

**HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GAUSS
DİFERENSİYEL DENKLEMİ İÇİN KESİRLİ
ÇÖZÜMLER**

Neslihan Sabriye KÜÇÜKER

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER**

OCAK-2015

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GAUSS DİFERENSİYEL
DENKLEMİ İÇİN KESİRLİ ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan Sabriye KÜÇÜKER

(111121112)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 07.01.2015

OCAK-2015

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GAUSS DİFERENSİYEL
DENKLEMİ İÇİN KESİRLİ ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan Sabriye KÜÇÜKER

(111121112)

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :
Tezin Savunulduğu Tarih :**

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

OCAK-2015

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde bana destek olan, bilgilerinden her alanda faydalandığım ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın hocam Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e, değerli fikir ve yardımlarından yararlandığım Arş. Gör. Ökkeş ÖZTÜRK'e, her zaman yanımda olan ve çalışmalarım boyunca benden maddi manevi desteğini esirgemeyen babam Lütfi KÜÇÜKER'e, annem Ayşe KÜÇÜKER'e, kardeşlerim Aslıhan KÜÇÜKER'e ve Oğuzhan KÜÇÜKER'e teşekkürlerimi sunarım.

Neslihan Sabriye KÜÇÜKER

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
1.1. Kesirli Hesap Teorisi Üzerine Yapılan Çalışmalar	1
1.2. Hipergeometrik Seri Üzerine Yapılan Çalışmalar	7
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	10
2.1. Gamma Fonksiyonu	11
2.2. Beta Fonksiyonu	13
2.3. Grünwald Letnikov Kesirli Türevi.....	13
2.4. Riemann-Liouville Tanımı.....	14
2.5. Caputo Kesirli Türevi.....	14
2.6. Polchammer Sembolü	15
2.7. Gauss Denklemi	16
2.8. Gauss Hipergeometrik Seri	17
2.9. Leibniz Kuralı	18
3. HOMOJEN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜ	20
4. HOMOJEN OLMAYAN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜ	31
5. HOMOJEN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜNÜN HİPERGEOMETRİK GÖSTERİMİ.....	38
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ	64

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; kesirli hesaplamaların ve Gauss denkleminin tarihçesinden, bu konu ile ilgili ünlü matematikçilerin çalışmalarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; Hipergeometrik fonksiyon ve Gauss denkleminin kesirli çözümleri için kullanılan bazı tanımlar, fonksiyonlar ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde; homojen Gauss denkleminin kesirli çözümlerinin bulunmasından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde; homojen olmayan Gauss denkleminin kesirli çözümlerinin bulunmasından bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde ise; homojen Gauss denkleminin kesirli çözümlerinin hipergeometrik fonksiyon biçiminde yazılışları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegraller (Diferintegraller), Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu, Gauss Denklemi, Hipergeometrik Fonsiyon, Leibniz Kuralı.

SUMMARY

Fractional Calculus for Gauss Equation and Hypergeometric Function

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter; it is given the history of fractional calculus and Gauss equation, the works of famous mathematicians about this subject.

In the second chapter; some definitions, functions and theorems used for fractional calculus for Hypergeometric Gauss equation are mentioned.

In the third chapter; there has been mentioned of fractional solution of homogeneous Gauss equation.

In the fourth chapter; it has been mentioned for fractional solution of non-homogeneous Gauss equation.

In the fifth chapter; fractional calculus of homogeneous Gauss equation is obtained in the form of Hypergeometric function.

Key words: Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*), Gamma Function, Beta Function, Gauss Equation, Hypergeometric Functions, Leibniz's Rule.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Reel veya kompleks sayılar cismi
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$B(p, q)$	: Beta fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; z)$	: Hipergeometrik fonksiyonun gösterimi
$D^\alpha f = f_\alpha$	: Keyfi mertebeden türev ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$)
$D^{-\beta} f = I^{-\beta} f = f_{-\beta}$	: Keyfi mertebeden integral ($\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$)
$(\alpha)_n$	: Polchammer Sembolü
α	: Alfa
β	: Beta
ε	: Epsilon
δ	: Delta
τ	: Tau
φ	: Phi
ν	: Nü
σ	: Sigma
π	: Pi
λ	: Lambda
γ	: Gama
Ω, ω	: Omega

1. GİRİŞ

1695’de *Leibniz*’in *L’Hopital*’e ‘Eğer n pozitif bir tamsayı değil de bir kesir olursa $D^n f$ ifadesinden ne anlaşılır?’ sorusunu sormasıyla kesirli türev ve integral (*diferintegral*) kavramı ortaya çıkmıştır

Kesirli hesap tekniği; n bir pozitif tamsayı olmak üzere, n . mertebeden türev ve n _katlı integral kavramlarını genelleştiren ve birleştiren keyfi mertebeden türev ve integral teorisidir. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere keyfi mertebeden türev; *H.T.Davis* tarafından kullanılan ${}_a D_t^\alpha f(t)$ notasyonu ile verilir. $\beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta > 0$ olmak üzere keyfi mertebeden integral ise; ${}_a D_t^{-\beta} f(t)$ ile gösterilir.

1.1. Kesirli Hesap Teorisi Üzerine Yapılan Çalışmalar

Kesirli hesap konusu *Leibniz*’in yanı sıra bir çok ünlü bilim adamının da dikkatini çekmiş ve bu konu üzerinde çeşitli çalışmalar yapmışlardır. *G.W.Leibniz* (1695-1697), $d^{1/2}x$ ifadesinin $x^2 \sqrt{dx}$ ’e eşit olabileceğini ve daha sonraları da sonsuz serilerin kesirli hesaplamayı ifade edebileceğini düşünmüştür. *L.Euler* (1730), ise serilerin interpolasyonunun yararlı olabileceğinden bahsetmiştir.

J.L.Lagrange (1772), geliştirmiş olduğu,

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}}$$

şeklindeki mertebesi tamsayı olan diferensiyel operatörler için üsler kuralında, m ve n kesirli olduğunda, kuralın geçerli olup olmadığını sorgulamaya başlamıştır.

S.F.Lacroix (1819), tümevarımdan faydalananarak $y = x^m$ ve m pozitif bir tamsayı olmak üzere, x^m ’nin n . mertebeden türevini,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n$$

şeklinde geliştirmiştir. Daha sonra gama fonksiyonunu kullanarak,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

formülünü vermiştir. Buradan da $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olmak üzere, $y = x$ ve $n = 1/2$ alarak,

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

tanımına ulaşmıştır.

J.B.J.Fourier (1822),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha) dp$$

formülü ile keyfi mertebeli türevlerden söz etmiştir. n bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-\alpha) = p^n \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}n\pi \right]$$

şeklinde alıp, bunu da genelleştirip n yerine keyfi u değerini alarak,

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}u\pi \right] dp$$

tanımını vermiştir. *Fourier*, buradaki u sayısının pozitif veya negatif herhangi bir değer olabileceğini belirtmiştir.

N.H.Abel (1823), kesirli işlemleri ilk olarak kullanan bilim adamıdır. *Abel*, bir integral denklemin çözümünde kesirli hesabı kullanmıştır. *Abel*'in integral denklemi,

$$k = \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t) dt$$

şeklindedir. Bu denklemin sağ tarafına $\sqrt{\pi}[d^{-1/2}/dx^{-1/2}]f(x)$ yazarak düzenleme yapmış ve

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x)$$

formülünü vermiştir. Bu denklemde $f(x)$ 'i belirleyerek kesirli hesapta önemli bir başarı sağlamıştır.

H.T.Davis (1927), kesirli hesap operatörlerini tanımlamada kullanılan çeşitli notasyonları ele almıştır. $\frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt$ 'yi tanımlamak için ${}_c D_x^{-v} f(x)$

notasyonunu kullanmıştır. ${}_c D_x^{\frac{1}{2}} u + \lambda u = f(x)$ gibi kesirli üsse sahip bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için de bu notasyonu uygulamıştır.

J.Liouville (1832-1834), $(d^{1/2}/dx^{1/2})e^{2x}$ ifadesini düşünmüş ve kesirli operatörleri kullanarak mekanik ve geometrinin bazı problemlerini çözmüştür. Ayrıca keyfi mertebeden türevler için,

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

tanımını geliştirmiştir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \text{Re}(a_n) > 0$$

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

formundaki seride, bir $f(x)$ fonksiyonunun keyfi türevinin açık olarak yazılabileceğini düşünmüştür. İkinci bir tanım elde etmek için gama fonksiyonu ile ilişkili,

$$I = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-xu} du, \quad a > 0, \quad x > 0$$

belirli integralini kullanmıştır. Burada $xu = t$ alarak,

$$I = x^{-\alpha} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = x^{-\alpha} \Gamma(\alpha)$$

veya

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} I$$

formüllerini vermiştir. Bu son denkleme D^ν operatörünü uygulayarak da,

$$D^\nu x^{-\alpha} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+\nu-1} e^{-xu} du$$

$$D^\nu x^{-\alpha} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-\nu}$$

tanımına ulaşmıştır.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

integral denkleminin $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ şeklinde tamamlayıcı bir çözüme sahip olduğunu belirtmiş ve keyfi u değeri için,

$$\frac{d^u y}{dx^u} = 0$$

denkleminin de tamamlayıcı bir çözüme sahip olup olmadığını tartışmıştır.

D.F.Gregory (1841), operatörler hesabı tanımının kurucusudur. Sembolik formu,

$$u(x, t) = Ae^{xap^{1/2}} + Be^{-xap^{1/2}}$$

şeklinde olan,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

ile tanımlanan ısı denklemini vermiştir.

B.Riemann (1847), Taylor serilerini geliştirerek kesirli integral tanımını,

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklinde vermiştir. Bu tanıma tamamlayıcı bir fonksiyon eklemeyide uygun görmüştür. Burada, integralin alt limiti olan c 'nin ve tamamlayıcı fonksiyonun değeri '0' alınarak, kesirli integrasyon tanımına uygun hale getirilmiştir.

C.J.Hargreave (1848), n pozitif bir tamsayı olmamak şartıyla, n . mertebeden geliştirilmiş Leibniz türevi üzerine çalışmıştır. Böylece,

$$D^\nu f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} D^n f(x) D^{\nu-n} g(x)$$

formülünü vermiştir. Burada, D^n n . mertebeden diferensiyel operatör, $D^{\nu-n}$ kesirli bir operatör ve $\binom{\nu}{n}$ de $\Gamma(\nu+1)/n! \Gamma(\nu-n+1)$ şeklindedir.

A.K.Grünwald (1867),

$$\theta = \int_0^x (x-t)^\nu f(t) dt$$

formülünü elde etmiştir ki burada θ, x in bilinen fonksiyonudur.

A.V.Letnikov (1868),

$$\left[D^q D^p f(x) \right]_{x_0}^x = \left[D^{q+p} f(x) \right]_{x_0}^x$$

formülünü ispatlamıştır. Ayrıca, Cauchy integral formülünden yararlanarak,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$$

tanımını vermiştir ve n yerine $v \in \mathbb{R}$ yazarak,

$$D^v f(z) = \frac{\Gamma(v+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{v+1}} d\omega$$

formülünü elde etmiştir.

O.Heaviside (1892), kablolardaki elektrik akımının iletkenlik teorisindeki metotlarını kullanarak mühendislere çok fayda sağlamıştır. α^2 bir sabit ve u ise sıcaklık olmak üzere bir boyutlu ısı denklemini,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

olarak belirlemiştir. Eğer $\frac{\partial}{\partial t} = p$ ise

$$D^2 u = \alpha^2 p$$

olur. *Heaviside*, $p^{1/2} = d^{1/2}/dx^{1/2} = D^{1/2}$ eşitlikleriyle doğru sonuçlar elde etmiştir.

E.Post (1919), kesirli hesap operatörleri ile alakalı iki probleme iki farklı çözüm üretmeye çalışmıştır. İlk çözümünde,

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklindeki Liouville'un kesirli mertebeli integrasyon tanımını, $c = -\infty$ olarak kullanmıştır. İkinci çözümünde ise Riemann tanımından yararlanmıştır.

M.T.Naraniengar (1919),

$$D^{1/2}(x^n) = R(n)x^{n-\frac{1}{2}}$$

denklemini üzerine çalışmış ve $\Gamma(n+1)/\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ değerine karşılık gelen $R(n)$ katsayısını geliştirmiştir.

W.C.Brenke (1922), fizikte kullanmak için,

$$Q(h) = c \int_0^h (h-t)^{1/2} f(t) dt$$

şeklindeki denklem ve bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmıştır.

M.Riesz (1949), Riemann uzayındaki dalga denklemi, izafiyet teorisi, Lorenz uzayı ve olasılık teorisinde,

$$I^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklindeki kesirli integralin çeşitli yönlerinden bahsetmiştir.

N.Stuloff (1950),

$$\Delta^\alpha x_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x_{n+\nu}$$

eşitliği ile kesirli mertebenin farklarını ele almıştır.

B.Kuttner (1953),

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} f(t) dt$$

ve

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_x^1 (t-x)^{n-k-1} f(t) dt$$

şeklindeki iki integral arasındaki ilişkiyi düşünmüştür.

M.Caputo (1967),

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 \leq \alpha < n$$

şeklindeki formülü tanımlamıştır.

K.B.Oldham ve *J.Spainer* (1970), adi diferensiyel olarak adlandırdıkları, $\frac{1}{2}$ mertebeli $d^{\frac{1}{2}}f(t)/dt^{\frac{1}{2}}$ şeklindeki operatör yardımıyla elektrokimyasal kinetikleri açıklayabilecekleri yeni bir yöntem bulduklarını iddia etmişlerdir.

K.S.Miller ve *B.Ross* (1993),

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

eşitliğini vermişlerdir.

1695'den bu yana, fen ve mühendislik bilimlerinin birçok teori ve uygulama alanlarında kullanılan kesirli hesap tekniği ve bu teknik üzerine yapılan çalışmalar; fizik, kimya, mühendislik vb. alanlarda çeşitli uygulamalara imkan sağlamıştır. İletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, ısı transferi, difüzyon, robot teknolojisi, PID kontrol sistemleri, Schrödinger denklemi, dalga denklemi, malzeme birimi, sıvıların kimyasal analizi, insan kemiğinde yayılan ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, mekanik problemleri, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi, elektrokimyasal kinetikler vb. birçok uygulamada kesirli türev ve integrallerden yararlanılmıştır.

Kesirli hesap tekniği ile alakalı gelişmeler doğrultusunda 20.y.y. bitmeden çeşitli üniversitelerde konferanslar da düzenlenmiştir. 1974'te kesirli hesaplar üzerine ilk uluslararası konferans, ABD'de New Haven Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiştir. 1984'te 2.Uluslararası konferans, İskoçya'da Strathclyde Üniversitesi'nde gerçekleştirilmiştir. 1989'da 3.Uluslararası konferans, Tokyo'da Nihon Üniversitesi'nde düzenlendi. 2013 Nisan ayında ise, Birleşik Arap Emirlikleri'nin Al-Ain şehrinde Birleşik Arap Emirlikleri Üniversitesi tarafından 'Kesirli Hesap ve Uygulamaları' üzerine ilk çalıştay düzenlenmiştir [2,3,4,8,9].

1.2. Hipergeometrik Seri Üzerine Yapılan Çalışmalar

$$1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

(1.2.1)

serisine *Gauss serisi* yada *Hipergeometrik seri* denir. Genel olarak ${}_2F_1(a, b; c; z)$ biçiminde gösterilir. Burada z değişken ve a, b, c fonksiyonun parametresi olarak adlandırılır. Şayet a ve b negatif bir tamsayı ise seri sonlu sayıdadır.

John Wallis (1616-1703), *Aritmetica infinitorm* (1685), adlı çalışmasında ilk defa Yunanca kökenli hipergeometrik kavramını

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

serisi dışında bir seriyi tanımlamak için kullanmıştır. Bilhassa

$$1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + \dots$$

serisi üzerinde çalışmıştır. 150 yıl boyunca pek çok matematikçi Gauss serisi üzerinde çalışmış ve özellikle Swiss *L. Euler* (1707-1783), pek çok önemli sonuç ortaya koymuştur. Bunlardan en çok bilineni

$${}_2F_1(-n, b; c; z) = (1-z)^{c+n-b} {}_2F_1(c+n, c-b; c; z)$$

eşitliğidir.

1770 yılında Fransız bilim adamı *A.T. Vandermonde* (1735-1796),

$${}_2F_1(-n, b; c; z) = \frac{(c-b)(c-b+1)\dots(c-b+n+1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}$$

binom açılımını oluşturmuştur.

20 Ocak 1812 tarihinde parlak bir matematikçi olan *C.F. Gauss* (1777-1855), bildiğimiz (1.2.1) serisini tanımlamıştır. (1.2.1) serisi ile ilgili pek çok kavramlar oluşturmuş ve

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

ifadesini ispatlamıştır.

1836 yılında *E.E.Kummer* (1810-1893), seriler için Hipergeometrik terimini kullanmış ve ${}_2F_1(a, b; c; z)$ serisinin

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{c - (1+a+b)z\}\frac{dy}{dz} - aby = 0$$

diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğunu göstermiş ve bu çözüme bağlı olarak Gauss denkleminin 24 tane çözümünü elde etmiştir.

1875 yılında *G.F.B. Riemann* (1826-1866), P fonksiyonunu tanımlayarak genelleştirilmiş Gauss serisini oluşturmuştur. 1879 yılında *J. Thomse* Riemann teoremini *Kummer*'in çalışmasına uygulamış ve *Kummer*'in çalışmasıyla arasındaki ilişkiyi detaylı bir şekilde incelemiştir.

Gauss denkleminin integral gösterimi *Euler*'in çalışmasına dayanır ve

$${}_2F_1(-n, b; c; z) = \frac{n!}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \int_0^1 t^{-n-1} (1-t)^{c+n-1} (1-tz)^{-b} dt$$

biçiminde ifade edilirdi. 1907 yılında *E.W. Barnes* *Kummer*'in 24 fonksiyonunu çevre integralini kullanarak yayınladı ve daha sonra 1910 yılında Gauss teoreminin analogu olan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a+s) \Gamma(b+s) \Gamma(c-s) \Gamma(d-s) ds \\ = \frac{\Gamma(a+c) \Gamma(a+d) \Gamma(b+c) \Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)} \end{aligned}$$

integralini ispatlamıştır [11].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran denklemlere *diferensiyel denklem* denir [14].

Tanım 2.2. $\sum_{j=1}^n b_j(x)y^{(n)} + b_0(x)y = g(x)$ biçiminde yazılabilen diferensiyel denklemlere *linear diferensiyel denklem*, aksi halde *linear olmayan diferensiyel denklem* denir.

Birinci mertebeden diferensiyel denklem aranan fonksiyon ile onun türevine göre lineerse o diferensiyel denkleme birinci mertebeden *linear diferensiyel denklem* denir. Bu denklemlerin genel yazılışı P, Q, R sadece x 'e bağlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$Py' + Qy + R = 0$$

şeklindedir. P 'nin belli bir aralığın bütün x değerleri için sıfır olmadığı düşünülerek denklem P ile bölünür ve

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = \frac{-R(x)}{P(x)}$$

alınırsa birinci mertebeden linear homojen olmayan diferensiyel denklem

$$y' + p(x)y = q(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $q(x) = 0$ olarak alınırsa *birinci mertebeden linear homojen diferensiyel denklem* elde edilir [14].

Tanım 2.3. $\sum_{j=1}^n b_j(x)y^{(n)} + b_0(x)y = 0$ biçiminde tanımlanan diferensiyel denkleme *homojen diferensiyel denklem*, aksi halde *homojen olmayan diferensiyel denklem* denir [14].

Tanım 2.4. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diferensiyel denkleminde $M(x, y) = A(x)$ ve $N(x, y) = B(y)$ fonksiyonu olarak yazılabiliyorsa, bu diferensiyel denkleme *değişkenlerine ayrılabilen denklem* denir. Buradan

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-A(x)}{B(y)}$$

biçiminde yazabileceğinden, birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilen bir diferensiyel denklem elde edilir. Bu durumda çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç değer problem olarak verilmesi halinde, yani

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

biçiminde bir çözüm aranıyorsa

$$\int_{x_0}^x A(x)dx + \int_{y_0}^y B(y)dy = c$$

elde edilip bu çözümün tek olduğu görülür. Bu bir çok çözümü kapsayan genel çözümün bir eleman çözümüdür [14].

Tanım 2.5. V ve W , aynı F skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T: V \rightarrow W$ dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in V$ için, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ özelliğini sağlarsa T 'ye bir *lineer dönüşüm* adı verilir. Lineer bir dönüşüm aynı zamanda sürekli ise bu durumda lineer dönüşüm yerine *lineer operatör* veya kısaca *operatör* ifadesi de kullanılır [12].

2.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu integral yardımıyla,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki $\text{Re}(z)$ kompleks düzleminin sağ yarı kısmına yakınsar.

Gerçekten

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt
\end{aligned}$$

dir. Bu formüldeki köşeli parantez içindeki ifade bütün t için sınırlandırılmıştır; sonsuzdaki yakınsama e^{-t} tarafından sağlanmaktadır ve $t=0$ 'deki yakınsama için $x = \operatorname{Re}(z) > 1$ olmalıdır.

İntegral yardımıyla Gamma fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\
&= \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır, yani $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 'dır.

Buradan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)\dots 3.2.1 = z!$$

elde edilir. Bu nedenle bu fonksiyona *faktöriyel fonksiyon* ismi de verilir. Böylece

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

yazılabilir. Genel olarak negatif olmayan n tamsayı değeri için,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$$

olup diğer taraftan,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}$$

yazılır.

Bazı önemli değerler ise,

$$\Gamma(-3/2) = (4/3)\sqrt{\pi} \quad \Gamma(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(-1) &= \pm\infty & \Gamma(3/2) &= (1/2)\sqrt{\pi} \\
\Gamma(-1/2) &= -2\sqrt{\pi} & \Gamma(2) &= 1 \\
\Gamma(0) &= \pm\infty & \Gamma(5/2) &= (3/4)\sqrt{\pi} \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} & \Gamma(3) &= 2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Gamma fonksiyonunun özellikleri arasında

$$\begin{aligned}
\Gamma(-x) &= \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)} \\
\Gamma(2x) &= \frac{4^x \Gamma(x) \Gamma[x+(1/2)]}{2\sqrt{\pi}} \\
\Gamma(nx) &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^x}{\sqrt{2\pi}} \right]^n \prod_0^{n-1} \Gamma[x+(k/n)]
\end{aligned}$$

biçimindeki eşitlikleri de yazılabilir [9].

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu genellikle

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0)$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q) \Leftrightarrow B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

bağıntısıyla vardır [9].

2.3. Grünwald Letnikov Kesirli Türevi

$p > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir ve $m \in \mathbb{Z}$, $m < p < m+1$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p katlı Grünwald - Letnikov kesirli integrali;

$${}^{GL}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun p . mertebeden Grünwald - Letnikov kesirli türevi ise;

$${}^{GL}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklindedir [9].

2.4. Riemann-Liouville Tanımı

Bir $p > 0$ reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir ve $k \in \mathbb{Z}^+$, $k-1 \leq p < k$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. f fonksiyonunun p katlı Riemann - Liouville kesirli integrali;

$${}^{RL}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun p . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi ise;

$${}^{RL}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) dt$$

biçiminde tanımlanır [9].

2.5. Caputo Kesirli Türevi

m , $m-1 \leq p < m$ olacak şekilde pozitif tamsayı, p herhangi bir pozitif tamsayı ve f fonksiyonu ise m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p 'inci mertebeden Caputo kesirli türevi,

$${}^C D_t^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+1-m}} d\tau$$

ile tanımlanır [9].

2.6. Pochhammer Sembolü

$z \in \mathbb{C}$ ve negatif olmayan $n \in \mathbb{N}_0$ tamsayısı için

$$(z)_0 = 1$$

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$$

biçiminde tanımlanan $(z)_n$ matemaiksel ifadesine *Polchammer sembolü* denir. Örneğin;

$$(1)_n = n!$$

$$(3)_5 = 3.4.5.6.7 = 2520$$

yazabiliriz. $z = -m$ negatif bir tamsayı olsun. $(z)_n$ Polchammer sembolü

$$(z)_n = \begin{cases} (z)_n = (-m)_n, & m \geq n \\ (z)_n = 0 & , m < n \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. Örneğin;

$$(-3)_3 = (-3)(-2)(-1) = -6$$

$$(-3)_4 = 0$$

yazabiliriz.

İntegral yardımıyla Gamma fonksiyonunu,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad , \quad R(z) > 0$$

biçiminde yazabiliriz. Bu ilişki Euler Gamma fonksiyonu $R(z) \leq 0$ yarı düzleminde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \Leftrightarrow (z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$$

biçiminde yazılabilir [11].

2.7. Gauss Denklemi

a, b, c sabit sayılar olmak üzere,

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (c - (1+a+b)z)\frac{dy}{dz} - aby = 0$$

diferensiyel denklemine *Gauss denklemi* veya *Hipergeometrik denklem* denir. $|z| < 1$

bölgesinde tek bir çözümü $y_1 = {}_2F_1(a, b; c; z)$ 'dir.

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \dots$$

serisi yardımıyla Gauss denkleminin doğruluğu kanıtlanabilir. Gauss denklemine alternatif bir form olarak,

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right)y = \left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right)y$$

yazılabilir ve

$$\left(z\frac{d}{dz} + a\right)y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} (n+a) z^n$$

yardımıyla mükemmel bir çözüme yol açar. Bundan dolayı

$$\left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right)y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{n! (c)_n} z^n$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_{n-1}} z^n$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + c - 1\right)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_{n-1}} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{n! (c)_n} z^n$$

yazılabilir. Gauss denklemi 0 ve 1 singüler noktalar olmak üzere

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left\{ \frac{c}{z(1-z)} - \frac{1+a+b}{1-z} \right\} \frac{dy}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)} y = 0$$

biçiminde yazılabilir.

Aynı zamanda $\Delta \equiv z \frac{d}{dz}$ operatörü yardımıyla Gauss denklemini,

$$\Delta(\Delta + c - 1)y = z(\Delta + a)(\Delta + b)y$$

biçiminde yazılabilir [11].

2.8. Gauss Hipergeometrik Seri

α, β reel yada kompleks sabitler, γ sıfırdan farklı negatif olmayan sabit olmak üzere,

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

olarak ifade edilen seriye *Gauss hipergeometrik seri* yada *hipergeometrik seri* denir. Ayrıca

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$$

biçiminde tanımlanabilir, buradaki $(\alpha)_n$ ifadesi Pochhammer sembolüdür. Hipergeometrik serinin genelleştirilmiş hali,

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilir. Hipergeometrik seri $|z| < 1$ için yakınsaktır, $|z| > 1$ için ıraksaktır, $|z| = 1$ için $\gamma > \alpha + \beta$ olduğunda mutlak yakınsaktır, $z = -1$ için $\gamma > \alpha + \beta - 1$ olduğunda yakınsaktır [11].

2.9. Leibniz Kuralı

İsmi Gattfried Leibniz'den alan genel Leibniz kuralı çarpım kurallını genelleştirir. f ve g fonksiyonu n defa differensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, fg fonksiyonunda n defa differensiyellenebilir fonksiyon olup n . türevi

$$D^n (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D^k (g(t))] [D^{n-k} (f(t))]$$

biçiminde tanımlanır. [4]'den biliyoruz ki p pozitif bir tamsayı olmak üzere $g(t) = t^p$ ve $f \in C$ için fg fonksiyonun kesirli integrali $\nu > 0$ olmak üzere

$$D^{-\nu} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{-\nu}{k} [D^k (g(t))] [D^{-\nu-k} (f(t))]$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin Leibniz kuralına benzer olduğu açıktır, tek fark son eşitlikte $g(t)$ fonksiyonunun basit bir fonksiyon olmasıdır.

Kabul edelim ki f fonksiyonu $[0, X]$ aralığında sürekli ve $\forall a \in [0, X]$ noktasında g fonksiyonu analitik olsun. O halde $(0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $[0, \infty)$ aralığının herhangi alt aralığında integrallenebilir fonksiyonlarının sınıfı C olmak üzere $fg \in C$ ve $\nu > 0$ için kesirli integral

$$D^{-\nu} (f(t)g(t)) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} [f(\xi)g(\xi)] d\xi, \quad 0 < t \leq X$$

biçiminde tanımlanır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k (g(t))}{k!} (t-\xi)^k \\ &= g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k (g(t))}{k!} (t-\xi)^k \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu seri $[0, t]$ aralığında yakınsaktır ve bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^{-\nu} (f(t)g(t)) &= g(t) D^{-\nu} (f(t)) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu} f(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k g(t)}{k!} (t-\xi)^{k-1} d\xi \end{aligned}$$

elde edilir.

f fonksiyonu $[0, X]$ aralığında sürekli olduğu için $(t - \xi)^\nu f(\xi)$ eşitliğide $\nu > 0$ için süreklidir. Dolayısıyla son denklemde integral ile toplam sırasını yer değiştirebiliriz. Böylece $\nu > 0$ ve $0 < t \leq X$ için

$$\begin{aligned} D^{-\nu} (f(t)g(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} [D^k(g(t))] [D^{-\nu-k}(f(t))] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{-\nu}{k} [D^k(g(t))] [D^{-\nu-k}(f(t))] \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik kesirli integral için Leibniz formülüdür [4].

3.HOMOJEN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜ

Teorem 1. $\varphi \in \{\varphi : 0 \neq |\varphi_v| < \infty, v \in R\}$ olmak üzere

$$L[\varphi, z; \alpha, \beta, \gamma] = \varphi_2 (z^2 - z) + \varphi_1 \{z(\alpha + \beta + 1) - \gamma\} + \varphi \alpha \beta = 0, \quad (z \neq 0, 1) \quad (3.1)$$

homojen Gauss denklemi için,

1. Grup

$$\varphi = K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi_1 \quad (3.2)$$

$$\varphi = K \left(z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi_2 \quad (3.3)$$

$$\varphi = K \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{\alpha-\gamma} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi_3 \quad (3.4)$$

$$\varphi = K \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi_4 \quad (3.5)$$

2. Grup

$$\varphi = K z^{1-\gamma} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi_5 \quad (3.6)$$

$$\varphi = K z^{1-\gamma} \left(z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi_6 \quad (3.7)$$

$$\varphi = K z^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\beta} z^{\alpha-1} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi_7 \quad (3.8)$$

$$\varphi = K z^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\alpha} z^{\beta-1} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi_8 \quad (3.9)$$

3. Grup

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi_9 \quad (3.10)$$

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi_{10} \quad (3.11)$$

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\beta-1} z^{-\alpha} \right)_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi_{11} \quad (3.12)$$

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\alpha-1} z^{-\beta} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi_{12} \quad (3.13)$$

çözümleri elde edilir. Burada $\varphi_n = \frac{d^n \varphi}{dz^n}$, $(n = 0, 1, 2)$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, K keyfi sabit,

α, β ve γ sabitlerdir.

İspat :

1. Grup: N^v operatörü

$$N^v (\varphi_m z^n) = (\varphi_m z^n)_v = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-k) \Gamma(k+1)} (\varphi_m)_{v-k} (z^n)_k \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. N^ν operatörünü (3.1) denklemine uygularsak,

$$N^\nu(\varphi_2 z^2) - N^\nu(\varphi_2 z) + (\alpha + \beta + 1)N^\nu(\varphi_1 z) - \gamma N^\nu(\varphi_1) + \alpha\beta N^\nu(\varphi) = 0 \quad (3.15)$$

elde ederiz. (3.14) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} N^\nu(\varphi_2 z^2) &= \sum_{k=0}^2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_2)_{\nu-k} (z^2)_k \\ &= \varphi_{2+\nu} z^2 + 2\nu z \varphi_{1+\nu} + \nu(\nu-1) \varphi_\nu \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} N^\nu(\varphi_2 z) &= \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_2)_{\nu-k} (z)_k \\ &= \varphi_{2+\nu} z + \nu \varphi_{1+\nu} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} N^\nu(\varphi_1 z) &= \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_1)_{\nu-k} (z)_k \\ &= \varphi_{1+\nu} z + \nu \varphi_\nu \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$N^\nu(\varphi_1) = \varphi_{1+\nu} \quad (3.19)$$

$$N^\nu(\varphi) = \varphi_\nu \quad (3.20)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri (3.15) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \varphi_{2+\nu} (z^2 - z) + \varphi_{1+\nu} \{z(2\nu + \alpha + \beta + 1) - \nu - \gamma\} \\ + \varphi_\nu \{\nu^2 + \nu(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde ederiz. Diğer taraftan ν 'yü

$$\nu^2 + \nu(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0 \Rightarrow (\nu + \alpha)(\nu + \beta) = 0$$

olacak şekilde seçelim. O zaman

$$\nu = -\alpha, \quad \nu = -\beta \quad (3.22)$$

olur.

i. $\nu = -\alpha$ olsun. (3.21) eşitliğimizi

$$\varphi_{2-\alpha} (z^2 - z) + \varphi_{1-\alpha} \{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma\} = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde yazarız. Kabul edelim ki

$$\varphi_{1-\alpha} = u$$

olsun. Böylece (3.23) eşitliğimiz

$$u_1 + u \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma\}}{(z^2 - z)} = 0 \quad (3.24)$$

biçiminde yazılabilir, elde ettiğimiz (3.24) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemdir. Buradan K herhangi bir sabit olmak üzere

$$\frac{du}{u} = - \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma\}}{(z^2 - z)} dz \quad (3.25)$$

$$u = Kz^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \quad (3.26)$$

şeklinde (3.25) denkleminin çözümünü elde ederiz. $\varphi_{1-\alpha} = u$ kabulümüz sebebiyle (3.26) eşitliğini

$$\varphi = K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi_1$$

biçiminde yazarız. Bu son eşitliğimiz (3.1) denkleminin çözümüdür.

ii. $\nu = -\beta$ olsun. (3.21) eşitliğimizi

$$\varphi_{2-\beta} (z^2 - z) + \varphi_{1-\beta} \{z(-\beta + \alpha + 1) + \beta - \gamma\} = 0 \quad (3.27)$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki

$$\varphi_{1-\beta} = u$$

olsun. Böylece (3.27) eşitliğini

$$u_1 + u \frac{\{z(-\beta + \alpha + 1) + \beta - \gamma\}}{(z^2 - z)} = 0 \quad (3.28)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemdir. K herhangi bir sabit olmak üzere çözümü

$$u = Kz^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \quad (3.29)$$

ile verilir. $\varphi_{1-\beta} = u$ kabulümüz nedeniyle (3.29) denklemini

$$\varphi = K \left(z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi_2$$

şeklinde yazabiliriz.

Ayrıca (3.2) çözümünde $z^{\alpha-\gamma}$ ile $(z-1)^{\gamma-\beta-1}$ matematiksel ifadelerinin yerleri değiştirilebilir. Böylece $(\alpha-1) \notin Z_0^+$ için (3.2)'den farklı

$$\varphi = K \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{\alpha-\gamma} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi_3$$

çözümünü elde ederiz.

Benzer şekilde (3.3) çözümünde $z^{\beta-\gamma}$ ile $(z-1)^{\gamma-\alpha-1}$ matematiksel ifadelerinin yerleri değiştirilebilir. Böylece $(\beta-1) \notin Z_0^+$ için (3.3) 'den farklı

$$\varphi = K \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi_4$$

çözümünü elde ederiz.

2. Grup: $\varphi = z^\lambda \phi$, $\phi = \phi(z)$ ($z \neq 0,1$) olsun. Buradan

$$\varphi_1 = \lambda z^{\lambda-1} \phi + z^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} \phi + 2\lambda z^{\lambda-1} \phi_1 + z^\lambda \phi_2$$

olup (3.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} \phi + 2\lambda z^{\lambda-1} \phi_1 + z^\lambda \phi_2 \right\} (z^2 - z) \\ & + \left\{ \lambda z^{\lambda-1} \phi + z^\lambda \phi_1 \right\} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + z^\lambda \phi \alpha \beta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \left\{ 2\lambda z^{\lambda-1} (z^2 - z) + z^\lambda \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} \right\} \\ & + \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} (z^2 - z) + \lambda z^{\lambda-1} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + z^\lambda \alpha \beta \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + z^\lambda \phi_1 \left\{ 2\lambda(z-1) + \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} \right\} \\ & + z^\lambda \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{-1} (z-1) + \lambda z^{-1} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + \alpha \beta \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + z^\lambda \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \\ & + z^\lambda \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) - \lambda(\lambda-1) z^{-1} + \lambda(\alpha + \beta + 1) - \lambda z^{-1} \gamma + \alpha \beta \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$z^\lambda \left\{ \phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \right. \\ \left. + \phi \left\{ \lambda(\lambda - 1) + \lambda(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta - z^{-1}(\lambda\gamma + \lambda(\lambda - 1 + \gamma)) \right\} \right\} = 0 \quad (3.30)$$

elde ederiz. $z^\lambda \neq 0$ olduğunu göz önüne aldığımızda (3.30) eşitliğini

$$\phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \\ + \phi \left\{ \lambda(\lambda - 1) + \lambda(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta - z^{-1}(\lambda(\lambda - 1 + \gamma)) \right\} = 0 \quad (3.31)$$

biçiminde yazabiliriz. Kabul edelim ki $\lambda(\lambda - 1 + \gamma) = 0$ olsun. Buradan

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1 - \gamma$$

elde ederiz.

i. $\lambda = 0$ olduğunu kabul edersek Grup 1 ile aynı sonucu elde ederiz.

ii. $\lambda = 1 - \gamma$ olduğunu kabul edelim. Buradan (3.31) denklemini

$$\phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2(1 - \gamma)) - 2(1 - \gamma) - \gamma \right\} \\ + \phi \left\{ (1 - \gamma)(1 - \gamma - 1) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta \right\} = 0, \\ \phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2 \right\} \\ + \phi \left\{ (1 - \gamma)(-\gamma) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta \right\} = 0, \\ \phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2 \right\} \\ + \phi \left\{ (1 - \gamma)(1 - \gamma) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta) + \alpha\beta \right\} = 0, \\ \phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2 \right\} \\ + \phi \left\{ (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta) \right\} = 0 \quad (3.32)$$

biçiminde yazabiliriz. (3.16)-(3.20) eşitliklerinden yararlanarak (3.32) denkleminin her iki tarafına N^ν operatörünü uygularsak

$$N^\nu \left\{ \phi_2(z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2 \right\} \right. \\ \left. + \phi \left\{ (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta) \right\} \right\} = 0,$$

$$z^2 \phi_{2+\nu} + 2\nu z \phi_{1+\nu} + \nu(\nu - 1) \phi_\nu - z \phi_{2+\nu} - \nu \phi_{1+\nu} + (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) \{ z \phi_{1+\nu} + \nu \phi_\nu \} \\ + (\gamma - 2) \phi_{1+\nu} + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta) \phi_\nu = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{2+\nu} (z^2 - z) + \phi_{1+\nu} \{2\nu z - \nu + z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2\} \\
& \quad + \phi_{\nu} \{\nu(\nu - 1) + \nu(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\} = 0, \\
& \phi_{2+\nu} (z^2 - z) + \phi_{1+\nu} \{z(\alpha + \beta + 2\nu + 3 - 2\gamma) + \gamma - \nu - 2\} \\
& \quad + \phi_{\nu} \{\nu^2 + \nu(\alpha + \beta + 2 - 2\gamma) + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\} = 0, \\
& \phi_{2+\nu} (z^2 - z) + \phi_{1+\nu} \{z(\alpha + \beta + 2\nu + 3 - 2\gamma) + \gamma - \nu - 2\} \\
& \quad + \phi_{\nu} \{(\nu + 1 - \gamma + \alpha)(\nu + 1 - \gamma + \beta)\} = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $(\nu + 1 - \gamma + \alpha)(\nu + 1 - \gamma + \beta) = 0$ olsun. Buradan

$$\nu = \gamma - \alpha - 1 \text{ veya } \nu = \gamma - \beta - 1$$

buluruz.

1. $\nu = \gamma - \alpha - 1$ olduğunu kabul edelim. (3.33) denklemine uygularsak

$$\begin{aligned}
& \phi_{1+\gamma-\alpha} (z^2 - z) + \phi_{\gamma-\alpha} \{z(\alpha + \beta + 2(\gamma - \alpha - 1) + 3 - 2\gamma) \\
& \quad + \gamma - (\gamma - \alpha - 1) - 2\} = 0, \\
& \phi_{1+\gamma-\alpha} (z^2 - z) + \phi_{\gamma-\alpha} \{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - 1\} = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde ederiz. $\phi_{\gamma-\alpha} = u$ için (3.34) denklemini

$$u_1 + u \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - 1\}}{(z^2 - z)} = 0 \tag{3.35}$$

şeklinde yazabiliriz ve bu denklem değişkenlerine ayrılabilen bir diferensiyel denklemdir.

Böylece (3.35) denklemimizden

$$\begin{aligned}
& \int \frac{du}{u} = - \int \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - 1\}}{(z^2 - z)} dz \\
& \ln u = \int \frac{(\alpha - 1)}{z} dz - \int \frac{\beta}{(z - 1)} dz \\
& u = K z^{\alpha-1} (z - 1)^{-\beta}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\varphi = z^\lambda \phi, \phi_{\gamma-\alpha} = u \text{ ve } \lambda = 1-\gamma$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (3.36) denkleminde

$$\varphi = Kz^{1-\gamma} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi_5$$

çözümünü elde ederiz.

2. $\upsilon = \gamma - \beta - 1$ olduğunu kabul edelim. (3.33) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \phi_{1+\gamma-\beta} (z^2 - z) + \phi_{\gamma-\beta} \{ z(\alpha + \beta + 2(\gamma - \beta - 1) + 3 - 2\gamma) \\ + \gamma - (\gamma - \beta - 1) - 2 \} = 0, \end{aligned}$$

$$\phi_{1+\gamma-\beta} (z^2 - z) + \phi_{\gamma-\beta} \{ z(\alpha - \beta + 1) + \beta - 1 \} = 0 \quad (3.37)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $\phi_{\gamma-\beta} = u$ olsun. Buradan (3.37) denklemini

$$u_1 + u \frac{\{ z(\alpha - \beta + 1) + \beta - 1 \}}{(z^2 - z)} = 0 \quad (3.38)$$

şeklinde yazarız ve bu denklem değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denklemdir. Böylece (3.38) denkleminde

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{\{ z(\alpha - \beta + 1) + \beta - 1 \}}{(z^2 - z)} dz$$

$$\ln u = \int \frac{(\beta - 1)}{z} dz + \int \frac{-\alpha}{(z - 1)} dz$$

$$u = Kz^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \quad (3.39)$$

yazabiliriz.

$$\varphi = z^\lambda \phi, \phi_{\gamma-\beta} = u \text{ ve } \lambda = 1-\gamma$$

olduğunu göz önüne aldığımızda (3.39) denkleminizi

$$\varphi = Kz^{1-\gamma} \left(z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi_6$$

biçiminde yazabiliriz ve bu son eşitlik (3.1) denkleminizin çözümüdür.

Ayrıca (3.6) çözümünde $z^{\alpha-1}$ ile $(z-1)^{-\beta}$ matematiksel ifadelerinin yerlerini değiştirebiliriz. Böylece $\alpha - \gamma \notin Z_0^+$ şartı altında (3.6) 'dan farklı

$$\varphi = Kz^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\beta} z^{\alpha-1} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi_7$$

çözümünü elde ederiz.

Benzer şekilde (3.7) çözümündeki $z^{\beta-1}$ ile $(z-1)^{-\alpha}$ matematiksel ifadelerinin yerlerini değiştirebiliriz. Böylece $\beta - \gamma \notin Z_0^+$ koşulu altında (3.7)'den farklı

$$\varphi = Kz^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\alpha} z^{\beta-1} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi_8$$

çözümünü elde ederiz.

3. Grup: $\varphi = (z-1)^\lambda \phi$, $\phi = \phi(z)$ ($z \neq 0,1$) olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\varphi_1 = \lambda (z-1)^{\lambda-1} \phi + (z-1)^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda (\lambda-1) (z-1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda (z-1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z-1)^\lambda \phi_2$$

olup (3.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} (z-1)^\lambda \left\{ \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - \gamma \} \right. \\ \left. + \phi \left\{ (z-1)^{-1} \{ \lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma \} + (\lambda + \alpha)(\lambda + \beta) \right\} \right\} = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. $(z-1)^\lambda \neq 0$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - \gamma \} \\ + \phi \left\{ (z-1)^{-1} \{ \lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma \} + (\lambda + \alpha)(\lambda + \beta) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki $\lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma = 0 &\Rightarrow \lambda(\lambda + \alpha + \beta - \gamma) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \text{ , } \lambda = \gamma - \alpha - \beta \end{aligned}$$

elde ederiz.

i. $\lambda = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Grup-1 ile aynı sonucu elde ederiz.

ii. $\lambda = \gamma - \alpha - \beta$ olduğunu kabul edelim. Buradan (3.40) denklemi

$$\phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(2\gamma - \alpha - \beta + 1) - \gamma\} + \phi\{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = 0 \quad (3.41)$$

biçiminde yazabiliriz. N^ν operatörünü (3.41) denkleminde uygularsak

$$\begin{aligned} N^\nu(\phi_2(z^2 - z)) + N^\nu(\phi_1\{z(2\gamma - \alpha - \beta + 1) - \gamma\}) \\ + N^\nu(\phi\{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\}) = 0, \\ N^\nu(\phi_2 z^2) - N^\nu(\phi_2 z) + (2\gamma - \alpha - \beta + 1)N^\nu(\phi_1 z) \\ - \gamma N^\nu(\phi_1) + \{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\}N^\nu(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde ederiz. (3.16)-(3.20) eşitliklerinden yararlanırsak (3.42) denklemini

$$\begin{aligned} z^2\phi_{2+\nu} + 2\nu z\phi_{1+\nu} + \nu(\nu-1)\phi_\nu - z\phi_{2+\nu} - \nu\phi_{1+\nu} \\ + (2\gamma - \alpha - \beta + 1)\{z\phi_{1+\nu} + \nu\phi_\nu\} - \gamma\phi_{1+\nu} + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\phi_\nu = 0, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{2\nu z - \nu + z(2\gamma - \alpha - \beta + 1) - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{\nu(\nu-1) + \nu(2\gamma - \alpha - \beta + 1) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = 0, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(2\gamma + 2\nu - \alpha - \beta + 1) - \nu - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{\nu^2 + \nu(2\gamma - \alpha - \beta) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = 0, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(2\gamma + 2\nu - \alpha - \beta + 1) - \nu - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{(\nu + \gamma - \alpha)(\nu + \gamma - \beta)\} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki $(\nu + \gamma - \alpha)(\nu + \gamma - \beta) = 0$ olsun. Buradan

$$\nu = \alpha - \gamma, \quad \nu = \beta - \gamma$$

elde ederiz. ν 'nün değerlerine göre Grup-3 çözümlerini elde edelim.

1. $\nu = \alpha - \gamma$ olsun. (3.43) denkleminde uygularsak

$$\begin{aligned} \phi_{2+\alpha-\gamma}(z^2 - z) + \phi_{1+\alpha-\gamma}\{z(2\gamma + 2(\alpha - \gamma) - \alpha - \beta + 1) - (\alpha - \gamma) - \gamma\} = 0, \\ \phi_{2+\alpha-\gamma}(z^2 - z) + \phi_{1+\alpha-\gamma}\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\} = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $u = \phi_{1+\alpha-\gamma}$ olsun. Böylece (3.44) denklemini

$$u_1(z^2 - z) + u\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\} = 0,$$

$$u_1 + u \frac{\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\}}{(z^2 - z)} = 0 \quad (3.45)$$

biçiminde yazabiliriz. (3.45) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemdir. Buradan

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\}}{(z^2 - z)} dz$$

$$\ln u = - \left\{ \int \frac{\alpha}{z} dz + \int \frac{1 - \beta}{z - 1} dz \right\}$$

$$u = K z^{-\alpha} (z - 1)^{\beta - 1} \quad (3.46)$$

elde ederiz. Diğer taraftan $\lambda = \gamma - \alpha - \beta$, $u = \phi_{1+\alpha-\gamma}$, $\varphi = (z - 1)^\lambda \phi$ kabullerimizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi = K (z - 1)^{\gamma - \alpha - \beta} \left(z^{-\alpha} (z - 1)^{\beta - 1} \right)_{\gamma - \alpha - 1} \equiv \varphi_9$$

çözümünü elde ederiz.

2. $\nu = \beta - \gamma$ olduğunu kabul edelim. Bu değeri (3.43) denklemine yerine yazarsak

$$\phi_{2+\beta-\gamma}(z^2 - z) + \phi_{1+\beta-\gamma}\{z(2\gamma + 2(\beta - \gamma) - \alpha - \beta + 1) - (\beta - \gamma) - \gamma\} = 0,$$

$$\phi_{2+\beta-\gamma}(z^2 - z) + \phi_{1+\beta-\gamma}\{z(-\alpha + \beta + 1) - \beta\} = 0 \quad (3.47)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $u = \phi_{1+\beta-\gamma}$ olsun. Böylece (3.47) denklemi

$$u_1 + u \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) - \beta\}}{(z^2 - z)} = 0 \quad (3.48)$$

biçiminde yazarız ve bu denklem değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemdir. Buradan

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) - \beta\}}{(z^2 - z)} dz$$

$$\ln u = - \left\{ \int \frac{\beta}{z} dz + \int \frac{1-\alpha}{z-1} dz \right\}$$

$$u = K z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \quad (3.49)$$

biçimindeki (3.48) denkleminin çözümünü elde ederiz. $\nu = \beta - \gamma$ ve $u = \phi_{1+\beta-\gamma}$ kabulleri nedeniyle,

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi_{10}$$

yazabiliriz.

Aynı zamanda (3.10) çözümünde $z^{-\alpha}$ ile $(z-1)^{\beta-1}$ matematiksel ifadelerinin yerleri değiştirilebilir. Böylece $\gamma - \alpha - 1 \notin Z_0^+$ için (3.10) 'den farklı

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\beta-1} z^{-\alpha} \right)_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi_{11}$$

çözümünü elde ederiz.

Benzer şekilde (3.11) çözümünde $z^{-\beta}$ ile $(z-1)^{\alpha-1}$ matematiksel ifadelerini yerleri değiştirilebilir. Aynı şekilde $\gamma - \beta - 1 \notin Z_0^+$ için (3.11) 'den farklı

$$\varphi = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\alpha-1} z^{-\beta} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi_{12}$$

çözümünü elde ederiz.

4. HOMOJEN OLMAYAN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜ

Teorem 4.1. $\varphi \in \{\varphi : 0 \neq |\varphi_v| < \infty, v \in R\}$ ve $f \in \{f : 0 \neq |f_v| < \infty, v \in R\}$ olduğunu

kabul edelim. $\varphi(z) = \varphi_0$, $f(z) = f$, $\frac{d^n \varphi}{dz^n} = \varphi_n(z)$, $(n=0,1,2)$ ve α, β sabitler olmak üzere

$$L[\varphi, z; \alpha, \beta, \gamma] = \varphi_2(z^2 - z) + \varphi_1\{z(\alpha + \beta + 1) - \gamma\} + \varphi\alpha\beta = f, \quad (z \neq 0, 1) \quad (4.1)$$

homojen olmayan Gauss denkleminin

1. Grup

$$\varphi = \left\{ z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \left[\left(z^{\gamma-\alpha-1} (z-1)^{\beta-\gamma} f_{-\alpha} \right)_{-1} \right] \right\}_{\alpha-1} \equiv \varphi^1 \quad (4.2)$$

$$\varphi = \left\{ z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \left[\left(z^{\gamma-\beta-1} (z-1)^{\alpha-\gamma} f_{-\beta} \right)_{-1} \right] \right\}_{\beta-1} \equiv \varphi^2 \quad (4.3)$$

2. Grup

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left\{ z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \left[\left(z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} (z^{1-\gamma} f)_{\gamma-\alpha-1} \right)_{-1} \right] \right\}_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi^3 \quad (4.4)$$

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left\{ z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \left[\left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} (z^{1-\gamma} f)_{\gamma-\beta-1} \right)_{-1} \right] \right\}_{\beta-\gamma} \equiv \varphi^4 \quad (4.5)$$

3. Grup

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left[z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} \right)_{\alpha-\gamma} \right)_{-1} \right]_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi^5 \quad (4.6)$$

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \left(z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} \right)_{\beta-\gamma} \right)_{-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi^6 \quad (4.7)$$

çözümleri mevcuttur.

İspat:

1. Grup (3.14) eşitliği ile tanımlı N^ν operatörünü (4.1) denkleminde uygularsak

$$N^\nu(\varphi_2 z^2) - N^\nu(\varphi_2 z) + (\alpha + \beta + 1) N^\nu(\varphi_1 z) - \gamma N^\nu(\varphi_1) + \alpha \beta N^\nu(\varphi) = f_v \quad (4.8)$$

elde ederiz. (3.16)-(3.20) eşitliklerini kullanarak (4.8) denklemini

$$\begin{aligned}
& z^2 \varphi_{2+\nu} + 2\nu z \varphi_{1+\nu} + \nu(\nu-1) \varphi_\nu - z \varphi_{2+\nu} - \nu \varphi_{1+\nu} \\
& \quad + (\alpha + \beta + 1) \{ z \varphi_{1+\nu} + \nu \varphi_\nu \} - \gamma \varphi_{1+\nu} + \alpha \beta \varphi_\nu = f_\nu, \\
& \varphi_{2+\nu} (z^2 - z) + \varphi_{1+\nu} \{ 2\nu z - \nu + z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \} \\
& \quad + \varphi_\nu \{ \nu(\nu-1) + \nu(\alpha + \beta + 1) + \alpha \beta \} = f_\nu, \\
& \varphi_{2+\nu} (z^2 - z) + \varphi_{1+\nu} \{ z(2\nu + \alpha + \beta + 1) - \nu - \gamma \} \\
& \quad + \varphi_\nu \{ \nu^2 + \nu(\alpha + \beta) + \alpha \beta \} = f_\nu
\end{aligned} \tag{4.9}$$

biçiminde yazabiliriz. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned}
\nu^2 + \nu(\alpha + \beta) + \alpha \beta = 0 & \Rightarrow (\nu + \alpha)(\nu + \beta) = 0 \\
& \Rightarrow \nu = -\alpha, \nu = -\beta
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olsun.

i. $\nu = -\alpha$ için (4.9) eşitliğini

$$\varphi_{2-\alpha} (z^2 - z) + \varphi_{1-\alpha} \{ z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma \} = f_{-\alpha} \tag{4.11}$$

biçiminde yazabiliriz. Kabul edelim ki $\varphi_{1-\alpha} = u$ olsun. Böylece (4.11) eşitliğimizi

$$\begin{aligned}
& u_1 (z^2 - z) + u \{ z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma \} = f_{-\alpha}, \\
& u_1 + u \frac{\{ z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - \gamma \}}{(z^2 - z)} = (z^2 - z)^{-1} f_{-\alpha}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

biçiminde yazarız ve bu denklem homojen olmayan lineer bir diferensiyel denklemdir. Buradan

$$u = z^{-\gamma+\alpha} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \left(z^{\gamma-\alpha-1} (z-1)^{-\gamma+\beta} f_{-\alpha} \right)_{-1}$$

şeklinde (4.12) denkleminin çözümü elde edilir. Diğer taraftan $\varphi_{1-\alpha} = u$ kabulünü göz önüne aldığımızda (4.2) çözümünü elde ederiz ve bu çözüm (4.1) denklemini sağlar.

ii. $\nu = -\beta$ olsun. (4.9) eşitliğinde yerine yazarsak benzer yola (4.3) çözümünü elde ederiz. (4.2)'de α ve β yerlerini değiştireceğiz.)

2.Grup: $\varphi = z^\lambda \phi$, $\phi = \phi(z)$ ($z \neq 0,1$) olduğunu kabul edelim.

$$\varphi_1 = \lambda z^{\lambda-1} \phi + z^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} \phi + 2\lambda z^{\lambda-1} \phi_1 + z^\lambda \phi_2$$

türevlerini (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} \phi + 2\lambda z^{\lambda-1} \phi_1 + z^\lambda \phi_2 \right\} (z^2 - z) \\ & \quad + \left\{ \lambda z^{\lambda-1} \phi + z^\lambda \phi_1 \right\} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + z^\lambda \phi \alpha \beta = f, \\ & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \left\{ 2\lambda z^{\lambda-1} (z^2 - z) + z^\lambda \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} \right\} \\ & \quad + \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} (z^2 - z) + \lambda z^{\lambda-1} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + z^\lambda \alpha \beta \right\} = f, \\ & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + z^\lambda \phi_1 \left\{ 2\lambda(z-1) + \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} \right\} \\ & \quad + z^\lambda \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) z^{-1} (z-1) + \lambda z^{-1} \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + \alpha \beta \right\} = f, \\ & z^\lambda \phi_2 (z^2 - z) + z^\lambda \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \\ & \quad + z^\lambda \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) - \lambda(\lambda-1) z^{-1} + \lambda(\alpha + \beta + 1) - \lambda z^{-1} \gamma + \alpha \beta \right\} = f, \\ & z^\lambda \left\{ \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \right. \\ & \quad \left. + \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) + \lambda(\alpha + \beta + 1) + \alpha \beta - z^{-1} (\lambda \gamma + \lambda(\lambda-1)) \right\} \right\} = f \end{aligned}$$

elde ederiz ve $z^\lambda \neq 0$ olduğu göz önünde aldığımızda

$$\begin{aligned} & \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \left\{ z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - 2\lambda - \gamma \right\} \\ & \quad + \phi \left\{ \lambda(\lambda-1) + \lambda(\alpha + \beta + 1) + \alpha \beta - z^{-1} \lambda ((\lambda-1) + \gamma) \right\} = f z^{-\lambda} \end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki $\lambda((\lambda-1) + \gamma) = 0$ olsun. Böylece

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1 - \gamma$$

elde ederiz.

i. $\lambda = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde homojen olmayan Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

ii. $\lambda = 1 - \gamma$ olduğunu kabul edelim. (4.16) denkleminde

$$\begin{aligned}
& \phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(\alpha + \beta + 1 + 2(1 - \gamma)) - 2(1 - \gamma) - \gamma\} \\
& \quad + \phi\{(1 - \gamma)(1 - \gamma - 1) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta\} = fz^{-1+\gamma}, \\
& \phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2\} \\
& \quad + \phi\{(1 - \gamma)(-\gamma) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta\} = fz^{-1+\gamma}, \\
& \phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2\} \\
& \quad + \phi\{(1 - \gamma)(1 - \gamma) + (1 - \gamma)(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} = fz^{-1+\gamma}, \\
& \phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2\} \\
& \quad + \phi\{(1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\} = fz^{-1+\gamma}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde ederiz. (4.17) denkleminin her iki tarafına N^ν operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned}
& N^\nu\{\phi_2 z^2\} - N^\nu\{\phi_2 z\} + (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma)N^\nu\{\phi_1 z\} + (\gamma - 2)N^\nu\{\phi_1\} \\
& \quad + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)N^\nu\{\phi\} = (fz^{-1+\gamma})_\nu
\end{aligned} \tag{4.18}$$

denklemini elde ederiz. (3.16)-(3.20) eşitliklerini kullanarak (4.18) denklemini

$$\begin{aligned}
& z^2\phi_{2+\nu} + 2\nu z\phi_{1+\nu} + \nu(\nu - 1)\phi_\nu - z\phi_{2+\nu} - \nu\phi_{1+\nu} + (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma)\{z\phi_{1+\nu} + \nu\phi_\nu\} \\
& \quad + (\gamma - 2)\phi_{1+\nu} + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\phi_\nu = (fz^{-1+\gamma})_\nu, \\
& \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{2\nu z - \nu + z(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + \gamma - 2\} \\
& \quad + \phi_\nu\{\nu(\nu - 1) + \nu(\alpha + \beta + 3 - 2\gamma) + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\} = (fz^{-1+\gamma})_\nu, \\
& \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(\alpha + \beta + 2\nu + 3 - 2\gamma) + \gamma - \nu - 2\} \\
& \quad + \phi_\nu\{\nu^2 + \nu(\alpha + \beta + 2 - 2\gamma) + (1 - \gamma + \alpha)(1 - \gamma + \beta)\} = (fz^{-1+\gamma})_\nu, \\
& \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(\alpha + \beta + 2\nu + 3 - 2\gamma) + \gamma - \nu - 2\} \\
& \quad + \phi_\nu\{(\nu + 1 - \gamma + \alpha)(\nu + 1 - \gamma + \beta)\} = (fz^{-1+\gamma})_\nu
\end{aligned} \tag{4.19}$$

biçiminde yazabiliriz. Kabul edelim ki $(\nu + 1 - \gamma + \alpha)(\nu + 1 - \gamma + \beta) = 0$ olsun. Böylece

$$\nu = \gamma - \alpha - 1 \text{ veya } \nu = \gamma - \beta - 1$$

eşitlikleri elde edilir.

1. $\upsilon = \gamma - \alpha - 1$ olsun. (4.19) denkleminde yerine yerine yazarsak

$$\phi_{1+\gamma-\alpha} (z^2 - z) + \phi_{\gamma-\alpha} \{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - 1\} = (fz^{-1+\gamma})_{\gamma-\alpha-1} \quad (4.20)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $\phi_{\gamma-\alpha} = u$ olsun. Buradan (4.20) denklemini

$$u_1 + u \frac{\{z(-\alpha + \beta + 1) + \alpha - 1\}}{(z^2 - z)} = (z^2 - z)^{-1} (z^{-1+\gamma} f)_{\gamma-\alpha-1} \quad (4.21)$$

biçiminde yazarsınız ve bu denklem homojen olmayan lineer bir diferensiyel denklemdir. Böylece (4.21) denklemimizin çözümünü

$$u = z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \left(z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} (z^{-1+\gamma} f)_{\gamma-\alpha-1} \right)_{-1} \quad (4.22)$$

biçiminde buluruz. Diğer taraftan

$$\varphi = z^\lambda \phi, \quad \phi_{\gamma-\alpha} = u \text{ ve } \lambda = 1 - \gamma$$

olduğunu göz önüne aldığımızda (4.4) çözümünü elde ederiz ve bu çözüm (4.1) denklemini sağlar.

2. $\upsilon = \gamma - \beta - 1$ olduğunu kabul edelim. (4.19) denkleminde yerine yazarsak (4.5) çözümünü elde ederiz. ((4.4) denkleminde α ve β ları yer değiştireceğiz.)

3. Grup: $\varphi = (z-1)^\lambda \phi$, $\phi = \phi(z)$ ($z \neq 0, 1$) olduğunu kabul edelim.

$$\varphi_1 = \lambda (z-1)^{\lambda-1} \phi + (z-1)^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda (\lambda-1) (z-1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda (z-1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z-1)^\lambda \phi_2$$

olup (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$(z-1)^\lambda \left\{ \phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \{z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - \gamma\} + \phi \left\{ (z-1)^{-1} \{ \lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma \} + (\lambda + \alpha)(\lambda + \beta) \right\} \right\} = f$$

elde ederiz ve $(z-1)^\lambda \neq 0$ olduğu göz önünde aldığımızda

$$\phi_2 (z^2 - z) + \phi_1 \{z(\alpha + \beta + 1 + 2\lambda) - \gamma\} + \phi \left\{ (z-1)^{-1} \{ \lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma \} + (\lambda + \alpha)(\lambda + \beta) \right\} = f (z-1)^{-\lambda} \quad (4.27)$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki $\lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \lambda\alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma = 0 &\Rightarrow \lambda(\lambda + \alpha + \beta - \gamma) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \gamma - \alpha - \beta\end{aligned}$$

bulunur.

i. $\lambda = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Grup-1 ile aynı sonucu elde ederiz.

ii. $\lambda = \gamma - \alpha - \beta$ olduğunu kabul edelim. Buradan (4.27) denklemini

$$\begin{aligned}\phi_2(z^2 - z) + \phi_1\{z(2\gamma - \alpha - \beta + 1) - \gamma\} \\ + \phi\{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\end{aligned}\quad (4.28)$$

biçiminde yazabiliriz. N^ν operatörü (4.28) denklemine uygularsak;

$$\begin{aligned}N^\nu(\phi_2 z^2) - N^\nu(\phi_2 z) + (2\gamma - \alpha - \beta + 1)N^\nu(\phi_1 z) \\ - \gamma N^\nu(\phi_1) + \{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\}N^\nu(\phi) = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_\nu\end{aligned}\quad (4.29)$$

elde ederiz. (3.16)-(3.20) eşitliklerini kullanarak (4.29) denklemini

$$\begin{aligned}z^2\phi_{2+\nu} + 2\nu z\phi_{1+\nu} + \nu(\nu-1)\phi_\nu - z\phi_{2+\nu} - \nu\phi_{1+\nu} + (2\gamma - \alpha - \beta + 1)\{z\phi_{1+\nu} + \nu\phi_\nu\} \\ - \gamma\phi_{1+\nu} + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\phi_\nu = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_\nu, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{2\nu z - \nu + z(2\gamma - \alpha - \beta + 1) - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{\nu(\nu-1) + \nu(2\gamma - \alpha - \beta + 1) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_\nu, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(2\gamma + 2\nu - \alpha - \beta + 1) - \nu - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{\nu^2 + \nu(2\gamma - \alpha - \beta) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\} = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_\nu, \\ \phi_{2+\nu}(z^2 - z) + \phi_{1+\nu}\{z(2\gamma + 2\nu - \alpha - \beta + 1) - \nu - \gamma\} \\ + \phi_\nu\{(\nu + \gamma - \alpha)(\nu + \gamma - \beta)\} = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_\nu\end{aligned}\quad (4.30)$$

biçiminde yazılabilir. Kabul edelim ki $(\nu + \gamma - \alpha)(\nu + \gamma - \beta) = 0$ olsun. O halde

$$\nu = \alpha - \gamma, \nu = \beta - \gamma$$

elde ederiz.

1. $\nu = \alpha - \gamma$ için (4.30) denklemini

$$\phi_{2+\alpha-\gamma}(z^2 - z) + \phi_{1+\alpha-\gamma}\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\} = \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_{\alpha-\gamma} \quad (4.31)$$

şeklinde yazabiliriz. Kabul edelim ki $u = \phi_{1+\alpha-\gamma}$ olsun. Böylece (4.31) denkleminizden

$$u_1 + u \frac{\{z(\alpha - \beta + 1) - \alpha\}}{(z^2 - z)} = (z^2 - z)^{-1} \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_{\alpha-\gamma} \quad (4.32)$$

bulunur. (4.32) denkleminiz homojen olmayan lineer bir diferensiyel denklemdir. O halde

$$u = z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \left(f(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}\right)_{\alpha-\gamma} \right)_{-1} \quad (4.33)$$

çözümünü elde ederiz. Diğer taraftan $\lambda = \gamma - \alpha - \beta$, $u = \phi_{1+\alpha-\gamma}$, $\varphi = (z-1)^\lambda \phi$ kabullerimizi göz önüne aldığımızda (4.6) çözümünü elde ederiz ve bu çözüm (4.1) denklemini sağlar.

2. $\nu = \beta - \gamma$ için (4.30) denkleminizden benzer yolla (4.7) çözümünü elde ederiz. ((4.6) denkleminde α ve β ları yer değiştireceğiz.)

5. HOMOJEN GAUSS DENKLEMİNİN KESİRLİ ÇÖZÜMÜNÜN HİPERGEOMETRİK GÖSTERİMİ

Teorem 5.1. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere

$\left| (z^{\alpha-\gamma})_{\alpha-1-n} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_1 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} {}_2F_1 \left(1+\beta-\gamma, 1-\alpha; 2-\gamma; \frac{z}{z-1} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) eşitliğimizi göz önüne aldığımız takdirde

$$\varphi_1 = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1)} (z^{\alpha-\gamma})_{\alpha-1-n} \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_n \quad (5.2)$$

şeklinde yazabiliriz. [10]'dan

$$(z^\lambda)_\nu = e^{-i\pi\nu} \frac{\Gamma(\nu-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} z^{\lambda-\nu} \quad (5.3)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$(z^{\alpha-\gamma})_{\alpha-1-n} = e^{-i\pi(\alpha-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-n-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{1+n-\gamma} \quad (5.4)$$

$$\left((z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n-\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)} (z-1)^{\gamma-\beta-1-n} \quad (5.5)$$

eşitliklerini kurabiliriz. (5.4) ve (5.5) eşitliklerini (5.2) denklemimde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K e^{-i\pi(\alpha-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(\gamma-n-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \\ &\quad \frac{\Gamma(n-\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5.7)$$

$$\Gamma(\alpha - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \quad (5.8)$$

olduğunu göz önüne alırsak φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi(\alpha-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)n!} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \frac{\Gamma(n-\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \quad (5.9)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (5.10)$$

eşitliğini göz önüne aldığımızda φ_1 çözümü

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi(\alpha-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+1-\gamma)_n (1-\alpha)_n}{(2-\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.11)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan

$$(z-1)^\lambda = e^{i\pi\lambda} (1-z)^\lambda \quad (5.12)$$

olduğu için (5.11) denklemini

$$\varphi_1 = K e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+1-\gamma)_n (1-\alpha)_n}{(2-\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.13)$$

biçiminde yazabiliriz. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \quad (5.14)$$

kabulü yardımıyla (5.13) denklemini

$$\varphi_1 = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} {}_2F_1\left(1+\beta-\gamma, 1-\alpha; 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

biçimde yazarız.

Teorem 5.2. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere

$$\left| \left(z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1-n} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}), \quad z \neq 0,1 \text{ ve } \left| \frac{z}{(z-1)} \right| < 1 \text{ için Leibniz kuralı yardımıyla } \varphi_2$$

çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= K \left(z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1} \\ &= z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} {}_2F_1 \left(1+\alpha-\gamma, 1-\beta; 2-\gamma; \frac{z}{z-1} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denklemimizi göz önüne aldığımız takdirde

$$\varphi_2 = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n+1)} \left(z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1-n} \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_n \quad (5.16)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3) yardımıyla

$$\left(z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1-n} = e^{-i\pi(\beta-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-n-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} z^{1+n-\gamma} \quad (5.17)$$

$$\left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n-\gamma+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} (z-1)^{\gamma-\alpha-1-n} \quad (5.18)$$

eşitliklerini kurabiliriz. (5.17) ve (5.18) eşitliklerini (5.16) denklemimde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= K e^{-i\pi(\beta-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(\gamma-n-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \\ &\quad \frac{\Gamma(n+\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde ederiz. Diğer taraftan (5.7) ve (5.8) eşitlikleri yardımıyla φ_2 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= K e^{-i\pi(\beta-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)n!} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \\ &\quad \frac{\Gamma(n+\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \end{aligned} \quad (5.20)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca (5.10) eşitliğini göz önüne aldığımızda φ_2 çözümü

$$\varphi_2 = K e^{-i\pi(\beta-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n (1-\beta)_n}{(2-\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.21)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan (5.12) eşitliği yardımıyla (5.21)'i

$$\varphi_2 = K e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)_n (1-\beta)_n}{(2-\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.22)$$

biçiminde yazabiliriz. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \quad (5.23)$$

kabulü yardımıyla (5.23) denklemini

$$\varphi_2 = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} {}_2F_1\left(1+\alpha-\gamma, 1-\beta; 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

biçimde yazarız.

Teorem 5.3. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu, $\left| \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1-n} \right| < \infty$
 $(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_3 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= K \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{\alpha-\gamma} \right)_{\alpha-1} \\ &= z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(1-\alpha, \gamma-\alpha; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= K \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{\alpha-\gamma} \right)_{\alpha-1} \\ &= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1-n} \left(z^{\alpha-\gamma} \right)_n \end{aligned} \quad (5.25)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3) yardımıyla

$$\left((z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1-n} = e^{-i\pi(\alpha-1-n)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma-n)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha+n} \quad (5.26)$$

$$\left(z^{\alpha-\gamma}\right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{\alpha-\gamma-n} \quad (5.27)$$

biçiminde yazabiliriz. (5.26) ve (5.27) eşitliklerini (5.25) denklemimde yerine yazarsak

$$\varphi_3 = Ke^{-i\pi(\alpha-1)} z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma-n)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \left(\frac{z-1}{z}\right)^n \quad (5.28)$$

elde ederiz. (5.7) ve (5.8) eşitlikleri yardımıyla (5.28) denklemini

$$\varphi_3 = Ke^{-i\pi(\alpha-1)} z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)n!} \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta-\gamma)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \quad (5.29)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (5.29) denkleminde (5.10) ve (5.12) eşitliklerini göz önüne aldığımızda

$$\varphi_3 = Ke^{i\pi(\gamma-\beta-1)} z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma)_n (1-\alpha)_n}{(1-\alpha-\beta+\gamma)_n} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.30)$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\beta-2\alpha+1)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)} \quad (5.31)$$

olduğunu kabul edelim. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve (5.31) eşitliği yardımıyla φ_3 çözümünü

$$\varphi_3 = z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(1-\alpha, \alpha-\gamma; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right)$$

şeklinde yazarız.

Teorem 5.4. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu, $\left| \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1-n} \right| < \infty$

$(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0,1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_4 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= K \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} z^{\beta-\gamma} \right)_{\beta-1} \\ &= z^{\beta-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1 \left(1-\beta, \gamma-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$\varphi_4 = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1-n} (z^{\beta-\gamma})_n \quad (5.33)$$

yazabiliriz. (5.3) yardımıyla

$$\left((z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1-n} = e^{-i\pi(\beta-1-n)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma-n)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha+n} \quad (5.34)$$

$$(z^{\beta-\gamma})_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n-\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)} z^{\beta-\gamma-n} \quad (5.35)$$

yazabiliriz. (5.34) ve (5.35) eşitliklerini (5.33) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= K e^{-i\pi(\beta-1)} z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma-n)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \\ &\quad \frac{\Gamma(n-\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \left(\frac{z-1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.36)$$

elde ederiz. (5.7) ve (5.8) eşitlikleri yardımıyla (5.36) denklemini

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= K e^{-i\pi(\beta-1)} z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)n!} \\ &\quad \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(n+1-\alpha-\beta+\gamma)} \frac{\Gamma(n-\beta+\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \left(1-\frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.37)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca (5.37) denkleminde (5.10) ve (5.12) eşitliklerini göz önüne aldığımızda

$$\varphi_4 = K e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)} z^{\beta-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\beta)_n (1-\beta)_n}{(1-\alpha-\beta+\gamma)_n} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.38)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \quad (5.39)$$

olduğunu kabul edelim. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve (5.39) eşitliği yardımıyla φ_4 çözümünü

$$\varphi_4 = z^{\beta-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right)$$

şeklinde yazarız.

Teorem 5.5. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere $\left|(z^{\alpha-1})_{\alpha-\gamma-n}\right| < \infty$ $(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_5 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= K z^{1-\gamma} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma} \\ &= (1-z)^{-\beta} {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_5 = K z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} (z^{\alpha-1})_{\alpha-\gamma-n} \left((z-1)^{-\beta}\right)_n \quad (5.41)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3) yardımıyla

$$\begin{aligned} (z^{\alpha-1})_{\alpha-\gamma-n} &= e^{-i\pi(\alpha-\gamma-n)} \frac{\Gamma(1-\gamma-n)}{\Gamma(1-\alpha)} z^{\gamma+n-1} \\ \left((z-1)^{-\beta}\right)_n &= e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} (z-1)^{-\beta-n} \end{aligned}$$

eşitliklerini kurabiliriz ve (5.41) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_5 = Ke^{-i\pi(\alpha-\gamma)} (z-1)^{-\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(1-\gamma-n)}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \quad (5.42)$$

elde ederiz. Ayrıca (5.8) eşitliği göz önüne alındığında φ_5 çözümü

$$\varphi_5 = Ke^{-i\pi(\alpha-\gamma)} (z-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \quad (5.43)$$

biçiminde yazılabilir. (5.10) eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$\varphi_5 = Ke^{-i\pi(\alpha-\gamma)} (z-1)^{-\beta} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \quad (5.44)$$

elde ederiz. (5.12) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_5 = Ke^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \quad (5.45)$$

biçiminde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (5.46)$$

kabulü ve hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_5 çözümünü

$$\varphi_5 = (1-z)^{-\beta} {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right) \quad (5.47)$$

hipergeometrik fonksiyon biçimde yazarız.

Teorem 5.6. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere

$\left| \left(z^{\beta-1} \right)_{\beta-\gamma-n} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z}{z-1} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_6

çözümünü

$$\begin{aligned}
\varphi_6 &= Kz^{1-\gamma} \left(z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma} \\
&= (1-z)^\alpha {}_2F_1 \left(\gamma-\beta, \alpha; \gamma; \frac{z}{z-1} \right)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_6 = Kz^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} (z^{\beta-1})_{\beta-\gamma-n} \left((z-1)^{-\alpha} \right)_n \tag{5.49}$$

yazabiliriz. (5.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}
(z^{\beta-1})_{\beta-\gamma-n} &= e^{-i\pi(\beta-\gamma-n)} \frac{\Gamma(1-\gamma-n)}{\Gamma(1-\beta)} z^{\gamma+n-1} \\
\left((z-1)^{-\alpha} \right)_n &= e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (z-1)^{-\alpha-n}
\end{aligned}$$

eşitliklerini kurabiliriz. (5.49) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\varphi_6 &= Ke^{-i\pi(\beta-\gamma)} (z-1)^{-\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \\
&\quad \Gamma(1-\gamma-n) \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n
\end{aligned} \tag{5.50}$$

elde ederiz. Ayrıca (5.8) eşitliği göz önüne alındığında φ_6 çözümünü

$$\begin{aligned}
\varphi_6 &= Ke^{-i\pi(\beta-\gamma)} (z-1)^\alpha \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \\
&\quad \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n
\end{aligned} \tag{5.51}$$

biçiminde yazabiliriz. (5.10) eşitliğini göz önüne aldığımızda

$$\varphi_6 = Ke^{-i\pi(\beta-\gamma)} (z-1)^{-\alpha} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\beta)_n (\alpha)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \tag{5.52}$$

elde ederiz. (5.12) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_6 = K e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\beta)_n (\alpha)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \quad (5.53)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)} \quad (5.54)$$

kabulü ve hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_6 çözümünü

$$\varphi_6 = (1-z)^{-\beta} {}_2F_1 \left(\gamma-\beta, \alpha; \gamma; \frac{z}{z-1} \right)$$

hipergeometrik fonksiyon biçimde yazarız.

Teorem 5.7. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu, $\left| \left((z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma-n} \right| < \infty$
 $(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_7 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_7 &= K z^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\beta} z^{\alpha-1} \right)_{\alpha-\gamma} \\ &= z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} {}_2F_1 \left(\gamma-\alpha, 1-\alpha; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z} \right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denklemimizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_7 = K z^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma-n} \left(z^{\alpha-1} \right)_n \quad (5.56)$$

yazabiliriz. (5.3)'den

$$\left((z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma-n} = e^{-i\pi(\alpha-\gamma-n)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma-n+\beta)}{\Gamma(\beta)} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma+n}$$

$$\left(z^{\alpha-1} \right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} z^{\alpha-1-n}$$

yazabiliriz. (5.56) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_7 = Ke^{-i\pi(\alpha-\gamma)} z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-n)n!} \Gamma(\alpha-\gamma+\beta-n) \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \quad (5.57)$$

elde ederiz. (5.8) eşitliği yardımıyla (5.57) eşitliğini

$$\varphi_7 = Ke^{-i\pi(\alpha-\gamma)} z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)}{n!\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma+n)} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \quad (5.58)$$

şeklinde yazarız. (5.12) eşitliği yardımıyla (5.7.4) denkleminde

$$\varphi_7 = Ke^{i\pi(-2\alpha+\beta-2\gamma)} z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)}{n!\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma+n)} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \quad (5.59)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(-2\alpha+\beta-2\gamma)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta)} \quad (5.60)$$

olmak üzere hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_7 çözümünü

$$\varphi_7 = z^{\alpha-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right)$$

biçimde yazarız.

Teorem 5.8. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu için $\left| \left((z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma-n} \right| < \infty$

$(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ olsun. Leibniz kuralı yardımıyla φ_8 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_8 &= Kz^{1-\gamma} \left((z-1)^{-\alpha} z^{\beta-1} \right)_{\beta-\gamma} \\ &= z^{\beta-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} {}_2F_1\left(\gamma-\beta, 1-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_8 = Kz^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma-n} \left(z^{\beta-1} \right)_n \quad (5.62)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3)'den

$$\left((z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma-n} = e^{-i\pi(\beta-\gamma-n)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-n)}{\Gamma(\alpha)} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma+n}$$

$$\left(z^{\beta-1} \right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(1-\beta)} z^{\beta-1-n}$$

biçiminde yazabiliriz. (5.62) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_8 = Ke^{-i\pi(\beta-\gamma)} z^{\beta-\gamma} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-n)n!} \\ \Gamma(\alpha-\gamma+\beta-n) \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.63)$$

elde ederiz. (5.8) eşitliği yardımıyla (5.63) eşitliğini

$$\begin{aligned} \varphi_8 = Ke^{-i\pi(\beta-\gamma)} z^{\beta-\gamma} (z-1)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta+n)}{n!\Gamma(\gamma-\beta)} \\ \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma+n)} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.64)$$

şeklinde yazarız. (5.12) eşitliği yardımıyla (5.64) denkleminde

$$\begin{aligned} \varphi_8 = Ke^{i\pi(-\alpha-2\beta+2\gamma)} z^{\beta-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta+n)}{n!\Gamma(\gamma-\beta)} \\ \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma+n)} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.65)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(-\alpha-2\beta+2\gamma)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \quad (5.66)$$

olsun. Hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_8 çözümü

$$\varphi_8 = z^{\beta-\gamma} (1-z)^{-\beta-\alpha+\gamma} {}_2F_1\left(\gamma-\beta, 1-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-\frac{1}{z}\right)$$

biçiminde yazılır.

Teorem 5.9. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere

$$\left| \left(z^{-\alpha} \right)_{\gamma-\alpha-1-n} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}), \quad z \neq 0, 1 \text{ ve } \left| \frac{z}{z-1} \right| < 1 \text{ için Leibniz kuralı yardımıyla } \varphi_9$$

çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1} \\ &= (1-z)^{\beta} {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_9 = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(n+1)} (z^{-\alpha})_{\gamma-\alpha-1-n} \left((z-1)^{\beta-1} \right)_n \quad (5.68)$$

biçiminde yazabiliriz. (5.3) eşitliği yardımıyla

$$(z^{-\alpha})_{\gamma-\alpha-1-n} = e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-1-n)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma+n}$$

$$\left((z-1)^{\beta-1} \right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (z-1)^{\beta-1-n}$$

elde ederiz. (5.68) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= K e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1)} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} z^{1-\gamma} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n! \Gamma(\gamma-\alpha-n)} \\ &\quad \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \Gamma(\gamma-1-n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \end{aligned} \quad (5.69)$$

buluruz. (5.8) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_9 = K e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1)} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} z^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{n! \Gamma(1-\gamma+\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \quad (5.70)$$

biçiminde yazabiliriz. (5.12) eşitliği göz önüne alındığımızda (5.70) denklemini

$$\varphi_9 = K e^{2i\pi} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} z^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{n! \Gamma(1-\gamma+\alpha)} \frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n \quad (5.71)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = e^{2i\pi} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} \quad (5.72)$$

olsun. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve (5.72) eşitliği yardımıyla φ_9 çözümünü

$$\varphi_9 = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\alpha-1} {}_2F_1 \left(1-\gamma+\alpha, 1-\beta; 2-\gamma; \frac{z}{z-1} \right)$$

biçiminde yazabiliriz.

Teorem 5.10. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu olmak üzere

$$\left| \left(z^{-\beta} \right)_{\gamma-\beta-1-n} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}), \quad z \neq 0, 1 \text{ ve } \left| \frac{z}{z-1} \right| < 1 \text{ için Leibniz kuralı yardımıyla } \varphi_{10}$$

çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \\ &= z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} {}_2F_1 \left(1-\gamma-\beta, 1-\alpha; 2-\gamma; \frac{z}{z-1} \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_{10} = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta-n)\Gamma(n+1)} \left(z^{-\beta} \right)_{\gamma-\beta-1-n} \left((z-1)^{\alpha-1} \right)_n \quad (5.74)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3) eşitliği yardımıyla

$$\left(z^{-\beta}\right)_{\gamma-\beta-1-n} = e^{-i\pi(\gamma-\beta-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-1-n)}{\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma+n}$$

$$\left((z-1)^{\alpha-1}\right)_n = e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (z-1)^{\alpha-1-n}$$

elde ederiz. (5.74) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_{10} = K e^{-i\pi(\gamma-\beta-1)} (z-1)^{\gamma-\beta-1} z^{1-\gamma} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{n! \Gamma(\gamma-\beta-n)} \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(\gamma-1-n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \end{aligned} \quad (5.75)$$

buluruz. (5.8) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_{10} = K e^{-i\pi(\gamma-\beta-1)} z^{1-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{n! \Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \end{aligned} \quad (5.76)$$

biçiminde yazabiliriz. (5.12) eşitliği göz önüne alındığımızda (5.76) denklemini

$$\begin{aligned} \varphi_{10} = K (1-z)^{\gamma-\beta-1} z^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{n! \Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(n+2-\gamma)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \end{aligned} \quad (5.77)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\frac{1}{K} = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\beta)} \quad (5.78)$$

olsun. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve (5.78) eşitliği yardımıyla φ_{10} çözümünü

$$\varphi_{10} = z^{1-\gamma} (1-z)^{\gamma-\beta-1} {}_1F_2\left(1-\gamma+\beta, 1-\alpha; 2-\gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

biçiminde yazabiliriz.

Teorem 5.11. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu, $\left| \left((z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1-n} \right| < \infty$

$(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0,1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_{11} çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\beta-1} z^{-\alpha} \right)_{\gamma-\alpha-1} \\ &= z^{-\alpha} {}_2F_1 \left(1-\gamma+\alpha, \alpha; 1-\gamma+\alpha+\beta; 1-\frac{1}{z} \right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denkleminizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_{11} = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1-n} (z^{-\alpha})_n \quad (5.80)$$

biçiminde yazabiliriz. (5.3) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \left((z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1-n} &= e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n)}{\Gamma(1-\beta)} (z-1)^{\beta-\gamma+\alpha+n} \\ (z^{-\alpha})_n &= e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} z^{-\alpha-n} \end{aligned}$$

elde ederiz. (5.80) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= K e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1)} z^{-\alpha} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n! \Gamma(\gamma-\alpha-n)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n) \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n \end{aligned} \quad (5.81)$$

elde ederiz. (5.8) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= K e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1)} z^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \\ &\quad \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+\beta)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha+\beta+n)} \left(1 - \frac{1}{z} \right)^n \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad (5.82)$$

şeklinde yazarız. Ayrıca (5.10) eşitliğini göz önüne alarak

$$\frac{1}{K} = e^{-i\pi(\gamma-\alpha-1)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \quad (5.83)$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde φ_{11} çözümü

$$\varphi_{11} = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_n (\alpha)_n}{(1-\gamma+\alpha+\beta)_n} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.84)$$

biçiminde yazılır. Hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_{11} çözümünü

$$\varphi_{11} = z^{-\alpha} {}_1F_2 \left(1-\gamma+\alpha, \alpha; 1-\gamma+\alpha+\beta; 1-\frac{1}{z} \right)$$

biçiminde yazabiliriz.

Teorem 5.12. ${}_2F_1$ Gauss'un hipergeometrik fonksiyonu, $\left| \left((z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1-n} \right| < \infty$

$(n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $z \neq 0, 1$ ve $\left| \frac{z-1}{z} \right| < 1$ için Leibniz kuralı yardımıyla φ_{12} çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left((z-1)^{\alpha-1} z^{-\beta} \right)_{\gamma-\beta-1} \\ &= z^{-\beta} {}_2F_1 \left(1-\gamma+\beta, \beta; 1-\gamma+\alpha+\beta; 1-\frac{1}{z} \right) \end{aligned} \quad (5.85)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: (3.14) denklemimizi göz önüne aldığımızda

$$\varphi_{12} = K (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta-n)\Gamma(n+1)} \left((z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1-n} \left(z^{-\beta} \right)_n \quad (5.86)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.3) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \left((z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1-n} &= e^{-i\pi(\gamma-\beta-1-n)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n)}{\Gamma(1-\alpha)} (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n} \\ \left(z^{-\beta} \right)_n &= e^{-i\pi n} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{-\beta-n} \end{aligned}$$

elde ederiz. (5.86) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_{12} = K e^{-i\pi(\gamma-\beta-1)} z^{-\beta} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{n! \Gamma(\gamma-\beta-n)} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} \Gamma(\gamma-\alpha-\beta-n) \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \quad (5.87)$$

elde ederiz. (5.8) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_{12} = K e^{-i\pi(\gamma-\beta-1)} z^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}{\Gamma(1-\gamma+\beta)} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+\beta)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha+\beta+n)} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.88)$$

biçiminde yazarız. Ayrıca (5.10) eşitliğini göz önüne alarak

$$\frac{1}{K} = e^{-i\pi(\gamma-\beta-1)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (5.89)$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde φ_{12} çözümü

$$\varphi_{12} = z^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\beta)_n (\beta)_n}{(1-\gamma+\alpha+\beta)_n} \left(1-\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (5.90)$$

biçiminde yazılır. Hipergeometrik fonksiyon tanımı gereğince φ_{12} çözümünü

$$\varphi_{12} = z^{-\beta} {}_1F_2 \left(1-\gamma+\beta, \beta; 1-\gamma+\alpha+\beta; 1-\frac{1}{z} \right)$$

biçiminde yazabiliriz.

Teorem 5.13 $\left| \left((1-z)^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1} \right| < \infty, \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}), \quad |1-z| > 1$ olmak üzere

Genelleştirilmiş Leibniz kuralını kullanmadan φ_1 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= (1-z)^{-\beta} {}_2F_1 \left(\gamma-\alpha, \beta; \beta-\alpha+1; \frac{1}{1-z} \right) \end{aligned} \quad (5.91)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat $|1-z| > 1$ için [7] ‘den

$$\begin{aligned}
z^\lambda &= (z-1)^\lambda \left(1 - \frac{1}{1-z}\right)^\lambda \\
&= (z-1)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\lambda+1-k)} (1-z)^{-k}
\end{aligned} \tag{5.92}$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
z^{\alpha-\gamma} &= (z-1)^{\alpha-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} (1-z)^{-k} \\
z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} (1-z)^{-k} (z-1)^{\alpha-\beta-1}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

eşitliklerini kurabiliriz. (5.12) eşitliği yardımıyla (5.93) eşitliğimizi

$$z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} = e^{i\pi(\alpha-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} (1-z)^{\alpha-\beta-1-k}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\
&= K e^{i\pi(\alpha-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} \left((1-z)^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

yazabiliriz. (5.3) eşitliğinden

$$\left((1-z)^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1} = e^{-i\pi(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta-\alpha+1+k)} (1-z)^{-\beta-k} \tag{5.95}$$

elde ederiz. (5.95) eşitliğini (5.94)' de yerine yazarsak

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi\beta} (1-z)^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta-\alpha+1+k)} \frac{(1-z)^{-k}}{k!} \tag{5.96}$$

elde ederiz. Diğer taraftan (5.8) eşitliği göz önüne alındığında (5.96) eşitliğini

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi\beta} (1-z)^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+k)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta-\alpha+1+k)} \frac{(1-z)^{-k}}{k!} \tag{5.97}$$

şeklinde yazabiliriz. (5.97) eşitliğini $\Gamma(\beta)$ ve $\Gamma(\beta - \alpha + 1)$ ifadelerinin her biri ile çarpıp böler ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\varphi_1 = Ke^{-i\pi\beta} (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma - \alpha + k)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1 + k)} \frac{(1-z)^{-k}}{k!} \quad (5.98)$$

elde ederiz. Ayrıca hipergeometrik fonksiyon tanımı, (5.10) ve

$$\frac{1}{K} = e^{-i\pi\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \quad (5.99)$$

eşitliklerini göz önüne aldığımızda φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = (1-z)^{-\beta} {}_2F_1\left(\gamma - \alpha, \beta; \beta - \alpha + 1; \frac{1}{1-z}\right)$$

şeklinde elde ederiz.

Teorem 5.14. $\left| \left((1-z)^{k+\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \right| < \infty$, $(k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $|1-z| < 1$ olmak üzere

Genelleştirilmiş Leibniz kuralını kullanmadan φ_1 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; 1 - \alpha - \beta + \gamma; 1-z) \end{aligned} \quad (5.100)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: $|1-z| < 1$ için [7] ‘den

$$\begin{aligned} z^\lambda &= \left(1 - (1-z) \right)^\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\lambda + 1 - k)} (1-z)^k \end{aligned} \quad (5.101)$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan

$$z^{\alpha-\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha - \gamma + 1)}{k! \Gamma(\alpha - \gamma + 1 - k)} (1-z)^k \quad (5.102)$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan (5.12) eşitliğini göz önüne alırsak

$$z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} = e^{i\pi(\gamma-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} (1-z)^{\gamma-\beta+k-1} \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= K e^{i\pi(\gamma-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} \left((1-z)^{\gamma-\beta+k-1} \right)_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (5.104)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca (5.3) 'den

$$\left((1-z)^{\gamma-\beta+k-1} \right)_{\alpha-1} = e^{-i\pi(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+\beta-k)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-k)} (1-z)^{\gamma-\beta-\alpha+k} \quad (5.105)$$

yazabiliriz. (5.105) eşitliğini kullanırsak φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = K e^{i\pi(\gamma-\beta-\alpha)} (1-z)^{\gamma-\beta-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-\gamma+1)}{k! \Gamma(\alpha-\gamma+1-k)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+\beta-k)}{\Gamma(\beta-\gamma+1-k)} (1-z)^k \quad (5.106)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.8) eşitliği yardımıyla (5.106) eşitliğini

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K e^{i\pi(\gamma-\beta-\alpha)} (1-z)^{\gamma-\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}{\Gamma(k+1-\alpha-\beta+\gamma)} \frac{\Gamma(n+\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} \frac{(1-z)^k}{k!} \end{aligned} \quad (5.107)$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca Hipergeometrik fonksiyon tanımı, (5.10) ve

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\beta-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+\beta)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} \quad (5.108)$$

eşitliklerini göz önüne aldığımızda φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = (1-z)^{\gamma-\beta-\alpha} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; 1-\alpha-\beta+\gamma; 1-z) \quad (5.109)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 5.15. $\left| \left(z^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1} \right| < \infty \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}), \quad |z| > 1$ olmak üzere

Genelleştirilmiş Leibniz kuralını kullanmadan φ_1 çözümünü

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\
&= z^{-\beta} {}_2F_1 \left(\beta-\gamma+1, \beta; \beta-\alpha+1; \frac{1}{z} \right)
\end{aligned} \tag{5.110}$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: $|z| > 1$ için [7]'den

$$\begin{aligned}
(z-1)^\lambda &= z^\lambda \left(1 - \frac{1}{z} \right)^\lambda \\
&= z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\lambda+1-k)} z^{-k}
\end{aligned} \tag{5.111}$$

eşitliğini göz önüne aldığımız takdirde

$$(z-1)^{\gamma-\beta-1} = z^{\gamma-\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\gamma-\beta-k)} z^{-k} \tag{5.112}$$

$$z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{k! \Gamma(\gamma-\beta-k)} z^{\alpha-\beta-1-k}$$

yazabiliriz. Buradan φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{k! \Gamma(\gamma-\beta-k)} \left(z^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1} \tag{5.113}$$

şeklinde elde ederiz. (5.3) eşitliği yardımıyla

$$\left(z^{\alpha-\beta-1-k} \right)_{\alpha-1} = e^{-i\pi(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+1+k-\alpha)} z^{-\beta-k} \tag{5.114}$$

yazabileceğini biliyoruz. (5.114) eşitliğini (5.113) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi(\alpha-1)} z^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta-k)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+1+k-\alpha)} z^{-k} \tag{5.115}$$

buluruz. (5.8) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_1 = K e^{-i\pi(\alpha-1)} z^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1-\gamma+\beta)}{\Gamma(1-\gamma+\beta)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+1+k-\alpha)} \frac{z^{-k}}{k!} \tag{5.116}$$

elde ederiz. (5.116) eşitliğini sırasıyla $\Gamma(\beta)$ ve $\Gamma(\beta - \alpha + 1)$ ile çarpıp bölersek

$$\varphi_1 = Ke^{-i\pi(\alpha-1)} z^{-\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1-\gamma+\beta)}{\Gamma(1-\gamma+\beta)} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+k)} \frac{z^{-k}}{k!} \quad (5.117)$$

elde ederiz. (5.11) denklemini göz önüne aldığımızda φ_1 çözümümüzü

$$\varphi_1 = Ke^{-i\pi(\alpha-1)} z^{-\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\beta)_k (\beta)_k}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)_k} \frac{z^{-k}}{k!} \quad (5.118)$$

biçiminde yazabiliriz. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve

$$\frac{1}{K} = e^{-i\pi(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \quad (5.119)$$

kabulü yardımıyla φ_1 çözümünü

$$\varphi_1 = z^{-\beta} {}_2F_1\left(1-\gamma+\beta, \beta; \beta-\alpha+1; \frac{1}{z}\right)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 5.16. $\left| \left(z^{\alpha-\gamma+k} \right)_{\alpha-1} \right| < \infty$, $(k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$, $|z| < 1$ olmak üzere Genelleştirilmiş

Leibniz kuralını kullanmadan φ_1 çözümünü

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= z^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\beta; z) \end{aligned} \quad (5.120)$$

biçiminde yazabiliriz.

İspat: $|z| < 1$ için [7]'den

$$\begin{aligned} (z-1)^\lambda &= e^{i\pi\lambda} (1-z)^\lambda \\ &= e^{i\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\lambda+1-k)} z^k \end{aligned} \quad (5.121)$$

eşitliğinin mevcut olup buradan

$$(z-1)^{\gamma-\beta-1} = e^{i\pi(\gamma-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{k! \Gamma(\gamma-\beta-k)} z^k \quad (5.122)$$

biçiminde yazabiliriz ve (5.122) eşitliği yardımıyla

$$\left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} = e^{i\pi(\gamma-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{k! \Gamma(\gamma-\beta-k)} \left(z^{\alpha-\gamma+k} \right)_{\alpha-1} \quad (5.123)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= K \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \\ &= K e^{i\pi(\gamma-\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\beta)}{k! \Gamma(\gamma-\beta-k)} \left(z^{\alpha-\gamma+k} \right)_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (5.124)$$

eşitliğini kurabiliriz. (5.124) eşitliğini (5.8) ve (5.10) eşitliği yardımıyla

$$\varphi_1 = e^{i\pi(\gamma-\beta-\alpha)} z^{1-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_n (\beta-\gamma+1)_n}{(2-\gamma)_n} \frac{z^k}{k!} \quad (5.125)$$

elde ederiz. Hipergeometrik fonksiyon tanımı ve

$$\frac{1}{K} = e^{i\pi(\gamma-\beta-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \quad (5.126)$$

eşitliği yardımıyla

$$\varphi_1 = z^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\beta; z)$$

yazabiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] **Bai, Z., Lü H., 2005**, Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation, J. Math. Anal. Appl., 311, 495-505.
- [2] **Bayın, S., 2006**, Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley Interscience New Jersey.
- [3] **Carpinteri, A., Mainardi, F. (Editors), 1997**, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York.
- [4] **Miller, K.S., Ross, B., 1993**, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.
- [5] **Nishimoto, K., 1984, 1987, 1989, 1991, 1996**, Fractional Calculus, vol. I,II,III,IV,V Descartes Press, Koriyama.
- [6] **Nishimoto, K., 1991**, An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21 st Century), Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama.
- [7] **Nishimoto, K., 1997**, Kummer's Twenty-Four Functions and Fractional Calculus, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, No.2, 30, 1271-1282.
- [8] **Oldham, K.B., Spainer, J., 1974**, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [9] **Podlubny, I., 1999**, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, NewYork, London, Tokyo and Toronto.
- [10] **Shy-Der, Lin, Shih-Tong, Tu, Srivista, H.M., 2002**, Certain of Classes of Ordinary and Partial Differential Equations Solvable By Means Of Fractional Calculus, Applied Mathematics and Computation, 131 223-233.
- [11] **Slater, L.J., 1966**, Generalized Hipergeometric Functions, Cambridge.
- [12] **Soykan, Y., 2012**, Fonksiyonel Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, Ostim-Ankara.

- [13] **Tu, S.-T., Chyan, D.-K., Srivastava, H.M., 2001,** Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, Integral Transform. Spec. Funct., No.3, 291-302.
- [14] **Yaşar, İ.B., 2005,** Diferensiyel Denklemler ve Uygulamalar, Ankara.
- [15] **Yilmazer, R., Baş, E., 2012,** Journal of The Chungcheong Mathematical Society, Vol.25, No.2.
- [16] **Wang, Z.X., Guo, D.R., 1989,** Special Functions, World Scientific.

ÖZGEÇMİŞ

Neslihan Sabriye Küçüker, 1988 yılında Adıyaman’da doğdu. İlköğretim tahsilini Malatya’da Hayrettin Sönmezay İlköğretim okulunda tamamladı. 2006 yılında Sümer (Yabancı Dil Ağırlıklı) Lisesi, Fen bölümünden mezun oldu. 2007 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat fakültesi, Matematik bölümünde başlamış olduğu lisans öğrenimini 2011 yılında tamamladı. 2011 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve halen bu öğrenimine devam etmektedir.