

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLERİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selçuk BAŞ

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL

Temmuz-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLERİN
İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selçuk BAŞ

(08221102)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.06.2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 12.07.2011

Temmuz-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLERİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selçuk BAŞ

(08221102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.06.2011

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri:

Yrd. Doç. Dr. Mustafa AYDOĞDU (F.Ü)

Yrd. Doç.Dr. Mustafa YENEROĞLU (F.Ü)

Temmuz - 2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI UZAYINDA HAREKETLERİN İNCELENMESİ

Selçuk BAŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2011, Sayfa: 37+VIII

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Minkowski uzayında temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında küresel hareketler incelendi ve küresel hareket de koordinat dönüşümleri, ortogonal matrisin karakteristik vektörleri, Cayley formülü, Rodrigues denklemi, Euler parametreleri araştırıldı. Bunlara ilave olarak $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında katı hareketin koordinat dönüşümü, vida eksenini verildi.

Üçüncü, bölümde ise çalışmanın orjinal kısmı olarak verildi. Minkowski uzayında Frenet-Serret hareketi araştırıldı. Dönme eksenini time-like ve space-like olan Darboux's hareketleri incelendi. Daha sonra Minkowski Uzayında invers Darboux's hareketi olarak adlandırılan Mannheim's hareketi ele alındı. Son olarakta bu hareketlerin genel hali olan Schoenflies hareketi incelendi.

Anahtar Kelimeler: Katı hareket, Minkowski uzayı, Darboux' hareket , Mannheim hareket, Schoenflies hareket.

SUMMARY

Master Thesis

EXAMINATION OF MOTIONS IN MINKOWSKY SPACE

Selçuk BAŞ

Firat University

Institute of Science and Technology

Department of Mathematics

2011, Page: 37+VIII

This study is consist of three chapters.

In the first chapter; the fundemental definitions and theorems in Minkowskyi space, are given.

In the second chapter; Sphrerical motions are examined in the 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$. The coordinate transformations in spherical motion, the characteristic vectors of rotation matrix, the Cayley formula, the Rodrigues equation and Euler parameters are investigated. In additon, the coordinate transformations and the screw axis are given for spatial motionsin the 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{R}_1^3$.

The original parth of study is given in the thirth, fourth and fifth chapters. Frenet-Serret motion is investigated in the Minkowski space. Time-like and space-like axis of rotation the Darboux 's motion are examined. Then, the so-called Minkowski Space inverse Darboux's motion

is discussed in Mannheim's motion. Finally, these motions, which are generally viewed Schoenflies motion.

KEY WORDS: Spatial motion, Minkowsky space, Darboux's motion, Mannheim's motion, Schoenflies motion.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vedat ASİL 'e ve yine her konuda desteğini gördüğüm değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Mustafa YENEROĞLU' na teşekkürlerimi sunarım.

Selçuk BAŞ
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET.....	I
SUMMARY	II
TEŞEKKÜR.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
SİMGELERİN LİSTESİ.....	VII
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	VIII
GİRİŞ.....	1
BİRİNCİ BÖLÜM	
Temel Tanım Ve Teoremler	3
İKİNCİ BÖLÜM	
3-Boyutlu Minkowski Uzayındaki Hareketler.....	8
2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Hareket	8
Koordinat Dönüşümü	8
2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Katı Hareketler.....	13
Koordinat Dönüşümleri	13
Bir Hareketin Vida Eksenini	13
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
3.MINKOWSKİ UZAYINDA ÖZEL HAREKETLER	
3.1 Minkowski Uzayında Frenet-Serret Hareket	15
3.2 Minkowski Uzayında Darboux' s Hareketi.....	17
3.2.1 Minkowski Uzayında Time-Like Darboux' s Hareketi	17
3.2.2 Minkowski Uzayında Space-Like Darboux' s Hareketi.....	21
3.3 Minkowski Uzayında Mannheim's Hareketi.....	25
3.3.1 Minkowski Uzayında Time-Like Dönme Eksenli Mannheim's Hareketi	25
3.3.2 Minkowski Uzayında Space-Like Dönme Eksenli Mannheim' s Hareketi	26
3.4 Minkowski Uzayında Schoenflies Hareketi.....	28
3.4.1 Minkowski Uzayında Time-Like Dönme Eksenli Schoenflies Hareketi	28
3.4.1 Minkowski Uzayında Space-Like Dönme Eksenli Schoenflies Hareketi.....	31
Sonuç ve Öneriler	34

KAYNAKLAR.....	35
Özgeçmiş.....	37

SİMGELER LİSTESİ

$\langle, \rangle$	: Minkowski İç çarpımı
$\times$	: Minkowski uzayında vektörel çarpım
$\ , \ $	: Minkowski uzayında norm
$\mathbb{R}_1^2$	: 2-boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Minkowski Uzayı
$SO_1(n)$	: $n \times n$ dönme matrislerinin grubu
$\vec{\omega}$	: Ani açısal hız vektörü
Ω	: Ω Minkowski uzayında anti-simetrik matris
κ	: Eğrinin eğrilik fonksiyonu
τ	: Eğrinin burulma fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.a.....	9
Şekil 2.1.b.....	9
Şekil 2.2.a.....	9
Şekil 2.2.b.....	9
Şekil 2.3.a.....	10
Şekil 2.3.b.....	10
Şekil 2.4	12
Şekil 2.5	14

GİRİŞ

Lorentz geometrisi, 1873 'Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie' makalesinde ortaya çıkmıştır. 1885 'Nicht-Euklidischen Raumformen' teziyle Killing tarafından geliştirildi. Lorentz dönüşümlerini ilk olarak Killing tarafından değerlendirilip ortaya kondu. Fakat dönüşümler, Lorentz tarafından 1904 yılında 'Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light' makalesinde tanımlandı. Rölativite teorisinde Lorentz geometrisinin yer almasıyla ilgili tartışmalar sonucunda 1978 yılında Penrose'ın 'The geometry of universe' konusunda ve G. Naber'ın 'The geometry of Minkowski spacetime' tek konulu çalışmasında ele alındı.

Hiperbolik uzayda hiperboloid model 1878'de Killing'ın 'Ueber zwei Raumformen mit constant positiver Krümmung' adlı makalesinde ortaya çıkmıştır. Timelike ve spacelike açıları Klein'ın 1871 yılındaki 'Über die sogenannte Nicht-Euklidische geometrie' makalesinde tanımlandı. Hiperbolik yay uzunluğu elemanları Killing'ın 1880 yılındaki 'Die rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen' makalesinde görüldü. Hiperbolik doğru parçasının Lorentz uzunluğu, Yaglom tarafından 'A simple Non-Euclidean geometry and physical basis' çalışmasıyla tanımlandı.

2- boyutlu hiperbolik koordinatlar Lobachevski'ın 'On the principles of geometry' makalesinde ortaya çıktı. Cox ise koordinatları, 'Homogeneous coordinates in imaginary geometry' makalesinde tanımladı. Saccheri 1733 yılında hiperbolik üçgenin açılarının toplamının iki dik açıdan daha fazla olduğunu ispatladı. Kosinüs ve sinüs ile ilgili kurallarına benzer formüller, Lobachevski tarafından çıkarıldı. Hiperbolik ve Küresel trigonometrilere arasındaki duallığı olarak Lambert tarafından geliştirildi. Daha sonraki yıllarda iki komsu açılı dörtgenler, küresel trigonometrik formüller, dik açılı hiperbolik altıgenler için formüller çalışılmıştır.

3-boyutlu Öklid uzayında hareketler konusu detaylı bir şekilde [2,8,9,12] kaynaklarında incelenmiştir. Benzer şekilde vida teorisi ve Twistler üzerine çeşitli incelemeler de [14,15,21,22,23,24] tarafından yapılmıştır.

3-boyutlu Öklid uzayında hareketlerin cümlesi bir Lie grubu formunda olduğu McCarty [12] tarafından verilmiştir. Schutz [16] Lie grupları ve Lie cebiri ile ilgili incelemeler yapmıştır. Hacısalıhoğlu [10] "Yüksek Diferensiyel Geometri" kitabında Lie grubu ve Lie cebirinin izomorf olduğunu ifade etmiştir. Asil [1] üstel dönüşümlerin Lie grubu olduğunu ve üstel hareketleri doktora tezinde incelemiştir. Bir Lie cebirinin Twist uzayı, bu uzayın sol invariant vektör alanlarına izomorf olduğu Zefran [21] tarafından verilmiştir.

O'Neil [13] "Semi-Riemannian Geometry" adlı kitabında Semi-Riemann Geometride Lie grubu ve Lie cebirini vermiştir. Minkowski düzleminde hareketler Ergin [6] tarafından doktora tezi

olarak incelenmiştir. 3-Boyutlu Minkowsky Uzayında Bazı Kinematik Bağntılar Yeneroğlu [20] tarafından doktora tezi olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada ise amacımız, Öklid uzayında yok denilecek kadar az çalışılan Darboux's , Mannheim' ve Scoenflies hareketlerinin Minkowski uzayında karşılıkları incelendi. Bu amaçla çalışmamız üç ana bölümden oluşturulmuştur.

Çalışmamızda ilk olarak Minkowski uzayında bazı temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde; 3-boyutlu Minkowski uzayında küresel ve katı hareketler incelendi. Üçüncü bölümde ise; Minkowski uzayında time-like ve space-like dönme eksenli Darboux's hareketleri ele alınıp , invers Darboux's hareketi olarak adlandırılan Mannheim's hareketi incelendi. Son olarakta Darboux's ve Mannheim's hareketlerinin genel hali olan Scoenflies hareketi Minkowski uzayında incelendi.

1. Bölüm

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.1 $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} <, >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow <\vec{x}, \vec{y}> = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

ile tanımlanan dönüşüm

- a) Simetrik,
- b) Bilineer,
- c) non-dejenere ($\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için $<\vec{x}^T, \vec{y}^T> = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$) dir.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan bu dönüşüme Minkowski metriği denir ve $\mathbb{R}_1^n = \{\mathbb{R}^n, <, >\}$ ikilisine de n-boyutlu Minkowski uzayı adı verilir [20].

Tanım 1.2 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

- $<\vec{x}, \vec{x}> < 0$ ise $\vec{x}$ time-like vektör,
- $<\vec{x}, \vec{x}> > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise $\vec{x}$ space-like vektör,
- $<\vec{x}, \vec{x}> = 0$ ise $\vec{x}$ null vektör,

denir [13].

Tanım 1.3 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için $\vec{x}$ in normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|<\vec{x}, \vec{x}>|} \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır [20].

Tanım 1.4 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için

- $\|\vec{x}\| = -1$ ise $\vec{x}$ 'e birim time-like vektör,
- $\|\vec{x}\| = 1$ ise $\vec{x}$ 'e birim space-like vektör,

denir [20].

Tanım 1.5 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. $<\vec{x}, \vec{y}> = 0$ ise bu vektörlere Lorentz anlamında diktirler denir.

İki vektörün bir birine dik olması için birinin time-like diğérinin space-like olması gerekir [20].

Tanım 1.6 $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör $\vec{x}, \vec{y}$ olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ nin Minkowski uzayında vektörel çarpımı;

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \quad (1.3)$$

biçiminde tanımlanır [13].

Teorem 1.7 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. Buna göre $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}_1^3$ için;

- i) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = -\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- ii) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = -\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$,
- iii) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$,
- iv) $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$,

dır, [17].

Teorem 1.8 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. Buna göre $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}_1^3$ için;

- i) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ space-like ise $\vec{x} \times \vec{y}$ bir time-like vektördür.
- ii) $\vec{x}$ space-like ve $\vec{y}$ time-like ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- iii) $\vec{x}$ space-like ve $\vec{y}$ null vektör olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektör, eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- iv) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- v) $\vec{x}$ time-like ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.
- vi) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ time-like vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür [17].

İspat.

i) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ space-like vektörler olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0, \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle > 0$ ve $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, \|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

dir. Diğer yandan $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$ olduğundan $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$ olur. Burada $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri lineer bağımsızdır (Eğer vektörler lineer bağımlı olsa idiler $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ olurdu). Dolayısıyla $(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \neq 0$ dir. Böylece $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle < 0$ olup $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü bir time-like vektördür.

ii) $\vec{x}$ space-like ve $\vec{y}$ time-like vektörlüğünden $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0, \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle < 0$ ve $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, -\|\vec{y}\|^2 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

elde edilir. Buradan $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ olur. O halde $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.

iii) $\vec{x}$ space-like ve $\vec{y}$ null vektöroidüğünden $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

olur. Eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0$ dir. O zaman $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektördür. Eğer $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ ise $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ dir. Bu durumda $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like vektördür.

iv) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ null vektörler olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

elde edilir. Ortogonal iki null vektörü lineer bağımlı olduğundan $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ dir. O halde $\vec{x} \times \vec{y} \neq 0$ dir. Buradan $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle > 0$ olduğundan $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like bir vektördür.

v) $\vec{x}$ time-like ve $\vec{y}$ null vektör olduğundan

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2$$

dir. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ olduğundan $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü space-like'dir.

vi) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ time-like vektör olduğundan $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ve $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle < 0$ dir. Teorem 1.7 den

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

elde edilir. Diğer yandan $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| > \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ dir [3]. Böylece $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 > 0$ bulunur. O halde $\vec{x} \times \vec{y}$ space-like bir vektördür.

Tanım 1.9 $\mathbb{R}_1^n$, n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $R: \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ lineer ve örten bir dönüşüm olmak üzere $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle R(\vec{x}), R(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad (1.4)$$

ise R ye $\mathbb{R}_1^n$ üzerinde bir izometri ya da ortogonal dönüşüm denir [4].

Tanım 1.10 $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$R(u) = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

matrisine $\mathbb{R}_1^2$ de dönme matrisi denir [6].

Sonuç 1.11 $G = \{R(u) : u \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere (G, u) ikilisi bir gruptur. Bu grup $SO(1, 1)$ veya $SO_1(2)$ ile gösterilir [6].

Sonuç 1.12 G 'nin elamanlarının her biri bir lineer dönüşüme karşılık gelir [6].

Teorem 1.13 $R(u)$ matrisine karşılık gelen R lineer dönüşümü altında time-like vektörler time-like vektörlere, space-like vektörler space-like vektörlere ve null vektörler de null vektörlere dönüşür [6].

İspat. $\vec{X} = (x_1, x_2)$ bir time-like vektör olsun. O zaman $\vec{X} \in \mathbb{R}_1^2$ ve $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = -x_1^2 + x_2^2 < 0$ olur.(1.5) den

$$R(u)\vec{X} = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cosh u + x_2 \sinh u \\ x_1 \sinh u + x_2 \cosh u \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle R(u)\vec{X}, R(u)\vec{X} \rangle &= -(x_1 \cosh u + x_2 \sinh u)^2 + (x_1 \sinh u + x_2 \cosh u)^2 \\ &= -x_1^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) + x_2^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) \\ &= -x_1^2 + x_2^2 \\ &= \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0; \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da time-like vektörlerin time-like vektörlere dönüştüğünü gösterir. Benzer şekilde $\vec{X}$ in space-like veya null vektör olması halleri de gösterilebilir.

Tanım 1.14 Bir R matrisi $R^T \varepsilon R = \varepsilon$ şartını sağlıyorsa R matrisine Minkowski uzayında ortogonal matris denir [2].

Tanım 1.15 Bir B matrisi $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ eşitliğini sağlıyor ise bu matrise Minkowski uzayında anti-simetrik matris denir [13].

Tanım 1.16 3-boyutlu Minkowski uzayında, bir eksen etrafındaki, dönme ekseninin time-like, space-like veya null olmasına göre üç tipi vardır:

i) Eksen space-like ise $\varphi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < \varphi < \infty. \quad (1.6)$$

ii) Eksen time-like ise $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.7)$$

iii) Eksen null ise $\Psi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\Psi^2}{2} & -\frac{\Psi^2}{2} & \Psi \\ \frac{\Psi^2}{2} & 1 - \frac{\Psi^2}{2} & \Psi \\ \Psi & -\Psi & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < \Psi < \infty. \quad (1.8)$$

[4].

Tanım 1.17 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında time-like bir eğrinin Frenet-Serret formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

dir. Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve torsiyonudur.

Bu çalışmada incelemelerimiz eksenin time-like veya space-like olmasına göre yapılacaktır.

2.Bölüm

2. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDAKİ HAREKETLER

2.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Küresel Hareket

Koordinat Dönüşümü

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında F sabit ve M de hareketli iki koordinat çatısı olsun. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ de, sırasıyla, F ve M de aynı bir noktanın koordinatlarını tanımlayan iki time-like veya space-like vektör olmak üzere F den M ye bir dönme hareketi

$$\vec{x} = R\vec{y} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. (2.1) ifadesindeki R Minkowski anlamında ortogonal matristir. Dönme hareketi, determinantı +1 eşit olan ortogonal matrislerle ifade edilir. 3-boyutlu Minkowski uzayındaki dönmelere karşılık gelen matris grupları $SO(2, 1)$ veya $SO_1(3)$ ile gösterilir [2].

(2.1) dönüşümü; F sabit çatısından M hareketli çatısına olan bir dönme hareketidir. Burada bir P noktası göz önüne alındığında bunun ilk konumu $\vec{y}$ son konumu $\vec{x}$ dir. Böylece P noktası Minkowski uzayında hareketli bir noktadır.

3-boyutlu Minkowski uzayında cismin dönme eksenine roll eksen denir. Bu eksenin, sırasıyla, space-like ve time-like olmasına göre matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

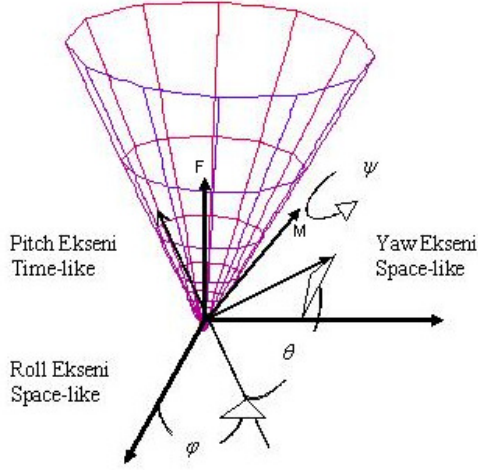
$$R_2 = \begin{bmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

şeklinde olur. Cismin hem roll eksenine hem de pitch eksenine dik olan eksene yaw eksen denir ve sırasıyla, space-like ve time-like olmasına göre matris gösterimi aşağıdaki gibi olur:

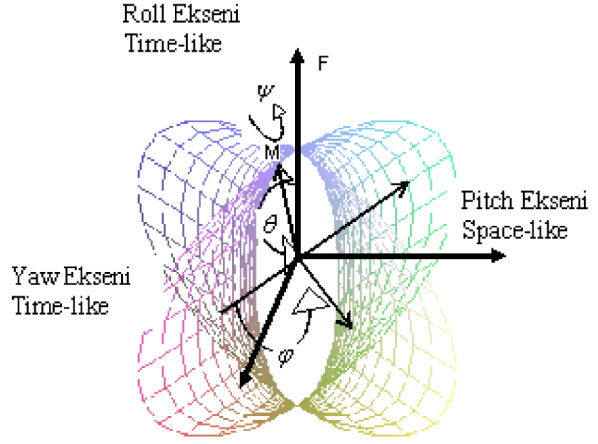
$$R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Bu eksenler şekil 2.1.a ve şekil 2.1.b de gösterildi.



Şekil 2.1.a

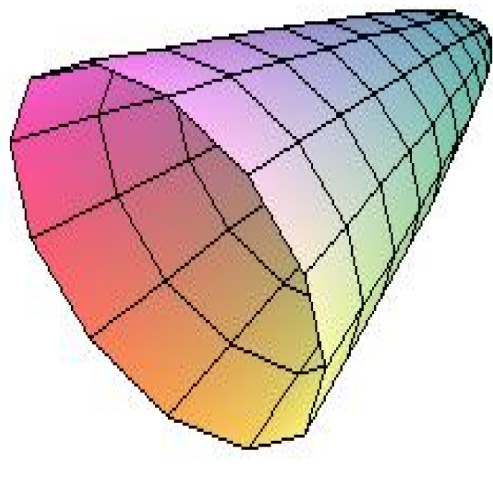


Şekil 2.1.b

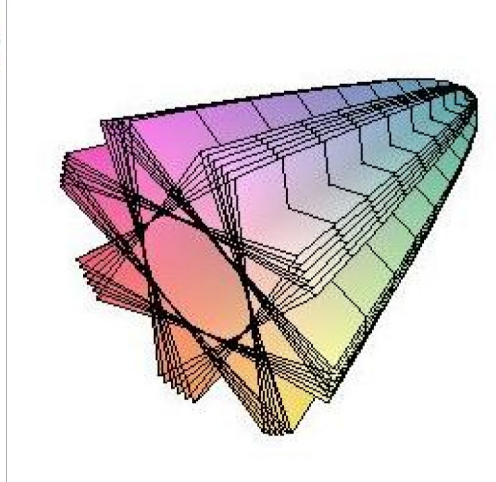
O halde F sabit çatısından M hareketli çatısına bir R dönme hareketi bu eksenler tarafından tanımlanabilir. Eğer roll eksen space-like ise

$$R = R_5 R_3 R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

şeklindedir. R nin oluşturduğu dönme yüzeyi ve bu yüzeyin hareketi, sırası ile, şekil 2.2.a ve şekil 2.2.b ile verildi.



Şekil 2.2.a

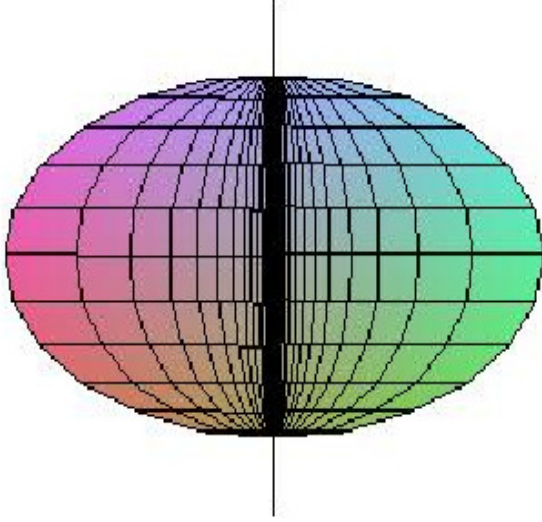


Şekil 2.2.b

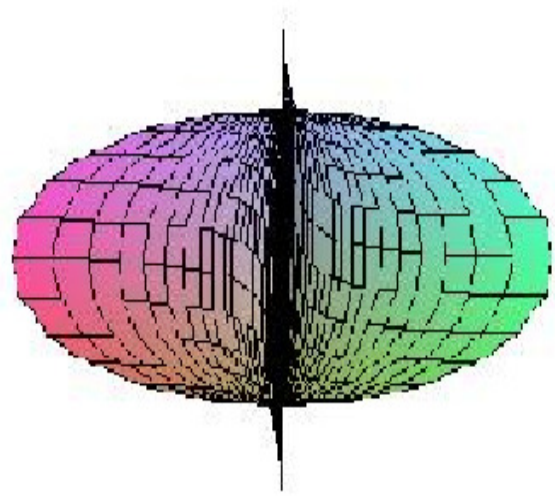
Eğer roll eksen time-like ise hareketin matris gösterimi;

$$R = R_6 R_4 R_2 = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

şeklinde olur. R 'nin oluşturduğu dönme yüzeyi ve hareketi şekil 2.3.a ve şekil 2.3.b ile verilir.



Şekil 2.3.a



Şekil 2.3.b

Teorem 2.1.1 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir dönme hareketi altında konumu değişmeyen, yani sabit kalan eksenler karakteristik vektörler tarafından verilir.

İspat. R ve ε 3-boyutlu Minkowski uzayında sırasıyla, ortogonal ve birim matrisler, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer R matrisi ε nun λ ile çarpımından ibaret ise

$$R = \lambda \varepsilon$$

olacağından, sıfırdan farklı $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü için

$$R(\vec{y}) = \lambda \varepsilon \vec{y} \quad (2.7)$$

elde edilir. Böylece (2.7) denklemi, karakteristik değer polinomuna genişletilebilir.

Şimdi R nin karakteristik değerlerini inceleyelim:

$$P_R(\lambda) = \det(R - \lambda \varepsilon) = 0$$

ifadesi açılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda^3 + \lambda^2(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + \lambda(M_{11} - M_{22} - M_{33}) + 1 = 0$$

olur. Burada M_{ii} , R ortogonal matrisinin i . satır ve i . sütun minörü olup $M_{ii} = r_{ii}$ dir. Dolayısıyla

$$\lambda^3 + (\lambda^2 + \lambda)(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + 1 = 0$$

ya da

$$(\lambda^3 + 1)(\lambda^2 + \lambda(r_{11} - r_{22} - r_{33}) + 1) = 0$$

olur. Burada $\lambda = -1$ in bir kök olduğu açıktır. Diğer kökler sırasıyla $+1$, hiperbolik veya kompleks olur. Burada sadece $\lambda = -1$ için inceleme yapılacaktır. $\lambda = -1$ karşılık gelen karakteristik vektör $\vec{b}$ olsun. $\vec{b}$ doğrultusundaki yani $v = t\vec{b}$ doğrusu üzerindeki bütün noktalar dönme süresince sabittir. Bu eksen cismin dönme eksenidir ve space-like veya time-like dır.

Teorem 2.1.2 (Cayley Formülü) $\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında bir ortogonal matris bir anti-simetrik matris tanımlar. Bunun terside doğrudur.

İspat. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ time-like veya spacelike iki vektör olsun. Dönme hareketi izometrik olduğundan

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = 0 \quad (2.8)$$

olup, böylece $\vec{x} - \vec{y}$ ve $\vec{x} + \vec{y}$ vektörleri Minkowski uzayında ortogonaldır. (2.8) ve (2.1) denklemleri birlikte gözönüne alınıp gerekli işlemler yapırsa

$$B = (R - \varepsilon^2)(R + \varepsilon^2)^{-1} \quad (2.9)$$

matrisi elde edilir. $B^T = -\varepsilon B \varepsilon$ olduğundan B matrisi anti-simetriktir. Dolayısıyla (2.9) ifadesi bize Minkowski uzayında Cayley formülünü verir. Diğer yandan (2.9) ifadesi R için çözüldüğünde

$$R = (\varepsilon^2 - B)^{-1}(B + \varepsilon^2) \quad (2.10)$$

elde edilir. Buradan da ispat tamamlanır.

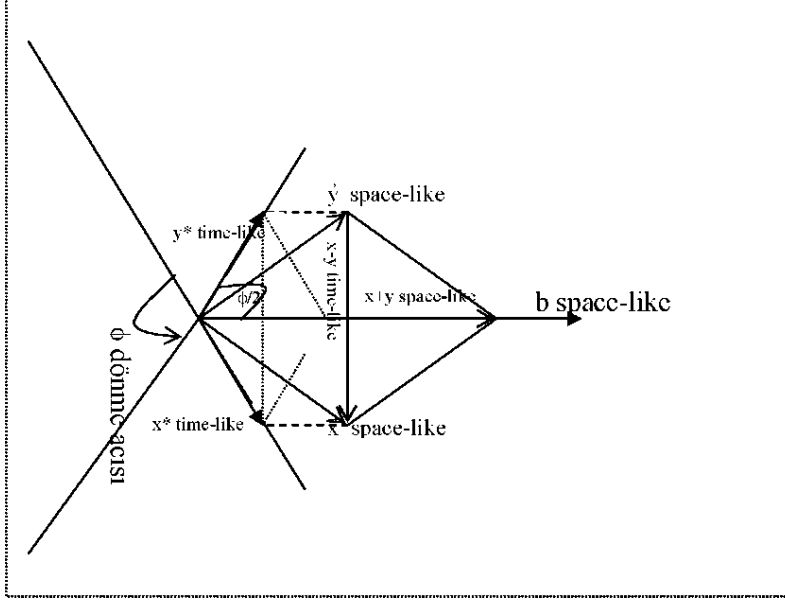
3×3 tipindeki B Minkowski uzayındaki anti-simetrik matrisi üç bağımsız elamana sahiptir, yani

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

dır. Bu matris $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörünün elamanlarından oluşmuştur. Keyfi bir $\vec{u} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün B matrisi ile çarpımı bu vektörün $\vec{b}$ ile vektörel çarpımına eşittir, yani

$$B\vec{u} = \vec{b} \times \vec{u} \quad (2.12)$$

dır. Böylece B anti-simetrik matrisini oluşturan $\vec{b}$ vektörü $\lambda = -1$ e karşılık gelen karakteristik vektördür.



Şekil 2.4

Tanım 2.1.3 (Rodrigues Denklemi) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ space-like (veya time-like) iki vektör ve $\vec{b}$ de space-like (veya time-like) vektör ise (2.12) den

$$(\vec{x} - \vec{y}) = B(\vec{x} + \vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{b} \times (\vec{x} + \vec{y}) \quad (2.13)$$

bağıntısı yazılabilir. (2.13) ifadesine Minkowski uzayında Rodrigues denklemi ve $\vec{b}$ vektörüne de Rodrigues vektörü denir.

$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ space-like (veya time-like) vektörler olduğundan $\vec{x} + \vec{y}$ de space-like (veya time-like) vektör olur. Diğer yandan $\vec{b}$ space-like (veya time-like) olduğundan (2.13) daki $\vec{x} - \vec{y}$ time-like olur.

$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ space-like (veya time-like) vektörlerin $\vec{b}$ space-like (veya time-like) vektörüne dik düzlem üzerine iz düşümleri, sırasıyla, $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}^*$ time-like (veya space-like) vektörler olsun. $\vec{x}^* + \vec{y}^*$ time-like (space-like) olduğundan

$$\langle \vec{b}, \vec{x}^* + \vec{y}^* \rangle = 0 \quad (2.14)$$

olur. O zaman

$$\cosh \theta = \frac{\langle \vec{b}, \vec{x}^* + \vec{y}^* \rangle}{\|\vec{b}\| \|\vec{x}^* + \vec{y}^*\|}$$

ifadesinden $\cosh \theta = 0$ bulunur. Ayrıca $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ ifadesinin her iki yanının mutlak değeri alınırsa

$$|\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta| = |1|$$

olur. Buradan $\cosh \theta = 0$ olduğundan $\sinh \theta = 1$ bulunur. Diğer yandan

$$\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{x}^* + \vec{y}^*\| \quad (2.15)$$

elde edilir. ϕ , $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}^*$ arasındaki açı olmak üzere şekil 2.4 den.

$$\tanh \frac{\phi}{2} = \frac{\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\|}{\|\vec{x}^* + \vec{y}^*\|} \quad (2.16)$$

olur. (2.15) ve (2.16) den

$$\left\| \vec{b} \right\| = \tanh \frac{\phi}{2} \quad (2.17)$$

bulunur. O halde $\vec{b}$ vektörünün bileşenleri

$$b_1 = \tanh \frac{\phi}{2} s_1, \quad b_2 = \tanh \frac{\phi}{2} s_2, \quad b_3 = \tanh \frac{\phi}{2} s_3 \quad (2.18)$$

olarak elde edilir. Burada $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ $\vec{b}$ yönündeki birim space-like (time-like) vektördür.

Tanım 2.1.4 (Euler Parametresi) (2.10) ifadesi; R ortogonal matrisi, ϕ dönme açısı, $\vec{s}$ birim vektörü, $\vec{s}$ nin bileşenlerinden oluşan anti-simetrik matris S ve $B = \tanh \frac{\phi}{2} S$ olmak üzere tekrar yazılırsa

$$R = (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 - \sinh \frac{\phi}{2} S)^{-1} (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 + \sinh \frac{\phi}{2} S) \quad (2.19)$$

biçiminde elde edilir. $C = (\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 + \sinh \frac{\phi}{2} S)$ denirse C matrisini oluşturan $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ sabitlerine R nin Minkowski uzayındaki Euler parametresi adı verilir ve

$$c_0 = \cosh \frac{\phi}{2}, c_1 = \sinh \frac{\phi}{2} s_1, c_2 = \sinh \frac{\phi}{2} s_2, c_3 = \sinh \frac{\phi}{2} s_3 \quad (2.20)$$

olarak bulunur.

(2.19) deki çarpımı açmak için $(\cosh \frac{\phi}{2} \varepsilon^2 - \sinh \frac{\phi}{2} S)^{-1}$ matrisinin inversi hesaplanır ve C ile çarpılırsa

$$R = (\cosh^2 \frac{\phi}{2} + \sinh^2 \frac{\phi}{2}) \varepsilon^2 + \sinh \phi S + (\cosh \phi - 1) S^2 \quad (2.21)$$

elde edilir. S anti-simetrik bir matris olduğundan $S^3 + S = 0$ dır. Diğer yandan $S^2 = \varepsilon(S^2)^T \varepsilon$ simetrik bir matris olduğundan

$$2 \sinh \phi(S) = R - \varepsilon R^T \varepsilon \quad (2.22)$$

bulunur. Böylece ϕ açısının R ve S matrislerine bağlı olduğu görülür.

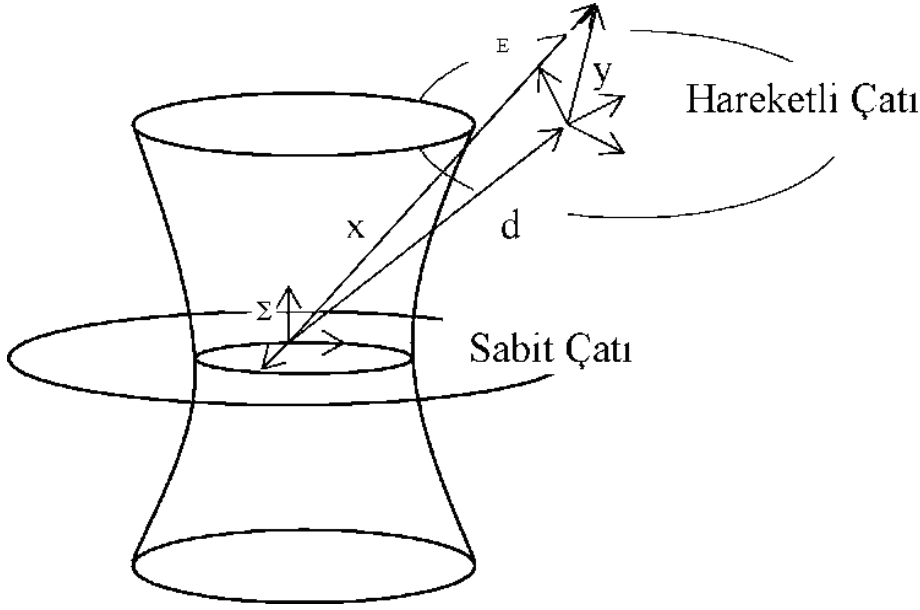
2.2 Minkowski Uzayda Katı Hareketler

Koordinat Dönüşümleri

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında, Σ sabit çatısı ve E hareketli çatısında bir noktanın time-like (space-like) vektörleri sırasıyla $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında bir katı hareket

$$\vec{x} = R\vec{y} + \vec{d} \quad (2.23)$$

dönüşümüyle tanımlanır. Burada $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bir ortogonal matris, $\vec{d} \in \mathbb{R}_1^3$ de bir öteleme vektörüdür.



Şekil 2.5

Bir Hareketin Vida Ekseni

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayda, bir katı hareket altında sabit olan hareketli cismin noktalarını göz önüne alalım. Bu noktalar, hareketin başlangıç ve bitiş anında aynı koordinatlara sahip olsunlar. Bu koordinatları $\vec{c}$ ile gösterelim. O zaman (2.23) dan

$$\vec{c} = R\vec{c} + d$$

veya

$$(\epsilon^2 - R)\vec{c} = d \Rightarrow \vec{c} = (\epsilon^2 - R)^{-1}d \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. R nin karakteristik değerlerinden biri $\lambda = -1$ olduğundan $(\epsilon^2 - R)$ regülerdir. Dolayısıyla burada sabit bir nokta ve bu noktadan geçen sabit bir doğru vardır. Bu doğruya Minkowski uzayında vida ekseni denir.

$\lambda = 1$ karakteristik kök için $(\epsilon^2 - R)$ singüler olup burada sabit bir $\vec{c}$ vektörü yoktur. Sadece sabit bir doğru vardır ve bu doğru hareketin vida eksenidir. Bu doğrunun doğrultmanı $\vec{b}$ Rodrigues vektörüdür.

3.Bölüm

3.MINKOWSKI UZAYINDA ÖZEL HAREKETLER

3.1 Minkowski Uzayında Frenet-Serret Hareket

Σ Minkowski uzayında sabit bir çatı, Γ da bu çatıda bir eğri olsun. Frenet-Serret hareketi bu çatıdaki Γ eğrisiyle tanımlanır. Γ eğrisi üzerinde o_{xyz} çatısı $\mathbb{Q}_{\xi\eta\rho}$ üçyüzlüsü ile çakışır. O zaman $\mathbb{Q}_{\xi};\Gamma$ 'nın teğeti, $\mathbb{Q}_{\eta};\Gamma$ 'nın normali, $\mathbb{Q}_{\rho}$ ise Γ 'nın binormalidir.

P ve p sırasıyla Σ (sabit çatı), E (hareketli çatı) çatılarında hareketli bir noktanın yer vektörleri olmak üzere

$$P = Ap + d \quad (3.1)$$

ile hareket tanımlanır. Burada A Minkowski uzayında ortogonal matris ve $A\varepsilon A^T = \varepsilon, d \in \mathbb{R}_1^3$ dür. Hem A hemde d hareket parametresine bağlıdır. Hareket parametresi olarak Γ 'nın s yay uzunluğunu alacağız ve s 'ye göre türevlerini bulacağız.

Eğer $t = (t_1, t_2, t_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ sırasıyla $\mathbb{Q}_{\xi}, \mathbb{Q}_{\eta}, \mathbb{Q}_{\rho}$ 'nun birim vektörleri olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & b_1 \\ t_2 & n_2 & b_2 \\ t_3 & n_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dir. (3.1) denkleminin türevini alırsak

$$P' = A'p + d' \quad (3.3)$$

olur. Minkowski uzayında Frenet-Serret formülleri;

$$t' = \kappa n, \quad n' = \kappa t + \tau b, \quad b' = -\tau n, \quad (3.4)$$

dir. Burada κ ve τ sırasıyla Γ eğrisinin eğriligi ve torsiyonudur. (3.1) eşitliğinden

$$p = A^{-1}(P - d) \quad (3.5)$$

bulunur. $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ olup (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden

$$P' = A'A^{-1}(P - d) + d' \quad (3.6)$$

olup , burada $\Omega = A'A^{-1}$ yada $\Omega = A'\varepsilon A^T\varepsilon$ dır. Ω Minkowski uzayında anti-simetrik matristir. Şimdi Ω matrisini bulalım .

$$A' = \begin{bmatrix} \kappa n_1 & \kappa t_1 + \tau b_1 & \tau n_1 \\ \kappa n_2 & \kappa t_2 + \tau b_2 & \tau n_2 \\ \kappa n_3 & \kappa t_3 + \tau b_3 & \tau n_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\Omega = \begin{bmatrix} \kappa n_1 & \kappa t_1 + \tau b_1 & \tau n_1 \\ \kappa n_2 & \kappa t_2 + \tau b_2 & \tau n_2 \\ \kappa n_3 & \kappa t_3 + \tau b_3 & \tau n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan ise

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \kappa b_3 + \tau t_3 & -\kappa b_2 + \tau t_2 \\ -\kappa b_3 + \tau t_3 & 0 & -\kappa b_1 + \tau t_1 \\ \kappa b_2 - \tau t_2 & \kappa b_1 - \tau t_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son olarak işleminin sonucu

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \kappa b_3 + \tau t_3 & -\kappa b_2 + \tau t_2 \\ \kappa b_3 + \tau t_3 & 0 & -\kappa b_1 + \tau t_1 \\ -\kappa b_2 + \tau t_2 & \kappa b_1 - \tau t_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

elde edilir. Dolayısıyla Minkowski uzayında anti-simetrik matrisi bulunur. Minkowski uzayında $\vec{\omega}$ ani açısal hız vektörünün Σ sabit çatısındaki bileşenleri (3.7) matrisinden

$$\omega_x = b_1\kappa + t_1\tau, \quad \omega_y = b_2\kappa + t_2\tau, \quad \omega_z = b_3\kappa + t_3\tau$$

olarak elde edilir.

3.2 Minkowski Uzayında Darboux' s Hareketi

3.2.1 Minkowski Uzayında Time-Like Darboux' s Hareketi

Bu bölümde dönme eksenini time-like olan Darboux's hareketi inceleyeceğiz. a sabit dönme eksenini olsun. a sabit eksenini hem Σ sabit çatısında hemde E hareketli çatısındadır. O_x ve o_x time-like eksenleri başlangıçta a eksenine paraleldir. Bu harekette dönme açısı ϕ yi hareket parametresi olarak alacağız. Şimdi dönme hareketi gözönüne alıp ve öteleme kısmını eklersek

$$X = x + d_1(\phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi + d_2(\phi) \quad (3.8)$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + d_3(\phi)$$

olur. Burada O_x ve o_x time-like eksenleri a eksenine paralel, fakat orijin ve diğer koordinat eksenleri keyfidir. Şimdi $d_i(\phi)$ fonksiyonlarını belirleyelim. (x_i, y_i, z_i) E hareketli uzayında üç nokta ve $(U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i})$ düzlemleri Σ sabit uzayında ($i = 1, 2, 3$) onların pathları olsun. Bu takdirde

$$U_{1i}[x_i + d_1(\phi)] + U_{2i}[y_i \cos \phi - z_i \sin \phi + d_2(\phi)] + U_{3i}[y_i \sin \phi + z_i \cos \phi + d_3(\phi)] + U_{4i} = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlik ϕ 'nin bütün değerleri ve $i = 1, 2, 3$ için sağlanmaktadır. Biz bu denkleminin çözümünden c_{ij} leri bulmuştuk. Bu bize üç lineer d_1, d_2, d_3 eşitliklerini verir. Ayrıca kabul edelim ki $|U_{1i} \ U_{2i} \ U_{3i}| \neq 0$ determinantı sıfırdan farklı olsun.

Eğer dönme eksenini time-like ise

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

olur. Burada c_{ij} ler sabitler. Bulduğumuz son kısmı düzenlersek;

$$X = x + c_{11} + c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi + c_{21} + c_{22} \cos \phi + c_{23} \sin \phi \quad (3.9)$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + c_{31} + c_{32} \cos \phi + c_{33} \sin \phi$$

Aşağıdaki koordinat dönüşümlerini yaparsak

$$X = X' , Y = Y' + c_{21}, Z = Z' + c_{31}$$

$$x = x' - c_{12} - c_{11} , y = y' - c_{22} , z = z' - c_{32}$$

bu dönüşümleri (3.9) sisteminde yazarsak

$$X' = x' - c_{12} - c_{11} + c_{11} + c_{12} \cos \phi + c_{13} \sin \phi$$

ve eşitliği düzenlenirse

$$X' = x' - c_{12}(1 - \cos \phi) + c_{13} \sin \phi$$

elde edilir. Benzer olarak (3.9) in ikinci eşitliğini gözönüne alırsak

$$Y' + c_{21} = (y' - c_{22}) \cos \phi - (z' - c_{32}) \sin \phi + c_{21} + c_{22} \cos \phi + c_{23} \sin \phi$$

ve buradan

$$Y' = y' \cos \phi - c_{22} \cos \phi - z' \sin \phi + c_{32} \sin \phi + c_{22} \cos \phi + c_{23} \sin \phi$$

$$Y' = y' \cos \phi - z' \sin \phi + (c_{32} + c_{23}) \sin \phi$$

bulunur. Son olarakta (3.9) son eşitliğine koordinat dönüşümünü uygularsak

$$Z' + c_{31} = (y' - c_{22}) \sin \phi + (z' - c_{32}) \cos \phi + c_{31} + c_{32} \cos \phi + c_{33} \sin \phi$$

ve bu son eşitlik düzenlenirse

$$Z' = y' \sin \phi + z' \cos \phi + (c_{33} - c_{22}) \sin \phi$$

bulunur.

Koordinat dönüşümleri ile oluşan eşitlikler ile

$$e_1 = c_{32} + c_{23} , e_2 = c_{33} - c_{22}$$

eşitliklerini gözönüne alırsak

$$X' = x' - c_{12}(1 - \cos \phi) + c_{13} \sin \phi$$

$$Y' = y' \cos \phi - z' \sin \phi + (c_{32} + c_{23}) \sin \phi \quad (3.10)$$

$$Z' = y' \sin \phi + z' \cos \phi + (c_{33} - c_{22}) \sin \phi$$

sistemi elde edilir.

Ayrıca koordinat dönme sistemini

$$Y'' = Y' \cos \beta + Z' \sin \beta, Z'' = -Y' \sin \beta + Z' \cos \beta$$

$$y'' = y' \cos \beta + z' \sin \beta, z'' = -y' \sin \beta + z' \cos \beta$$

eşitliklerini (3.10) sisteminde uygularsak

$$Y'' = (y' \cos \phi - z' \sin \phi + e_1 \sin \phi) \cos \beta + (y' \sin \phi + z' \cos \phi + e_2 \sin \phi) \sin \beta$$

elde edilir. Buradan da

$$Y'' = (y' \cos \beta + z' \sin \beta) \cos \phi - (-y' \sin \beta + z' \cos \beta) \sin \phi + (e_1 \cos \beta + e_2 \sin \beta) \sin \phi$$

bulunur. Böylece

$$Y'' = y'' \cos \phi - z'' \sin \phi + (e_1 \cos \beta + e_2 \sin \beta) \sin \phi \quad (3.11)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\tan \beta = -\frac{e_1}{e_2}$$

olduğundan

$$e_2 \sin \beta = -e_1 \cos \beta$$

olur. Bu son eşitliği (3.11) de yerine yazarsak

$$Y'' = y'' \cos \phi - z'' \sin \phi$$

bulunur.

Şimdi ise Z'' koordinat dönmesini gözönüne alırsak

$$Z'' = -(y' \cos \phi - z' \sin \phi + e_1 \sin \phi) \sin \beta + (y' \sin \phi + z' \cos \phi + e_2 \sin \phi) \cos \beta$$

ve bu denklemi düzenlersek

$$Z'' = (y' \cos \beta + z' \sin \beta) \sin \phi + (-y' \sin \beta + z' \cos \beta) \cos \phi - e_1 \sin \phi \sin \beta + e_2 \sin \phi \cos \beta$$

elde edilir. Buradan ise

$$Z'' = y'' \sin \phi + z'' \cos \phi + (-e_1 \sin \phi \sin \beta + e_2 \sin \phi \cos \beta) + (-e_1 \sin \beta + e_2 \cos \beta) \sin \phi$$

bulunur. Bu denklemde

$$(-e_1 \sin \beta + e_2 \cos \beta) = a$$

denirse

$$Z'' = y'' \sin \phi + z'' \cos \phi + a \sin \phi$$

eşitliğini elde ederiz.

Bulduğumuz bu son eşitlikle beraber eğer dönme eksenini time-like eksenine ise Darboux's hareketi

$$X = x + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi \tag{3.12}$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + a \sin \phi$$

şeklinde olur bulunur. Burada a, b, c 'ler sabitlerdir.

3.2.2 Minkowski Uzayında Space-Like Darboux' s Hareketi

Bu bölümde dönme eksenini space-like olan Darboux's hareketi inceleyeceğiz. a sabit dönme eksenini olsun. a sabit eksenini hem Σ sabit çatısında hemde E hareketli çatısındadır. O_z ve o_z space-like eksenleri başlangıçta a eksenine paraleldir. Bu harekette dönme açısı ϕ yi hareket parametresi olarak alacağız. Şimdi dönme hareketi gözetimine alıp ve öteleme kısmını eklersek

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi + d_1(\phi)$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi \sin \phi + d_2(\phi) \quad (3.13)$$

$$Z = z + d_3(\phi)$$

olur. Burada O_z ve o_z space-like eksenleri a eksenine paralel, fakat orjin ve diğer koordinat eksenleri keyfidir. Şimdi $d_i(\phi)$ fonksiyonlarını belirleyelim. (x_i, y_i, z_i) E hareketli uzayında üç nokta ve $(U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i})$ düzlemleri Σ sabit uzayında ($i = 1, 2, 3$) onların pathları olsun. Bu takdirde

$$U_{1i}[x_i \cosh \phi + y_i \sinh \phi + d_1(\phi)] + U_{2i}[x_i \sinh \phi + y_i \cosh \phi \sin \phi + d_2(\phi)] + U_{3i}[z_i + d_3(\phi)] + U_{4i} = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlik ϕ 'nin bütün değerleri ve $i = 1, 2, 3$ için sağlanmaktadır. Biz bu denkleminin çözümünden c_{ij} leri bulmuştuk. Bu bize üç lineer d_1, d_2, d_3 eşitliklerini verir. Ayrıca kabul edelim ki $|U_{1i} \ U_{2i} \ U_{3i}| \neq 0$ determinantı sıfırdan farklı olsun.

Eğer dönme eksenini space-like ise

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \phi \\ \sinh \phi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

olur. Burada c_{ij} ler sabitler. Bulduğumuz son kısmı düzenlersek;

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi + c_{11} \cosh \phi + c_{12} \sinh \phi + c_{13}$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + c_{21} \cosh \phi + c_{22} \sinh \phi + c_{23} \quad (3.15)$$

$$Z = z + c_{31} \cosh \phi + c_{32} \sinh \phi + c_{33}$$

Aşağıdaki koordinat dönüşümlerini yaparsak

$$X = X' + c_{13}, Y = Y' + c_{23}, Z = Z'$$

$$x = x' - c_{11}, y = y' - c_{21}, z = z' - c_{31} - c_{33}$$

bu dönüşümleri (3.15) sisteminde yazarsak

$$X' + c_{13} = (x' - c_{11}) \cosh \phi + (y' - c_{21}) \sinh \phi + c_{11} \cosh \phi + c_{12} \sinh \phi + c_{13}$$

ve eşitliği düzenlenirse

$$X' = x' \cosh \phi + y' \sinh \phi + \sinh \phi (c_{21} + c_{12})$$

elde edilir. Benzer olarak (3.15) in ikinci eşitliğini gözönüne alırsak

$$Y' + c_{23} = (x' - c_{11}) \sinh \phi + (y' - c_{21}) \cosh \phi + c_{21} \cosh \phi + c_{22} \sinh \phi + c_{23}$$

ve buradan

$$Y' = x' \sinh \phi + y' \cosh \phi + (c_{22} - c_{11}) \sinh \phi$$

bulunur. Son olarakta (3.15) deki son eşitliğine koordinat dönüşümünü uygularsak

$$Z' = z' - c_{31} - c_{33} + c_{31} \cosh \phi + c_{32} \sinh \phi + c_{33}$$

ve bu son eşitlik düzenlenirse

$$Z' = z' - c_{31}(1 - \cosh \phi) + c_{32} \sinh \phi$$

bulunur.

Koordinat dönüşümler ile oluşan eşitlikler ile

$$e_1 = c_{12} + c_{21}, e_2 = -c_{11} + c_{22}$$

eşitliklerini gözönüne alırsak

$$X' = x' \cosh \phi + y' \sinh \phi + e_1 \sinh \phi$$

$$Y' = x' \sinh \phi + y' \cosh \phi + e_2 \sinh \phi \quad (3.16)$$

$$Z' = z' - c_{31}(1 - \cosh \phi) + c_{32} \sinh \phi$$

denklem sistemi elde edilir.

Ayrıca koordinat dönme sistemini

$$X'' = X' \cosh \beta + Y' \sinh \beta, Y'' = X' \sinh \beta + Y' \cosh \beta$$

$$x'' = x' \cosh \beta + y' \sinh \beta, y'' = x' \sinh \beta + y' \cosh \beta$$

eşitliklerini (3.16) sisteminde uygularsak

$$X'' = X' \cosh \beta + Y' \sinh \beta$$

$$X'' = (x' \cosh \phi + y' \sinh \phi + e_1 \sinh \phi) \cosh \beta +$$

$$(x' \sinh \phi + y' \cosh \phi + e_2 \sinh \phi) \sinh \beta$$

elde edilir. Buradan da

$$X'' = (x' \cosh \beta + y' \sinh \beta) \sinh \phi + (y' \cosh \beta + x' \sinh \beta) \sinh \phi$$

$$+ (e_1 \cosh \beta + e_2 \sinh \beta) \sinh \phi$$

bulunur. Böylece

$$X'' = x'' \cosh \phi + y'' \sinh \phi + (e_1 \cosh \beta + e_2 \sinh \beta) \sinh \phi \quad (3.17)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\tanh \beta = -\frac{e_1}{e_2}$$

olduğundan

$$e_2 \sin \beta = -e_1 \cos \beta$$

olur. Bu son eşitliği (3.17) de yerine yazarsak

$$X'' = x'' \cosh \phi + y'' \sinh \phi$$

bulunur. Şimdi ise Y'' koordinat dönmesini gözönüne alırsak

$$Y'' = X' \sinh \beta + Y' \cosh \beta$$

$$Y'' = (x' \cosh \beta \sinh \beta + y' \sinh \phi \sinh \beta + e_1 \sinh \phi \sinh \beta$$

$$x' \sinh \phi \cosh \beta + y' \cosh \phi \cosh \beta + e_2 \sinh \phi \cosh \beta.$$

ve bu denklemi düzenlersek

$$Y'' = (x' \cosh \beta \sinh \beta + y' \sinh \phi \sinh \beta + e_1 \sinh \phi \sinh \beta$$

$$x' \sinh \phi \cosh \beta + y' \cosh \phi \cosh \beta + e_2 \sinh \phi \cosh \beta.$$

$$Y'' = (x' \cosh \beta + y' \sinh \beta) \sinh \phi + (x' \sinh \beta + y' \cosh \beta) \cosh \phi +$$

$$e_1 \sinh \phi \sinh \beta + e_2 \sinh \phi \cosh \beta.$$

elde edilir. Buradan ise

$$Y'' = x'' \sinh \phi + y'' \cosh \phi + (e_1 \sinh \beta + e_2 \cosh \beta) \sinh \phi$$

bulunur. Bu denklemde

$$e_1 \sinh \beta + e_2 \cosh \beta = a$$

denirse

$$Y'' = x'' \sinh \phi + y'' \cosh \phi + a \sinh \phi$$

eşitliğini elde ederiz. Bulduğumuz bu son denklemle beraber dönme eksenini space-like eksen olan Darboux's hareketi;

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi \quad (3.18)$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

olur. Burada a, b, c 'ler sabitlerdir.

3.3 Minkowski Uzayında Mannheim's Hareketi

3.3.1 Minkowski Uzayında Time-Like Dönme Eksenli Mannheim's Hareketi

Bu bölümde dönme eksenini time-like olan Mannheim's hareketini incelenecek. Time-like Mannheim's hareketi time-like Darboux's hareketinin inversi bulunarak elde edilir. Yani invers time-like Darboux's hareketine time-like-Mannheim hareketi denir. Şimdi dönme eksenini time-like olan Darboux's hareketini yani (3.12) hareketini gözönüne alırsak

$$X = x + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + a \sin \phi$$

bir önceki bölümde bulmuştuk. Şimdi ise (3.12) de x, y, z 'ler çözülüp , ters fonksiyonların özelliğinden sırasıyla x, y, z ile X, Y, Z 'nin yerleri değiştirilip sonra da ϕ açısının yerine $(-\phi)$ yazılırsa dönme eksenini time-like olan Mannheim 's hareketi elde edilir. İlk olarak (3.12) hareketinden

$$\frac{Y + z \sin \phi}{\cos \phi} = y$$

eşitliğini (3.12) 'nin son eşitliğinde yerine yazarsak

$$z = -Y \sin \phi + Z \cos \phi - a \sin \phi \cos \phi$$

denklemini buluruz. Bulduğumuz bu son eşitlikte y ile Y ve z ile Z nin değiştirilip ϕ açısının yerinede $(-\phi)$ açısı yazılırsa

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + a \sin \phi \cos \phi$$

bulunur. Benzer olarak (3.12) 'den

$$\frac{Z - y \sin \phi - a \sin \phi}{\cos \phi} = z$$

eşitliğini (3.12) 'nin ikinci denkleminde yerine yazarsak

$$y = Y \cos \phi + Z \sin \phi - a \sin^2 \phi$$

bulunur. Ters fonksiyonların özelliğinden y ile Y ve z ile Z nin yerleri değiştirilip ϕ açısının yerinede $(-\phi)$ yazılırsa

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi - a \sin^2 \phi$$

elde edilir. Bulduğumuz bu eşitliklerden Minkowski Uzayında dönme eksenini time-like eksen olan Mannheim hareketi;

$$X = x + b \sin \phi - c(1 - \cos \phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi - a \sin^2 \phi \quad (3.19)$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + a \sin \phi \cos \phi$$

şeklinde bulunur.

3.3.2 Minkowski Uzayında Space-Like Dönme Eksenli Mannheim' s Hareketi

Bu bölümde dönme eksenini space-like olan Mannheim's hareketini inceleyeceğiz. Space-like Mannheim's hareketi space-like Darboux's hareketinin inversi bulunarak elde edilir. Yani invers Darboux's hareketine Mannheim hareketi denir. Şimdi dönme eksenini space-like olan Darboux's hareketini yani (3.18) hareketini gözönüne alırsak,

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

olur. Şimdi ise (3.18) de x, y, z 'ler çözümlüp , ters fonksiyonların özelliğinden sırasıyla x, y, z ile X, Y, Z 'nin yerleri değiştirilip sonra da ϕ açısının yerine $(-\phi)$ yazılırsa dönme eksenini time-like olan Mannheim 's hareketi elde edilir. İlk olarak (3.18) hareketinden,

$$\frac{X - y \sinh \phi}{\cosh \phi} = x$$

bu ifadeyi (3.18) 'nin ikinci denkleminde yazılırsa

$$Y = \frac{x - y \sinh \phi}{\cosh \phi} \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi$$

denklemini buluruz. Bu son denklemi düzenlersek,

$$y = Y \cosh \phi - a \sinh \phi \cosh \phi - X \sinh \phi$$

olur. Bulduğumuz bu son eşitlikte y ile Y ve x ile X nin değiştirilip ϕ açısının yerinede $(-\phi)$ açısı yazılırsa

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi \cosh \phi$$

bulunur. Benzer olarak (3.18) 'den

$$y = \frac{Y - x \sinh \phi - a \sinh \phi \cosh \phi}{\cosh \phi}$$

denklemini (3.18) 'in birinci denkleminde yazarsak

$$X = x \cosh \phi + \frac{Y - x \sinh \phi - a \sinh \phi \cosh \phi}{\cosh \phi} \sinh \phi$$

$$X = x \cosh \phi + \frac{Y \sinh \phi - x \sinh^2 \phi - a \sinh^2 \phi \cosh \phi}{\cosh \phi}$$

buradan is

$$x = X \cosh \phi - Y \sinh \phi + a \sinh^2 \phi \cosh \phi$$

olur. Bulduğumuz bu son eşitlikte x ile X ve y ile Y nin değiştirilip ϕ açısının yerinede $(-\phi)$ açısı yazılırsa,

$$X = x \cosh \phi + Y \sinh \phi + a \sinh^2 \phi \cosh \phi$$

elde edilir. Bulduğumuz bu eşitliklerden Minkowski Uzayında dönme eksenini space-like eksen olan Mannheim hareketi;

$$\begin{aligned} X &= x \cosh \phi + Y \sinh \phi + a \sinh^2 \phi \cosh \phi \\ Y &= x \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi \cosh \phi \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

elde edilir.

3.4 Minkowski Uzayında Schoenflies Hareketi

3.4.1 Minkowski Uzayında Time-Like Dönme Eksenli Schoenflies Hareketi

Schoenflies hareketi Darboux's ve Mannheim's hareketlerinin genelleştirilmesiyle elde edilir. Dönme eksenini time-like olmak üzere Minkowski uzayında Schoenflies hareketi;

$$X = x + d(\phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi + e(\phi) \quad (3.21)$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + f(\phi)$$

olur. Burada d, e, f üç keyfi fonksiyondur. Şimdi Minkowski uzayında time-like eksenli Darboux's hareketi (3.12) 'yi gözönüne alırsak

$$X = x + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi$$

$$Z = y \sin \phi + z \cos \phi + a \sin \phi$$

olur. Bu harekette

$$x = x', y = z' - a, z = -y', Y = Z' - a, Z = -Y', X = X'$$

koordinat dönüşümelerini uygularsak

$$X' = x' + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

bulunur. Şimdi diğer denklemlere koordinat dönüşümelerini uygularsak

$$Z' - a = z' \cos \phi - a \cos \phi + y' \sin \phi$$

ve bu eşitliği düzenlersek

$$Z' = z' \cos \phi + y' \sin \phi + a(1 - \cos \phi)$$

olur. Son olarakta

$$-Y' = z' \sin \phi - a \sin \phi - y' \cos \phi + a \sin \phi$$

eşitliğinden

$$Y' = y' \cos \phi - z' \sin \phi$$

bulunur. (3.12) hareketinin çatı dönüşümleri sonucunda

$$X = x + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi \tag{3.22}$$

$$Z = z \cos \phi + y \sin \phi + a(1 - \cos \phi)$$

bulunur. Şimdi (3.22) hareketinin invers hareketi ; yani X ile x ve Y ile y nin rolleri değiştirilirse ve sonrada ϕ açısı yerinede $(-\phi)$ yazılırsa Mannheim's hareketi elde edilir. Şimdi (3.22) hareketinde X ile x ve Y ile y nin rolleri değiştirilirse

$$x = X + b \sin \phi + c(1 - \cos \phi)$$

$$y = Y \cos \phi - Z \sin \phi \tag{3.23}$$

$$z = Z \cos \phi + Y \sin \phi + a(1 - \cos \phi)$$

bulunur. Daha sonra (3.23) denklem sisteminden

$$Y = \frac{y + Z \sin \phi}{\cos \phi}$$

eşitliğini , (3.23) denklem sisteminin son eşitliğinde yazarsak

$$z = Z \cos \phi + \frac{y + Z \sin \phi}{\cos \phi} \sin \phi + a(1 - \cos \phi)$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenip ϕ açısı yerine $(-\phi)$ yazılırsa

$$Z = z \cos \phi + y \sin \phi - a(1 - \cos \phi)$$

bulunur. Benzer olarak (3.23) denklem sisteminden aşağıdaki ifade verilebilir;

$$Z = \frac{z}{\cos \phi} - \frac{Y \sin \phi}{\cos \phi} + \frac{a(1 - \cos \phi)}{\cos \phi}$$

Bulduğumuz son eşitlik (3.23) denklem sisteminin ikinci eşitliğine yazılıp düzenlendikten sonra ϕ açısı yerinede $(-\phi)$ yazılırsa

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi - a(1 - \cos \phi) \sin \phi$$

bulunur. Dolayısıyla Minkowski uzayında time-like dönme eksenli Mannheim's hareketi;

$$\begin{aligned} X &= x + b \sin \phi - c(1 - \cos \phi) \\ Y &= y \cos \phi - z \sin \phi - a(1 - \cos \phi) \sin \phi \\ Z &= z \cos \phi + y \sin \phi - a(1 - \cos \phi) \end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir.

3.4.2 Minkowski Uzayında Space-Like Dönme Eksenli Schoenflies Hareketi

Schoenflies hareketi Darboux's ve Mannheim's hareketlerinin genelleştirilmesiyle elde edilir. Dönme eksenini space-like ise Schoenflies hareketi;

$$X = x \cosh \phi - y \sinh \phi + d(\phi)$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + e(\phi) \quad (3.25)$$

$$Z = z + f(\phi)$$

olarak elde edilir. Burada $d(\phi), e(\phi), f(\phi)$ keyfi üç fonksiyodur. Şimdi (3.18) space-like dönme eksenli Darboux's hareketini gözönüne alırsak;

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + a \sinh \phi$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

hareketinde,

$$x = y' - a, y = -x', z = z' \text{ ve } X = Y' - a, Y = -X', Z = Z'$$

çatı dönüştürmelerini (3.18) space-like Darboux's hareketine uygularsak ;

$$Y' - a = y' \cosh \phi - a \cosh \phi - x' \sinh \phi$$

$$Y' = y' \cosh \phi - a \cosh \phi + a(1 - \cosh \phi)$$

bulunur. Benzer olarak (3.18) 'in diğer eşitliklerine uygularsak

$$-X' = y' \sinh \phi - a \sinh \phi - x' \cosh \phi + a \sinh \phi$$

$$X' = x' \cosh \phi - y' \sinh \phi$$

elde edilir. Son olarak da

$$Z' = z' + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

eşitliğini buluruz. (3.18) hareketinin çatı dönüşümleri sonucunda

$$X = x \cosh \phi - y \sinh \phi$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi + a(1 - \cosh \phi) \quad (3.26)$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi (3.26) hareketinin invers hareketi ; yani X ile x ve Y ile y nin rolleri değiştirilirse ve sonrada ϕ açısı yerinede $(-\phi)$ yazılırsa Mannheim's hareketi elde edilir. Şimdi (3.26) hareketinde X ile x ve Y ile y nin rolleri değiştirilirse

$$x = X \cosh \phi - Y \sinh \phi$$

$$y = X \sinh \phi + Y \cosh \phi + a(1 - \cosh \phi) \quad (3.27)$$

$$Z = z + b \sinh \phi + c(1 - \cosh \phi)$$

bulunur. Daha sonra (3.27) denklem sisteminden

$$X = \frac{x + Y \sinh \phi}{\cosh \phi}$$

eşitliğini (3.27)' nin ikinci denkleminde yerine yazarsak

$$y = \frac{x + Y \sinh \phi}{\cosh \phi} \sinh \phi + Y \cosh \phi + a(1 - \cosh \phi)$$

olur. Bu son eşitlik düzenlenip ve ϕ açısı yerinede $(-\phi)$ yazılırsa

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi - a \cosh \phi(1 - \cosh \phi)$$

bulunur. Benzer olarak (3.27) 'den

$$Y = \frac{y}{\cosh \phi} - \frac{X \sinh \phi}{\cosh \phi} - \frac{a(1 - \cosh \phi)}{\cosh \phi}$$

eşitliğini (3.27) denklem sisteminin birinci eşitliğinde yerine yazarsak

$$X = x \cosh \phi - y \sinh \phi + a(1 - \cosh \phi) \sinh \phi$$

bulunur. Son eşitlikte ϕ açısı yerinede $(-\phi)$ yazılırsa

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi - a(1 - \cosh \phi) \sinh \phi$$

elde edilir. Dolayısıyla Mannheim's hareketi

$$X = x \cosh \phi + y \sinh \phi - a(1 - \cosh \phi) \sinh \phi$$

$$Y = x \sinh \phi + y \cosh \phi - a \cosh \phi (1 - \cosh \phi) \quad (3.28)$$

$$Z = z + b \sinh \phi - c(1 - \cosh \phi)$$

elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

- 1) Bu çalışma sırasında, Minkowski ve Lorentz uzayındaki temel kavramlar ve teoremler incelendi ve bir kısmı tezde verildi.
- 2) 3-boyutlu Minkowski uzayında dönme ve katı hareketler incelendi. Dönme hareketi için Minkowski uzayında Cayley formülü, Rodrigues denklemi ve Euler parametreleri ile ilgili araştırmalar yapıldı. Katı hareketin koordinat dönüşümü ve vida eksenı verildi.
- 3) Dönme eksenı time-like ve space-like olan Darboux 's hareketi araştırıldı. Darboux 's hareketinin invers hareketi olan Mannheim 's hareketi incelendi. Darboux's ve Mannheim 's hareketlerinin genelleştirilmiş hali Scoenflies hareketi elde edildi.
- 4) 3-boyutlu Minkowski uzayında, dönme ekseninin Null olmasına göre benzer sonuçlar araştırılabilir.
- 5) 3-boyutlu Dual Minkowski uzayında, dönme ve katı hareketin cebirsel özellikleri, hareketin kinematik ve diferensiyel geometrisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **ASİL, V.**, 1992, Kompleks Üstel Dönüşümlerin Lie Grubu ve Kompleks Üstel Hareketler, *Doktora Tezi*. F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü , Elazığ.
- [2] **BOTTEMA, O., and Roth, B., and ROTH, B.**, 1979, Theoretical Kinematics, North-Holland Publishing Company, Amesterdam-New York-Oxford.
- [3] **BEEM,J.K.,and EHRLICH,P.E.**,1981, Global Minkowski an Geometry , Marcel Dekker, Inc. New York.
- [4] **DILLEN,F.,and KÜHNEL,W.**,1999, Ruled WeingartenSurfacesin Minkowski 3-Space, Manuscripta Math., **98** , 307-320.
- [5] **Do CARMO, M.P.**,1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] **ERGİN, A.**, 1989, Minkowski Düzlemde Kinematik Geometri, *Doktora Tezi*, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [7] **FERRANDEZ, A., and LUCAS, P.**,1992, Null 2-type Hypersurfaces in a Minkowski Space, Canad. Math. Bull. , **35** , 354-360.
- [8] **FEATHERSTONE, R.**,2001, The Acceleration Vector of a Rigid Body, The International Journal of Robotics Research, 20, **11**, 841-846.
- [9] **HACISALİHOĞLU,H.**,1983, Diferensiyel Geometri , İnönüÜniversitesi FenEdebiyat Fakültesi Yayınları, No.2. Malatya.
- [10] **HACISALİHOĞLU, H.**,1980, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş , F.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, No.2.
- [11] **KAMISHIMA, Y.**,1993, Completeness of Minkowski Manifolds of Constant Curvature Atmitting Kling Vector Fields, J. Differential Geometry, **37**, 569-601.
- [12] **McCARTHY**,1990, An Introduction to Theoretical Kinematics, MIT Press.
- [13] **O'NEİLL, B.**,1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [14] **PARK, F.C.**,1995 , Distance Metrics on the Rigid-Body Motions with Aplications to Mechanism Design, ASME J. of Mechanical Desing, **117(1)**, 48-54.
- [15] **PARK, F.C., and BROCKETT, W.**,1994, Kinematic Dexterity of Robotic Mechanisms, The International Journal of Robotics Research, **13(1)**, 1-15.
- [16] **SCHUTZ, B.F.**,1980, Geometrical Methods of Mathematical Physics , Cambridge University Press, Cambridge.
- [17] **TURGUT, A.**,1995, 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, *Doktora Tezi* , A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [18] **TOZAK , H.**, 2010, Minkowski 4-Uzayında Eğriler ve Hareketlerin Geometrisi,

Yüksek Lisans Tezi, P.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Pamukkale.

[19] **YENEROĞLU, M., and ASİL, V.**,2002, On the Geometry of Surfaces in Spatial Motions, J. of Inst. of Math&Comp. Sci., 15, No.2, 105-107.

[20] **YENEROĞLU, M.**,2007. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bazı Kinematik Bağlılıklar, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[21] **ZEFRAN, M., KUMAR,V., CROKE, C.**,1996, Choice of Riemannian Metrics for Rigid Body Kinematics , *In Proceedings of the ASME 24th Biennial Mechanisms Conference*, Irvine, CA.

[22] **ZEFRAN, M., KUMAR,V., CROKE, C.**,1998, On the Generation of Smooth Three-Dimensional Rigid Body Motions , IEEE Transactionson Robotics and Automation, **14** , No.4, 576-589.

[23] **ZEFRAN, M., KUMAR,V.**,1996, Planning of Smooth Motions $SE(3)$, IEEE Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, MN, 121-126.

Özgeçmiş

20.04.1986 yılında Elazığ 'da doğmuşum. İlk ve orta öğretimimi Elazığ 'da tamamladım. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2008 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen yüksek lisansa devam ediyorum.

Selçuk BAŞ