

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

INVERSIVE GEOMETRİDE EĞRİ VE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhittin Evren AYDIN

(08121106)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 10/06/2010

HAZİRAN-2010

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

INVERSİVE GEOMETRİDE EĞRİ VE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhittin Evren AYDIN

(08121106)

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:10/06/2010
Tezin Savunulduğu Tarih: 02/07/2010**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT.(F.Ü)

**Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ.(F.Ü)
Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ.(A.Ü)**

HAZİRAN-2010

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olup her vesilede birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e; değerli bilgilerini ve birikimlerini esirgemeyen çok kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Hasan Hilmi HACISALİHOĞLU' ya ve Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ' ye teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Muhittin Evren AYDIN

ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. Birinci Bölüm	2
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	2
2.2. Inversive Geoemtri İle İlgili Temel Kavramlar	12
3. İkinci Bölüm	19
3.1. İnversiyon Kavramı	19
3.2. Yüzey İnversiyonları I	22
4 Üçüncü Bölüm	33
4.1. Yüzey İnversiyonları II	33
5. Dördüncü Bölüm	43
5.1. Inversive Eğrilerle İlgili Uygulamalar	43
5.2. Inversive Yüzeylerle İlgili Uygulamalar	46
6. SONUÇ	57
7. KAYNAKLAR	58
8. ÖZGEÇMİŞ	59

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; İnversiyon kavramı, inversive eğri ve inversive yüzey tanımları verilerek, inversive yüzeyler arasındaki bazı ilişkiler ve karakterizasyonlar incelendi.

Üçüncü bölüm; çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde inversive yüzeylere ait tanjant uzayların bazıları, şekil operatörleri ve Christoffel sembolleri arasındaki ilişkiler hesaplandı. Ayrıca Inversive yüzeylerin inversiyon dönüşümü altında invaryant kalan bazı özellikleri elde edildi.

Dördüncü bölümde ise konuya ilişkin uygulamalar yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Inversive Geometri, İnversiyon, Inversive Eğri, Inversive Yüzey, Birim küre, Umbilik Nokta, Flat Nokta, Christoffel Sembolleri.

SUMMARY

Curves and Surfaces In Inversive Geometry

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter; some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; some relationships and characterizations are examined between the inversive surfaces by giving the concept of inversion, inversive curve, inversive surface definitons.

In the third chapter; original works have been done, the relationships have been calculated the bases of the tangent spaces, the shape operators and Christoffel symbols of the between inversive surfaces. Also, some properties which are invariant of inversive surfaces under inversion mapping are obtained.

In the fourth chapter; some applications were done about the subject

Keywords: Inversive Geometry, Inversion, Inversive Curve, Inversive Surface, Unit Sphere, Umbilical Point, Flat Point, Christoffel Symbols.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 5.1.1. Helis ve Inversive eğrisi.....	43
Şekil 5.1.2. Kardiod ve Inversive eğrisi.....	44
Şekil 5.1.3. Bernoulli Lemniskatı.....	44
Şekil 5.1.4. Inversive Bernoulli Lemniskatı.....	45
Şekil 5.2.1. Katenoid yüzeyi.....	51
Şekil 5.2.2. Inversive Katenoid.....	52
Şekil 5.2.3. Möbius şeridi.....	52
Şekil 5.2.4. Inversive Möbius şeridi.....	53
Şekil 5.2.5. Tor yüzeyi.....	53
Şekil 5.2.6. Inversive Tor yüzeyi.....	54
Şekil 5.2.7. Dairesel silindir.....	55
Şekil 5.2.8 Inversive dairese silindir.....	55
Şekil 5.2.9. Sekiz yüzeyi.....	56
Şekil 5.2.10. Inversive sekiz yüzeyi.....	56

SEMBOLLER LİSTESİ

A	: Afin Uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\hat{\mathbb{C}}$	: Genişletilmiş Kompleks düzlem
$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzay
I_n	: Birim matris
k_i	: İ. yinci asli eğrilik
M	: Yüzey
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$S^1_O(r)$	: O merkezli r yarıçaplı çember
S^1_O	: O merkezli birim çember
S	: Şekil Operatörü
$T_A(P)$	: A Afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı
V	: Vektör uzayı
$\langle , \rangle$	: Öklid Metriği
$\ \cdot \ $	: n-boyutlu Öklid uzayında norm
$\Phi[C, r]$	: $C \in E^n$ merkezli ve r yarıçaplı inversiyon
$\chi(M)$	: M üzerindeki vektör alanlarının uzayı
Γ_{ij}^k	: Christoffel Sembolleri

1. GİRİŞ

Projektif geometrinin ortaya çıkmasıyla Matematikçiler; çemberler üzerinde düşündüklerinden daha fazla çalışmalar yapabileceklerini fark etmişlerdir. Örneğin, fizikte elektrostatik çalışmalarında çember aileleri kullanılmıştır. Böyle çember ailelerinin özelliklerinin çalışılması inversive geometri denilen yeni bir geometri alanı ortaya çıkarmıştır. Inversive geometride Matematikçiler Öklid uzayında alınan bir düzleme sonsuzda ki ideal noktayı ilave edip inversiyonlar altında çember ve doğruları eş figürler olarak düşünmüşlerdir. Böylece Afin geometriden farklı olarak çemberler doğrulara, doğrular da çemberlere dönüşebilir.

Öklidyen Geometri de daha önceden ispatlanmış önemli teoremler, inversive geometride yeniden ve daha çarpıcı bir biçimde ifade edilmiştir. Böylece non - Öklidyen geometrilerde, inversive geometrinin önemi ortaya çıkar.

J. J. Gray, D. A. Brannan, M. F. Esplen, Öklid düzleminde çember ve doğruların inversiyon dönüşümü altındaki durumlarını incelemişler ayrıca Inversive dönüşüm ve Inversive Geometri'yi tanımlamışlardır [4].

Alfred Gray n-boyutlu Öklid uzayında inversiyon dönüşümünün parametrik denklemini vererek eğri ve yüzeylerin inversiyonlarını tanımlamıştır [3].

J. Oprea ve B. O'Neil yüzeyler teorisi ve birçok yüzey örneklerini incelemişlerdir [9,8]

Bu çalışmada ise eğri ve yüzeylerin inversiyon dönüşümü altındaki durumları incelenip inversive yüzeyler arasında bazı karakterizasyonlar ve sonuçlar elde edilmiştir.

2. Birinci Bölüm

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Tanım: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

f fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş Afin uzay denir.

$$(A_1): \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$(A_2): \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır [6].}$

2.1.2. Tanım: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere

$E^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) | p_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ eşitliğiyle belirli E^n cümlesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in E^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre E^n cümlesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. E^n vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$ eşitliğiyle tanımlanan $E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle$ fonksiyonu, E^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, E^n uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir [10].

2.1.3. Tanım: $p \in E^n$ olmak üzere $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ olsun. Buna göre

$$\|\cdot\|: E^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$p \rightarrow \|p\|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu, E^n uzayında bir normdur [10].

2.1.4. Tanım: Bir reel Afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A Afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır [6].

2.1.5. Tanım:

$$d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir [6].

2.1.6. Tanım: $\forall x, y, z \in E^n$ için $\overrightarrow{xy}$ ve $\overrightarrow{yz}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$$

dir [6].

2.1.7. Tanım: E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n + 1 - lisi$ e $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör $n - lisi$ $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir [6].

2.1.8. Tanım: E^n de $E_0 = (0, 0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$ noktaları dik çatı oluştururlar. Bu çatıya standart Öklid çatısı denir [6].

2.1.9. Tanım: E^n de bir X noktasının E^n deki Standart Öklid Çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir. Buradaki

$$x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n,$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n -lisine de E^n in Öklid Koordinat Sistemi denir [6].

2.1.10. Tanım: X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır:

$$(i) X, \emptyset \in \tau,$$

$$(ii) \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau,$$

$$(iii) A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

[6].

2.1.11. Tanım: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [6].

2.1.12. Tanım: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir [6].

2.1.13. Tanım: V vektör uzayı ile birleşen bir Afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A Afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir [6].

2.1.14. Tanım: A Afin uzayının, $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilmektedir. $T_A(P)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemi, sırası ile,

$$\oplus : T_A(P) \times T_A(P) \rightarrow T_A(P)$$

$$((P, \vec{v}), (P, \vec{u})) \rightarrow (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u})$$

ve

$$\odot : \mathbb{R} \times T_A(P) \rightarrow T_A(P)$$

$$(\lambda, (P, \vec{v})) \rightarrow \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v})$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir. $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir [6].

2.1.15. Tanım: Bir $F : E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall P \in E^n$ için, $F(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$ olacak şekildeki $f_1, f_2, \dots, f_m : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlarına F nin Öklid koordinat fonksiyonları denir ve $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ yazılır [6].

2.1.16. Tanım: F fonksiyonun koordinat fonksiyonları olan f_i ler diferensiyellenebilir iseler F fonksiyonuna da diferensiyellenebilir denir. Eğer $F: E^n \rightarrow E^m$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise F ye dönüşüm denir [6].

2.1.17. Tanım: $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisi, $\alpha: I \rightarrow E^n$ dönüşümü yardımıyla verilsin. $F: E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm ise, $\beta = F \circ \alpha: I \rightarrow E^m$ bileşke fonksiyonu da E^m de bir eğri tanımlar. Bu eğriye F dönüşümü altında $\alpha(I)$ eğrisinin resmi denir [6].

2.1.18. Tanım: $F: E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $\vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$ ise $F_{*P}(\vec{v}_p) \in T_{E^m}(F(P))$ de E^m nin $t \rightarrow F(\vec{P} + t\vec{v})$ eğrisinin $t=0$ da ki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı $F_{*P}: T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$ de fonksiyonuna F nin $P \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümü denir [6].

2.1.19. Tanım: $F: E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $P \in E^n$ için F_{*P} olsun. Sırasıyla, $T_{E^n}(P)$ ve $T_{E^m}(F(P))$ de

$$\Phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} |_P, \frac{\partial}{\partial x_2} |_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} |_P \right\}, \Psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} |_{F(P)}, \frac{\partial}{\partial y_2} |_{F(P)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} |_{F(P)} \right\}$$

standart bazları için, F_{*P} nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine, F nin P noktasındaki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir [6].

2.1.20. Tanım: f, E^n Öklid uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise " f fonksiyonu, C^0 sınıfından bir fonksiyondur," denir. E^n Öklid uzayından $\mathbb{R}$ ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^0(E^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir. E^n nin her noktasında f fonksiyonun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise " f fonksiyonu, C^1 sınıfındandır," denir. f fonksiyonunun E^n nin her bir noktasında k. yıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise " f fonksiyonu, C^k sınıfındandır," denir. E^n Öklid uzayından $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(E^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir. E^n nin her bir p noktasında f fonksiyonun her basamaktan kısmi türevleri varsa " f fonksiyonu, C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur," denir [10].

2.1.21. Tanım: $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow E^n$ şeklinde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, E^n Öklid uzayında bir eğri denir [10].

2.1.22. Tanım: E^n de $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. α fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} |_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} |_t \right)$ dır. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(t)$ tanjant vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [6].

2.1.23. Tanım: $U \subset E^2$ bir açık cümle ve $x: U \rightarrow E^n$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O halde $x(U) \subset E^n$ cümlesine bir lokal yüzey veya yama denir [3].

2.1.24. Tanım: $x: U \rightarrow x(U) \subset E^n$ bir lokal yüzey olsun. Eğer her $(u, v) \in U$ için $J(x)(u, v)$ Jakobien matrisinin rankı 2 ise, x e regüler lokal yüzey denir. Eğer her (u_1, v_1) ve $(u_2, v_2) \in U$ için $x(u_1, v_1) = x(u_2, v_2)$ iken $u_1 = u_2$ ve $v_1 = v_2$ ise x e injektif lokal yüzey denir [3].

2.1.25. Tanım $x: U \rightarrow x(U) \subset E^n$ bir lokal yüzey ve $(u_0, v_0) \in U$ sabit olsun. $u \rightarrow x(u, v_0)$ ve $v \rightarrow x(u_0, v)$ eğrilerine x in, sırası ile, u – parametre ve v – parametre eğrileri denir [3].

2.1.26. Tanım: $M \subset E^n$ bir alt cümle olsun. Eğer M nin her $p \in M$ noktası için, p yi içeren bir V komşuluğu var ve bir $x: U \subset E^2 \rightarrow V \cap M \subset E^n$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir regüler yüzey denir:

- (i) x diferensiyellenebilirdir;
- (ii) $x: U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizmdir;
- (iii) her $x: U \rightarrow M$ dönüşümü bir regüler lokal yüzeydir [3].

2.1.27. Tanım: E^n de bir regüler yüzey M ve $p \in M$ olsun, eğer $a < t < b$ için $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = \vec{v}_p$ ve $\alpha(t) \in M$ olacak şekilde bir $\alpha: U \rightarrow E^n$ eğrisi varsa, $\vec{v}_p \in T_{E^n}(p)$ ye M nin p noktasındaki tanjant vektörü denir [3].

2.1.28. Tanım: $x: U \rightarrow E^3$ bir injektif lokal yüzey olsun. $U(u, v) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(u, v)$ ye birim normal vektör alanı veya yüzey normali denir [3].

2.1.29. Tanım: $x: U \rightarrow E^n$ bir lokal yüzey olsun. $E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$ şeklinde tanımlı $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını alalım. O zaman $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifadesine x in Riemann metriği yada birinci esas formu denir. E, F ve G ye ise x in birinci esas formunun katsayıları denir [3].

2.1.30. Tanım: M bir regüler yüzey ve M nin $p \in M$ noktasındaki yüzey normali U olsun. v_p ile M nin p noktasındaki tanjant vektörü gösterilmek üzere $S(v_p) = -D_v(U)$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü denir [3].

2.1.31. Tanım: $x: U \rightarrow E^n$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman

$$K = -\langle U_u, x_u \rangle = \langle U, x_{uu} \rangle,$$

$$L = -\langle U_v, x_u \rangle = \langle U, x_{uv} \rangle = \langle U, x_{vu} \rangle = -\langle U_u, x_v \rangle,$$

$$M = -\langle U_v, x_v \rangle = \langle U, x_{vv} \rangle,$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $Kdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2$ ifadesine x in ikinci esas formu denir. K, L, M fonksiyonlarına ise x in ikinci esas formunun katsayıları denir [3].

2.1.32. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir [6].

2.1.33. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğriliği denir [6].

2.1.34. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{Iz}(S(P))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğriliği denir [6].

2.1.35. Tanım: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasındaki M nin şekil operatörü matrisi S olmak üzere,

(i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için, $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M nin bir umbilik (göbek) noktası denir.

(ii) $S = 0$ şeklinde S bir sıfır dönüşümü ise P noktasına M nin bir düzlemsel (flat) noktasıdır denir [6].

2.1.36. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olmak üzere, eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir [6].

2.1.37. Tanım: Eğer bir yüzeyin parametre eğrileri eğrilik çizgisi ise, bu yüzeye asli yüzey adı verilir [3].

2.1.38. Tanım: $x: U \rightarrow E^n$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman x e karşılık gelen Γ_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2$) Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{EF_u - 2EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FF_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada E, F, G ile x in birinci esas formunun katsayıları gösterilmektedir [3].

2.1.39. Teorem: $x: U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman x in S şekil operatörü $\{x_u, x_v\}$ bazı cinsinden,

$$\begin{cases} -S(x_u) = U_u = \frac{LF - KG}{EG - F^2} x_u + \frac{KF - LE}{EG - F^2} x_v \\ -S(x_v) = U_v = \frac{MF - LG}{EG - F^2} x_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} x_v \end{cases} \quad (2.1.1)$$

şeklinde hesaplanır. Burada, sırasıyla, E, F, G ve K, L, M ile x in birinci ve ikinci esas form katsayıları gösterilmektedir [3].

2.1.40. İspat: x regüler ve $\{x_u, x_v\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ fonksiyonları için

$$\begin{cases} -S(x_u) = U_u = a_{11}x_u + a_{12}x_v \\ -S(x_v) = U_v = a_{21}x_u + a_{22}x_v \end{cases} \quad (2.1.2)$$

yazılabilir. (2.1.1) eşitliklerini elde etmek için, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ katsayı fonksiyonlarını hesaplayalım. Bunun için (2.1.2) eşitlikleri x_u ve x_v ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\begin{aligned} -K &= a_{11}E + a_{12}F \\ -L &= a_{11}F + a_{12}G = a_{21}E + a_{22}F \\ -M &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

elde edilir. (2.1.3) denklemleri matrisel gösterimle

$$-\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.1.4)$$

olur. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

olur. (2.1.5) ifadesi (2.1.4) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} KG - LF & -KF + LE \\ LG - MF & -LF + ME \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{LF - KG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{KF - LE}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{MF - LG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{LF - ME}{EG - F^2} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadeler (2.1.2) de yerine yazılırsa (2.1.1) eşitlikleri elde edilir.

2.1.41. Teorem: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. X_P ve Y_P , M nin bir P noktasında, farklı asli eğriliklerine karşılık gelen asli doğrultular belirtir iseler X_P ve Y_P ortogonaldir [6].

2.1.42. İspat: Asli doğrultular karakteristik vektörlere karşılık geldiklerinden,

$$S(X_P) = k_1 X_P \text{ ve } S(Y_P) = k_2 Y_P$$

yazılır. Burada k_1 ve k_2 ile, $P \in M$ noktasındaki asli eğrilikler gösterilmektedir. S self-adjoint olduğundan

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = \langle X_P, S(Y_P) \rangle$$

dir. Buradan

$$\langle k_1 X_P, Y_P \rangle = \langle X_P, k_2 Y_P \rangle$$

$$k_1 \langle X_P, Y_P \rangle - k_2 \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

$$(k_1 - k_2) \langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

bulunur. $k_1 \neq k_2$ olduğundan

$$\langle X_P, Y_P \rangle = 0$$

olmak zorundadır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2.1.43. Teorem: Bir $x: U \rightarrow E^3$ lokal yüzeyinin asli lokal yüzey olması için gerek ve yeter şart $F = L = 0$ dır [3].

2.1.44. İspat: Eğer x asli lokal yüzey ise, x_u ve x_v şekil operatörünün karakteristik vektörleridir. O zaman

$$S(x_u) = k_1 x_u \text{ ve } S(x_v) = k_2 x_v$$

yazılır. 2.1.3. Teorem den x_u ve x_v ortogonaldir. Dolayısıyla

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$$

olur. Diğer yandan

$$\langle S(x_u), x_v \rangle = \langle k_1 x_u, x_v \rangle = k_1 \langle x_u, x_v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle S(x_u), x_v \rangle = 0$$

oldüğundan ve Weingarten denklemlerinden

$$L = \langle -U_u, x_v \rangle = \langle S(x_u), x_v \rangle = 0$$

elde edilir. Tersine

$$F = L = 0$$

ise Weingarten denklemlerinden x_u ve x_v şekil operatörünün karakteristik vektörleri olur ki bu parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi yani yüzeyin asli yüzey olması demektir.

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

2.1.45. Lemma: Bir $M \subset E^3$ regüler yüzeyinin bir v_p tanjant vektörü asli vektör olması için gerek ve yeter şart

$$S(v_p) \times v_p = 0$$

dır. Böylece M üzerinde bir α eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart

$$S(\alpha') \times \alpha' = 0$$

dır [3].

2.1.46. İspat: Eğer $S(v_p) = k_i v_p$ ise, o zaman

$$S(v_p) \times v_p = k_i v_p \times v_p = 0$$

$$\Rightarrow S(v_p) \times v_p = 0$$

olur. Tersine $S(v_p) \times v_p = 0$ ise, $S(v_p)$ ve v_p lineer bağımlı olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

2.1.47. Teorem: $x: U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. Bir $v_p = v_1 x_u + v_2 x_v$ tanjant vektörünün asli vektör olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1 v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ K & L & M \end{pmatrix} = 0$$

dır [3].

2.1.48. İspat: 2.1.39 Teorem ve 2.1.45 Lemma dan

$$\begin{aligned} S(v_p) \times v_p &= S(v_1 x_u + v_2 x_v) \times (v_1 x_u + v_2 x_v) \\ &= (-a_{12} v_1^2 + (a_{11} - a_{22}) v_1 v_2 + a_{21} v_2^2) x_u \times x_v \\ &= \left\{ \left(-\frac{KF - LE}{EG - F^2} \right) v_1^2 + \left(\frac{LF - KG}{EG - F^2} - \frac{KF - ME}{EG - F^2} \right) v_1 v_2 + \left(\frac{MF - LG}{EG - F^2} \right) v_2^2 \right\} x_u \times x_v \\ &= \{ (LE - KF) v_1^2 + (ME - KG) v_1 v_2 + (MF - LG) v_2^2 \} \frac{x_u \times x_v}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olur ki buda v_p nin asli vektör olması için

$$(LE - KF)v_1^2 + (ME - KG)v_1v_2 + (MF - LG)v_2^2 = 0 \quad (2.1.7)$$

olması gerek ve yeterdir. Başka bir gösterimle

$$\begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ K & L & M \end{pmatrix} = 0$$

dır.

2.1.49. Teorem: $x: U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. $x(U)$ üzerinde yatan bir α eğrisi $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ şeklinde verilsin. α nın bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart; her t için

$$(LE - KF)(\alpha(t))u'(t)^2 + (ME - KG)(\alpha(t))u'(t)v'(t) + (MF - LG)(\alpha(t))v'(t)^2 = 0$$

olmasıdır [3].

2.1.50. İspat: (2.1.7) eşitliği göz önüne alınırsa teoremin ispatı açıktır.

2.2. Inversive Geometri İle İlgili Temel Kavramlar

2.2.1. Tanım: Merkezi $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noktası ve yarıçapı r olan çember, $X = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noktalarının $S_A^1(r) = \{X \mid d(A, X) = r\}$ cümlesidir [7].

2.2.2. Tanım: Bir l doğrusuna, ∞ sembolü ile gösterilen, sonsuzda ki nokta ilave edilsin. Bu taktirde, $l \cup \{\infty\}$ nokta cümlesine bir genişletilmiş doğru denir [4].

2.2.3. Tanım: Genelleştirilmiş çember diye, ya bir çembere ya da genişletilmiş doğrulara denir [4].

2.2.4. Tanım: E^2 , 2-boyutlu Öklidyen düzlemi ve ∞ sembolü ile gösterilen sonsuzdaki noktanın birleşiminden meydana gelen düzleme, genişletilmiş Öklid düzlemi adı verilir [4].

2.2.5. Tanım: O merkezli ve r yarıçaplı bir $S_O^1(r)$ çemberini ve O dan farklı bir A noktasını ele alalım. OA doğrusu üzerinde A ile aynı yönde olan ve

$$\|OA\| \cdot \|OA'\| = r^2 \quad (2.2.1)$$

denklemini sağlayan A' noktasına A noktasının $S_O^1(r)$ çemberine göre inversi denir. Burada

$S_O^1(r)$ çemberine inversiyon çemberi ve O merkezine de inversiyon merkezi adı verilir.

Ayrıca

$$\Phi: E^2 - \{O\} \rightarrow E^2 - \{O\}$$

$$A \rightarrow \Phi(A) = A'$$

şeklinde tanımlı dönüşüme de $S_O^1(r)$ çemberine göre tanımlanmış inversiyon denir [4].

2.2.6. Tanım: $\mathbb{C}$ kompleks düzlemine, ∞ sembolü ile gösterilen, sonsuzda ki noktanın ilave edilmesiyle elde edilen yeni düzleme genişletilmiş kompleks düzlem denir ve $\hat{\mathbb{C}}$ ile gösterilir [4].

2.2.7. Tanım: Eğer bir $\Phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dönüşümü inversiyonların birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu Φ dönüşümüne bir inversive dönüşüm denir [4].

2.2.8. Tanım: $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlemde, inversive dönüşümler tarafından korunan özelliklerin teorisine inversive geometri denir [4].

2.2.9. Teorem: Herhangi bir çembere göre tanımlanmış inversiyonlar self-invers dönüşümlerdir [4].

2.2.10. İspat: O merkezli ve r yarıçaplı herhangi bir $S_O^1(r)$ çemberini ve bu çemberin merkezinden farklı bir A noktasını ele alalım. Bu çemberde tanımlı inversiyonu Φ ile gösterelim. Eğer

$$\Phi(A) = A' \tag{2.2.2}$$

ise, 2.2.5 Tanım dan

$$\|OA\| \cdot \|OA'\| = r^2 \tag{2.2.3}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\Phi(A') = A \tag{2.2.4}$$

olur. (2.2.4) eşitliği (2.2.2) de göz önüne alınırsa, I birim fonksiyon olmak üzere;

$$\Phi(\Phi(A')) = A'$$

$$\Phi \circ \Phi(A') = I(A')$$

$$\Phi \circ \Phi = I$$

$$\Phi = \Phi^{-1}$$

elde edilir. Bu ise inversiyonun self-invers olduğunu gösterir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Bir doğru ya da çemberden herhangi bir A noktasını çıkardığımızda, bu doğru ya da çembere A noktasında delinmiş (punctured) denir.

2.2.11. Teorem: Orijin merkezli ve birim yarıçaplı bir çembere göre inversiyon;

$$\Phi: \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$$

$$(u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyondur [4].

2.2.12. İspat: Orijin merkezli ve birim yarıçaplı çember S_0^1 ile çemberin merkezi de O ile gösterilsin. Ayrıca A noktasını $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ve A nın S_0^1 çemberine göre tanımlı inversiyon altında ki resmini de A' olarak alalım. OA doğrusu orijinden geçtiğinden denklemi;

$$ax + by = 0 \quad (2.2.5)$$

şeklindedir. 2.2.5. Tanım dan A' noktası OA doğrusu üzerinde olur ve A' noktasının koordinatları;

$$(ku, kv) \quad (2.2.6)$$

olur, burada $k \in \mathbb{R}^+$ dır. Gerçekten (2.2.6) ifadesi (2.2.5) de yerine yazılırsa;

$$aku + akv = k(au + bv) = k(0) = 0$$

elde edilir. Diğer yandan (2.2.1) eşitliğinde A ve A' noktaları göz önüne alınırsa,

$$\|OA\| \cdot \|OA'\| = r^2$$

$$\sqrt{(u-0)^2 + (v-0)^2} \cdot \sqrt{(ku-0)^2 + (kv-0)^2} = 1$$

$$k^2(u^2 + v^2)^2 = 1$$

olur. Böylece A' noktasının koordinatları;

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$

şeklinde elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.2.13. Teorem: O merkezli bir çemberde tanımlı inversiyon;

(a) O noktasından geçmeyen doğruları, O noktasında delinmiş çemberlere dönüştürür,

(b) O noktasında delinmiş bir doğruyu yine kendisine dönüştürür [4].

2.2.14. İspat: İlk olarak orijini O noktası olan bir koordinat eksen ve inversiyonu tanımladığımız çemberi birim çember olarak alalım. Bu çemberi S_0^1 ile gösterelim.

(a) Eğer l orijinden geçmeyen bir doğru ise, bu doğrunun denklemi;

$$ax + by + c = 0 \quad (2.2.7)$$

şeklindedir, burada $c \neq 0$ dir. l doğrusu üzerinde bir $A = (u, v)$ noktasını ve bu noktanın S_0^1 birim çemberinde tanımlı inversiyon altında ki görüntüsünü $A = (u', v')$ olarak alalım.

2.2.11 Teorem den

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2}, v' = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

yazılabilir. 2.2.9. Teorem den inversiyonun self-invers olması özelliği kullanılarak,

$$u = \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2}, v = \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \quad (2.2.8)$$

olur. A noktası l doğrusu üzerinde olduğundan, (2.2.8) ifadeleri (2.2.7) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$a \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} + b \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} + c = 0$$

olur. Buradan

$$(u')^2 + (v')^2 + \frac{au' + bv'}{c} = 0 \quad (2.2.9)$$

elde edilir. Bu ise orijinden geçen bir çember denklemdir. Dolayısıyla l doğrusunun resmi O noktasında delinmiş bir çember olur.

(b) Eğer l orijinden geçen bir doğru ise, bu doğrunun denklemi;

$$ax + by = 0 \quad (2.2.10)$$

dir. Teoremin ispatının (a) şıkkın da ki yol izlenerek, l doğrusu üzerinde bir $A = (u, v)$ noktasını ve bu noktanın S_0^1 birim çemberinde tanımlı inversiyon altında ki görüntüsünü $A = (u', v')$ olarak alalım. 2.2.11. Teorem den

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2}, v' = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad (2.2.11)$$

olur. 2.2.9. Teorem den inversiyonun self-invers olması özelliği kullanılarak,

$$u = \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2}, v = \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \quad (2.2.12)$$

yazabiliriz. (2.2.12) ifadeleri (2.2.10) da yerine yazılırsa;

$$a \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} + b \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} = 0$$

olur. Buradan

$$au' + bv' = 0$$

elde edilir ki, bu da l doğrusunun resminin kendisi olması demektir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.2.15. Teorem: O merkezli bir çemberde tanımlı inversiyon:

(a) O noktasından geçmeyen çemberleri yine O noktasından geçmeyen çemberlere resmeder;

(b) O noktasında delinmiş çemberleri O noktasından geçmeyen doğrulara resmeder [4].

2.2.16. İspat: 2.2.13. Teorem in ispatında ki gibi orijini O noktası olan bir koordinat eksenini ve inversiyonu tanımladığımız çemberi S_0^1 birim çember olarak alalım. Sonra keyfi (a, b) merkezli ve r yarıçaplı bir C çemberini ele alalım. Bu çemberin denklemi;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

veya

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (2.2.13)$$

olur, burada $c = a^2 + b^2 - r^2$ dir. C çemberi üzerinde bir $A = (u, v)$ noktasını ve bu noktanın S_0^1 birim çemberinde tanımlı inversiyon altındaki görüntüsünü $A = (u', v')$ olarak alalım. 2.2.11. Teorem den

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2}, v' = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad (2.2.14)$$

olur. 2.2.9. Teorem den inversiyonun self-invers olması özelliği kullanılarak,

$$u = \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2}, v = \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \quad (2.2.15)$$

yazılabilir. $A = (u, v)$ noktası C çemberi üzerinde olduğundan, (2.2.15) ifadeleri (2.2.13) de yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} \right)^2 + \left(\frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \right)^2 - 2a \left(\frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} \right) - 2b \left(\frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(u')^2 + (v')^2} - 2a \frac{u'}{(u')^2 + (v')^2} - 2b \frac{v'}{(u')^2 + (v')^2} + c = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2au' - 2bv' + c((u')^2 + (v')^2) = 0 \quad (2.2.16)$$

elde edilir. C çemberinin orijinden geçip geçmemesine bağlı olarak, (2.2.16) ifadesi ya bir doğru ya da bir çember denklemdir.

(a) Eğer C çemberi O noktasından geçmiyorsa, $c \neq 0$ olur ve dolayısıyla (2.2.16) ifadesinin her iki tarafı c ye bölünürse;

$$(u')^2 + (v')^2 - \frac{2a}{c}u' - \frac{2b}{c}v' + \frac{1}{c} = 0 \quad (2.2.17)$$

olur ki bu bir çember denklemdir. O halde C çemberinin S_0^1 birim çemberinde tanımlı inversiyon altında ki görüntü cümlesi (2.2.17) denklemini sağlayan bir çemberdir.

(b) Eğer C çemberi O noktasından geçiyorsa, $c = 0$ olur ve (2.2.16) denklemi;

$$1 - 2au' - 2bv' = 0$$

halini alır ki, bu O dan geçmeyen bir doğru denklemdir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

2.2.17. Teorem: Inverse dönüşümler cümlesi fonksiyonların birleşimi işlemine göre bir grup oluşturur [4].

2.2.18. İspat: Kapalılık: Γ ve Ψ inverse dönüşümler olsun. O zaman 2.2.7. Tanım gereğince

$$\Gamma = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_k$$

ve

$$\Psi = \phi_{k+1} \circ \phi_{k+2} \circ \dots \circ \phi_n$$

yazılabilir. Burada $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ile inversiyonlar gösterilmektedir. O halde

$$\Gamma \circ \Psi = (\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_k) \circ (\phi_{k+1} \circ \phi_{k+2} \circ \dots \circ \phi_n)$$

ifadesi de inversiyonların birleşimidir ve böylece $\Gamma \circ \Psi$ de bir inverse dönüşümdür.

Birleşim: Inverse dönüşümler fonksiyonların birleşimi şeklinde tanımlandığından birleşimlidir.

Birim: Fonksiyonların birleşimi için birim, $\phi(z) = z$ ($z \in \hat{\mathbb{C}}$) dönüşümü ile verilir. Bu bir inverse dönüşümdür, gerçekten $\phi = \phi_1 \circ \phi_1$ şeklinde inversiyonun birleşimi olarak yazılabilir. Burada ϕ_1 birim çembere göre tanımlı bir inversiyondur.

Invers: Eğer ϕ bir inverse dönüşüm ise, o zaman 2.2.7. Tanım gereğince;

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_n$$

yazılabilir, burada $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ile inversiyonlar gösterilmektedir. O halde Φ nin tersi

$$\Phi^{-1} = \Phi_n^{-1} \circ \Phi_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \Phi_1^{-1} \quad (2.2.18)$$

olur. 2.2.9. Teorem gereğince, inversiyonlar self-invers dönüşümlerdir, yani;

$$\Phi_n^{-1} \circ \Phi_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \Phi_1^{-1} = \Phi_n \circ \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_1 \quad (2.2.19)$$

olur. (2.2.19) ifadesi (2.2.18) de göz önüne alınırsa;

$$\Phi^{-1} = \Phi_n \circ \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_1$$

elde edilir ki Φ^{-1} ters fonksiyonu inversiyonların birleşimi şeklinde yazılabilir. Bu ise Φ^{-1} in bir inverse dönüşüm olduğunu gösterir.

3. İkinci Bölüm

3.1. İnversiyon Kavramı

3.1.1. Tanım: E^n n-boyutlu Öklid uzayında, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in E^n$ bir nokta ve $r \in \mathbb{R}$ belli bir sayı olsun. Buna göre, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olmak üzere

$$\Phi(P) = C + \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C) \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlı $\Phi: E^n - \{C\} \rightarrow E^n - \{C\}$ dönüşümüne E^n de bir inversiyon adı verilir. Burada $C \in E^n$ noktasına inversiyon merkezi ve $r \in \mathbb{R}$ ye ise inversiyon yarıçapı denir. Bundan sonra $C \in E^n$ merkezli ve $r \in \mathbb{R}$ yarıçaplı inversiyon $\Phi[C, r]$ ile gösterilecektir.

Özel olarak $C = (0, 0, \dots, 0)$ alınırsa,

$$\Phi(P) = \frac{r^2}{\|P\|^2} (P)$$

olur. Eğer $\lambda = \frac{r^2}{\|P - C\|^2}$ ise $\Phi(P)$ noktası, $1 \leq i \leq n$, için

$$\Phi(P) = (c_i) + \lambda(p_i - c_i) = (c_i(1 - \lambda) + \lambda(p_i))$$

koordinatına sahip olur [3].

3.1.2. Lemma: Bir $\Phi: E^n - \{C\} \rightarrow E^n - \{C\}$ dönüşümünün $C \in E^n$ merkezli ve $r \in \mathbb{R}$ yarıçaplı bir inversiyon olması için gerek ve yeter şart

$$\|\Phi(P) - C\| \|P - C\| = r^2 \text{ ve } \Phi(P) - C = \lambda(P - C) \quad (3.1.2)$$

olacak şekilde bir λ sayısının var olmasıdır [3].

3.1.3. İspat: Φ dönüşümü, merkezi $C \in E^n$ ve yarıçapı $r \in \mathbb{R}$ olan bir inversiyon olsun. Buna göre 3.1.1 Tanım dan

$$\Phi(P) = C + \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C)$$

dır. Buradan

$$\|\Phi(P) - C\| = \left\| C + \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C) - C \right\| = \frac{r^2}{\|P - C\|}$$

olur ve dolayısıyla

$$\Phi(P) - C \|P - C\| = r^2 \frac{1}{\|P - C\|} \|P - C\| = r^2$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Phi(P) - C = \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C)$$

ve $\lambda = \frac{r^2}{\|P - C\|^2} > 0$ olduğundan

$$\Phi(P) - C = \lambda(P - C)$$

bulunur. Böylece yeter şartın ispatı tamamlanır.

Kabul edelim ki,

$$\|\Phi(P) - C\| \|P - C\| = r^2 \quad (3.1.3)$$

ve

$$\Phi(P) - C = \lambda(P - C) \quad (3.1.4)$$

olacak şekilde bir λ sayısı var olsun. Tüm P ve $\Phi(P)$ noktaları C den farklı olmak üzere (3.1.4) denkleminde

$$\Phi(P) = C + \lambda(P - C) \quad (3.1.5)$$

yazılır. (3.1.5) ifadesi (3.1.3) de göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \|\lambda(P - C)\| \|P - C\| &= r^2 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{r^2}{\|P - C\|^2} \end{aligned}$$

olur. Son ifade (3.1.5) de ele alınırsa,

$$\Phi(P) = C + \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C)$$

elde edilir. Bu ise $\Phi(P)$ nin $C \in E^n$ merkezli ve $r \in \mathbb{R}$ yarıçaplı bir inversiyon olması demektir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.1.4. Tanım:

$$\alpha: (a, b) \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

bir eğri ve $\Phi[C, r]$ de C merkezli ve r yarıçaplı bir inversiyon olsun. Buna göre

$$(\Phi \circ \alpha)(t) = \Phi(\alpha(t)) = C + \frac{r^2}{\|\alpha(t) - C\|^2} (\alpha(t) - C) \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlı $(\Phi \circ \alpha)(t)$ ye $\alpha(t)$ eğrisinin inversiyonu veya inverse eğrisi denir [3].

3.1.5. Teorem: İnverson dönüşümü altında açılar invaryant kalır [3].

3.1.6. İspat: $\alpha: (a, b) \rightarrow E^n$ ve $\beta: (c, d) \rightarrow E^n$ eğrileri

$$\alpha(t_0) = \beta(s_0) = p$$

olacak şekilde seçilsin. $v_p, w_p \in T_{E^n}(p)$ tanjant vektörlerini öyle seçelim ki;

$$\alpha'(t_0) = v_p \text{ ve } \beta'(s_0) = w_p$$

olsun. Buna göre

$$\frac{\langle \Phi_*(v_p), \Phi_*(w_p) \rangle}{\|\Phi_*(v_p)\| \|\Phi_*(w_p)\|} = \frac{\langle v_p, w_p \rangle}{\|v_p\| \|w_p\|}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. 3.1.4. Tanım dan

$$(\Phi \circ \alpha)(t_0) = C + \frac{r^2}{\|\alpha(t_0) - C\|^2} (\alpha(t_0) - C)$$

eşitliğinin her iki yanının t ye göre türevi alınır;

$$(\Phi \circ \alpha)'(t_0) = \frac{r^2}{\|\alpha(t_0) - C\|^2} \alpha'(t_0) - \frac{2r^2 \langle \alpha(t_0) - C, \alpha'(t_0) \rangle}{\|\alpha(t_0) - C\|^4} (\alpha(t_0) - C) \quad (3.1.7)$$

olur. Daha sonra (3.1.7) eşitliğinin her iki yanının normunun karesi alınır,

$$\begin{aligned} \|(\Phi \circ \alpha)'(t_0)\|^2 &= \frac{r^4}{\|\alpha(t_0) - C\|^4} \|\alpha'(t_0)\|^2 + \frac{4r^4 \langle \alpha(t_0) - C, \alpha'(t_0) \rangle^2}{\|\alpha(t_0) - C\|^8} \\ &\quad - \frac{4r^4 \langle \alpha(t_0) - C, \alpha'(t_0) \rangle^2}{\|\alpha(t_0) - C\|^6} \\ \Rightarrow \|(\Phi \circ \alpha)'(t_0)\|^2 &= \frac{r^4}{\|\alpha(t_0) - C\|^4} \|\alpha'(t_0)\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\lambda(p) = \frac{r^2}{\|p-C\|^2}$ denirse,

$$\begin{aligned} \|(\Phi \circ \alpha)'(t_0)\| &= \lambda(p) \|\alpha'(t_0)\| \\ \Rightarrow \|\Phi_*(v_p)\| &= \lambda(p) \|v_p\| \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

olur. Benzer şekilde $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = p$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|(\Phi \circ \beta)'(s_0)\| &= \lambda(p) \|\beta'(s_0)\| \\ \Rightarrow \|\Phi_*(w_p)\| &= \lambda(p) \|w_p\| \Rightarrow \|\Phi_*(w_p)\| = \lambda(p) \|w_p\| \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
& \langle (\Phi \circ \alpha)'(t_0), (\Phi \circ \beta)'(s_0) \rangle \\
&= \left\langle \frac{r^2}{\|\alpha(s_0) - C\|^2} \beta'(s_0) - \frac{2r^2 \langle \beta(s_0) - C, \beta'(s_0) \rangle (\beta(s_0) - C)}{\|\alpha(s_0) - C\|^4}, \right. \\
& \quad \left. \frac{r^2}{\|\beta(s_0) - C\|^2} \beta'(s_0) - \frac{2r^2 \langle \beta(s_0) - C, \beta'(s_0) \rangle}{\|\beta(s_0) - C\|^4} (\beta(s_0) - C) \right\rangle \\
&= \frac{r^4 \langle \alpha'(t_0), \beta'(s_0) \rangle}{\|\alpha(t_0) - C\|^2 \|\beta(s_0) - C\|^4} - \frac{4r^4 \langle \alpha(t_0) - C, \beta'(s_0) \rangle \langle \alpha(t_0) - C, \alpha'(t_0) \rangle}{\|\alpha(t_0) - C\|^4 \|\beta(s_0) - C\|^4} \\
& \quad + \frac{4r^4 \langle \beta(s_0) - C, \beta'(s_0) \rangle \langle \alpha(t_0) - C, \alpha'(t_0) \rangle \langle (\alpha(t_0) - C), (\beta(s_0) - C) \rangle}{\|\alpha(t_0) - C\|^4 \|\beta(s_0) - C\|^4}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = p$ ve $\alpha'(t_0) = v_p, \beta'(s_0) = w_p$ ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$\langle (\Phi \circ \alpha)'(t_0), (\Phi \circ \beta)'(s_0) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_p, w_p \rangle$$

veya

$$\langle \Phi_*(v_p), \Phi_*(w_p) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_p, w_p \rangle \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.8), (3.1.9) ve (3.1.10) ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$\frac{\langle \Phi_*(v_p), \Phi_*(w_p) \rangle}{\|\Phi_*(v_p)\| \|\Phi_*(w_p)\|} = \frac{\lambda^2(p) \langle v_p, w_p \rangle}{\lambda(p) \|v_p\| \lambda(p) \|w_p\|} = \frac{\langle v_p, w_p \rangle}{\|v_p\| \|w_p\|}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2. Yüzey İnversonları I

3.2.1 Tanım: $x: U \rightarrow E^n$ bir lokal yüzey olsun.

$$y(u, v) = \Phi[C, r] \circ x(u, v) = C + \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|^2} (x(u, v) - C) \quad (3.2.1)$$

ile tanımlanan $y: U \rightarrow E^n$ ye x in C merkezli ve r yarıçaplı inversive lokal yüzeyi denir [3].

3.2.2. Lemma: E^n de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. Buna göre

$$\begin{cases} y_u = \lambda \left(x_u - \frac{2 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \\ y_v = \lambda \left(x_v - \frac{2 \langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

dır. Burada $\lambda(u, v) = \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|^2}$ şeklinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur [2].

3.2.3. İspat: (3.2.1) eşitliğinin her iki yanının u ya göre kısmi türevi alınır;

$$\begin{aligned} y_u &= \frac{r^2 x_u \|x - C\|^2 - r^2 (x - C) (2 \langle x_u, x - C \rangle)}{\|x - C\|^4} \\ &= \frac{r^2}{\|x - C\|^2} x_u - \frac{2r^2 \langle x_u, x - C \rangle (x - C)}{\|x - C\|^4} \\ &= \lambda \left(x_u - \frac{2 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $y_v(u, v)$ de hesaplanır.

3.2.4. Teorem: E^n de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü, yani inverse yüzeyi y olsun. Buna göre $\lambda(u, v) = \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|^2}$ olmak üzere

$$\begin{cases} E_y = \lambda^2 E_x, \\ F_y = \lambda^2 F_x, \\ G_y = \lambda^2 G_x. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Burada E_x, F_x, G_x ve E_y, F_y, G_y ile, sırasıyla, x ve y nin birinci esas form katsayıları gösterilmektedir [2].

3.2.5. İspat: y nin birinci esas form katsayıları:

$$E_y = \langle y_u, y_u \rangle,$$

$$F_y = \langle y_u, y_v \rangle,$$

$$G_y = \langle y_v, y_v \rangle$$

şeklindedir. (3.2.2) eşitlikleri burada göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} E_y &= \langle y_u, y_u \rangle = \left\langle \lambda \left(x_u - \frac{2 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right), \lambda \left(x_u - \frac{2 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \right\rangle \\ &= \lambda^2 \langle x_u, x_u \rangle - \frac{4r^2 \langle x_u, x - C \rangle^2}{\|x - C\|^6} + \frac{4r^2 \langle x_u, x - C \rangle^2 \|x - C\|^2}{\|x - C\|^8} \\ &= \lambda^2 \langle x_u, x_u \rangle \\ &\Rightarrow E_y = \lambda^2 E_x \end{aligned}$$

olur. Sonra,

$$\begin{aligned}
F_y &= \langle y_u, y_v \rangle = \left\langle \lambda \left(x_u - \frac{2\langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right), \lambda \left(x_v - \frac{2\langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \right\rangle \\
&= \lambda^2 \langle x_u, x_v \rangle - \frac{4r^2 \langle x_u, x - C \rangle \langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^6} + \frac{4r^2 \langle x_v, x - C \rangle \langle x_u, x - C \rangle \|x - C\|^2}{\|x - C\|^8} \\
&= \lambda^2 \langle x_u, x_v \rangle \\
&\Rightarrow F_y = \lambda^2 F_x
\end{aligned}$$

olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
G_y &= \langle y_v, y_v \rangle = \left\langle \lambda \left(x_v - \frac{2\langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right), \lambda \left(x_v - \frac{2\langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \right\rangle \\
&= \lambda^2 \langle x_v, x_v \rangle - \frac{4r^2 \langle x_v, x - C \rangle^2}{\|x - C\|^6} + \frac{4r^2 \langle x_v, x - C \rangle^2 \|x - C\|^2}{\|x - C\|^8} \\
&= \lambda^2 \langle x_v, x_v \rangle \\
&\Rightarrow G_y = \lambda^2 G_x
\end{aligned}$$

elde edilir. Buda teoremin ispatını tamamlar.

3.2.6. Lemma: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. Buna göre

$$y_u \times y_v = \lambda^2 \left(-x_u \times x_v + \frac{2\langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \right) \quad (3.2.4)$$

olur. Burada $\lambda(u, v) = \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|^2}$ şeklinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur [3].

3.2.7. İspat: (3.2.2) ifadelerinden ve $(x - C) \times (x - C) = 0$ olmasından,

$$\begin{aligned}
y_u \times y_v &= \left\{ \lambda \left(x_u - \frac{2\langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \right\} \times \left\{ \lambda \left(x_v - \frac{2\langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \right\} \\
&= \lambda^2 x_u \times x_v - \frac{2r^4 \langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^6} (x_u \times x - C) - \frac{2r^4 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^6} (x - C \times x_v) \\
&\quad + \frac{4r^4 \langle x_v, x - C \rangle \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^6} (x - C \times x - C) \\
y_u \times y_v &= \lambda^2 x_u \times x_v - \frac{2r^4}{\|x - C\|^6} \{ \langle x_v, x - C \rangle x_u - \langle x_u, x - C \rangle x_v \} \times (x - C) \quad (3.2.5)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$$

olduğu bilinmektedir. O halde bu eşitlik ardışık olarak iki kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& -\langle x_v, x - C \rangle x_u - \langle x_u, x - C \rangle x_v \times (x - C) = -(x_v \times x_u \times (x - C)) \times (x - C) \\
& = (x - C) \times (x - C) \times (x_u \times x_v) \\
& = \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C) - \langle (x - C), (x - C) \rangle (x_u \times x_v) \\
& = \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C) - \|x - C\|^2 (x_u \times x_v)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.2.5) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
y_u \times y_v &= \lambda(x)^2 x_u \times x_v - \frac{2r^4}{\|x - C\|^6} \{ \langle x_v, x - C \rangle x_u - \langle x_u, x - C \rangle x_v \} \times (x - C) \\
&= \lambda(x)^2 x_u \times x_v - \frac{2r^4}{\|x - C\|^6} \{ \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C) - \|x - C\|^2 (x_u \times x_v) \} \\
&\Rightarrow y_u \times y_v = \lambda^2 \left(-x_u \times x_v + \frac{2 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.8. Sonuç: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. Buna göre

$$U_y = -U_x + \frac{2 \langle U_x, x - C \rangle (x - C)}{\|x(u, v) - C\|^2} \quad (3.2.6)$$

dir. Burada U_y ve U_x ile, sırasıyla, x ve y nin birim normal vektör alanları gösterilmektedir [3].

3.2.9. İspat: (3.2.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\|y_u \times y_v\|^2 &= \left\| \lambda^2 \left(-x_u \times x_v + \frac{2 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \right) \right\|^2 \\
&= \lambda^4 \|x_u \times x_v\|^2 + \frac{4r^8 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle^2 \|x - C\|^2}{\|x - C\|^{12}} - \frac{4r^8 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle^2}{\|x - C\|^{10}} \\
&= \lambda^4 \|x_u \times x_v\|^2 \\
&\Rightarrow \|y_u \times y_v\| = \lambda^2 \|x_u \times x_v\|
\end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
U_y &= \frac{y_u \times y_v}{\|y_u \times y_v\|} = \frac{1}{\|y_u \times y_v\|} \lambda^2 \left(-x_u \times x_v + \frac{2 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \|x_u \times x_v\|} \lambda^2 \left(-x_u \times x_v + \frac{2 \langle (x - C), (x_u \times x_v) \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} + \frac{2 \langle (x - C), \frac{(x_u \times x_v)}{\|x_u \times x_v\|} \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2} \\
&\Rightarrow U_y = -U_x + \frac{2 \langle U_x, x(u, v) - C \rangle x(u, v) - C}{\|x(u, v) - C\|^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.2.10. Teorem: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. O halde

$$\begin{cases} K_y = -\lambda K_x - 2\delta E_x, \\ L_y = -\lambda L_x - 2\delta F_x, \\ M_y = -\lambda M_x - 2\delta G_x. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Burada, $\lambda(u, v) = \frac{r^2}{\|x - C\|^2}$ ve $\delta(u, v) = \frac{r^2 \langle U_x, x - C \rangle}{\|x - C\|^4}$ dir. Ayrıca $E_x, F_x, G_x, K_x, L_x, M_x$ ile x in birinci ve ikinci esas form katsayıları, K_y, L_y, M_y ile de y nin ikinci esas form katsayıları gösterilmektedir [3].

3.2.11. İspat:

$$\begin{aligned}
y_u &= \lambda \left(x_u - \frac{2 \langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right) \\
y_v &= \lambda \left(x_v - \frac{2 \langle x_v, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanan (3.2.2) eşitliklerini ele alalım. Bu eşitliklerden ilkinin her iki yanının u ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
y_{uu} &= \frac{r^2 x_{uu} \|x - C\|^2 - 2 \langle x_u, x - C \rangle r^2 x_u}{\|x - C\|^4} - \frac{2r^2 \{ \langle x_{uu}, x - C \rangle + \langle x_u, x_u \rangle \} (x - C)}{\|x - C\|^4} \\
&\quad - \frac{\langle x_u, x - C \rangle}{\|x - C\|^4} x_u + \frac{8r^2 \langle x_u, x - C \rangle^2 \|x - C\|^2 (x - C)}{\|x - C\|^8} \\
\Rightarrow y_{uu} &= \frac{r^2 x_{uu}}{\|x - C\|^2} - \frac{4r^2 \langle x_u, x - C \rangle x_u}{\|x - C\|^4} - \frac{2r^2 \{ \langle x_{uu}, x - C \rangle + \langle x_u, x_u \rangle \} (x - C)}{\|x - C\|^4} \\
&\quad + \frac{8r^2 \langle x_u, x - C \rangle^2 (x - C)}{\|x - C\|^6}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$K_y = \langle U_y, y_{uu} \rangle$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
K_y &= \langle -U_x + \frac{2\langle U_x, x-C \rangle(x-C)}{\|x-C\|^2}, \frac{r^2 x_{uu}}{\|x-C\|^2} - \frac{4r^2 x_u}{\|x-C\|^4} \\
&\quad - \frac{2r^2\{\langle x_{uu}, x-C \rangle + \langle x_u, x_u \rangle\}}{\|x-C\|^4} (x-C) + \frac{8r^2\langle x_u, x-C \rangle^2 \|x-C\|^3 (x-C)}{\|x-C\|^8} \rangle \\
&= -\frac{r^2}{\|x-C\|^2} \langle x_{uu}, U_x \rangle + \frac{4r^2 \langle x_u, x-C \rangle \langle U_x, x_u \rangle}{\|x-C\|^4} + \frac{2r^2 \langle x_{uu}, x-C \rangle \langle U_x, x-C \rangle}{\|x-C\|^4} \\
&\quad + \frac{2r^2 \|x_u\|^2}{\|x-C\|^4} \langle U_x, x-C \rangle - \frac{8r^2 \langle x_u, x-C \rangle^2}{\|x-C\|^6} \langle U_x, x-C \rangle + \frac{2r^2 \langle U_x, x-C \rangle \langle x-C, x_{uu} \rangle}{\|x-C\|^4} \\
&\quad - \frac{8r^2 \langle x_u, x-C \rangle^2}{\|x-C\|^6} \langle U_x, x-C \rangle - \frac{4r^2 \langle U_x, x-C \rangle \langle x-C, x_{uu} \rangle \|x-C\|^2}{\|x-C\|^6} \\
&\quad - \frac{4r^2 \langle U_x, x-C \rangle \|x_u\|^2}{\|x-C\|^4} + \frac{16r^2 \langle x_u, x-C \rangle^2 \langle U_x, x-C \rangle}{\|x-C\|^6} \\
&\Rightarrow K_y = -\frac{r^2}{\|x-C\|^2} \langle x_{uu}, U_x \rangle - \frac{2r^2 \|x_u\|^2}{\|x-C\|^4} \langle U_x, x-C \rangle
\end{aligned}$$

olur. Eğer $K_x = \langle x_{uu}, U_x \rangle$, $E_x = \|x_u\|^2$, $\lambda = \frac{r^2}{\|x-C\|^2}$ ve $\delta = r^2 \frac{\langle U_x, x-C \rangle}{\|x-C\|^4}$

denirse,

$$K_y = -\lambda K_x - 2\delta E_x$$

elde edilir. Benzer şekilde diğerleri de hesaplanır.

3.2.12. Sonuç: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
L_y E_y - K_y F_y &= -\lambda^3 \{L_x E_x - K_x F_x\}, \\
M_y E_y - K_y G_y &= -\lambda^3 \{M_x E_x - K_x G_x\}, \\
M_y F_y - L_y G_y &= -\lambda^3 \{M_x F_x - L_x G_x\},
\end{aligned}$$

dir [3].

3.2.13. İspat: (3.2.3) ve (3.2.7) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}
L_y E_y - K_y F_y &= (-\lambda L_x - 2\delta E_x)(\lambda^2 E_x) - (-\lambda K_x - 2\delta E_x)(\lambda^2 F_x) \\
&= -\lambda^3 L_x E_x - 2\delta \lambda^2 E_x F_x + \lambda^3 K_x F_x + 2\delta \lambda^2 E_x F_x \\
&\Rightarrow L_y E_y - K_y F_y = -\lambda^3 \{L_x E_x - K_x F_x\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler benzer olarak gösterilebilir.

3.2.14. Teorem: Bir M yüzeyini $\Phi(M)$ yüzeyine resmeden inversiyon $\Phi: E^3 - \{C\} \rightarrow E^3 - \{C\}$ olsun. O zaman Φ, M üzerindeki eğrilik çizgilerini $\Phi(M)$ üzerindeki eğrilik çizgilerine dönüştürür [3].

3.2.15. İspat: M üzerinde $\alpha: (a, b) \rightarrow M$ bir eğrilik çizgisi ve M nin parametrik ifadesi $x: U \subset E^2 \rightarrow M \subset E^3$ olsun. $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ yazılabilir. Teorem 2.1.49. gereğince α bir eğrilik çizgisi olduğundan,

$$(LE - KF)(\alpha(t))u'(t)^2 + (ME - KG)(\alpha(t))u'(t)v'(t) + (MF - LG)(\alpha(t))v'(t)^2 = 0$$

yazılır. Burada E, F, G ve K, L, M ile M yüzeyinin birinci ve ikinci esas form katsayıları gösterilmektedir. Ayrıca $M' = \Phi(M)$ ve M' nin parametrik ifadesi $y: (u, v) \subset E^2 \rightarrow y(u, v) \subset E^3$ olsun. $(\Phi \circ \alpha)(t) = y(u(t), v(t))$ ve M' nin birinci ve ikinci esas form katsayıları E', F', G' ve K', L', M' olmak üzere,

$$(L'E' - K'F')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)^2 + (M'E' - K'G')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)v'(t) + (M'F' - L'G')((\Phi \circ \alpha)(t))v'(t)^2 \quad (3.2.8)$$

ifadesini ele alalım. 3.2.4. Teorem ve 3.2.12. Sonuç gereğince

$$\begin{aligned} (L'E' - K'F')(\Phi \circ \alpha)(t) &= -\lambda^3(LE - KF)(\alpha(t)) \\ (M'E' - K'G')(\Phi \circ \alpha)(t) &= -\lambda^3(ME - KG)(\alpha(t)) \\ (M'F' - L'G')(\Phi \circ \alpha)(t) &= -\lambda^3(MF - LG)(\alpha(t)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler (3.2.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &(L'E' - K'F')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)^2 + (M'E' - K'G')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)v'(t) \\ &+ (M'F' - L'G')((\Phi \circ \alpha)(t))v'(t)^2 \\ &= -\lambda^3(LE - KF)(\alpha(t))u'(t)^2 - \lambda^3(x)(ME - KG)(\alpha(t))u'(t)v'(t) \\ &- \lambda^3(MF - LG)(\alpha(t))v'(t)^2 \\ &= -\lambda^3\{(LE - KF)(\alpha(t))u'(t)^2 + (ME - KG)(\alpha(t))u'(t)v'(t) \\ &+ (MF - LG)(\alpha(t))v'(t)^2\} \\ &= -\lambda^3\{0\} \\ &\Rightarrow (L'E' - K'F')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)^2 + (M'E' - K'G')((\Phi \circ \alpha)(t))u'(t)v'(t) \\ &+ (M'F' - L'G')((\Phi \circ \alpha)(t))v'(t)^2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\Phi \circ \alpha)$ eğrisi $\Phi(M)$ üzerinde bir eğrilik çizgisi olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.2.16. Sonuç: Asli yüzeylerin inverse yüzeyleri de asli yüzeylerdir [3].

3.2.17. İspat: M ve M' yüzeyleri $x: (u, v) \subset E^2 \rightarrow x(u, v) \subset E^3$ ve $y: (u, v) \subset E^2 \rightarrow y(u, v) \subset E^3$ parametrik denklemlere sahip olsunlar. Eğer M asli yüzey ise 2.1.43. Teorem den $F = L = 0$ dır. Buna göre, (3.2.3) ve (3.2.7) eşitliklerinden,

$$F' = \lambda^2 F \\ \Rightarrow F' = 0$$

ve

$$L' = -\lambda L - 2\delta F \\ = 0 - 0 \\ \Rightarrow L' = 0$$

elde edilir. O halde M' yüzeyi de 2.1.43. Teorem gereğince bir asli yüzeydir.

3.2.18. Teorem: E^3 de x bir asli lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. Buna göre, bu yüzeylerin asli eğrilikleri arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur: $\lambda(u, v) = \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|^2}$ ve $\eta(u, v) = \langle U_x(u, v), x(u, v) - C \rangle$ şeklindeki reel değerli fonsiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} k_1^* = -\lambda^{-1}k_1 - \frac{2}{r^2}\eta, \\ k_2^* = -\lambda^{-1}k_2 - \frac{2}{r^2}\eta. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

dir. Burada k_1, k_2 ile x in, k_1^*, k_2^* ile de y nin asli eğrilikleri gösterilmektedir [3].

3.2.19. İspat: x bir asli lokal yüzey ise 2.1.43. Teorem gereğince $F = L = 0$ dır. Dolayısıyla 2.1.39. Teorem den

$$k_1 = \frac{K}{E} \text{ ve } k_2 = \frac{M}{G}$$

olduğu açıktır. 3.2.16. Sonuç gereğince y yüzeyinin de asli yüzey olduğu söylenebilir.

O halde

$$k_1^* = \frac{K'}{E'} \text{ ve } k_2^* = \frac{M'}{G'}$$

olur. Burada K', E', M', G' ile y yüzeyinin birinci ve ikinci esas form katsayıları gösterilmektedir. (3.2.7) eşitliklerinden, $\delta = (r^2 \langle U_x, x - C \rangle) / \|x - C\|^4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
k_1^* &= \frac{-\lambda K - 2\delta E}{\lambda^2 E} \\
&= -\lambda^{-1} \frac{K}{E} - \frac{2\delta}{\lambda^2} \\
\Rightarrow k_1^* &= -\lambda^{-1} k_1 - \frac{2}{r^2} \eta
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (3.2.7) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
k_2^* &= \frac{-\lambda M - 2\delta G}{\lambda^2 G} \\
&= -\lambda^{-1} \frac{M}{G} - \frac{2}{r^2} \eta \\
\Rightarrow k_2^* &= -\lambda^{-1} k_2 - \frac{2}{r^2} \eta
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.20. Teorem: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. O zaman

$$K^* = \frac{1}{\lambda^2} K + \frac{4}{r^2} \lambda^{-1} \eta H + \frac{4}{r^4} \eta^2 \quad (3.2.10)$$

dır. Burada K^* ve K , sırasıyla, y ve x in Gauss eğrilikleri, H^* ve H , sırasıyla, y ve x in ortalama eğrilikleridir [3].

3.2.21. İspat: k_1^* ve k_2^* y nin asli eğrilikleri olmak üzere Gauss eğriliğinin tanımından,

$$K^* = k_1^* k_2^*$$

yazılabilir. Burada, (3.2.9) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
K^* &= \left(-\lambda^{-1} k_1 - \frac{2}{r^2} \eta \right) \left(-\lambda^{-1} k_2 - \frac{2}{r^2} \eta \right) \\
&= \lambda^{-2} k_1 k_2 + \lambda^{-1} k_1 \frac{2}{r^2} \eta + \frac{2}{r^2} \eta \lambda^{-1} k_2 + \frac{4}{r^4} \eta^2 \\
\Rightarrow K^* &= \lambda^{-2} K + \frac{4}{r^2} \lambda^{-1} \eta H + \frac{4}{r^4} \eta^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.22. Teorem: E^3 de x bir lokal yüzey ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü y olsun. O zaman

$$H^* = -\frac{1}{\lambda(x)} H - \frac{2}{r^2} \eta(x) \quad (3.2.11)$$

dır. Burada K^* ve K , sırasıyla, y ve x in Gauss eğrilikleri, H^* ve H , sırasıyla, y ve x in ortalama eğrilikleridir [3].

3.2.23. İspat: k_1^* ve k_2^* y nin asli eğrilikleri olmak üzere ortalama eğrilik tanımından,

$$H^* = \frac{1}{2} (k_1^* + k_2^*) \quad (3.2.12)$$

yazılabilir. (3.2.12) ifadesinde (3.2.9) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2} \left(\left(-\lambda^{-1} k_1 - \frac{2}{r^2} \eta \right) + \left(-\lambda^{-1} k_2 - \frac{2}{r^2} \eta \right) \right) \\ &= -\lambda^{-1} \frac{1}{2} (k_1 + k_2) - \frac{2}{r^2} \eta \\ &= -\lambda^{-1} H - \frac{2}{r^2} \eta \end{aligned}$$

bulunur. Bununla teoremin ispatı tamamlanır.

Buradan aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir.

3.2.24. Sonuç: x minimal bir lokal yüzey ve x in r yarıçaplı ve C merkezli inversive yüzeyi $y = \Phi(x)$ olsun. K^* ve K , sırasıyla, y ve x in Gauss eğrilikleri, H^* ve H , sırasıyla, y ve x in ortalama eğrilikleri olmak üzere,

(i)

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{\lambda(x)^2} K + \frac{4}{r^4} \eta(x)^2 \\ H^* &= -\frac{2}{r^2} \eta(x). \end{aligned}$$

dir.

(ii) $\Phi(x)$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\eta(x) = \langle U_x, x(u, v) - C \rangle = 0$$

olmasıdır.

3.2.25. İspat: (i) Eğer x minimal ise, $H = 0$ dır. Böylece (3.2.10) ve (3.2.11) den

$$K^* = \frac{1}{\lambda(x)^2} K + \frac{4}{r^4} \eta(x)^2$$

$$H^* = -\frac{2}{r^2}\eta(x).$$

olduğu açıktır.

(ii) ($\Rightarrow$) x minimal iken $\Phi(x)$ de minimal olsun. Bu taktirde (3.2.11) den

$$0 = 0 - \frac{2}{r^2}\eta(x)$$

$$\Rightarrow \eta(x) = 0$$

yazılır. $\eta(x) = \langle U_x, x - C \rangle$ olduğundan,

$$\langle U_x, x(u, v) - C \rangle = 0$$

olur.

($\Leftarrow$) Tersine x minimal iken $\langle U_x, x(u, v) - C \rangle = 0$ olsun. Buna göre, $H = 0$ ve $\eta(x) = 0$

olur. O halde (3.2.11) den

$$H^* = 0$$

elde edilir.

4. Üçüncü Bölüm

4.1. Yüzey İncersiyonları II

4.1.1. Teorem: E^3 de bir yüzey M ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ incersiyonu altındaki görüntüsü M' olsun. Buna göre, M ve M' yüzeylerinin parametrik ifadeleri, sırasıyla, $x: (u, v) \subset E^2 \rightarrow x(u, v) \subset E^3$ ve $y: (u, v) \subset E^2 \rightarrow y(u, v) \subset E^3$ olmak üzere;

$$\begin{cases} V_1' = V_1 - \psi_1(x - C) \\ V_2' = V_2 - \psi_2(x - C) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

olur. Burada $\{V_1', V_2'\}$ ve $\{V_1, V_2\}$, sırasıyla, $\chi(M')$ ve $\chi(M)$ vektör alanları uzayının bazıları, ayrıca $\psi_1 = \frac{2\langle V_1, x-C \rangle}{\|x-C\|^2}$ ve $\psi_2 = \frac{2\langle V_2, x-C \rangle}{\|x-C\|^2}$ dir.

4.1.2. İspat: (3.2.2) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} \|y_u\|^2 &= \left\langle \lambda \left(x_u - \frac{2\langle x_u, x-C \rangle}{\|x-C\|^2} (x-C) \right), \lambda \left(x_u - \frac{2\langle x_u, x-C \rangle}{\|x-C\|^2} (x-C) \right) \right\rangle \\ &= \lambda^2 \|x_u\|^2 - \frac{4r^2 \langle x_u, x-C \rangle^2}{\|x-C\|^6} + \frac{4r^2 \langle x_u, x-C \rangle^2 \|x-C\|^2}{\|x-C\|^8} \\ &= \lambda^2(x) \|x_u\|^2 \\ &\Rightarrow \|y_u\| = \lambda \|x_u\| \end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde $\|y_v\| = \lambda \|x_v\|$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} V_1' &= \frac{y_u}{\|y_u\|} = \frac{1}{\lambda \|x_u\|} \lambda \left(x_u - \frac{2\langle x_u, x-C \rangle (x-C)}{\|x-C\|^2} \right) \\ &= \frac{x_u}{\|x_u\|} - \frac{2\langle \frac{x_u}{\|x_u\|}, x-C \rangle (x-C)}{\|x-C\|^2} \\ &\Rightarrow V_1' = V_1 - \frac{2\langle V_1, x-C \rangle}{\|x-C\|^2} (x-C) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V_2' &= \frac{y_v}{\|y_v\|} = \frac{1}{\lambda \|x_v\|} \lambda \left(x_v - \frac{2\langle x_v, x-C \rangle (x-C)}{\|x-C\|^2} \right) \\ &= \frac{x_v}{\|x_v\|} - \frac{2\langle \frac{x_v}{\|x_v\|}, x-C \rangle (x-C)}{\|x-C\|^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_2' = V_2 - \frac{2\langle V_2, x - C \rangle}{\|x - C\|^2} (x - C)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.3. Teorem: İnversiyon, bir yüzeyin regüler ve singüler noktalarını invaryant bırakır.

4.1.4. İspat: E^3 de bir yüzey M ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü M' olsun. Buna göre, M ve M' yüzeylerinin parametrik ifadeleri, sırasıyla, $x: (u, v) \subset E^2 \rightarrow x(u, v) \subset E^3$ ve $y: (u, v) \subset E^2 \rightarrow y(u, v) \subset E^3$ olmak üzere; regüler noktaların invaryanlığı için, $x(u_0, v_0) = P$ noktasında $(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} \neq 0$ ise $y(u_0, v_0) = \Phi(x(u_0, v_0))$ noktasında $(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} \neq 0$ iken, $(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} = 0$ olsun. Buna göre (3.2.4) eşitliğinden,

$$(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} = \frac{2\langle P - C, (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} \rangle}{\|P - C\|^2} (P - C)$$

olur. Elde edilen bu ifadenin her iki yanını $(P - C)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \langle (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)}, P - C \rangle &= \frac{2\langle P - C, (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} \rangle}{\|P - C\|^2} \|P - C\|^2 \\ &= \langle (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)}, P - C \rangle = 2\langle P - C, (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} \rangle \\ \Rightarrow \langle (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)}, P - C \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} = 0$, $\langle (x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)}, P - C \rangle = 0$ olmaları ve (3.2.4) den,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 (-(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} + 0) \\ 0 &= \lambda^2 (-(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)}) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $\lambda = (r^2 / \|x - C\|^2)$ ifadesi her $x(u, v)$ noktası için sıfırdan farklı reel değerli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} = 0$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} \neq 0$ bulunur.

Singüler noktalar için göstermeli ki; $x(u_0, v_0) = P$ noktasında $(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} = 0$ ise $y(u_0, v_0) = \Phi(x(u_0, v_0))$ noktasında da $(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} = 0$ dır. Buna göre (3.2.4) den, $(x_u \times x_v) |_{(u_0, v_0)} = 0$ ise

$$(y_u \times y_v) |_{\Phi(u_0, v_0)} = \lambda^2 \left(0 + \frac{2\langle (P - C), 0 \rangle (P - C)}{\|P - C\|^2} \right)$$

$$\Rightarrow (y_u \times y_v) \mid_{\Phi(u_0, v_0)} = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.5. Sonuç: Eğer $x(u_0, v_0) = P$ noktasında $(x_u \times x_v) \mid_{(u_0, v_0)} \neq 0$ ve $y(u_0, v_0) = \Phi(x(u_0, v_0))$ noktasında da $(y_u \times y_v) \mid_{\Phi(u_0, v_0)} \neq 0$ iken $\langle U_x \mid_{(u_0, v_0)}, (P - C) \rangle = 0$ ise,

$$U_y \mid_{\Phi(u_0, v_0)} = -U_x \mid_{(u_0, v_0)}$$

dır.

4.1.6. İspat: $(x_u \times x_v) \mid_{(u_0, v_0)} \neq 0$ ve $(y_u \times y_v) \mid_{\Phi(u_0, v_0)} \neq 0$ iken

$$\langle U_x \mid_{(u_0, v_0)}, (P - C) \rangle = 0$$

ise, (3.2.6) dan

$$U_y \mid_{\Phi(u_0, v_0)} = -U_x \mid_{(u_0, v_0)}$$

bulunur.

4.1.7. Sonuç: x ve y minimal lokal yüzey ve y lokal yüzeyi x in $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü olsun. Buna göre $U_y = -U_x$ dir.

4.1.8. İspat: 3.2.8. Sonuç gereğince

$$U_y = -U_x + \frac{2\langle U_x, x - C \rangle (x - C)}{\|x - C\|^2}$$

yazılabilir. Ayrıca 3.2.24 Sonuç dan x ve y minimal olduklarından $\langle U_x, x - C \rangle = 0$ olur.

Buradan $U_y = -U_x$ elde edilir.

4.1.9. Teorem: E^3 de bir yüzey M ve bu yüzeyin $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü M' olsun. Ayrıca M ve M' yüzeylerinin parametrik ifadeleri, sırasıyla, $x: (u, v) \subset E^2 \rightarrow x(u, v) \subset E^3$ ve $y: (u, v) \subset E^2 \rightarrow y(u, v) \subset E^3$ olsun. S ve S^* , sırasıyla, M ve M' nin şekil operatörü matrisleri olmak üzere

$$S^* = -\lambda^{-1}S - \frac{2}{r^2}\eta I_2 \quad (4.1.2)$$

dir. Burada $\lambda(u, v) = r^2 / \|x(u, v) - C\|^2$ ve $\eta(u, v) = \langle U_x(u, v), x(u, v) - C \rangle$ şeklinde reel değerli fonksiyonlardır.

4.1.10. İspat: 2.1.39. Teorem de ki Weingarten denklemlerinden, M' yüzeyinin birinci ve ikinci esas form katsayıları $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ ve $\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{M}$ olmak üzere

$$-S^* = \frac{1}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \begin{bmatrix} \tilde{L}\tilde{F} - \tilde{K}\tilde{G} & \tilde{K}\tilde{F} - \tilde{L}\tilde{E} \\ \tilde{M}\tilde{F} - \tilde{L}\tilde{G} & \tilde{L}\tilde{F} - \tilde{M}\tilde{E} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

yazılabilir. (3.2.3) ve (3.2.7) eşitlikleri burada göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{F} - \tilde{K}\tilde{G} &= \{-\lambda L - 2\delta F\}\{\lambda^2 F\} - \{-\lambda K - 2\delta E\}\{\lambda^2 G\} \\ &= -\lambda^3\{LF - KG\} + 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}\tilde{F} - \tilde{L}\tilde{E} &= \{-\lambda K - 2\delta E\}\{\lambda^2 F\} - \{-\lambda L - 2\delta F\}\{\lambda^2 E\} \\ &= -\lambda^3\{KF - LE\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}\tilde{F} - \tilde{L}\tilde{G} &= \{-\lambda M - 2\delta G\}\{\lambda^2 F\} - \{-\lambda L - 2\delta F\}\{\lambda^2 G\} \\ &= -\lambda^3\{MF - LG\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{F} - \tilde{M}\tilde{E} &= \{-\lambda L - 2\delta F\}\{\lambda^2 F\} - \{-\lambda M - 2\delta G\}\{\lambda^2 E\} \\ &= -\lambda^3\{LF - ME\} + 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\}, \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler (4.1.3) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -S^* &= \frac{1}{\lambda^4(EG - F^2)} \begin{bmatrix} -\lambda^3\{LF - KG\} + 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\} & -\lambda^3\{KF - LE\} \\ -\lambda^3\{MF - LG\} & -\lambda^3\{LF - ME\} + 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^4(EG - F^2)} \begin{bmatrix} -\lambda^3\{LF - KG\} & -\lambda^3\{KF - LE\} \\ -\lambda^3\{MF - LG\} & -\lambda^3\{LF - ME\} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^4(EG - F^2)} \begin{bmatrix} 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\} & 0 \\ 0 & 2\delta\lambda^2\{EG - F^2\} \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^{-1} \frac{1}{(EG - F^2)} \begin{bmatrix} LF - KG & KF - LE \\ MF - LG & LF - ME \end{bmatrix} + 2\delta\lambda^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow S^* = -\lambda^{-1}S - \frac{2}{r^2}\eta I_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.11. Teorem:

(i) E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir inversiyon, herhangi bir asli yüzeyin umbilik noktalarını değişmez bırakır.

(ii) E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir inversiyon, herhangi bir asli yüzeyin flat noktalarını umbilik noktalara dönüştürür.

(iii) E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir inversiyonun, herhangi bir yüzeyin flat noktalarını invaryant bırakması için gerek ve yeter şart

$$\eta(x) = \langle U_x(u, v), x(u, v) - C \rangle = 0$$

olmasıdır.

4.1.12. İspat: (i) E^3 de bir yüzey M ve r yarıçaplı C merkezli inversiyon Φ olsun. Eğer $P \in M$ noktası bir umbilik nokta ise, $\Phi(P) \in \Phi(M)$ noktasının $\Phi(M)$ yüzeyinin bir umbilik noktası olduğunu göstermeliyiz. M yüzeyinin $P \in M$ noktasında şekil operatörü matrisi S olmak üzere,

$$S = \xi I_2, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

dir. Bu ifadeyi (4.1.2) de göz önüne alırsak,

$$S^* = -\lambda^3(P)\xi I^2 - \frac{2}{r^2}\eta^2(P)I_2$$

olur. $-\lambda^3(P)\xi - \frac{2}{r^2}\eta(P) = \omega \in \mathbb{R}$ olduğundan,

$$S^* = \omega I_2, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

elde edilir ki, bu da $\Phi(P) \in \Phi(M)$ noktasının $\Phi(M)$ yüzeyi için bir umbilik nokta olması demektir.

(ii) E^3 de bir yüzey M ve r yarıçaplı C merkezli inversiyon Φ olsun. Eğer $P \in M$ noktası bir flat nokta ise, M yüzeyinin $P \in M$ noktasında S şekil operatörü matrisi $S = 0$ şeklinde bir sıfır dönüşümdür. Buna göre $\Phi(M)$ yüzeyinin $\Phi(P) \in \Phi(M)$ noktasında şekil operatörü S^* olmak üzere, (4.1.2) den

$$\begin{aligned} S^* &= -\lambda^3(x)S - \frac{2}{r^2}\eta(x)I_2 \\ &= -\lambda^3(P)0 - \frac{2}{r^2}\eta(P)I_2 \\ &= -\frac{2}{r^2}\eta(P)I_2 \end{aligned}$$

olur. $-\frac{2}{r^2}\eta(P) = \psi \in \mathbb{R}$ olduğundan,

$$S^* = \psi I_2, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

elde edilir ki, bu da $\Phi(P)$ nin umbilik nokta olduğunu gösterir.

(iii) $(\Rightarrow)$ E^3 de bir yüzey M ve r yarıçaplı C merkezli inversiyon Φ olsun. Eğer $P \in M$ noktası bir flat nokta ise, M yüzeyinin $P \in M$ noktasında S şekil operatörü matrisi $S = 0$ şeklinde bir sıfır dönüşümdür. Kabul edelim ki $\Phi(M)$ yüzeyinin $\Phi(P) \in \Phi(M)$ noktası da bir flat nokta olsun. Dolayısıyla $\Phi(M)$ yüzeyinin şekil operatörü $S^* = 0$ şeklinde bir sıfır dönüşümdür. Bunlar (4.1.2) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} S^* &= -\lambda^3(P)S - \frac{2}{r^2}\eta(P)I_2 \\ 0 &= -\lambda^3(P)0 - \frac{2}{r^2}\eta(P)I_2 \\ \Rightarrow 0 &= -\frac{2}{r^2}\eta(P)I_2 \end{aligned}$$

olur.

Burada $\eta(P) = \langle U_x |_P, P - C \rangle$ ve I_2 birim matris olduğundan,

$$\begin{aligned} \eta(P) &= \langle U_x |_P, P - C \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle U_x |_P, P - C \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) Tersine; $\langle U_x(u, v), x(u, v) - C \rangle = 0$ olsun. Buna göre $P \in M$ noktası bu yüzeyin flat noktası ise $P \in M$ noktasında yüzeyin şekil operatörü $S = 0$ olur. (4.1.2) ifadesinde bu bilgiler göz önüne alınırsa

$$S^* = -\lambda^3(P)0 + 0I_2 = 0$$

yazılır. Böylece flat noktalar invaryant kalır. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.13. Sonuç: x ve y minimal lokal yüzeyler olsun. Ayrıca y lokal yüzeyi x in $\phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü olsun. Bu taktirde bu yüzeylerin flat noktaları inversiyon dönüşümü altında invaryant kalır.

4.1.14. İspat: 3.2.24. Sonuç gereğince x ve y minimal lokal yüzey olduklarından, $\langle U_x, x - C \rangle = 0$ olur. Bu ise 4.1.11. Teoremin son şıkkı gereğince yüzeylerin flat noktalarının inversiyon altında invaryant kalması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.15. Teorem: M bir asli yüzey ve M nin r yarıçaplı ve C merkezli inversive yüzeyi $M' = \Phi(M)$ olsun. Bu yüzeylerin Christoffel sembolleri, sırasıyla, Γ_{jk}^i ve $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ ($i, j, k = 1, 2$) olmak üzere;

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + \frac{[\lambda^2]_u}{2\lambda^2}, & \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \Gamma_{11}^2 - \frac{[\lambda^2]_v E}{2\lambda^2 G}, \\ \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 + \frac{[\lambda^2]_v}{2\lambda^2}, & \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 + \frac{[\lambda^2]_u}{2\lambda^2}, \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \Gamma_{22}^1 - \frac{[\lambda^2]_u G}{2\lambda^2 E}, & \tilde{\Gamma}_{22}^2 = \Gamma_{22}^2 + \frac{[\lambda^2]_v}{2\lambda^2}. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

dir. Burada $\lambda(u, v) = r^2 / \|x(u, v) - C\|^2$ reel değerli bir fonksiyon ve E, G de M yüzeyinin birinci esas form katsayılarıdır.

4.1.16. İspat: 3.2.16 Sonuç dan M' de bir asli yüzey olup 2.1.43. Teorem gereğince, $F = L = 0$ dir. Buna göre E, F, G, M' yüzeyinin birinci esas form katsayıları olmak üzere, 2.1.38 Tanım gereğince

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{11}^1 = \frac{\tilde{E}_u}{2\tilde{E}}, & \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \frac{-\tilde{E}_v}{2\tilde{G}} \\ \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \frac{\tilde{E}_v}{2\tilde{E}}, & \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{\tilde{G}_u}{2\tilde{G}} \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{-\tilde{G}_u}{2\tilde{E}}, & \tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{\tilde{G}_v}{2\tilde{G}} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

yazılır. (4.1.5) de (3.2.3) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \frac{\tilde{E}_u}{2\tilde{E}} = \frac{\lambda^2 E_u + [\lambda^2]_u E}{2\lambda^2 E} = \frac{E_u}{2E} + \frac{[\lambda^2]_u E}{2\lambda^2 E} = \Gamma_{11}^1 + \frac{[\lambda^2]_u}{2\lambda^2}$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^2 = \frac{-\tilde{E}_v}{2\tilde{G}} = -\frac{\lambda^2 E_v + [\lambda^2]_v E}{2\lambda^2 G} = -\frac{E_v}{2G} - \frac{[\lambda^2]_v E}{2\lambda^2 G} = \Gamma_{11}^2 - \frac{[\lambda^2]_v E}{2\lambda^2 G}$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^1 = \frac{\tilde{E}_v}{2\tilde{E}} = \frac{\lambda^2 E_v + [\lambda^2]_v E}{2\lambda^2 E} = \frac{E_v}{2E} + \frac{[\lambda^2]_v}{2\lambda^2} = \Gamma_{12}^1 + \frac{[\lambda^2]_v}{2\lambda^2}$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{\tilde{G}_u}{2\tilde{G}} = \frac{\lambda^2 G_u + [\lambda^2]_u G}{2\lambda^2 G} = \frac{G_u}{2G} + \frac{[\lambda^2]_u}{2\lambda^2} = \Gamma_{12}^2 + \frac{[\lambda^2]_u}{2\lambda^2}$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{-\tilde{G}_u}{2\tilde{E}} = -\frac{\lambda(x)^2 G_u + [\lambda(x)^2]_u G}{2\lambda(x)^2 E} = -\frac{G_u}{2E} - \frac{[\lambda(x)^2]_u G}{2\lambda(x)^2 E} = \Gamma_{22}^1 - \frac{[\lambda(x)^2]_u G}{2\lambda(x)^2 E}$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{\tilde{G}_v}{2\tilde{G}} = \frac{\lambda(x)^2 G_v + [\lambda(x)^2]_v G}{2\lambda(x)^2 G} = \frac{G_v}{2G} + \frac{[\lambda(x)^2]_v}{2\lambda(x)^2} = \Gamma_{22}^2 + \frac{[\lambda(x)^2]_v}{2\lambda(x)^2}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.1.17. Teorem: M bir yüzey ve M nin r yarıçaplı ve C merkezli inversive yüzeyi $M' = \Phi(M)$ olsun. Bu yüzeylerin Christoffel sembolleri, sırasıyla, Γ_{jk}^i ve $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ ($i, j, k = 1, 2$) olmak üzere;

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \Gamma_{11}^1 + \frac{[\lambda^2]_u [EG - 2F^2] + [\lambda^2]_v FE}{2\lambda^2 [EG - F^2]}, & \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= \Gamma_{11}^2 + \frac{E\{[\lambda^2]_u F - [\lambda^2]_v E\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]} \\ \tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \Gamma_{12}^1 + \frac{G\{[\lambda^2]_v E - [\lambda(x)^2]_u F\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]}, & \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \Gamma_{12}^2 + \frac{E\{[\lambda^2]_u G - [\lambda^2]_v F\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]} \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= \Gamma_{22}^1 + \frac{G\{[\lambda^2]_v F - [\lambda^2]_u G\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]}, & \tilde{\Gamma}_{22}^2 &= \Gamma_{22}^2 + \frac{[\lambda^2]_v [EG - 2F^2] + [\lambda^2]_u FG}{2\lambda^2 [EG - F^2]} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

dir. Burada $\lambda(u, v) = r^2 / \|x(u, v) - C\|^2$ reel değerli bir fonksiyon ve E, F, G de M yüzeyinin birinci esas form katsayılarıdır.

4.1.18. İspat: (3.2.3) de, sırasıyla, u ve v ye göre türev alınırsa,

$$\tilde{E}_u = [\lambda^2]_u E + \lambda^2 E_u, \quad \tilde{E}_v = [\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v,$$

$$\tilde{F}_u = [\lambda^2]_u F + \lambda^2 F_u, \quad \tilde{F}_v = [\lambda^2]_v F + \lambda^2 F_v,$$

$$\tilde{G}_u = [\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u, \quad \tilde{G}_v = [\lambda^2]_v G + \lambda^2 G_v$$

olur. 2.1.38 Tanım gereğince

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{\lambda^2 G \{[\lambda^2]_u E + \lambda^2 E_u\} - 2\lambda^2 F \{[\lambda^2]_u F + \lambda^2 F_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} + \frac{\lambda^2 F \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^4 \{GE_u - 2FF_u + FE_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} + \frac{\lambda^2 \{[\lambda^2]_u GE - 2[\lambda^2]_u F^2 + [\lambda^2]_v EF\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + \frac{[\lambda^2]_u [EG - 2F^2] + [\lambda^2]_v FE}{2\lambda^2 [EG - F^2]},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{2\lambda^2 E \{[\lambda^2]_u F + \lambda^2 F_u\} - \lambda^2 E \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} + \frac{\lambda^2 F \{[\lambda^2]_u E + \lambda^2 E_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^4 \{2EF_u - EE_v + FE_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} + \frac{\lambda^2 \{2[\lambda(x)^2]_u EF - [\lambda^2]_v E^2 - [\lambda^2]_u EF\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \Gamma_{11}^2 + \frac{E \{[\lambda^2]_u F - [\lambda^2]_v E\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{\lambda^2 G \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\} - \lambda^2 F \{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^2 G \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} - \frac{\lambda^2 F \{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 + \frac{G \{[\lambda^2]_v E - [\lambda^2]_u F\}}{2\lambda^2 [EG - F^2]},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{\lambda^2 E \{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\} - \lambda^2 F \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^2 E \{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} - \frac{\lambda^2 F \{[\lambda^2]_v E + \lambda^2 E_v\}}{2\lambda^4 (EG - F^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 + \frac{E\{[\lambda^2]_u G - [\lambda^2]_v F\}}{2\lambda^2[EG - F^2]},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{22}^1 &= \frac{2\lambda^2 G\{[\lambda^2]_v F + \lambda^2 F_v\} - \lambda^2 G\{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\} - \lambda^2 F\{[\lambda^2]_v G + [\lambda^2]_u G_v\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} \\ &= \frac{2\lambda^2 G\{[\lambda^2]_v F + \lambda^2 F_v\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} - \frac{\lambda^2 G\{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} - \frac{\lambda^2 F\{[\lambda^2]_v G + [\lambda^2]_u G_v\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} \\ \Rightarrow \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= \Gamma_{22}^1 + \frac{G\{[\lambda^2]_v F - [\lambda^2]_u G\}}{2\lambda^2[EG - F^2]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{\lambda^2 E\{[\lambda^2]_v G + \lambda^2 G_v\} - 2\lambda^2 F\{[\lambda^2]_v F + \lambda^2 F_v\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} + \frac{\lambda^2 F\{[\lambda^2]_u G + \lambda^2 G_u\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^4\{EG_v - 2FF_v + FG_u\}}{2\lambda^4(EG - F^2)} + \frac{[\lambda^2]_v\{EG - 2F^2\} + [\lambda^2]_u FG}{2\lambda^2(EG - F^2)} \\ \Rightarrow \tilde{\Gamma}_{22}^2 &= \Gamma_{22}^2 + \frac{[\lambda^2]_v[EG - 2F^2] + [\lambda^2]_u FG}{2\lambda^2[EG - F^2]},\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

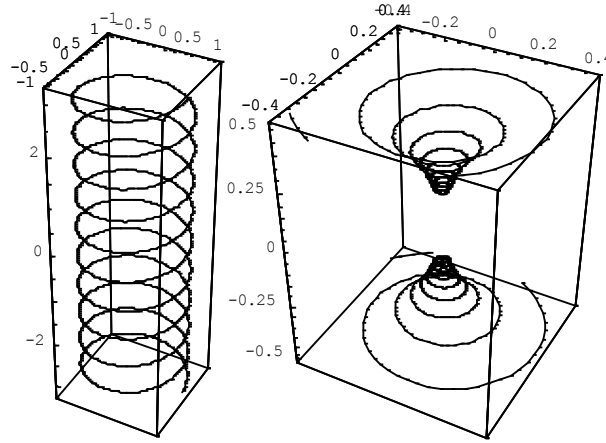
5. Dördüncü Bölüm

5.1. Inversive Eğriler İle İlgili Uygulamalar

5.1.1. Örnek: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0.1t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik denklemi ile verilen helis eğrisini göz önüne alalım. Verilen bu eğrinin, merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan küreye göre tanımlı, inversiyon altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \alpha)(t) &= (0,0,0) + \frac{(\cos t, \sin t, 0.1t) - (0,0,0)}{\|(\cos t, \sin t, 0.1t) - (0,0,0)\|^2} \\ &= \frac{1}{1 + 0.01t^2} (\cos t, \sin t, 0.1t)\end{aligned}$$

dir, (Şekil 5.1.1).

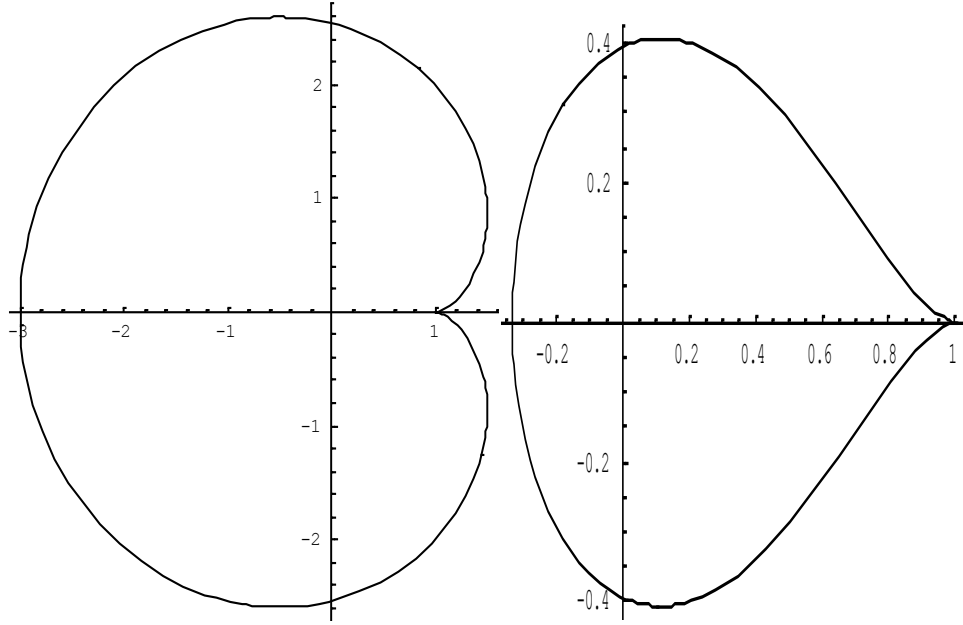


Şekil 5.1.1. Helis ve Inversive eğrisi

5.1.2. Örnek: $\alpha(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik denklemi ile verilen kardiod eğrisini ele alalım. Bu eğrinin, merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan küreye göre tanımlı, inversiyon altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \alpha)(t) &= (0,0) + \frac{(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) - (0,0)}{\|(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) - (0,0)\|^2} \\ &= \frac{1}{5 - 4\cos t} (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)\end{aligned}$$

şeklindedir, (Şekil 5.1.2).



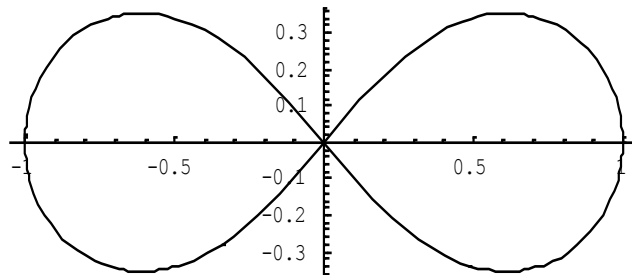
Şekil 5.1.2. Kardiod ve Inversive Eğrisi

5.1.3. **Örnek:** Bernoulli Lemniskatı eğrisi $\alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1+\sin^2 t} \right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik denklemiyle verilsin (Şekil 5.1.3). Bu eğrinin, merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan küreye göre tanımlı, inversiyon altındaki görüntüsü;

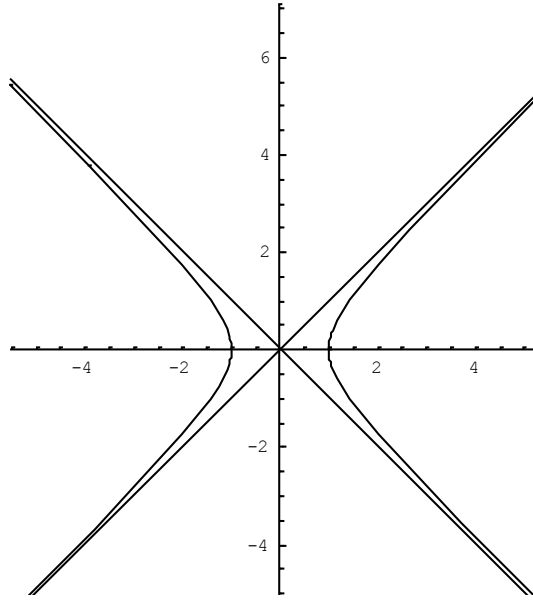
$$(\Phi \circ \alpha)(t) = (0,0) + \frac{\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1+\sin^2 t} \right) - (0,0)}{\left\| \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1+\sin^2 t} - (0,0) \right\|^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t \right)$$

olur. Bu ise bir hiperbol dir, (Şekil 5.1.4).



Şekil 5.1.3. Bernoulli Lemniskatı



Şekil 5.1.4. Inversive Bernoulli Lemniskatı

5.2. Inversive Yüzeyler İle İlgili Uygulamalar

Örnek 5.2.1. M , $x(u, v) = (3\cos u \cosh(v/3), 3\sin u \cosh(v/3), v)$ parametrik denklemiyle verilen bir katenoid yüzeyi olsun. Bu yüzeyin, orijin merkezli ve birim yarıçaplı, inversive yüzeyinin aşağıdaki özelliklerini hesaplayalım:

- (1°) Parametrik denklemini,
- (2°) Tanjant uzayının bazlarını ve birim normal vektör alanını,
- (3°) Birinci ve ikinci esas form katsayılarını,
- (4°) Asli yüzey olup olmadığını,
- (5°) Gauss, ortalama ve asli eğriliklerini,
- (6°) Şekil operatörünü,
- (7°) Christoffel sembollerini.

Çözüm: Şimdi M nin özel olarak seçilen $P = x(0,0) = (3,0,0)$ noktasında, yukarıda istenen özelliklerin hesaplamasını yapalım.

M yüzeyinin $P = x(0,0) = (3,0,0)$ noktasında ki tanjant uzayının baz vektörleri,

$$V_1 = (-\sin u, \cos u, 0)$$
$$V_2 = \frac{(\cos u \sinh v/3, \sin u \sinh v/3, 1)}{(1 + \sinh^2 v/3)^{-1/2}}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} V_1(P) = (0,1,0) \\ V_2(P) = (0,0,1) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

şeklinde elde edilir.

M yüzeyinin $P = (3,0,0)$ noktasındaki birim normal vektörü,

$$U_x(P) = (1,0,0) \quad (5.2.2)$$

olur.

M yüzeyinin $P = (3,0,0)$ noktasındaki birinci ve ikinci esas form katsayıları,

$$\begin{cases} E(P) = 9, F(P) = 0, G(P) = 1 \\ K(P) = -3, L(P) = 0, M(P) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

dir.

M yüzeyinin $P = (3,0,0)$ noktasındaki Gauss, ortalama ve asli eğrilikleri,

$$K(P) = -\frac{1}{9}, \quad H(P) = 0, \quad k_1(P) = \frac{1}{3}, \quad k_2(P) = -\frac{1}{3} \quad (5.2.4)$$

olur.

M yüzeyinin $P = (3,0,0)$ noktasındaki şekil operatörünün matrisi,

$$S(P) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

şeklinde bulunur.

M yüzeyinin $P = (3,0,0)$ noktasındaki Christoffel sembolleri,

$$\Gamma_{11}^1(P) = \Gamma_{11}^2(P) = \Gamma_{12}^1(P) = \Gamma_{12}^2(P) = \Gamma_{22}^1(P) = \Gamma_{22}^2(P) = 0 \quad (5.2.6)$$

dir.

Ayrıca reel değerli $\lambda, \psi, \eta, \delta$ fonksiyonlarının $P = (3,0,0)$ noktasındaki değerleri;

$$\begin{aligned} \lambda(u, v) &= \frac{r^2}{\|x(u, v) - C\|} = \frac{1^2}{\|(3\cos u \cosh(v/3), 3\sin u \cosh(v/3), v) - (0,0,0)\|^2} \\ \lambda(u, v) &= \frac{1}{9\cosh^2(v/3) + v^2} \\ &\Rightarrow \lambda(0,0) = \frac{1}{9}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \eta(u, v) &= \langle U_x, P - C \rangle \\ \eta(0,0) &= \langle (1,0,0), (3,0,0) \rangle \\ &\Rightarrow \eta(0,0) = 3, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &= \frac{2\langle V_1, x(u, v) - C \rangle}{\|x(u, v) - C\|^2} \\ \psi_1(0,0) &= \frac{2\langle (0,1,0), (3,0,0) \rangle}{9} \\ &\Rightarrow \psi_1(0,0) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(u, v) &= \frac{2\langle V_2, x(u, v) - C \rangle}{\|x(u, v) - C\|^2} \\ \psi_2(0,0) &= \frac{2\langle (0,0,1), (3,0,0) \rangle}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_2(0,0) = 0, \quad (5.2.10)$$

$$\delta(u, v) = \frac{r^2 \langle U_x, x(u, v) - C \rangle}{\|x(u, v) - C\|^4}$$

$$\delta(0,0) = \frac{\langle (1,0,0), (3,0,0) \rangle}{81}$$

$$\Rightarrow \delta(0,0) = \frac{1}{27} \quad (5.2.11)$$

elde edilir.

(1^o) M nin, orijin merkezli ve birim yarıçaplı, inversive yüzeyini M' ile gösterelim. M' nin parametrik denklemi (3.2.1) den,

$$y(u, v) = \Phi(x(u, v)) = (0,0,0) + \frac{1^2(3\cos u \cosh(v/3), 3\sin u \cosh(v/3), v) - (0,0,0)}{\|(3\cos u \cosh(v/3), 3\sin u \cosh(v/3), v) - (0,0,0)\|^2}$$

$$y(u, v) = \left(\frac{3\cos u \cosh(v/3)}{9\cosh^2(v/3) + v^2}, \frac{3\sin u \cosh(v/3)}{9\cosh^2(v/3) + v^2}, \frac{v}{9\cosh^2(v/3) + v^2} \right) \quad (5.2.12)$$

yazılır. $P = x(0,0) = (3,0,0)$ noktasının inversi olan noktayı $\Phi(P) = Q$ ile gösterelim.

Buna göre

$$\Phi(P) = Q = (0,0,0) + \frac{((3,0,0) - (0,0,0))}{\|(3,0,0) - (0,0,0)\|^2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right)$$

olur.

(2^o) M' yüzeyinin vektör alanı uzayının bazı $\{V_1', V_2'\}$ olsun. (4.1.1) den,

$$\begin{cases} V_1' = V_1 - \psi_1(x - C) \\ V_2' = V_2 - \psi_2(x - C) \end{cases}$$

yazılabilir. (5.2.1), (5.2.9) ve (5.2.10) ifadelerinden,

$$V_1'(\Phi(P)) = V_1'(Q) = V_1(P) - \psi_1(P)(x(0,0) - C)$$

$$= (0,1,0) - 0(3,0,0)$$

$$\Rightarrow V_1'(Q) = (0,1,0)$$

elde edilir. Benzer olarak

$$V_2'(\Phi(P)) = V_2'(Q) = V_2(P) - \psi_2(P)(x(0,0) - C)$$

$$= (0,0,1) - 0(3,0,0)$$

$$\Rightarrow V_2'(Q) = (0,0,1)$$

bulunur.

(3^o) M' yüzeyinin birinci ve ikinci esas form katsayıları, sırasıyla, $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ ve $\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{M}$ olsun. $Q = \Phi(P)$ olmak üzere (3.2.3) ve (5.2.3) ifadelerinden

$$\tilde{E}(Q) = \lambda^2(P)E(P) = \frac{1}{81}9 = \frac{1}{9}$$

$$\tilde{F}(Q) = \lambda^2(P)F(P) = \frac{1}{81}0 = 0$$

$$\tilde{G}(Q) = \lambda^2(P)G(P) = \frac{1}{81}1 = \frac{1}{81}$$

$$\tilde{K}(Q) = -\lambda(P)K - 2\delta(P)E = -\frac{1}{9}(-3) - \frac{2}{27}9 = -\frac{1}{3}$$

$$\tilde{L}(Q) = -\lambda(P)L - 2\delta(P)F = 0$$

$$\tilde{M}(Q) = -\lambda(P)M - 2\delta(P)G = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{27} = -\frac{1}{9}$$

elde edilir.

(4^o) (3^o) den M' yüzeyi için $\tilde{F}(Q) = \tilde{L}(Q) = 0$ olduğu biliniyor. Buna göre 2.1.46. Teorem gereğince M' yüzeyi bir asli yüzey olur.

(5^o) M' inversive yüzeyinin $\Phi(P) = Q$ noktasındaki Gauss, ortalama ve asli eğrilikleri, sırasıyla, $K^*(Q), H^*(Q)$ ve $k_1^*(Q), k_2^*(Q)$ şeklinde gösterilsin. Buna göre (3.2.10) dan Gauss eğriliği,

$$\begin{aligned} K^*(Q) &= \frac{1}{\lambda(P)^2}K(P) + \frac{4}{r^2}\lambda^{-1}(P)\eta(P)H(P) + \frac{4}{r^4}\eta(P)^2 \\ &= (81)\left(-\frac{1}{9}\right) + \frac{4}{1^2}3.9.0 + \frac{4}{1^4}.9 \\ &\Rightarrow K^*(Q) = 27 \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.11) den ortalama eğrilik,

$$H^*(Q) = \frac{1}{\lambda(P)}H(P) - \frac{2}{r^2}\eta(P)$$

$$= -9.0 - \frac{2}{1^2} 3$$

$$\Rightarrow H^*(Q) = -6$$

elde edilir. (3.2.9) dan asli eğrilikler, sırasıyla,

$$k_1^*(Q) = -\lambda^{-1}(P)k_1(P) - \frac{2}{r^2}\eta(P)$$

$$= -9. \frac{1}{3} - 2.3$$

$$\Rightarrow k_1^*(Q) = -9$$

ve

$$k_2^*(Q) = -\lambda^{-1}(P)k_2(P) - \frac{2}{r^2}\eta(P)$$

$$= -9. \left(-\frac{1}{3}\right) - 2.3$$

$$\Rightarrow k_2^*(Q) = -3$$

şeklinde olur.

(6^o) M' yüzeyinin $\Phi(P) = Q$ noktasındaki şekil operatörü matrisi $S^*(Q)$ olsun. 4.1.9 Teorem den

$$S^*(Q) = -\lambda^{-1}(P)S(P) - \frac{2}{r^2}\eta(P)I_2$$

$$= -9 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} - 2.3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S^*(Q) = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

(7^o) (5.2.7) den

$$\lambda(u, v) = \frac{1}{9 \cosh^2(v/3) + v^2} = \lambda(v)$$

reel değerli fonksiyonunun $P = (3, 0, 0)$ noktasında, sırasıyla, $(\lambda(u, v)^2)_u$ ve $(\lambda(u, v)^2)_v$ ye göre türevlerini hesaplanırsa,

$$(\lambda(u, v)^2)_u = (\lambda(v)^2)_u = 0$$

ve

$$\begin{aligned} (\lambda(u, v)^2)_v &= 2\lambda(u, v)(\lambda(u, v))_v \\ &= 2 \frac{1}{9\cosh^2(v/3) + v^2} \left(\frac{-6\cosh(v/3) - 2v}{(9\cosh^2(v/3) + v^2)^2} \right) \\ &\Rightarrow (\lambda(P)^2)_v = 0 \end{aligned}$$

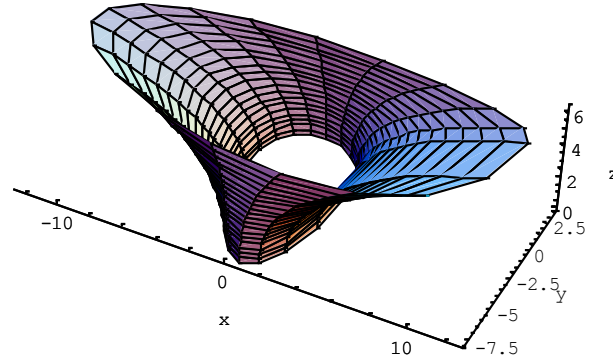
elde edilir. (4^o) den M' yüzeyi bir asli yüzey olduğundan 4.1.17. Teorem ve (5.2.6) dan

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^2 = 0$$

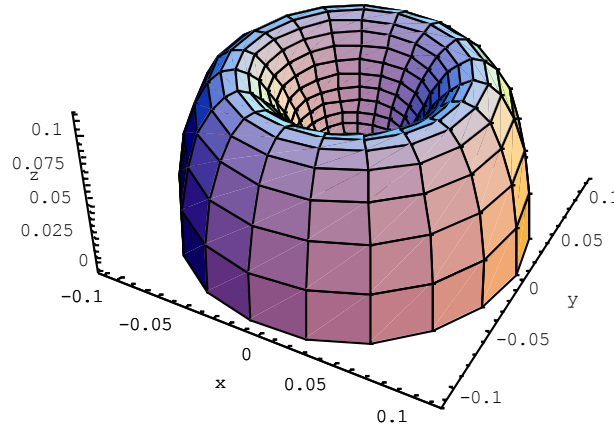
bulunur. Burada $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ $i, j, k = 1, 2$ ile M' yüzeyinin Christoffel sembolleri gösterilmektedir.

Böylece çözüm tamamlanır.

Aşağıda M yüzeyi, (Şekil 5.2.1) ve M' invers yüzeyi, (Şekil 5.2.2) de gösterilmiştir.



Şekil 5.2.1. Katenoid



Şekil 5.2.2. Inversive Katenoid

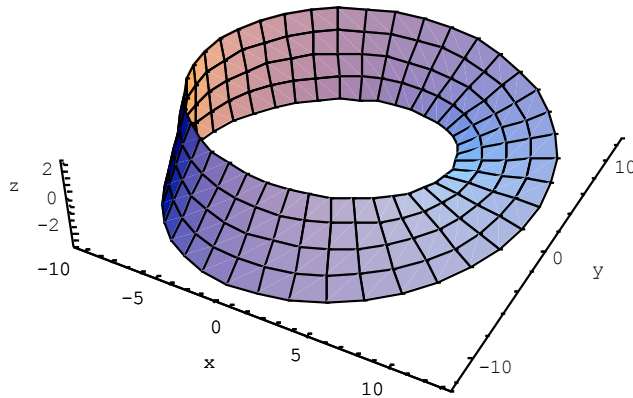
Örnek 5.2.2. M yüzeyi,

$$x(u, v) = 10 \left(\cos u + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos u, \sin u + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin u, v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right)$$

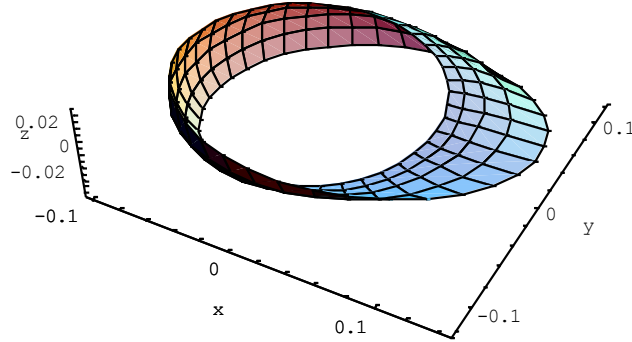
parametrik denklemi ile verilen bir Möbius şeridi olsun. Buna göre M nin, orjin merkezli ve birim yarıçaplı, invers yüzeyi

$$y(u, v) = \frac{\left(\cos u + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos u, \sin u + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin u, v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right)}{10 \left(1 + v^2 + 2v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)}$$

olur, [(Şekil 5.2.3) ve (Şekil 5.2.4)].



Şekil 5.2.3. Möbius şeridi



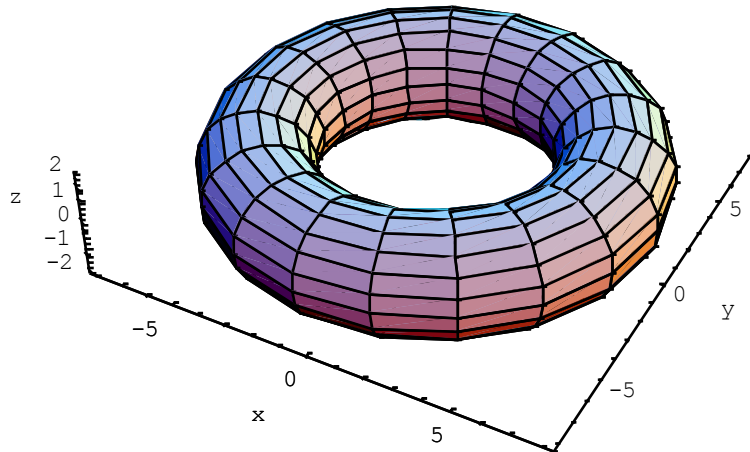
Şekil 5.2.4. Inversive Möbius şeridi

Örnek 5.2.3. $x(u, v) = ((8 + 5\cos v)\cos u, (8 + 5\cos v)\sin u, 5\sin v)$ denklemiyle verilen M yüzeyi, tor yüzeyi olsun. Bu yüzeyin, orijin merkezli ve birim yarıçaplı, inversive yüzeyi yine bir tor yüzeyidir. Inversive tor yüzeyinin denklemi,

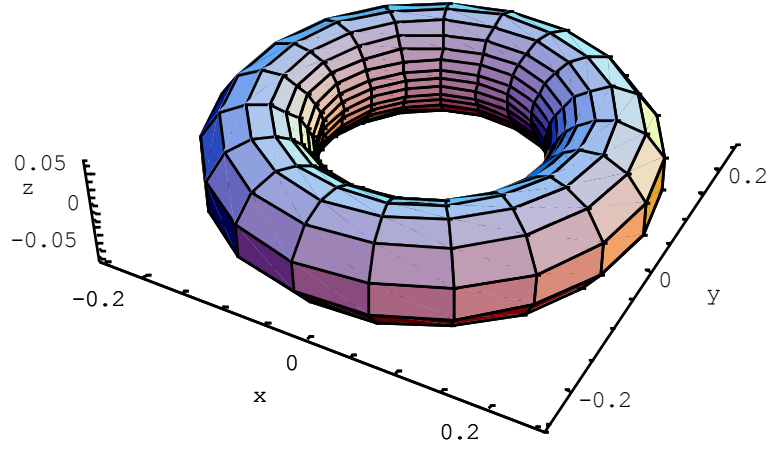
$$y(u, v) = (0,0,0) + \frac{((8 + 5\cos v)\cos u, (8 + 5\cos v)\sin u, 5\sin v) - (0,0,0)}{\|((8 + 5\cos v)\cos u, (8 + 5\cos v)\sin u, 5\sin v) - (0,0,0)\|^2}$$

$$= \left(\frac{(8 + 5\cos v)\cos u}{89 + 80\cos v}, \frac{(8 + 5\cos v)\sin u}{89 + 80\cos v}, \frac{5\sin v}{89 + 80\cos v} \right)$$

şeklindedir, [(Şekil 5.2.5) ve (Şekil 5.2.6)].



Şekil 5.2.5. Tor yüzeyi



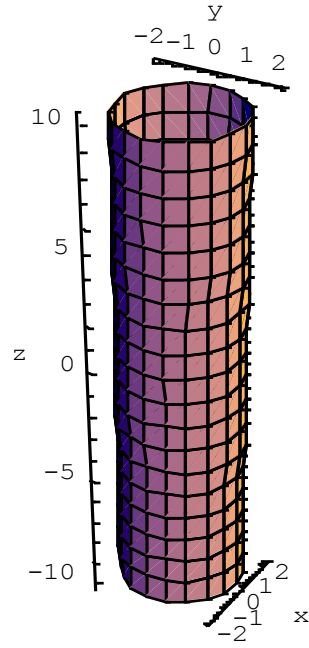
Şekil 5.2.6. Inverse Tor yüzeyi

Örnek 5.2.4. $x(u, v) = (2\cos u, 2\sin u, v), u = [0, 2\pi], v = [-10, 10]$ denklemiyle verilen dairesel silindirin, orijin merkezli ve birim yarıçaplı, inverse;

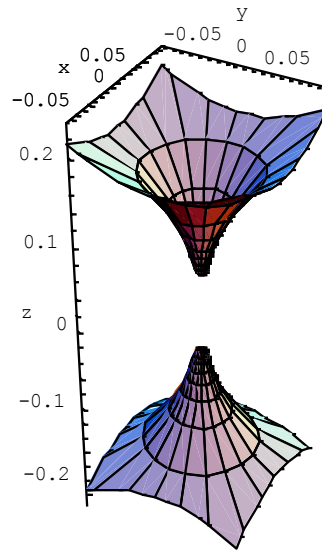
$$y(u, v) = (0, 0, 0) + \frac{(2\cos u, 2\sin u, v) - (0, 0, 0)}{\|(2\cos u, 2\sin u, v) - (0, 0, 0)\|^2}$$

$$= \left(\frac{2\cos u}{4 + v^2}, \frac{2\sin u}{4 + v^2}, \frac{v}{4 + v^2} \right)$$

olur, [(Şekil 5.2.7) ve (Şekil 5.2.8)].



Şekil 5.2.7. Dairesel silindir



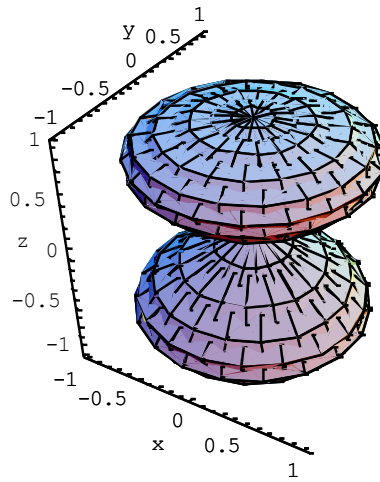
Şekil 5.2.8. Inversive dairesel silindir

Örnek 5.2.5. $x(u, v) = (\cos u \sin 2v, \sin u \sin 2v, \sin v)$ parametrik denklemiyle verilen sekiz yüzeyini göz önüne alalım. Buna göre bu yüzeyin, orijin merkezli birim yarıçaplı, inversive yüzeyi

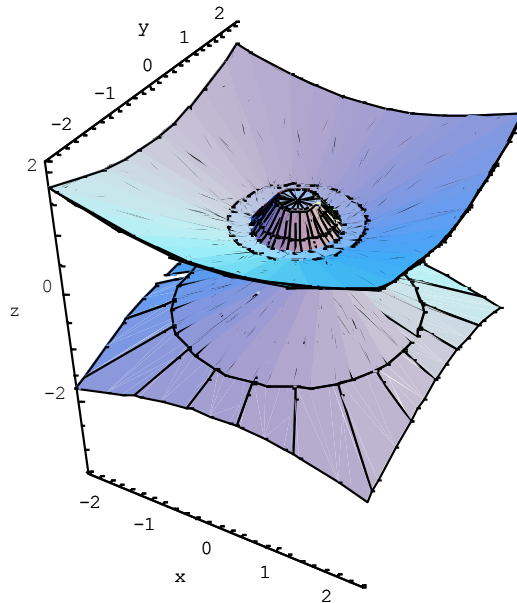
$$y(u, v) = (0,0,0) + \frac{(\cos u \sin 2v, \sin u \sin 2v, \sin v) - (0,0,0)}{\|(\cos u \sin 2v, \sin u \sin 2v, \sin v) - (0,0,0)\|^2}$$

$$\Rightarrow y(u, v) = \frac{(\cos u \sin 2v, \sin u \sin 2v, \sin v)}{4 \sin v \cos^2 v + \sin v}$$

şeklindedir, [(Şekil 5.2.9) ve (Şekil 5.2.10)].



Şekil 5.2.9. Sekiz yüzeyi



Şekil 5.2.10. Inversive sekiz yüzey

6. SONUÇ

3.2.20 Teorem ve 3.2.22 Teorem e bağılı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi;

6.1. Sonuç: x minimal bir lokal yüzey ve x in r yarıçaplı ve C merkezli inversive yüzeyi $y = \Phi(x)$ olsun. K^* ve K , sırasıyla, y ve x in Gauss eğrilikleri, H^* ve H , sırasıyla, y ve x in ortalama eğrilikleri olmak üzere,

(i)

$$K^* = \frac{1}{\lambda(x)^2} K + \frac{4}{r^4} \eta(x)^2$$

$$H^* = -\frac{2}{r^2} \eta(x).$$

dir.

(ii) $\Phi(x)$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\langle U_x, x(u, v) - C \rangle = 0$$

olmasıdır.

3.2.4 Teorem ve 3.2.10 Teorem e bağılı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi;

6.2. Sonuç: Asli yüzeylerin inversive yüzeyleri de asli yüzeylerdir.

4.1.3 Teorem e bağılı olarak aşağıdaki sonuçlar elde edildi;

6.3. Sonuç: Eğer $x(u_0, v_0) = P$ noktasında $(x_u \times x_v)|_{(u_0, v_0)} \neq 0$ ve $y(u_0, v_0) = \Phi(x(u_0, v_0))$ noktasında da $(y_u \times y_v)|_{\Phi(u_0, v_0)} \neq 0$ iken $\langle U_x|_{(u_0, v_0)}, (P - C) \rangle = 0$ ise,

$$U_y|_{\Phi(u_0, v_0)} = -U_x|_{(u_0, v_0)}$$

dir.

6.4. Sonuç: x ve y minimal lokal yüzey ve y lokal yüzeyi x in $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü olsun. Buna göre $U_y = -U_x$ dir.

4.1.13 Teorem e bağılı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi;

6.5. Sonuç: x ve y minimal lokal yüzeyler olsun. Ayrıca y lokal yüzeyi x in $\Phi[C, r]$ inversiyonu altındaki görüntüsü olsun. Bu taktirde bu yüzeylerin flat noktaları inversiyon dönüşümü altında invaryant kalır.

7. KAYNAKLAR

- [1] **Altın, A.;** Young, E. C. Extensions of Kelvin inversion theorem. Hacet. Bull. Nat. Sci. Eng. Ser. B 26 (1997), 71--82.
- [2] **Biran, L.,** "Diferansiyel Geometri", 1973, İstanbul.
- [3] **Gray, A.,** 1997, "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica", CRC Press.
- [4] **Gray, J., J., Brannan, D., A., Esplen, M., F.,** 1999, "Geometry", The Open University, Cambridge University Press.
- [5] **Hacısalıhoğlu, H., H.,** 1980, "Dönüşümler ve Geometriler", Milli Eğitim Basımevi, İstanbul.
- [6] **Hacısalıhoğlu, H., H.,** 1983, "Diferensiyel geometri", Gazi Üniversitesi, Ankara.
- [7] **Hacısalıhoğlu, H., H.,** 2003, " Analitik Geometri", Hacısalıhoğlu Yayıncılık, Ankara.
- [8] **O'Neil, B.,** 1966 , "Elementary Differential Geometry", Academic Press, New York.
- [9] **Oprea, J.,** 1997, "Differential Geometry and its applications", Printed of United States of America
- [10] **Sabuncuoğlu, A.,** 2006, "Diferensiyel Geometri", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,
- [11] **Spivak M.,** 1975, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Vol.III, Publish or Perish, Berkley.

8. ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2008 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.