{\pi+1-t}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1-t_i) \right| \\
& \leq \frac{K^{q-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_n}^t (t-s)^{\alpha-1} ds + K^{q-1} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
& \quad + \frac{1}{\pi} K^{q-1} \int_{t_n}^{\pi} \left(\frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) ds \\
& \quad + \frac{1}{\pi} K^{q-1} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
& \quad + \frac{1}{\pi} K^{q-1} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(1+\pi)nr_1}{\pi} + \frac{(1+\pi)nr_2}{\pi} \\
& \leq \frac{K^{q-1}\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{nK^{q-1}\pi\pi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{nK^{q-1}\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K^{q-1}\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\pi} \\
& \quad + \frac{K^{q-1}\pi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\pi} + \frac{nK^{q-1}\pi\pi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\pi} + \frac{nK^{q-1}\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\pi} + \frac{nK^{q-1}\pi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\pi} \\
& \quad + \frac{(1+\pi)nr_1}{\pi} + \frac{(1+\pi)nr_2}{\pi} \\
& \leq K^{q-1}\pi^\alpha \left[\frac{(n+1)(\pi+1)}{\pi\Gamma(\alpha+1)} + \frac{n(\pi+1)}{\pi\Gamma(\alpha)} \right] + K^{q-1}\pi^{\alpha-1} \frac{(n+1)}{\Gamma(\alpha)\pi} \\
& \quad + \frac{n(\pi+1)(r_1+r_2)}{\pi}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|T(y)\|_\infty & \leq K^{q-1}\pi^\alpha \left[\frac{(n+1)(\pi+1)}{\pi\Gamma(\alpha+1)} + \frac{n(\pi+1)}{\pi\Gamma(\alpha)} \right] + K^{q-1}\pi^{\alpha-1} \frac{(n+1)}{\Gamma(\alpha)\pi} \\
& \quad + \frac{n(\pi+1)(r_1+r_2)}{\pi} = \delta.
\end{aligned}$$

Adım 3. T operatörü $PC(J, R)$ kümesinde eşşireklidir. Adım 2'den $y \in \Lambda$ ve $\tau_1, \tau_2 \in J$, $\tau_1 < \tau_2$ olmak üzere, bu durumda

$$\begin{aligned}
& |T(y)(\tau_2) - T(y)(\tau_1)| \\
& = \left| \int_{t_n}^{\tau_2} \frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\tau_2-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1 - \tau_2)}{\pi} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{(1 - \tau_2)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{(1 - \tau_2)}{\pi} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{(1 - \tau_2)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{(\pi + 1 - \tau_2)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{(\pi + 1 - \tau_2)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1 - t_i) \\
& - \int_{t_k}^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\tau_1 - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{(1 - \tau_1)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{(1 - \tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi - t_i)(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} + \frac{(t_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{(1 - \tau_1)}{\pi} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{(1 - \tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)} \phi_q I_{0,+}^{\beta} (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& - \frac{(\pi + 1 - \tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) - \frac{(\pi + 1 - \tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1 - t_i),
\end{aligned}$$

bir dizi işlemler neticesinde

$$\begin{aligned}
|T(y)(\tau_2) - T(y)(\tau_1)| &\leq \int_{t_k}^{\tau_1} \frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(\tau_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{(\tau_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \int_{t_k}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q \left| I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) \right| ds \\
&\quad + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n |I_i(y(t_i))| + \frac{(\tau_2-\tau_1)}{\pi} \sum_{i=1}^n |I_i^*(y(t_i))| (1-t_i),
\end{aligned}$$

bulunur. $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ iken T operatörü eşsüreklidir. Dolayısıyla Arzela-Ascoli teoreminin şartları sağlanır, yani $T : PC(J, R) \rightarrow PC(J, R)$ sürekli ve kompakt olduğu sonucuna varılır. Şimdi Schaefer sabit nokta teoreminin hipotezinde

$$\Phi = \{y \in PC[J, R] : y = \theta T(y), 0 < \theta < 1\}$$

şeklinde tanımlı Φ kümesinin sınırlı olduğunun gösterilmesi gerekir.

Adım 4. $y \in \Phi$ alalım bu taktirde $y = \theta T(y)$, $0 < \theta < 1$ olur. Bu nedenle $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
y(t) &= \theta \int_{t_n}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \theta \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(t-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{(1-t)\theta}{\pi} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{(1-t)\theta}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{(\pi-t_i)(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{(t_i-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
&\quad + \frac{(1-t)\theta}{\pi} \int_{t_n}^{\pi} \frac{(\pi-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-t)\theta}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{(t_i-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \phi_q I_{0,+}^\beta (2\lambda p(s) + q(s)) y(s) ds \\
& + \frac{(\pi+1-t)\theta}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i(y(t_i)) + \frac{(\pi+1-t)\theta}{\pi} \sum_{i=1}^n I_i^*(y(t_i))(1-t_i)
\end{aligned}$$

sağlanır. (H_2) ve (H_3) şartları ve Adım 2'den her $t \in [0, \pi]$ için

$$\begin{aligned}
|y(t)| & \leq K^{q-1} \pi^\alpha \left[\frac{(n+1)(\pi+1)}{\pi \Gamma(\alpha+1)} + \frac{n(\pi+1)}{\pi \Gamma(\alpha)} \right] + K^{q-1} \pi^{\alpha-1} \frac{(n+1)}{\Gamma(\alpha) \pi} \\
& \quad + \frac{n(\pi+1)(r_1+r_2)}{\pi} \\
& = \delta,
\end{aligned}$$

olur. Bu Φ kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. Schaefer sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak T sabit bir noktaya sahiptir. Bu ise (5.2.1) – (5.2.3) probleminin bir çözümüdür. Bu da ispatı tamamlar.

6. SONUÇ

- Kesirli Sturm-Liouville problemi isimli bölümde [38,48] çalışmasından farklı olarak difüzyon operatörü, Coulomb ve hidrojen atom potansiyelli kesirli Sturm-Liouville operatörünün self adjointliği gösterilmiştir.
- Ayrıca spektral teoride temel teşkil eden özdeğerlerin reelliği, özfonksiyonların ortagonallığı bu operatörler için ispatlanmıştır. Sturm-Liouville teorisinde potansiyel fonksiyonun fiziksel olarak önemi büyüktür. Bu anlamda tezde ele alınan problemlerin ve sonuçların daha etkili olduğu görülmüştür.
- Bu bölümün son kısmında ise [38,48] çalışmasındaki sonuçlardan çok farklı olarak karşılaştırma teoremleri belli koşullar altında verilmiş ve ispatlanmıştır.
- Son bölümün birinci kısmında impulsive şartlarında difüzyon operatörü için kesirli Sturm-Liouville problemine Schafer sabit nokta teoremi uygulanmış ve çözümlerin varlığı ispatlanmıştır. İkinci kısımda ise bu problemin daha genel hali olan p -laplasyen durumunda benzer ispatlar yapılmıştır. Her iki kısımda da alınan sonuçlar, [51-60] çalışmalarıyla uyumludur. Ancak tezde ele alınan problemler fiziksel ve Sturm-Liouville teorisi bakımından daha işlevsel olduğundan daha etkili sonuçlar elde edildiği saptanmıştır.

7. ÖNERİLER

- Tezde konuyla ilgili hedeflenen pek çok problem çözüme kavuşturulmuştur. Ancak bu konu oldukça geniş bir kapsama sahip olduğundan hala çözüme muhtaç problemlerin varlığı bir gerçektir.
- Bunlardan en önemlisi bizim çalışmamızda elde ettiğimiz kesirli Sturm-Liouville problemi için karşılaştırma teoremleri ile ilgilidir. Şöyle ki genel spektral teoride önemli bir yer tutan osilasyon teoremleri buradaki problemlere uygulanarak ispat yapılabilir. Bu problem özgün bir çalışma olarak elde edilebilir.
- Ayrıca kesirli Sturm-Liouville problemleri dönüşüm operatörlerine uygulanabilir. Dönüşüm operatörlerinin kesirli Sturm-Liouville problemlerinde nasıl bir karşılık bulacağı ciddi bir merak konusudur. İleri aşamalarda bu problemlere çözüm bulunacağı ümit edilmektedir.

KAYNAKLAR

1. **Oldham, K.B. and Spanier, J.**, 1974. The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
2. **Podlubny, I.**, 1999. Fractional differential equations, Academic Press, New York.
3. **Kilbass, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J.**, 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Netherlands:Elsevier, Amsterdam.
4. **Miller, K.S. and Ross, B.**, 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential Equations, Wiley, New York.
5. **Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.**, 1993. Fractional integrals and derivatives, Gordon & Breach, Berlin.
6. **Anatoly, K., Hari, S. and Juan, T.**, 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier, Amsterdam.
7. **Sebaa, N., Fella, Z.E.A., Lauriks, W., Depollier, C.**, 2006. Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, *Signal Processing archive*, **86**, 2668-2677.
8. **Fella, Z.E.A. and Depollier, C.**, 2002. Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: Validation via ultrasonic measurement, *Acta Acustica*, **88**, 34-39.
9. **Magin, R.L.**, 2008. Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus, *Journal of Vibration and Control*, **14**, 1431-1442
10. **Mathieu, B., Melchior, P., Oustaloup, A., Ceyral, Ch.**, 2003. Fractional differentiation for edge detection, *Fractional Signal Processing and Applications*, **83**, 2285-2480.

11. **Soczkiwicz, E.**, 2002. Application of fractional calculus in theory of viscoelasticity, *Molecular and Quantum Acoustics*, **23**, 397-404.
12. **Suarez, J.I., Vinagre, B.M., Calderon, A.J., Monje, C.A. and Chen, Y.Q.**, 2004. Using fractional calculus for lateral and longitudinal control of autonomous vehicles, **2809**.
13. **Lukkassen, D.**, 2004. A short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for Engineering students.
14. **Abdeljawad, T.**, 2015. On conformable fractional calculus, *Journal of Computation and Applied Mathematics*, **279**, 57-66.
15. **Wang, J., Xiang, H., Liu, Z.**, 2009. Positive solutions for three-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p-Laplasiyan, *Far East J Appl Math.*, **37**, 33-47.
16. **Wang, J., Xiang, H., Liu, Z.**, 2010. Upper and lower solutions for a class of singular fractional boundary value problems with p-Laplasiyan operator, *Abst Appl Anal*, **12** (2010).
17. **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.**, 1975. Introduction to Spektral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Math. Soc., Pro., R.I.
18. **Levitan, B.M.**, 1987. Inverse Sturm-Liouville Problems, VNU Science Press, Utrecht.
19. **Zettl, A.**, 2005. Sturm-Liouville Theory, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society.
20. **Amrein, W.O., Hinz, A.M.**, 2005. Sturm-Liouville Theory; Past and Present, Birkhauser, Basel, Switzerland.
21. **Erturk, V.S.**, 2011. Computing eigenelements of Sturm-Liouville Problems of fractional order via fractional differential transform method, *Mathematical and Computational Applications*, **16**, 712-720.

22. **Kreyszig, E.**, 2006. Advanced Engineering Mathematics, 9th ed. Hoboken, John -Wiley and Sons, New Jersey, USA.
23. **J. Qi., Sh. Chen.** 2011. Eigenvalue problems of the model from nonlocal continuum mechanics, *J. Math. Phys*, **52**, No 073516.
24. **A., Carpinteri and F. Mainardi (Editors)**, 1998 Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Telos: Springer-Verlag.
25. **West, B.J., Bologna, M.**, 2003. P. Grigolini Physics of Fractal Operators, NY: Springer Verlag, New York.
26. **Hilfer, R.**, 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore.
27. **M., Klimek**, 2009. On Solutions of Linear Fractional Differential Equations of a Variational Type, The Publishing Office of Czestochowa, University of Technology, Czestochowa.
28. **Zeidler, E.**, 1986. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications-I: Fixed-Point Theorems, Springer, New York.
29. **Bas, E.**, 2013. Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator, *Journal of Func. Spaces and Appl.*, Article ID 915830, 7 pages.
30. **Bas, E.**, 2007. A Uniqueness Theorem For Inverse Nodal Problems Having Special Singularity Type, *International Journal of Applied Mathematics*, **20**, No:6, 867-873.
31. **Al-Mdallal, Q.M.**, 2009. An efficient method for solving fractional Sturm-Liouville problems, *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**, 183-189.
32. **Erdoğan, S.Ş.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
33. **Bas, E., Panakhov, E.S., Yilmazer, R.**, 2013. On the Well Posed Problem for Hydrogen Atom Equation, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, **41**, 20-29.

34. **Bas, E.**, 2006. Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters Problemleri, *Doktora Tezi*, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
35. **Hani, R.M.**, 2011. Existence and Uniqueness of the Solution for Fractional Sturm-Liouville Boundary Value Problem, *College of Basic Education Researchers Journal*, **11**, 698-710.
36. **Olver, F.W.J.**, 1974. Introduction to Asymptotics and Special Functions, Academic Press, New York.
37. **Panakhov, E.S.**, 1980. On the determination the differential operator peculiarity in zero. *Dep VINITI An Sssr*, **4407-80**, 1-16.
38. **Klimek, M. and Argawal, O. P.**, 2012. On a Regular Fractional Sturm-Liouville Problem with Derivatives of Order in $(0,1)$, *13th International Carpathian Control Conference*, Vysoke Tatry (Podbanske), Slovakia, May 28-31.
39. **Bas, E., Metin, F.**, 2013. Fractional Singular Sturm-Liouville Operator for Coulomb Potential, *Advances in Differences Equations*, DOI: 10.1186/1687-1847-2013-300.
40. **Baleanu, D., Octavian, M., Agarwal, P.R.** 2011. Asymptotic integration of $(1+\alpha)$ -order fractional differential equations, *Computers & Math. with appl.*, **62-3**, 1492-1500.
41. **Abolhassan, R., Baleanu, D., Vahid Johari, M.**, 2013. Conditional Optimization Problems: Fractional Order Case, *Journal of optimization theory and appl.*, **156-1**, 45-55.
42. **Guo-Cheng, W., Baleanu, D.**, 2013. New applications of the variational iteration method-from differential equations to q-fractional difference equations, *Advances in difference equation*, **21**, 1687-1847.
43. **Grace, S. , R., Agarwal, R., Wong, P.J.Y., Zafer, A.**, 2012. On the oscillation of fractional differential equations, *Frac. Calc. App. Anal.*, **15**, 222-231.

44. **Baş, E., Yılmaz, R., Panakhov, E.S.,** 2013. Fractional Solutions of Bessel Equation with N- Method, *The Scientific World Journal-Mathematical Analysis*, **2013**, 1-8.
45. **Wang, Y., Liu, L., Wu, Y.,** 2012. Existence and uniqueness of a positive solution to singular fractional differential equations, *Boundary Value Problem*, **81**.
46. **Baleanu, D.M.,** 2011. On the existence interval for the Initial value problem of fractional differential equation, *Hacettepe Journal of Math. Ist.*, **40**, 581-587.
47. **Bas, E., Metin, F.,** 2015. Spectral Analysis for Fractional Hydrogen Atom Equation, *Advances in Pure Mathematics*, **5**, 767-773.
48. **Klimek, M. and Argawal, O. P.,** 2013. Fractional Sturm-Liouville problem, *Computers and Mathematics with Applications*, **66**, 795-812.
49. **Loverro, A.,** 2004. Fractional Calculus. History, Defination and Applications for the Engineer, USA.
50. **Zhang, S.,** 2006. Positive solutions for baundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, **36**, 1-12.
51. **Chen, T., Liu, W.,** 2012. An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p-Laplasiyan operator, *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1671-1675.
52. **Agarwal, R.P., Benchohra, M. and Slimani, B.A.,** 2008. Existence results for differential equations with fractional order and impulses, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **44**, 1-21.
53. **Ahmad, B. and Nieto, J.J.,** 2011. Existence of solutions for impulsive anti-periodic boundary value problems of fractional order, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **15**, 981-993.

54. **Zhou, J., Feng, M.**, 2014. Green's function for Sturm-Liouville -type boundary value problems of fractional order impulsive differential equations and its application, *Boundary Value Problems*, **69**.
55. **Chai, G.**, 2012. Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equation with p-Laplasiyan operator, *Boundary Value Problems*, **18**, 1-20.
56. **Abbas, S. and Benchohra, M.**, 2010. Impulsive partial hyperbolic functional differential equations of fractional order with state-dependent delay, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **13**, 225-244.
57. **Ahmad, B., Sivasundaram, S.**, 2009. Existence results for nonlinear impulsive hybrid boundary value problems involving fractional differential equations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3**, 251-258.
58. **Wang, G., Ahmad, B., Zhang, L.**, 2011. Some existence results for impulsive nonlinear fractional differential equations with mixed boundary conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, **62**, 1389-1397.
59. **Chen, T., Liu, W., Hu, Z.**, 2012. A boundary value problem for fractional differential equation with p-Laplasiyan operator at resonance, *Nonlinear Analysis*, **75**, 3210-3217.
60. **Tian, Y., Bai, Z.**, 2010. Existence results for the three-point impulsive boundary value problem involving fractional differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 2601-2609.
61. **Jumarie, G.**, 2009. Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouville derivative for non-differentiable function, *Applied Mathematics Letters*, **22**, 378-385.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Malatya’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Kahramanmaraş’ın Afşin ilçesinde tamamladım. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2010 yılında mezun olup aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda tezli yüksek lisansa başladım. Yüksek lisansımı 2012 yılında tamamlayıp Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda doktora yapmaya başladım. Evli ve bir çocuk annesiyim.

