

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sezin AYKURT

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

TEMMUZ-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT YÜZEYLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sezin AYKURT

(091121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23 /06 /2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 11 /07 /2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT.(F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ.(İ.Ü)

Doç. Dr. Vedat ASİL.(F.Ü)

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü yardım ve desteklerinden dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e; değerli bilgi ve birikimlerini esirgemeyen çok kıymetli hocam Yrd. Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Sezin AYKURT

ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. BİRİNCİ BÖLÜM	2
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	2
2.2. Kompleks Manifoldlar	11
2.3. Alt Manifoldlar	15
3. İKİNCİ BÖLÜM	19
3.1. Slant Manifoldlar	19
3.2. P ve F Operatörlerinin Özellikleri	27
4. ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	34
4.1. Slant Manifoldlar İçin Varlık ve Teklik Teoremi	34
5. DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	39
5.1. H-umbilik Slant Alt Manifoldlar	39
5.2. H -Umbilik Slant Alt Manifoldların Sınıflandırması	42
5.3. Kaehlerian slant alt manifoldlarda genel eşitsizlikler	48
6. KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	53

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Riemann ve kompleks manifoldlara dayalı bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Slant alt manifold ve slant yüzey kavramları verilerek bazı slant yüzey örnekleri incelendi.

Üçüncü bölümde slant manifoldlarda Gauss ve Codazzi denklemleri ele alınarak Varlık ve Teklik Teoremi verildi.

Dördüncü bölümde ise H-Umbilik slant alt manifoldun tanımı ve Kaehlerian slant alt manifoldlarda skalar ikinci eğrilik ve ortalama eğrilik arasında teorem ve sonuç verildi.

Anahtar Kelimeler: Hemen Hemen Kompleks Manifold, Kompleks Manifold, Slant Yüzey, H-Umbilik Slant Alt Manifold.

SUMMARY

On Slant Surfaces

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter; some fundamental definitions and theorems are given with regard to Riemannian manifold and complex manifold.

In the second chapter; some examples of slant surfaces are examined by giving the concepts of slant submanifold and slant surface.

In the third chapter; existence and uniqueness are given by considering Gauss and Codazzi equations.

In the fourth chapter; the definition of H-Umbilik slant submanifold is given. Also, theorem and corollary for inequality between scalar second curvature and mean curvature are given.

Keywords: Almost Complex Manifold, Complex Manifold, Slant Surface, H-Umbilik Slant Submanifold.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\langle , \rangle$	: Riemann metriği
A_N	: Weingarten Dönüşümü
$T_M(P)$	: M manifoldunun $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı
V^c	: Kompleks konjugasyon
$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzay
δ_{ij}	: Kroniker deltası
H	: Ortalama eğrilik
J	: Kompleks yapı
M	: Topolojik manifold
S	: Atlas
V	: Vektör uzayı
X	: Topoloji
τ	: Skalar eğrilik
$\chi(M)$	: M üzerindeki vektör alanlarının uzayı

1. GİRİŞ

Verilen manifoldu, bilinen bir Riemann manifoldu içersine daldırarak işlem yapmak bazı zamanlar daha yararlı olur. Bilinen Riemann manifoldun alt manifoldu olarak bu manifold üzerinde tanımlı geometrik yapılarda çalışılır. Manifold üzerindeki bir vektöre, ortogonal bir vektör karşılık getiren bir kompleks yapının var olması bir kompleks manifoldun alt manifoldunun bulunduğunu ifade eder. Bu alt manifold ise invaryant ve anti-invaryant olarak adlandırılan iki alt manifolda ayrılır. Bu alt manifoldlar, B.Y. Chen tarafından slant alt manifoldlar adıyla adlandırılarak genelleştirildi.

J yapısı bakımından slant alt manifoldlar bir Kaehlerian manifoldunun en basit alt manifoldlarıdır. Dolayısıyla slant alt manifoldlar Kaehlerian alt manifoldlar üzerindeki çalışmalarında bazı önemli roller oynar. Örneğin K. Kenmotsu ve D. Zhou [7] de $\bar{M}^2(4c)$ kompleks uzayda sabit eğrilikli ve sıfırdan farklı paralel ortalama eğriliğe sahip her yüzeyin uygun slant yüzey olduğunu ispatladı, [3].

Bu çalışmada; slant alt manifoldlar için bazı karakterizasyonlar verildi. Ayrıca slant alt manifoldların eğrilikleri üzerine incelemeler yapıldı.

2. BİRİNCİ BÖLÜM

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Tanım: Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonskiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(A1). $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

(A2). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır, [5].

2.1.2. Tanım: X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır, [5].

(T1). $X, \emptyset \in \tau$,

(T2). $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

(T3). $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

(T3) önermesinde I bir indeks cümlesidir.

2.1.3. Tanım: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir, [5].

2.1.4. Tanım: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \rightarrow Y$$

fonskiyonu sürekli ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f e X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya homeomorfiktirler denir, [5].

2.1.5. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktasının X deki açık

komşulukları, sırasıyla, U ve V olsun. $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ile V yi seçersek X topolojik uzayına bir Hausdorff uzaydır denir, [5].

2.1.6. Tanım: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n -boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n -manifold) denir.

(M1). M bir Hausdorff uzaydır.

(M2). M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorfdur.

(M3). M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [5].

2.1.7. Tanım: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

şeklinde eşlenebiliyor ise (ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir, [5].

2.1.8. Tanım: M bir topolojik n -manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ şeklinde yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle E^n ve E^n e

$$\psi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E^n$$

homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (veya koordinat komşuluğu sistemi) denir, [5].

2.1.9. Tanım: M bir n -boyutlu bir topolojik manifold ve $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^r , $r \geq 1$ sınıfındandır denir. $\forall \alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{ve} \quad \phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ye M üzerinde bir C^r sınıfından diferansiyellenebilir yapı denir, [5].

2.1.10. Tanım: M n -boyutlu topolojik manifold ve M nin S atlası C^r sınıfından olsun. O zaman M ye n -boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold denir, [5].

2.1.11. Tanım: V vektör uzayıyla birleşen bir afın uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afın uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir, [5].

2.1.12. Tanım: $T_A(P)$ de toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \oplus : T_A(P) \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ ((P, \vec{v}), (P, \vec{u})) &\rightarrow (P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u}) \end{aligned}$$

veya

$$(\vec{v}_P, \vec{u}_P) \rightarrow \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (\vec{v} + \vec{u})_P$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ (\lambda, (P, \vec{v})) &\rightarrow \lambda \odot (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_P) \rightarrow \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda \vec{v})_P$$

biçiminde tanımlansın. Burada $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir. Bu durumda $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayı oluşturur.

Bu vektör uzayına A afın uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir, [5].

2.1.13. Tanım: $V \subseteq E^n$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X : V \rightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki,

$$\pi \bigcup_{P \in V} T_V(P) \rightarrow V$$

olacak şekilde

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur, [5].

2.1.14. Tanım: E^n üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi

$$\chi = \left\{ X \mid X : E^n \rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P), \pi \circ X = I, \pi : \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \rightarrow E^n \right\} \text{ dir. } X \text{ ve } Y \text{ iki}$$

vektör alanı olmak üzere toplama işlemi

$$\begin{aligned} + : \chi(E^n) \times \chi(E^n) &\rightarrow \chi(E^n) \\ (X, Y) &\rightarrow X + Y \end{aligned}$$

öyleki, $\forall P \in E^n$ için

$$(X + Y)(P) = X(P) + Y(P)$$

ve skalar ile çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(E^n, \mathbb{R}) \times \chi(E^n) &\rightarrow \chi(E^n) \\ (f, X) &\rightarrow fX \end{aligned}$$

$\forall P \in E^n$ için

$$(fX)(P) = f(P)X(P)$$

şeklinde tanımlıdır, [5].

2.1.15. Tanım: Yukarıda tanımlanan toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre bütün vektör alanlarının cümlesi bir vektör uzayı oluşturur. Bu vektör uzayına E^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir, [5].

2.1.16. Tanım: $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{v}_P[f] = \frac{d}{dt} \left(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)) \right) \Big|_{t=0}$$

reel sayısına f in $\vec{v}_P$ ye göre türevi denir, [5].

2.1.17. Tanım: $X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. $\forall P \in E^n$ için

$$(X(f))(P) = X_P[f]$$

olmak üzere $X[f] \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonuna f nin X yönündeki türevi denir, [5].

2.1.18. Tanım: $X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall P \in E^n$ için $X_P = (x_1, \dots, x_n)|_P \in T_{E^n}(P)$ dir. Eğer $y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından yani $y_i \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ ise $Y = (y_1, \dots, y_n)$ vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. Y nin X e göre kovaryant türevi $D_X Y = (X_P[y_1], \dots, X_P[y_n])$ şeklinde tanımlanır, [5].

2.1.19. Tanım: Eğer bir $\alpha : I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ eğrisi üzerinde Y bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde $D_T Y = 0$ ise Y vektör alanına α eğrisi üzerinde bir paralel vektör alanı denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde $D_T T = 0$ ise α eğrisine bir jeodezik eğri denir, [5].

2.1.20. Tanım: $f : E^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ fonksiyonu verildiğinde f nin df diferansiyeli $\forall V_P \in T_{E^n}(P)$ için $df(V_P) = V_P[f]$ şeklinde 1-form olarak tanımlanır, [5].

2.1.21. Tanım: $f : M \rightarrow N$, C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun.

1. $\forall P \in M$ için $df_P : T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ dönüşümü birebir ise f e immersiyon denir.
2. Birebir bir f immersiyonuna imbedding denir.
3. f birebir örten ve f^{-1} , C^∞ sınıfından ise f ye difeomorfizmdir denir, [1].

2.1.22. Teorem: $f : M \rightarrow N$, C^∞ sınıfından bir dönüşüm ve $\forall q \in M$ için $f(q) = p$ olmak üzere $df_q : T_q M \rightarrow T_p N$ şeklinde olsun. O halde $F = \{q \in M : f(q) = p\}$ cümlesi C^∞ sınıfından bir manifold ve $\dim F = \dim M - \dim N$ olur. Ayrıca $i : F \rightarrow M$ inclusion'ı bir imbedding'dir, [1].

2.1.23. Tanım: M , n -boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(0,2)$ tipindeki bir g tensör alanına M üzerinde bir Riemann metrik denir.

(i) g simetriktir. Yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = g(Y, X) \text{ dir.}$$

(ii) $\forall p \in M$ için $g_p, T_p M$ üzerinde pozitif tanımlı non-dejenere bilineer formdur. Yani $\forall X_p \in T_p M$ için $g_p(X_p, Y_p) \geq 0$ ve $g_p(Y_p, Y_p) = 0$ ise $Y_p = 0$ olduğunu ifade eder. Eğer $\forall Y_p \in T_p M$ için $g_p(X_p, Y_p) = 0$ ise $X_p = 0$ dır, [1].

2.1.24. Tanım: Verilen bir g Riemann metriği ile C^∞ sınıfından bir M manifolduna Riemann manifold denir ve (M, g) ile gösterilir, [1].

2.1.25. Tanım:

(i) $M, m = n + k$ boyutlu bir Riemann manifold olsun ve $\forall p \in M$ için $T_p M$ nin n -boyutlu D_p alt uzayını göz önüne alalım. Ayrıca $\forall p \in M$ için bir U komşuluğunda C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_n$ vektör alanlarının n -lineer bağımsız olduklarını kabul edelim. Bu vektör alanlarının q noktasındaki değerleri D_q nin bir bazı ise D ye M üzerinde n -boyutlu C^∞ sınıfından bir dağılım denir ve $X_1, \dots, X_n$ vektör alanlarına D nin lokal bazı adı verilir. Bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı, $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise $X \in D$ dir.

(ii) $\forall X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ ise D dağılımına involütüdür denir.

(iii) D, M üzerinde C^∞ sınıfından bir dağılım ise D nin integrallenebilir olduğu söylenir. $\forall p \in M$ için M nin p yi içeren ve $\forall q \in N$ için $T_q N = D_q$ olacak şekilde n -boyutlu bir N alt manifoldu varsa N ye p noktası boyunca geçen D nin bir yaprağı denir, [1].

2.1.26. Tanım: C^∞ sınıfından bir M manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$(i) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$(ii) \quad \nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$(iii) \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$(iv) \quad \nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y, \quad X, Y, Z \in \chi(M), f \in C^\infty(M)$$

özelliklerini sağlayan dönüşüme afin konneksiyon denir, [5].

2.1.27. Örnek: $(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$ için

$f^i, g^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

yazılabilir. $\nabla : \chi(\mathbb{R}^n) \times \chi(\mathbb{R}^n) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(g^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ şeklinde

tanımlansın. O zaman ∇ nin bir konneksiyon için gerekli özellikleri sağladığı kolayca kanıtlanabilir. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bu ∇ konneksiyonuna Öklid konneksiyonu denir, [1].

2.1.28. Tanım:

(i) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

eşitliğini sağlayan (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki bir ∇ konneksiyonuna g metriğine uygun konneksiyon denir.

(ii) $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ise C^∞ sınıfından bir M manifoldu üzerinde bir ∇ konneksiyonu simetrik denir, [1].

2.1.29. Teorem (Levi-civita): Bir (M, g) Riemann manifoldu verilsin. M üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tek konneksiyon vardır.

(i) ∇ simetriktir.

(ii) ∇, g ile uyumludur.

Burada (i) ve (ii) i sağlayan ve (M, g) Riemann manifoldu üzerinde tek olan ∇

konneksiyonu Riemann konneksiyondur, [1].

2.1.30. Tanım: C^∞ sınıfından M manifoldu üzerindeki bir ∇ konneksiyonu için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \chi(M)$$

şeklinde tanımlanan $(1, 3)$ tipinde bir R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı denir. Burada $[X, Y]$, X, Y vektör alanlarının Lie-bracketıdır, [1].

(M, g) üzerinde ∇ Riemann konneksiyonun eğrilik tensörünün özellikleri aşağıdaki teoremle verilebilir.

2.1.31. Teorem: (M, g) Riemann manifoldu üzerinde ∇ Riemann konneksiyonunun R eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(i) \quad R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$$

$$(ii) \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$(iii) \quad R(X, Y; Z, W) = R(Z, W; X, Y), \quad X, Y, Z, W \in \chi(M)$$

Burada $R(X, Y; Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ dir, [6].

2.1.32. Tanım: P , (M, g) üzerinde bir düzlem kesiti olsun. P düzleminin kesit eğriliği

$$K(P) = \frac{R(X, Y; Y, X)}{X \wedge Y}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X, Y \in \chi(M)$, P yi geren vektör alanları ve

$$X \wedge Y = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$$

dir.

$K(P)$, M üzerindeki tüm P düzlem kesitleri için bir c sabitine eşit ise M ye sabit bir c kesit eğriliğine sahip manifolddur denir, [6].

2.1.33. Teorem: (M, g) Riemann manifoldu sabit c eğrilikli ise onun eğrilik tensör alanı

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}, \quad X, Y, Z \in \chi(M)$$

şeklindedir, [1].

2.1.34. Tanım: (M, g) Riemann manifoldu üzerinde lokal ortonormal çatı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Yani $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ eşitliğini sağlasın. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir. R , Teorem (2.1.31) de tanımlanan $(0,4)$ tipinde bir tensör ise M nin Ricci tensör alanı

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X; Y, e_i), \quad X, Y \in \chi(M)$$

şeklinde tanımlı olup, M nin τ skaler eğriliği, Ricci tensörünün izidir. Yani τ

$$\tau = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i)$$

şeklindedir, [7].

2.1.35. Örnek: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid iç çarpımı

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^n g_i f_i$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f^i, g^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

dir. O halde Örnek (2.1.26) da tanımlanan Öklid konneksiyon ile ∇ nın g e göre bir Riemann konneksiyon olduğu kolayca gösterilebilir. R eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = \sum_{i=1}^n XY(h^i) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^n YX(h^i) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^n [X, Y](h^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$$

ile verilir. Burada $Z = \sum_{i=1}^n h^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ dir. Böylece $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir P düzlem kesiti için

$X, Y, Z, W \in \chi(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $g(R(X, Y)Z, W) = 0$ yani $K(P) = 0$ elde edilir, [1].

2.2. Kompleks Manifolddlar

2.2.1. Tanım: V , $\mathbb{R}$ üzerinde bir reel vektör uzayı olsun. V nin V^C kompleksleştirilmiş $X, Y \in V$ olmak üzere, şartları koşulları sağlayan tüm $X + iY$ ($i = \sqrt{-1}$) lerin cümlesine denir, [8].

a) $X + iY = X' + iY'$ olması için gerek ve yeter şart $X = X'$ ve $Y = Y'$ olmasıdır.

b) $X + iY$ ve $X' + iY'$ lerin toplamı

$$(X + iY) + (X' + iY') = (X + X') + i(Y + Y'),$$

c) $a + ib \in C$ ve $X + iY$ nin çarpımı

$$(a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Dolayısıyla V^C , C üzerinde bir vektör uzayı olur. V nin X elemanı ile V^C nin $X + i0$ elemanını tanımladığından $V \subset V^C$ olduğu düşünülebilir.

2.2.2. Tanım: $Z = X + iY \in V^C$ olmak üzere

$$\bar{Z} = X - iY$$

ifadesine V ye göre Z nin konjugesi (eşleniği) denir, [8].

2.2.3. Tanım: V^C de kompleks konjugasyon, $Z \rightarrow \bar{Z}$ şeklinde tanımlı

$$\overline{Z + W} = \bar{Z} + \bar{W}$$

ve $\lambda \in C$ için

$$\overline{\lambda Z} = \bar{\lambda} \bar{Z}$$

eşitliklerini sağlayan yani V^C den V^C ye konjuge lineer dönüşümü denir, [8].

2.2.4. Tanım: $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan V reel vektör uzayının J lineer endomorfizmine V üzerinde bir kompleks yapı denir, [8].

2.2.5. Tanım: V , J kompleks yapısı ile bir reel vektör uzayı olsun. V nin bir X elemanı ile $\lambda = a + ib$ kompleks sayısının çarpımı

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX$$

olarak tanımlanır. Böylece V , C üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünülebilir. Açık

olarak V nin reel boyutu kompleks boyutunun iki katı olmalıdır.

V , J kompleks yapısı ile bir reel vektör uzayı olsun. J ,

$$J(X + iY) = JX + iJY$$

şeklinde tanımlanarak V nin bir kompleksleştirilmiş olan V^C nin lineer kompleks endomorfizmine genişletilebilir. Burada $J^2 = -I$ olduğu açıktır.

Bir J kompleks yapısı ile $2n$ -boyutlu reel vektör uzayı V de $X_1, \dots, X_n$ elemanları vardır ve $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$, V nin bir bazı formundadır.

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k), \quad \bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k), \quad k = 1, \dots, n$$

olmak üzere $\{Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n\}$, V^C nin bir bazı formundadır. Burada

$$JZ_k = iZ_k, \quad J\bar{Z}_k = -i\bar{Z}_k, \quad k = 1, \dots, n$$

olur.

$$V^{1,0} = \{Z \in V^C : JZ = iZ\}, \quad V^{0,1} = \{Z \in V^C : JZ = -iZ\}$$

şeklinde ise kompleks vektör uzayı

$$V^C = V^{1,0} + V^{0,1}$$

olacak şekilde direkt toplamıdır ve $\bar{V}^{1,0} = V^{0,1}$ dir.

Herhangi bir $Z \in V^C$ için

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin birinci terimi $V^{1,0}$ ın ikincisi $V^{0,1}$ in elemanıdır. Böylece

$$V^{1,0} = \{X - iJX : X \in V\}, \quad V^{0,1} = \{X + iJX : X \in V\}$$

olduğu kolayca görülebilir, [8].

2.2.6. Tanım: $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $f = f_1 + if_2$

fonksiyonu her $z^m = x^m + iy^m$ için

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^m} = \frac{\partial f_2}{\partial y^m} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y^m} = -\frac{\partial f_2}{\partial x^m}$$

eşitliklerine Cauchy-Riemann eşitlikleri denir.

f her bir $Z \in \mathbb{C}^m$ için Cauchy-Riemann eşitliklerini sağlıyorsa f ye holomorfiktir denir. Burada $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $1 \leq k \leq m$ ve $i^2 = -1$ dir, [5].

2.2.7. Tanım: C^∞ sınıfından bir M manifoldu üzerinde (1,1) tipindeki bir J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı denir. Bu J tensör alanı M nin her p noktasında $J_p^2 = -I_p$ şeklinde tanımlı $T_p M$ nin bir endomorfizmidir. Burada I_p , $T_p M$ nin birim dönüşümünü belirler.

J hemen hemen kompleks yapısı ile C^∞ sınıfından bir M manifoldu bir hemen hemen kompleks manifold diye adlandırılır. Bir M kompleks manifoldu bir analitik manifolddur. Buradaki analitik yapının tanımında $\mathbb{C}^n$ kompleks Öklid uzayı ile $\mathbb{R}^n$ reel Öklid uzayı yer değiştirir, [1].

2.2.8. Uyarı: Tanım (2.2.7) den hemen hemen kompleks manifoldun çift boyutlu olduğunu ve n -boyutlu kompleks manifoldun $2n$ -boyutlu reel analitik manifold olduğu gösterilir, [1].

2.2.9. Örnek: $\mathbb{R}^{2n}$, S^2 , $\mathbb{C}P^n$ ve bir konneksiyon ile verilen C^∞ sınıfından bir M manifoldunun TM teğet cümlesi hemen hemen kompleks manifoldlardır. $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, S^2 ve $\mathbb{C}P^n$ ise kompleks manifoldlardır. $\mathbb{R}^{2n}$ nin J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

ile tanımlıdır. Burada $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$, $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde Öklid koordinatlarıdır, [1].

2.2.10. Tanım: Bir (M, J) kompleks manifoldu üzerinde bir Hermitian metrik

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad X, Y \in \chi(M)$$

şeklinde tanımlı bir g Riemann metriğidir. Yani g Riemann metriği ve J uyumludur.

g Hermitian metrik ile bir M hemen hemen kompleks manifolduna (ya da bir kompleks manifolduna) bir hemen hemen Hermitian manifold (ya da Hermitian manifold) denir ve (M, J, g) şeklinde gösterilir.

Her hemen hemen kompleks manifoldun g Riemann metriğinin bir hemen hemen Hermitian metrik olduğuna dikkat edilmelidir. Gerçekten bir g Riemann metriği ile M üzerindeki herhangi bir J hemen hemen kompleks yapısı için

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY), \quad X, Y \in \chi(M)$$

yazılarak bir h hemen hemen Hermitian metriği elde edilir, [1].

2.2.11. Tanım: Bir (M, J, g) hemen hemen Hermitian manifoldunda M nin J hemen hemen kompleks yapısı paralel yani

$$(\nabla_X J)(Y) = 0, \quad X, Y \in \chi(M)$$

ise bu manifoldda Kaehlerian manifoldu denir.

$\mathbb{R}^{2n}$ üzerindeki Öklid metriğinin yukarıda tanımlı J standart hemen hemen kompleks yapısına göre Hermitian metrik olduğu ve $\mathbb{R}^{2n}$ nin bir Kaehlerian manifold olduğu basitçe ispatlanır, [1].

(M, J, g) bir Kaehlerian manifold olsun. $K(P)$, X, Y ortonormal vektörleriyle gerilen bir $P \subset T_q M$ düzlemi için M nin kesit eğriliği olsun. P, J altında invaryant yani $J_q P = P$ ise $K(P)$ holomorfik kesit eğrilik olarak adlandırılır. P, J altında invaryant ve X, P de bir birim vektör ise $\{X, JX\}$ P için ortonormal bazdır ve $K(P) = R(X, JX, JX, X)$ dir. Bu $H(X)$ olarak belirtilir. $K(P)$, M nin tüm q noktalarında J -invariant $P \subset T_q M$ düzlemleri için sabit ise sabit holomorfik uzay olarak adlandırılır, [1].

Sabit holomorfik kesit eğrilikli uzaylar için aşağıdaki karakterizasyon verilebilir:

Sabit holomorfik c kesit eğrilikli bir (M, J, g) Kaehlerian manifoldu bir kompleks uzay formu diye adlandırılır ve $M(c)$ ile belirtilir. $M(c)$ nin R eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = \frac{c}{4} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + g(JY, Z)JX - g(JX, Z)JY + 2g(X, JY)JZ\}$$

şeklinde verilir, [1].

$\mathbb{C}^n$ ile kompleks uzayı, $\mathbb{C}P^n$ ile kompleks projektif uzayı ve D^n ile $\mathbb{C}^n$ de kompleks n -boyutlu açık birim yuvarı belirtiriz. Sabit holomorfik c kesit eğriliğine sahip basit irtibatlı tam bir Kaehlerian manifoldu $c > 0$, $c < 0$ ya da $c = 0$ olmasına göre, sırasıyla, CP^n , D^n ya da C^n söylenir.

2.3. Alt Manifoldlar

2.3.1. Tanım: M ve $\overline{M}$ iki C^∞ sınıftan manifold olsun. $\psi:M \rightarrow \overline{M}$ şeklinde C^∞ sınıftan bir immersiyon var ise M ye $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu denir. ψ bir imbedding ise M ye $\overline{M}$ nin daldırılmış alt manifoldu denir, [1].

Alt manifoldların geometrisi çok önemlidir. Bazen verilen manifoldu bilinen bir Riemann manifoldu daldırmak yararlı olur. Dolayısıyla bilinen Riemann manifoldun alt manifoldu olarak bu manifold üzerinde tanımlı geometrik yapıda çalışmak daha basit olur. Gerçekten alt manifoldların geometrisi Diferansiyel Geometride çok önemlidir. Örneğin R^3 de C^∞ sınıftan regüler eğriler R^3 ün bir boyutlu alt manifoldlarıdır. Bunun yanı sıra R^3 de C^∞ sınıftan yüzeyler onun 2-boyutlu alt manifoldlarıdır. (M, g) bir Riemann manifold ve $\psi:M \rightarrow \overline{M}$, C^∞ sınıftan M manifoldundan $\overline{M}$ ye C^∞ sınıftan bir immersiyon olsun. O halde M alt manifoldunun g^* Riemann metriği

$$g_p^*(X_p, Y_p) = g(d_{\psi_p} X_p, d_{\psi_p} Y_p), \quad X, Y \in \chi(M), p \in M$$

ile verilir, [1].

Bir immersiyon lokal imbedding olduğundan $\overline{M}$ nin bir M alt manifoldu üzerindeki lokal ifadelerle ilgilendiğimizde $X \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere X_p ve $\psi(p)$ ile $d_{\psi(p)} X_p$ yi tanımlamamız ve bu konuda M ve $\overline{M}$ manifoldları üzerindeki geçişleri ayırmamız gerekir. Böylece M üzerinde tanımlı Riemann metriğini g ile belirtip immersiyonu söylemeksizin M nin $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olduğunu bilmemiz gerekir. $M, (\overline{M}, g)$ Riemann manifoldunun alt manifoldu olsun. O halde her bir $p \in M$ için $\overline{M}$ nin $T_p \overline{M}$ teğet uzayı

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M$$

direkt toplamıdır. Burada $T_p M$, M nin teğet uzayı ve

$$T_p^\perp M = \{X_p \in T_p \overline{M} \mid g_p(X_p, Y_p) = 0, Y_p \in T_p M\},$$

$T_p \overline{M}$ de $T_p M$ nin ortogonal bileşenidir. $T_p \overline{M}$ de $T_p^\perp M$ alt uzayına $p \in M$ de M nin normal uzayı denir. M üzerinde $T^\perp M = \bigcup_{p \in M} T_p^\perp M$ cümlesi M nin normal cümlesi olarak

adlandırılır.

$T^\perp M$ normal cümlesinin C^∞ sınıfından olan kısımlarının uzayını ν ile belirtelim. Böylece her $N \in \nu$, $\chi(\overline{M})$ de C^∞ sınıfından bir vektör alanı olur ve $X \in \chi(M)$ olmak üzere $g(X, N) = 0$ eşitliğini sağlar.

$\overline{\nabla}, (\overline{M}, g)$ Riemann manifoldu üzerinde Riemann konneksiyon ve $M, \overline{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. $\chi(\overline{M})|_M, \chi(\overline{M})$ nin M e kısıtlanmışı olmak üzere

$$\chi(\overline{M})|_M = \chi(M) \oplus \nu$$

eşitliğini kullanarak $X, Y \in \chi(M)$ için $\overline{\nabla}_X Y \in \chi(\overline{M})$ olduğundan $\overline{\nabla}_X Y$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\nabla_X Y \in \chi(M)$ ve $h(X, Y) \in \nu$, sırasıyla, $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Bu kısımdaki $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ terimleri, onların özellikleri geometrik olarak gösterilene kadar yalnızca notasyondurlar. Tanım (2.1.25) de verilen $\overline{\nabla}$ Riemann konneksiyonun özelliklerini kullanarak, (2.3.1) eşitliğinde görünen, ∇ sembolünün M üzerinde Riemann konneksiyon için gerekli özellikleri olan sağladığı görülebilir. Bu durumda (2.3.1) eşitliğinde normal bileşene, M alt manifoldunun ikinci temel formu denir.

Dolayısıyla $h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \nu$ simetrik bilineer dönüşümü olur. Benzer şekilde

$$X \in \chi(M), N \in \nu \text{ için } \overline{\nabla}_X N \in \chi(\overline{M})$$

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + D_X N \quad (2.3.2)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $-A_N X \in \chi(M)$ ve $D_X N \in \nu$, sırasıyla, $\overline{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleridir. $\overline{\nabla}$ nin özellikleri kullanılarak (2.3.2) eşitliğinde $-A_N X$ teğetsel bileşen,

$$g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$$

eşitliğini sağlayan $A_N: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ şeklinde bir lineer dönüşümdür ve

$D: \chi(M) \times \nu \rightarrow \nu$, konneksiyon için verilen benzer özellikleri sağlar. A_N dönüşümü

$N \in \nu$ normaline göre Weingarten dönüşümü ve D, ν normal cümlesinde konneksiyon

olarak adlandırılır.

(2.3.2) eşitliği $Y \in \chi(M)$ ile iç çarpıma tabi tutulup $g(Y, N) = 0$ yani

$$g(\bar{\nabla}_X Y, N) = -g(Y, \bar{\nabla}_X N)$$

eşitliği ve (2.3.1) eşitliği kullanılarak

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y), \quad X, Y \in \chi(M), \quad N \in \nu$$

elde edilir. Bir $\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir M alt manifoldu için (2.3.1) ve (2.3.2) eşitlikleri, sırasıyla, Gauss ve Weingarten formülleri diye adlandırılır.

$\bar{R}$ ve R , sırasıyla, $\bar{M}$ ve M nin eğrilik tensörleri olsunlar. O halde $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere, Gauss ve Weingarten formüllerini kullanarak $\bar{R}$ eğrilik tensörü

$$\bar{R}(X, Y; Z, W) = R(X, Y; Z, W) + g(h(X, Z), h(Y, W)) - g(h(Y, Z), h(X, W)) \quad (2.3.3)$$

şeklinde elde edilir, [1].

2.3.2. Örnek: $S^n, \mathbb{R}^{n+1}$ de orijin merkezli bir birim küre olsun. O halde $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ inclusion fonksiyonu bir immersiyondur. Böylece S^n her bir normal uzayı bir boyutlu olan $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir alt manifoldudur ve bu nedenle ν normal cümlesi tek bir N birim normal vektörüyle gerilir. N, S^n üzerindeki her bir noktanın yer vektörünü gösterir ve $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerindeki $\bar{\nabla}$ Riemann konneksiyonu Örnek (2.1.23) de tanımlanır. Her bir $X \in \chi(S^n)$ için

$$\bar{\nabla}_X N = \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = X$$

vardır. Yani $A_N X = -X$ ve $D_X N = 0$ dır. Burada $N = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, S^n üzerinde yer vektörüdür. Ayrıca,

$$h(X, Y) = g(h(X, Y), N)N = g(A_N X, Y)N = -g(X, Y)N, \quad X, Y \in \chi(S^n)$$

dir. Böylece S^n için Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - g(X, Y)N$$

$$\bar{\nabla}_X N = X$$

olur. $\mathbb{R}^{n+1}$ in eğrilik tensörü $\bar{R} = 0$ olduğundan S^n in R eğrilik tensörü (2.3.3) eşitliğinde

verildiği gibi

$$R(X,Y;Z,W) = g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W), \quad X,Y,Z,W \in \chi(S^n)$$

dir, [1].

3. İKİNCİ BÖLÜM

3.1. Slant Manifolddar

3.1.1. Tanım: N , hemen hemen J kompleks yapısına ve hemen hemen g Hermitian metriğine sahip bir M hemen hemen Hermitian manifolduna izometrik olarak daldırılmış n -boyutlu bir Riemann manifold olsun. N ve M deki iç çarpım $\langle, \rangle$ ile gösterilsin. N ye teğet herhangi bir X vektörü için

$$JX = PX + FX \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada PX ve FX , JX in, sırasıyla, teğet ve normal bileşenleridir. Böylece P , TN teğetler cümlesinin bir endomorfizmi ve F de TN üzerinde normal değerli 1-formdur. $F=0$ ise N alt manifolduna kompleks alt manifold, $P=0$ ise total reel alt manifold denir. Ne bir kompleks alt manifold ne de bir total reel alt manifold olmayan N alt manifolduna uygundur denir, [1].

3.1.2. Tanım: $(\overline{M}, J, g)$ bir hemen hemen Hermitian manifold ve M , $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu olsun. Herbir $p \in M$ ve $X_p \in T_p M$ için JX_p ve $T_p M$ teğet uzay arasındaki $\theta(X_p)$ açısı, sabit bir α açısına eşit ise M bir slant alt manifold olarak adlandırılır, [2].

M , (M, J, g) nin bir slant alt manifoldu ise M nin $\{e_1, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal çatısı için

$$\left| \langle Je_i, e_j \rangle \right| = \cos \alpha = \text{sabit}$$

dir, [1].

3.1.3. Örnek: Herhangi bir $\alpha > 0$ için $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü

$f(u, v) = (u \cos \alpha, u \sin \alpha, v, 0)$ şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir p noktasında

$$df_p = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir lokal ortonormal çatı olsun. O halde

$$e_1 = \frac{df_p\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)}{\left\|df_p\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right\|} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0)$$

ve

$$e_2 = \frac{df_p\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)}{\left\|df_p\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\|} = (0, 0, 1, 0)$$

şeklindedir. Burada $\left\|df_p\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right\| = \left\|df_p\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\| = 1$ dir. $J_0, \mathbb{R}^4$ ün doğal hemen hemen

kompleks yapısı olsun. Böylece

$$J_0 e_1 = (0, 0, \cos \alpha, \sin \alpha), \quad J_0 e_2 = (-1, 0, 0, 0)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikler, sırasıyla, e_2 ve e_1 ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle J_0 e_1, e_2 \rangle = \cos \alpha, \quad \langle J_0 e_2, e_1 \rangle = -\cos \alpha \text{ olur. Dolayısıyla } \left| \langle J_0 e_i, e_j \rangle \right| = \cos \alpha > 0$$

olup sabittir. Böylece $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ ün bir slant alt manifoldu olduğunu gösterir. Dolayısıyla f , $\mathbb{R}^4$ de α slant açısı ile bir slant düzlem tanımlar.

M , m -boyutlu bir $\overline{M}$ Riemann manifoldunun n -boyutlu bir alt manifoldu olsun. $e_1, \dots, e_n$ vektörleri M ye teğet ve $e_{n+1}, \dots, e_m$ vektörleri ise M ye normal olan $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal çatısını seçelim. $1 \leq A, B, C, \dots \leq m$ ve $1 \leq i, j, k, \dots \leq n$ olmak üzere $w^1, \dots, w^n, w^{n+1}, \dots, w^m$ dual çatı olarak kabul edelim. Bu durumda

$$w_B^A = -w_A^B \Rightarrow w_B^A + w_A^B = 0$$

olur. Burada $X \in \chi(M)$ ve $1 \leq A \leq m$ olmak üzere $w^A(X) = \langle X, e_A \rangle$ dir.

$$\overline{\nabla}_X e_B = \sum_{C=1}^m w_B^C(X) e_C$$

ile w_B^A konneksiyon formları tanımlansın. Burada $\overline{\nabla}, \overline{M}$ üzerinde Rieamann konneksiyondur.

Ayrıca herhangi bir $X \in \chi(M)$ vektör alanı için bu formlar

$$\bar{\nabla}_X e_i = T + N'$$

ile verilir. Burada $T \in \chi(M)$ teğetsel bileşen, $N' \in \Gamma(v)$ normal bileşendir.

$$\bar{\nabla}_X e_i = \sum_j \lambda^j e_j + \sum_r \mu^r e_r \text{ yazılırsa } \lambda^j = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle = w_j^i(X) \text{ ve } \mu^r = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_r \rangle = w_r^i(X)$$

elde edilir. Böylece

$$\bar{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^n w_j^i(X) e_j + \sum_{r=n+1}^m w_r^i(X) e_r$$

ve

$$\bar{\nabla}_X e_r = \sum_{j=1}^n w_j^r(X) e_j + \sum_{s=n+1}^r w_s^r(X) e_s$$

olur. Buradan w_j^i , w_r^i ve w_s^r 1-formları $\bar{M}$ de M nin konneksiyon formları adını alır, [1].

3.1.4. Yardımcı Teorem: $w^1, \dots, w^n, w^{n+1}, \dots, w^m$ dual çatı ve w_B^A konneksiyon formları

olmak üzere dw^A diferansiyeli

$$dw^A = -\sum_B w_B^A \wedge w^B$$

dir, [1].

3.1.5. İspat: $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$dw^A(X, Y) = X(w^A(Y)) - Y(w^A(X)) - w^A([X, Y])$$

ve

$$(w^B \wedge w_B^A)(X, Y) = w^B(X) w_B^A(Y) - w^B(Y) w_B^A(X)$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_B (w^B \wedge w_B^A)(X, Y) = -\sum_B (w_B^A \wedge w^B)(X, Y)$$

ve

$$\sum_B (w^B \wedge w_B^A)(X, Y) = dw^A(X, Y)$$

elde edilir. Buradan

$$dw^A = -\sum_B w_B^A \wedge w^B$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi ϕ_B^A nın $\overline{M}$ üzerinde eğrilik 2-form olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{M}$ nin yapı denklemleri

$$\phi_B^A(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{C, D} K_{BCD}^A w^C \wedge w^D(X, Y) \quad (3.1.1)$$

şeklindedir. Burada

$$K_{BCD}^A = R(e_A, e_B, e_C, e_D) \quad (3.1.2)$$

dir. Böylece elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\phi_B^A(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{C, D} R(e_A, e_B, e_C, e_D) [w^C(X) w^D(Y) - w^C(Y) w^D(X)] = R(X, Y, e_A, e_B)$$

bulunur.

3.1.6. Yardımcı Teorem: ϕ_B^A , $\overline{M}$ üzerinde eğrilik 2-form ve w_B^A konneksiyon formları olmak üzere

$$dw_B^A = \sum_C w_C^A \wedge w_B^C + \phi_B^A$$

dir, [1].

3.1.7. İspat:

$X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$\begin{aligned} \sum_C w_C^A \wedge w_B^C(X, Y) + \phi_B^A(X, Y) &= \sum_C w_C^A(X) w_B^C(Y) - \sum_C w_C^A(Y) w_B^C(X) + R(X, Y, e_A, e_B) \\ &= \sum_C \langle \bar{\nabla}_X e_A, e_C \rangle \langle \bar{\nabla}_Y e_C, e_B \rangle - \sum_C \langle \bar{\nabla}_Y e_A, e_C \rangle \langle \bar{\nabla}_X e_C, e_B \rangle \\ &\quad + R(X, Y, e_A, e_B) \\ &= \sum_C \langle \bar{\nabla}_X e_A, e_C \rangle [Y \langle e_C, e_B \rangle - \langle e_C, \bar{\nabla}_Y e_B \rangle] \\ &\quad - \sum_C \langle \bar{\nabla}_Y e_A, e_C \rangle [X \langle e_C, e_B \rangle - \langle e_C, \bar{\nabla}_X e_B \rangle] + R(X, Y, e_A, e_B) \end{aligned}$$

yazılır. Diğer taraftan $\langle e_C, e_B \rangle = \text{sabit}$ olduğundan $Y \langle e_C, e_B \rangle = 0$ elde edilir. Bu ifadeler son eşitlikte göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_C w_C^A \wedge w_B^C(X, Y) + \phi_B^A(X, Y) &= -\langle \nabla_X e_A, \nabla_Y e_B \rangle + \langle \nabla_Y e_A, \nabla_X e_B \rangle + R(X, Y, e_A, e_B) \\ &= -\langle \nabla_X \nabla_Y e_A - \nabla_Y \nabla_X e_A, e_B \rangle - Y w_B^A(X) + X w_B^A(Y) \\ &\quad + R(X, Y, e_A, e_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_C w_C^A \wedge w_B^C(X, Y) + \phi_B^A(X, Y) &= -\langle R(X, Y)e_A + \nabla_{[X, Y]}e_A, e_B \rangle - Yw_B^A(X) + Xw_B^A(Y) \\
&\quad + R(X, Y, e_A, e_B) \\
&= Xw_B^A(Y) - Yw_B^A(X) - w_B^A([X, Y]) \\
&= dw_B^A(X, Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$dw_B^A = \sum_C w_C^A \wedge w_B^C + \phi_B^A$$

yazılır. Burada

$$K_{BCD}^A + K_{BDC}^A = 0$$

dir.

Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bu formları M alt manifolduna sınırlayalım. Bu durumda $w^r = 0$ elde edilir.

Bu ise

$$0 = dw^r = -\sum_i w_i^r \wedge w^i$$

olduğunu verir. $\{N_1, \dots, N_r\}$, normaller için lokal çatı olsun. O halde $e_{n+1}, \dots, e_m$, M ye normal olduğundan $\forall \eta \in \Gamma(v)$ için

$$\eta = \sum_\alpha \langle \eta, N_\alpha \rangle N_\alpha$$

olur. Böylece herhangi bir $\eta \in \Gamma(v)$ için

$$\eta = \sum_r \langle \eta, e_r \rangle e_r, \quad n+1 \leq r \leq m$$

dir. Burada $e_{n+1}, \dots, e_m$, M ye normaldir. $h: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \rightarrow \Gamma(v)$ ikinci temel formu için

$$h(e_i, e_j) \in \Gamma(v) \text{ dir ve sonuç olarak}$$

$$h(e_i, e_j) = \sum_r h_{ij}^r e_r$$

olur. Buradan

$$h(e_i, e_j) = h_{ij}^r$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_j h_{ij}^r w^j(X) = \sum_j \langle h(e_i, e_j), e_r \rangle \langle X, e_j \rangle$$

$$\sum_j h_{ij}^r w^j(X) = \left\langle h \left(e_i, \sum_j \langle X, e_j \rangle e_j \right), e_r \right\rangle = \langle h(X, e_i), e_r \rangle = \langle e_i, A_{e_r} X \rangle \quad (3.1.3)$$

bulunur. Burada A_{e_r} Weingarten dönüşümüdür. $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde bir konneksiyon olmak üzere $D_X e_r \in \Gamma(v)$ için

$$\bar{\nabla}_X e_r = -A_{e_r} X + D_X e_r$$

olur. Dolayısıyla $\langle e_i, D_X e_r \rangle = 0$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_j h_{ij}^r w^j(X) &= \langle e_i, A_{e_r} X \rangle - \langle e_i, D_X e_r \rangle = -\langle e_i, \bar{\nabla}_X e_r \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_r \rangle - X \langle e_i, e_r \rangle = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_r \rangle = w_i^r(X) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

bulunur. Bu da

$$w_i^r = \sum_j h_{ij}^r w^j \quad (3.1.5)$$

olduğunu gösterir. Burada $h_{ij}^r = h_{ji}^r$ eşitliği sağlandığından h simetriktir. Ayrıca Weingarten dönüşümünün simetrik olduğu göz önüne alınarak (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.5) den

$$w_i^r(X) = \langle A_{e_r} e_i, X \rangle$$

elde edilir.

3.1.8. Yardımcı Teorem: $X, Y, Z, W \in \chi(\bar{M})$, $\xi, \eta \in \Gamma(v)$ olmak üzere, sırasıyla,

$$\bar{R}(X, Y; Z, W) = R(X, Y; Z, W) + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle$$

$$[\bar{R}(X, Y)Z]^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

$$R^D(X, Y; \xi, \eta) = \bar{R}(X, Y; \xi, \eta) + \langle [A_\xi, A_\eta](X), Y \rangle$$

dir. Burada

$$(\bar{\nabla}_X h)(X, Y) = D_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

ve $[\bar{R}(X, Y)Z]^\perp$, $\bar{R}(X, Y)Z$ nin normal bileşenidir, [1].

3.1.9. Tanım: Bir $\bar{M}$ Riemann manifoldunun, bir M alt manifoldunun h ikinci temel

formu paralel ise, yani $\bar{\nabla}h = 0$ ise, M alt manifolduna paralel alt manifold denir, [1].

$\mathbb{R}^{2m}$, standart metrik ile $2m$ -boyutlu Öklid uzayı belirtilir. $(\mathbb{R}^{2m}, J)$, $\mathbb{C}^m$ kompleks sayı uzayına analitik olarak kompleks izometrik ise $\mathbb{R}^{2m}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı, standart düzlemsel Kaehlerian metriği ile uyumludur denir. J_0 ve J_1^- , $\mathbb{R}^{2m}$ uyumlu hemen hemen kompleks yapıları, sırasıyla,

$$J_0(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) = (-b_1, \dots, -b_m, a_1, \dots, a_m)$$

$$J_1^-(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) = (-a_2, a_1, \dots, -a_m, a_{m-1}, b_2, -b_1, \dots, b_m, -b_{m-1})$$

şeklinde tanımlanır, [1].

3.1.10. Örnek: $M, \mathbb{C}^2$ de bir kompleks yüzey olsun. Bu durumda $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ olacak

şekilde herhangi bir α sabiti için M, α slant açısı ile $(\mathbb{R}^4, J_\alpha)$ da bir slant yüzeydir.

Burada $\mathbb{R}^4$ üzerinde uyumlu hemen hemen kompleks yapı olan J_α

$$J_\alpha(a, b, c, d) = (\cos \alpha)(-c, -d, a, b) + (\sin \alpha)(-b, a, d, -c)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu nedenle bir Kahlerian manifoldunda kompleks alt manifoldlar minimaldir. Bu örnek $\mathbb{C}^2$ de sınırlı pek çok uygun slant minimal yüzeylerin var olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$J_\alpha(a, b, c, d) = (\cos \alpha)J_0(a, b, c, d) + (\sin \alpha)J_1^-(a, b, c, d)$$

yazılabilir. Böylece J_α in $\mathbb{C}^2$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olduğunu göstermeyi basitleştirir.

$\mathbb{C}^2$ de non-minimal uygun slant yüzeyler için aşağıdaki örneği verebiliriz.

3.1.11. Örnek: Herhangi bir pozitif bir k sabiti için $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü

$$f(u, v) = (u, k \cos v, v, k \sin v)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda herhangi bir $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ noktası için

$$df_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \sin b \\ 0 & 1 \\ 0 & k \cos b \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki bir $\{e_1, e_2\}$ lokal ortonormal bazı

$$\left\| df_p \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_p \right\| = 1, \quad \left\| df_p \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_p \right\| = \sqrt{k^2 \sin^2 b + k^2 \cos^2 b + 1} = \sqrt{k^2 + 1}$$

olmak üzere

$$e_1 = \frac{df \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)}{\left\| df \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\|} = (1, 0, 0, 0) \quad \text{ve} \quad e_2 = \frac{df \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)}{\left\| df \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} (0, -k \cos v, 0, k \cos v)$$

şeklinde hesaplanır. Diğer taraftan

$$J_0 e_1 = (0, 0, 1, 0)$$

ve

$$J_0 e_2 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} (-1, -k \cos v, 0, -k \sin v)$$

olduğundan

$$\langle J_0 e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} (0 + 0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

ve

$$\langle J_0 e_2, e_1 \rangle = \frac{-1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

bulunur. Böylece

$$\left| \langle J_0 e_i, e_j \rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2$$

olur.

$e_2 = J_0 e_1$ şeklinde seçilirse f nin $\cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \right)$ slant açısıyla bir slant yüzey

tanımladığı sonucu çıkarılır. Ayrıca bu yüzeyin flat ve non-minimal olduğu kolayca ispatlanır.

3.1.12. Örnek: $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (g(s), h(s))$ şeklinde tanımlı $\mathbb{R}^2$ de birim hızlı bir eğri ve k herhangi bir pozitif sayı olsun. Ayrıca $f : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^4$ fonksiyonu

$$f(u, s) = (-ks \sin u, g(s), ks \cos u, h(s))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f ye $\mathbb{R}^4$ de non-minimal, düzlemsel, uygun slant yüzeydir denir, [1].

3.2. P ve F Operatörlerinin Özellikleri

$f : N \rightarrow M$, n -boyutlu bir Riemann manifoldundan hemen hemen bir Hermitian manifolduna izometrik bir immersion olsun. P ve F , sırasıyla, (3.1.1) eşitliğinde tanımlı teğet cümle üzerindeki endomorfizm ve normal değerli 1-form olsunlar. M hemen hemen Hermitian olduğundan $X, Y \in \chi(N)$ için

$$\langle PX, Y \rangle = -\langle X, PY \rangle$$

elde edilir. Böylece $Q = P^2$ yazıldığında Q , $\chi(N)$ nin simetrik (self-adjoint) bir endomorfizmi olur. Bu nedenle N nin herbir $T_x N$ teğet uzayı

$$T_x N = D_x^1 \oplus \dots \oplus D_x^{k(x)}$$

şeklinde Q nin eigen uzaylarının ortogonal bir direkt toplamıdır. P skew-simetrik ve $J^2 = -I$ olduğundan Q nin her bir λ_i eigen değerleri $[-1, 0]$ aralığındadır. Ayrıca $\lambda_i \neq 0$ ise D_x^i eş eigen uzayları çift boyutludur ve P endomorfizmi altında invaryanttır. Yani $P(D_x^i) = D_x^i$ dir. Bunun yanı sıra her bir $\lambda_i \neq -1$ için $\dim F(D_x^i) = \dim D_x^i$ ve $i = 1, \dots, k(x)$ için $F(D_x^i)$ normal alt uzayları birbirlerine diktirler. Buradan

$$\dim M \geq 2 \dim N - \dim \mu_x$$

olur. Burada μ_x , -1 eigen değerine karşılık gelen Q nun eigen uzayını belirtir.

$X, Y \in \chi(N)$ için ∇Q nun

$$(\nabla_x Q)Y = \nabla_x(QY) - Q(\nabla_x Y)$$

şeklindeki tanımı göz önüne alınarak aşağıdaki Y. Teorem verilebilir, [1]:

3.2.1. Yardımcı Teorem: N , bir M hemen hemen Hermitian manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Bu durumda Q simetrik endomorfizmi paralel yani $\nabla Q=0$ olması için gerek ve yeter şart

- (i) Q nın her bir λ_i eigen değeri N üzerinde sabittir,
- (ii) Her bir D^i dağılımı tam olarak integrallenebilirdir,
- (iii) N , $N_1 \times \dots \times N_k$ şeklinde ayrışımının Riemann çarpımıdır, [1].

3.2.2. İspat: Q , TN teğet cümlesinin self adjoint bir endomorfizmi olduğundan $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ şeklinde n -sürekli fonksiyon vardır. Öyleki $i=1, \dots, n$ olmak üzere λ_i , her bir $p \in N$ noktasında Q nın eigen değerleridir. $e_1, \dots, e_n$, Q nın eigen vektörleriyle verilen lokal ortonormal bir çatı olsun. Q , $\forall X, Y \in \mathcal{X}(N)$ için paralel yani

$$\nabla_X QY = Q(\nabla_X Y)$$

şeklinde ise

$$\nabla_X Qe_i = Q(\nabla_X e_i)$$

elde edilir.

$$X(\lambda_i)e_i + \lambda_i \nabla_X e_i = Q(\nabla_X e_i)$$

ifadesi e_i ile iç çarpıma tabî tutulduğunda

$$X(\lambda_i) + \langle \lambda_i \nabla_X e_i, e_i \rangle = \langle Q(\nabla_X e_i), e_i \rangle$$

olur. $\forall X \in \mathcal{X}(N)$ için

$$X(\lambda_i) + \lambda_i \langle \nabla_X e_i, e_i \rangle = \langle \nabla_X e_i, Qe_i \rangle = \lambda_i \langle \nabla_X e_i, e_i \rangle$$

yani $X(\lambda_i) = 0$ olur. Bu da λ_i nin bir sabit olduğunu gösterir.

(ii) ve (iii) deki durumlar için $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, Q nın ayrı eigen değerlerini belirtsin. Her bir $i=1, \dots, k$ için D^i , λ_i eigen değerine karşılık gelen Q nın eigen uzayları ile verilen dağılım olsun. Bu durumda herhangi iki $X, Y \in D^i$ vektör alanları için

$$Q(X) = \lambda_i X, \quad Q(Y) = \lambda_i Y$$

ya da

$$\nabla_X QY = Q(\nabla_X Y) \text{ ve } \nabla_Y QX = Q(\nabla_Y X)$$

olur. Buradan

$$\nabla_X(\lambda_i Y) - \nabla_Y(\lambda_i X) = Q([X, Y])$$

yazılır. Böylece $[X, Y] \in D^i$ için

$$\lambda_i [X, Y] = Q([X, Y])$$

elde edilir. Dolayısıyla D^i tam olarak integrallenebilirdir. Benzer şekilde $\nabla_X Y \in D^i$ olduğu da gösterilebilir. Böylece D^i nin her bir N^i maksimal integrallenebilir alt manifoldu N de total geodeziktir. Sonuç olarak $N = N_1 \times \dots \times N_k$ dir.

Karşıt olarak; $1 \leq i \leq k$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ ve $Y \in D^i$ olsun. Böylece

$$QY = \lambda_i Y \text{ ve } \nabla_X(QY) = \nabla_X(\lambda_i Y) = X(\lambda_i)Y + \lambda_i \nabla_X Y = 0 + Q(\nabla_X Y)$$

olur. Yani $(\nabla_X Q)Y = 0$ dir. Bu da Q nun paralel olması demektir.

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.2.3. Yardımcı Teorem: N , bir M hemen hemen Hermitian manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $\nabla P = 0$ olması için gerek ve yeter şart N , $N_1 \times \dots \times N_k$ lokal Riemann çarpımıdır. Burada her bir N_i ya bir kompleks alt manifold ya total reel alt manifold ya da M nin Kaehlerian slant alt manifoldudur, [1].

3.2.4. İspat: P paralel ise Q da paraleldir. Böylece Y. Teorem (2.3.2) yi uygulayarak N nin λ_i eigen değerlerine karşılık gelen D^i dağılımlarının N_i yapraklarının $N_1 \times \dots \times N_k$ lokal Riemann çarpımı olduğu görülür. $\lambda_i = 0$ ise $X \in \mathcal{X}(N)$ olmak üzere $QX = 0$ olması $PX = 0$ olması demektir. Bu durumda N total reel alt manifold olur. $\lambda_i = -1$ ise $P: \mathcal{X}(N_i) \rightarrow \mathcal{X}(N_i)$, $P^2 = -I$ eşitliğini sağlayan bir dönüşümdür. Yani P , N_i üzerinde hemen hemen kompleks yapıdır ve bu N_i nin hemen hemen kompleks manifold olduğunu ifade eder.

$\lambda_i \neq 0, -1$ ise D^i , P endomorfizmi altında invaryant ve herhangi $X, Y \in D^i$ için $\langle PX, PY \rangle = -\lambda_i \langle X, Y \rangle$ olduğundan $|PX| = \sqrt{-\lambda_i} |X|$ dir. Böylece $\theta(X)$ Wirtinger açısı 0 ve -1 den farklı bir sabit olan $\cos \theta(X) = \sqrt{-\lambda_i}$

eşitliğini sağlar. Böylece N_i bir uygun slant alt manifold olur. $\lambda_i \neq 0$ olduğunu kabul edip $P_i = P|_{TN}$ yazalım. Bu durumda P_i de hiçbir şey değişmez fakat TN_i nin endomorfizmi N de total geodezik alt manifold üzerinde hemen hemen kompleks yapıdan tanımlanır. Herhangi bir $X, Y \in \chi(N_i)$ için $(\nabla_X^i P_i)Y = (\nabla_X P)Y = 0$ elde ederiz. Bu N_i nin kompleks bir manifold olup olmadığını gösterir. Dolayısıyla N_i tanımdan M nin bir Kaehlerian slant alt manifoldudur denir.

3.2.5. Önerme: N bir M hemen hemen Hermitian manifoldunun indirgenemez bir alt manifoldu olsun. N , ne bir kompleks ne de total reel değil ise N nin bir Kaehlerian slant alt manifold olması için gerek ve yeter şart P endomorfizminin paralel yani $\nabla P = 0$ olmasıdır, [1].

Şimdi bir hemen hemen Hermitian manifoldunda yüzeyler için aşağıdaki Teorem verilebilir:

3.2.6. Teorem: N bir M hemen hemen Hermitian manifoldunda bir yüzey olsun. O halde aşağıdaki üç durum denktir.

- (i) N , M de ne total reel ne de kompleks manifold değildir ve $\nabla P = 0$ yani P paraleldir,
- (ii) N bir Kaehlerian slant yüzeydir,
- (iii) N bir uygun slant yüzeydir, [1].

3.2.7. İspat: Her bir uygun slant alt manifold çift boyutlu olduğundan Y. Teorem (3.2.4), P endomorfizmi paralel ise N nin ya bir Kahlerian yüzey ya bir total reel yüzey ya da bir Kaehlerian slant yüzey olduğunu ifade eder. Böylece N ne total reel ne de kompleks değil ise (i) ve (ii) deki durumlar Tanım (3.1.1) ile denktir.

(ii) nin (iii) ü ifade ettiği açıktır. Şimdi (iii) ün (ii) yi ifade ettiğini gösterelim.

N , θ slant açısı ile M de bir uygun slant yüzey olsun.

$$Pe_1 = (\cos \theta)e_2, \quad Pe_2 = -(\cos \theta)e_1$$

şeklinde olan N ye teğet $\{e_1, e_2\}$ ortonormal çatısını seçersek

$$\nabla_x e_1 = w_1^1(X) e_1 + w_1^2(X) e_2$$

ve

$$\nabla_x e_2 = w_2^1(X) e_1 + w_2^2(X) e_2$$

yazılır. Bu ise

$$(\nabla_x P) e_1 = 0 \text{ ve } (\nabla_x P) e_2 = 0$$

olduğunu ifade eder. Böylece P paralel, yani $\nabla P = 0$ dır ve bu N nin bir Kaehlerian slant yüzey olduğunu verir.

Bu ispatı tamamlar.

Bir Kaehlerian manifoldunun alt manifoldları için aşağıdaki genel Y. Teoremi verebiliriz.

3.2.8. Yardımcı Teorem: N , bir M Kaehlerian manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O halde

(i) $X, Y \in \chi(N)$ vektörleri için

$$(\nabla_x P)Y = th(X, Y) + A_{FY}X$$

dir. Buradan $\nabla P = 0$ olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \chi(N)$ olmak üzere

$$\nabla_x FY = fh(X, Y) - h(X, PY)$$

olmasıdır

(ii) $\xi \in \Gamma(v)$ ve $X \in \chi(N)$ olmak üzere $\nabla F = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$A_{f\xi}X = -A_\xi PX$$

olmasıdır. Öyleki

$$Jh(X, Y) = th(X, Y) + fh(X, Y)$$

dir. Burada $th(X, Y)$ ve $fh(X, Y)$, $Jh(X, Y)$ nin, sırasıyla, teğet ve normal bileşenleridir, [1].

3.2.9. İspat: M bir Kaehlerian olduğundan J paraleldir. Bu nedenle $X, Y \in \chi(N)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_x JY - J\bar{\nabla}_x Y = \bar{\nabla}_x (PY + FY) - J(\nabla_x Y + h(X, Y)) \\ &= \nabla_x PY + h(X, PY) - A_{FY}X + D_x FY - P(\nabla_x Y) - F(\nabla_x Y) - th(X, Y) - fh(X, Y) \end{aligned}$$

dir. Burada teğet ve normal bileşenleri eşitleyerek

$(\nabla_X P)Y = th(X, Y) + A_{FY}X$ ve $(\nabla_X F)Y = fh(X, Y) - h(X, PY)$ eşitlikleri elde edilir.

Böylece P nin paralel olması için gerek ve yeter şart $X, Y, Z \in \chi(N)$ olmak üzere

$$\langle th(X, Y) + A_{FY}X, Z \rangle = 0$$

olmasıdır. Bu ise

$$\langle A_{FY}X, Z \rangle = -\langle th(X, Y), Z \rangle = \langle A_{FX}Y, Z \rangle$$

şeklinde olur. Ayrıca $\nabla F = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \langle fh(X, Y) - h(X, PY), \xi \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle h(X, PY), \xi \rangle = \langle fh(X, Y), \xi \rangle = -\langle A_{f\xi}Y, X \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle h(PY, X), \xi \rangle = -\langle A_{f\xi}Y, X \rangle \Leftrightarrow \langle A_\xi PY, X \rangle = -\langle A_{f\xi}Y, X \rangle \\ &\Leftrightarrow -A_\xi PY = A_{f\xi}Y \end{aligned}$$

olmasıdır.

3.2.10. Uyarı: Bir Kaehlerian manifoldu olan N , ya bir total reel ya da bir kompleks alt manifoldu ise $\nabla P = \nabla F = 0$ olur, [1].

3.2.11. Sonuç: N bir M Kaehlerian manifoldunda bir yüzey olsun. Bu durumda N nin slant olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \chi(N)$ olmak üzere

$$A_{FY}X = A_{FX}Y$$

olmasıdır.

N , $\mathbb{C}^2$ kompleks sayı uzayında θ slant açısı ile bir slant yüzey olsun. N ye teğet birim vektör alanı e_1 olmak üzere

$$e_2 = (\sec \theta)Pe_1, \quad e_3 = (\csc \theta)Fe_1, \quad e_4 = (\csc \theta)Fe_2$$

yazılabilir. Böylece $e_1 = -(\sec \theta)Pe_2$ olur ve $e_1, e_2 \in \chi(N)$ ve $e_3, e_4 \in \Gamma(v)$ olacak şekilde

e_1, e_2, e_3, e_4 bir ortonormal çatı olur. $h_{ij}^r = \langle h(e_i, e_j), e_r \rangle$, $i, j = 1, 2$; $r = 3, 4$ olduğundan R

ve R^D , $\mathbb{C}^2$ de N nin, sırasıyla, Gauss ve normal eğriliğini belirtmek üzere

$$R = h_{11}^3 h_{22}^3 - (h_{12}^3)^2 + h_{11}^4 h_{22}^4 - (h_{12}^4)^2$$

$$R^D = h_{11}^3 h_{12}^4 + h_{12}^3 h_{22}^4 - h_{12}^3 h_{11}^4 - h_{22}^3 h_{12}^4$$

şeklinde elde edilir, [1].

3.2.12. Teorem: N , $\mathbb{C}^2$ de bir slant yüzey ise $R = R^D$ dir, [1].

3.2.13. İspat: $N, \mathbb{C}^2$ de bir slant yüzey olsun. Sonuç (3.2.11) den

$X, Y \in \chi(N)$ için

$$A_{FY}X = A_{FX}Y$$

dir. e_1, e_2, e_3, e_4 Teorem (3.2.6) daki gibi ortonormal bir çatı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} h_{12}^3 &= \langle h(e_1, e_2), e_3 \rangle = \langle h(e_1, e_2), (\csc \theta) Fe_1 \rangle = (\csc \theta) \langle h(e_1, e_2), Fe_1 \rangle = (\csc \theta) \langle A_{Fe_1} e_1, e_2 \rangle \\ &= (\csc \theta) \langle A_{Fe_1} e_2, e_1 \rangle = (\csc \theta) \langle A_{Fe_2} e_1, e_1 \rangle = (\csc \theta) \langle h(e_1, e_1), Fe_2 \rangle = \langle h(e_1, e_1), e_4 \rangle = h_{11}^4 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $h_{22}^3 = h_{12}^4$ olduğu ispatlanabilir. Böylece $R = R^D$ olduğu elde edilir.

4. ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

4.1. Slant Manifoldlar İçin Varlık ve Teklik Teoremi

$\bar{M}^m(4c)$, $4c$ sabit holomorfik ikinci eğrilikli basit irtibatlı tam Kaehlerian m -manifoldu olsun. $\bar{M}^m(4c)$ nin $\bar{R}$ eğrilik tensörü $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, $\bar{M}^m(4c)$ ye teğet olmak üzere

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = c\{\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle \bar{X} - \langle \bar{X}, \bar{Z} \rangle \bar{Y} + \langle J\bar{Y}, \bar{Z} \rangle J\bar{X} - \langle J\bar{X}, \bar{Z} \rangle J\bar{Y} + 2\langle \bar{X}, J\bar{Y} \rangle J\bar{Z}\} \quad (4.1.1)$$

ile verilir.

$f: M \rightarrow \bar{M}^m(4c)$, bir n -Riemann manifoldundan $\bar{M}^m(4c)$ ye bir izometrik immersiyon olsun. h ve A , sırasıyla, f nin ikinci temel formunu ve Weingarten dönüşümünü belirtsin. Yine ∇ ve $\bar{\nabla}$ de, sırasıyla, M ve $\bar{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonları olsun.

$X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \Gamma(v)$ için h ikinci temel formu ve A Weingarten dönüşümü arasında

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \quad (4.1.2)$$

şeklinde bir bağlantı vardır. İmmersiyonun H ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{n} tr h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (4.1.3)$$

dir. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, M üzerinde lokal bir ortonormal çatıdır.

M nin eğrilik tensörünü R ve D normal konneksiyonun eğrilik tensörünü R^D ile gösterelim. O halde $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\xi, \eta \in \Gamma(v)$ olmak üzere

$$\bar{R}(X, Y; Z, W) = R(X, Y; Z, W) + \langle h(X, Z), h(Y, W) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle, \quad (4.1.4)$$

$$R^D(X, Y; \xi, \eta) = \bar{R}(X, Y; \xi, \eta) + \langle [A_\xi, A_\eta](X), Y \rangle. \quad (4.1.5)$$

şeklindedir.

h ikinci temel formu için $TM \oplus T^\perp M$ üzerindeki konneksiyona göre h ın $\bar{\nabla}h$ kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (4.1.6)$$

şeklinde ve Codazzi denklemi de

$$\left(\bar{R}(X,Y)Z\right)^\perp = \left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\bar{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \quad (4.1.7)$$

şeklinde verilir. Burada $\left(\bar{R}(X,Y)Z\right)^\perp$, $\bar{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşenidir.

Alt manifoldun teğetler cümlesi üzerinde bir Q endomorfizmi için ∇Q

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X (QY) - Q(\nabla_X Y) \quad (4.1.8)$$

olarak ifade edilir.

Şimdi M , $\bar{M}^n$ (4c) de θ -slant olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$P^2 = -(\cos^2 \theta)I, \quad (4.1.9)$$

$$\langle PX, Y \rangle + \langle X, PY \rangle = 0,$$

$$(\nabla_X P)Y = th(X, Y) + A_{FY}X, \quad (4.1.10)$$

$$D_X(FY) - F(\nabla_X Y) = fh(X, Y) - h(X, PY) \quad (4.1.11)$$

olur. Burada I birim dönüşümdür. Basitçe her bir $X \in \chi(M)$ için

$$X^* = \frac{1}{\sin \theta} FX \quad (4.1.12)$$

yazarız. M üzerinde TM -değerli simetrik α bilineer formu

$$\alpha(X, Y) = th(X, Y) \quad (4.1.13)$$

dir. Buradan

$$\alpha^*(X, Y) = \frac{1}{\sin \theta} F\alpha(X, Y)$$

olur. Böylece

$$J\alpha(X, Y) = P\alpha(X, Y) + F\alpha(X, Y) \Rightarrow J\alpha(X, Y) = P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) \quad (4.1.14)$$

bulunur.

$$Jh(X, Y) = th(X, Y) + fh(X, Y)$$

olduğundan

$$Jh(X, Y) = \alpha(X, Y) + \beta^*(X, Y) \quad (4.1.15)$$

yazılır. Burada β , M üzerinde TM -değerli simetrik ve bilineerdir. (4.1.12), (4.1.14)

ve (4.1.15) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
J^2 h(X, Y) &= -h(X, Y) = J\alpha(X, Y) + J\beta^* \\
-h(X, Y) &= P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) + \frac{1}{\sin \theta} JF\beta(X, Y) \\
&= P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - (\csc \theta)\beta(X, Y) - (\csc \theta)J(P\beta(X, Y)) \\
-h(X, Y) &= P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - (\csc \theta)\beta(X, Y) \\
&\quad - (\csc \theta)P^2\beta(X, Y) - (\csc \theta)(F(P\beta(X, Y))) \\
&= P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)\beta(X, Y) \\
&\quad + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}\beta(X, Y) - (P\beta(X, Y))^* \\
&= P\alpha(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta}\beta(X, Y) - (P\beta(X, Y))^* \\
-h(X, Y) &= P\alpha(X, Y) - (\sin \theta)\beta(X, Y) + (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - (P\beta(X, Y))^* \tag{4.1.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$P\alpha(X, Y) = (\sin \theta)\beta(X, Y)$$

ifadesi (4.1.16) da göz önüne alınırsa

$$-h(X, Y) = (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) - (P\beta(X, Y))^* \tag{4.1.17}$$

olur. Buradan

$$\beta(X, Y) = (\csc \theta)P\alpha(X, Y) \Rightarrow P\beta(X, Y) = (\csc \theta)P^2\alpha(X, Y) = -(\csc \theta)(\cos^2 \theta)\alpha(X, Y)$$

olduğu (4.1.17) de yerine yazılırsa

$$h(X, Y) = (P\beta(X, Y))^* - (\sin \theta)\alpha^*(X, Y) = -(\csc \theta)\alpha^*(X, Y)$$

bulunur. Bunun sonucu olarak

$$\begin{aligned}
h(X, Y) &= -(\csc \theta)\alpha^*(X, Y) = -(\csc \theta)\left[\frac{1}{\sin \theta}(J\alpha(X, Y) - P\alpha(X, Y))\right] \\
h(X, Y) &= \csc^2 \theta [P\alpha(X, Y) - J\alpha(X, Y)]
\end{aligned}$$

olur. (4.1.10) eşitliğiden.

$$(\nabla_X P)Y = th(X, Y) + A_{FY}X = \alpha(X, Y) + A_{FY}X$$

elde edilir. Böylece

$$\langle (\nabla_X P)Y, Z \rangle = \langle \alpha(X, Y), Z \rangle - \langle \alpha(X, Z), Y \rangle \tag{4.1.18}$$

bulunur.

$\theta \neq 0$ ile $\overline{M}^n(4c)$ de n -boyutlu bir θ -slant alt manifold için (4.1.1), (4.1.7),

(4.1.8), (4.1.10) ve (4.1.18) eşitlikleri $\overline{M}^n(4c)$ de M nin Gauss ve Codazzi denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R(X, Y; Z, W) = & c \{ \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle PY, Z \rangle \langle PX, W \rangle \\ & - \langle PX, Z \rangle \langle PY, W \rangle + 2 \langle X, PY \rangle \langle PZ, W \rangle \} \\ & + \csc^2 \theta \{ \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \csc^2 \theta \{ & P\alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \alpha(X, P\alpha(Y, Z)) \} \\ & + (\sin^2 \theta) c \{ \langle X, PY \rangle Z + \langle X, PZ \rangle Y \} \\ = & (\nabla_Y \alpha)(X, Z) + \csc^2 \theta \{ P\alpha(Y, \alpha(X, Z)) + \alpha(Y, P\alpha(X, Z)) \} \\ & + (\sin^2 \theta) c \{ \langle Y, PX \rangle Z + \langle Y, PZ \rangle X \} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.1. Teorem (Varlık Teoremi): $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ve M , $\langle, \rangle$ iç çarpımı ile basit irtibatlı

Riemann n -manifold olsun. TM teğetler cümlesinin bir P endomorfizmine sahip olduğunu ve M üzerinde TM değerli α simetrik bilineer formunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X, Y, Z, W \in TM$ için

$$P^2 = -(\cos^2 \theta)I \quad (4.1.19)$$

$$\langle PX, Y \rangle + \langle X, PY \rangle = 0 \quad (4.1.20)$$

$$\langle (\nabla_X P)Y, Z \rangle = \langle \alpha(X, Y), Z \rangle - \langle \alpha(X, Z), Y \rangle \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y; Z, W) = & \csc^2 \theta \{ \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \} + \\ & c \{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle PX, W \rangle \langle PY, Z \rangle \\ & - \langle PX, Z \rangle \langle PY, W \rangle + 2 \langle X, PY \rangle \langle PZ, W \rangle \} \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)(Y, Z) = & \csc^2 \theta \{ P\alpha(X, \alpha(Y, Z)) + \alpha(X, P\alpha(Y, Z)) \} \\ & + (\sin^2 \theta) c \{ \langle X, PY \rangle Z + \langle X, PZ \rangle Y \} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

total simetrik olduğu elde edilir. O halde M den, ikinci temel formu

$$h(X, Y) = \csc^2 \theta (P\alpha(X, Y) - J\alpha(X, Y)) \quad (4.1.24)$$

şeklinde verilen $\overline{M}^n(4c)$ ye bir θ -slant izometrik immersiyon vardır, [3].

4.1.2. Teorem (Teklik Teoremi): $x^1, x^2 : M \rightarrow \overline{M}^n(4c)$, h^1 ve h^2 ikinci temel formları ile irtibatlı bir M n -Riemann manifoldundan $\overline{M}^n(4c)$ kompleks uzay formuna iki θ -slant izometrik immersion olsun. Bu takdirde M ye teğet tüm X, Y, Z vektör alanları için

$$\langle h^1(X, Y), J_{x_*^1} Z \rangle = \langle h^2(X, Y), J_{x_*^2} Z \rangle$$

ise $x^1 = \phi \circ x^2$ olacak şekilde $\overline{M}^n(4c)$ nin bir ϕ izometriği vardır, [1].

5. DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

5.1. H-umbilik Slant Alt Manifolddar

M , $4c$ sabit holomorfik ikinci eğrilikli $\overline{M}^n(4c)$ kompleks bir uzay formunun n -boyutlu uygun θ -slant alt manifoldu ise n çifttir. Burada $n=2m$ olsun. Bir $e_1, \dots, e_m, e_{1^*}, \dots, e_{m^*}$ kanonik ortonormal çatısı

$$\begin{aligned} e_2 &= (\sec \theta) P e_1, \dots, e_{2m} = (\sec \theta) P e_{2m-1} \\ e_{1^*} &= (\csc \theta) F e_1, \dots, e_{(2m)^*} = (\csc \theta) F e_{2m} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

olacak şekilde seçilsin. Burada θ slant açıdır.

$$t e_{i^*} = -(\sin \theta) e_i, \quad i = 1, \dots, 2m$$

olduğunu varsayalım. Bu varsayımın doğru olduğunu ispatlamak için

$$\begin{aligned} J e_{i^*} &= J [(\csc \theta) F e_i] = (\csc \theta) J [J e_i - P e_i] = (\csc \theta) [-e_i - J ((\cos \theta) e_{i+1})] \\ &= -(\csc \theta) e_i - (\cot \theta) J e_{i+1} = -(\csc \theta) e_i - (\cot \theta) P e_{i+1} - (\cot \theta) (\sin \theta) e_{(i+1)^*} \\ &= -(\csc \theta) e_i - (\cot \theta) P e_{i+1} - (\cos \theta) e_{(i+1)^*} \end{aligned}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Böylece

$$t e_{i^*} = -(\csc \theta) e_i - (\cot \theta) P e_{i+1}$$

ve

$$f e_{i^*} = -(\cos \theta) e_{(i+1)^*}$$

dir. Yani

$$t e_{i^*} = -(\csc \theta) e_i - (\cot \theta) (-\cos \theta) e_i = \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right) e_i = -(\sin \theta) e_i$$

olur. Buradan

$$t e_{i^*} = -(\sin \theta) e_i$$

elde edilir. Bu ise

$$-(\cos \theta) e_{(i+1)^*} = f e_{i^*}$$

şeklinde bulunur. Burada $i = 2j - 1$ yazıldığında

$$f e_{(2j-1)^*} = -(\cos \theta) e_{(2j)^*}$$

olur. Ayrıca doğrudan hesaplamalarla

$$Pe_{(2j)}^* = (\cos \theta) e_{(2j-1)}^*, \quad Pe_{2j} = -(\cos \theta) e_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, m$$

elde edilir. M ye teğet herhangi bir X vektör alanı için

$$\bar{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^n w_i^j(X) e_j + \sum_{j=1}^n w_i^{j*}(X) e_{j^*} \quad (5.1.2)$$

$$\bar{\nabla}_X e_{i^*} = \sum_{j=1}^n w_{i^*}^j(X) e_j + \sum_{j=1}^n w_{i^*}^{j*}(X) e_{j^*}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (5.1.3)$$

bulunur. O halde $w_i^j = -w_j^i$ yazılabilir. (5.1.2) eşitliği, sırasıyla, e_j ve e_{j^*} ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle = w_i^j(X)$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_X e_i, e_{j^*} \rangle = w_i^{j*}(X)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} w_i^j(X) &= \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle = X \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \bar{\nabla}_X e_j \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X e_j, e_i \rangle = -w_i^j(X) \\ \Rightarrow w_i^j &= -w_j^i \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $w_{i^*}^{j*} = -w_j^{i*}$ olduğu görülür. (4.1.3) eşitliği e_j ile iç çarpıma tabi tutulduğunda

$$\langle \bar{\nabla}_X e_{i^*}, e_j \rangle = w_{i^*}^j(X) - \langle e_{i^*}, \bar{\nabla}_X e_j \rangle = -w_j^{i*}$$

bulunur. Buradan

$$w_{i^*}^j = -w_j^{i*}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$w_i^{j*} = \sum_{k=1}^n h_{ik}^{j*} w^k, \quad h_{ik}^{j*} = \langle h(e_i, e_k), e_{j^*} \rangle \quad (5.1.4)$$

olur. Burada $w^1, \dots, w^n, e_1, \dots, e_n$ nin dual çatısıdır.

5.1.1. Yardımcı Teorem: M bir Kaehlerian n -manifoldun n -boyutlu uygun bir θ -slant alt manifoldu olsun. O halde uygun bir çatıya göre herhangi bir $i, j = 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned}
w_{2j-1}^{(2i-1)*} - w_{2i-1}^{(2j-1)*} &= \cot \theta \left(w_{2i-1}^{2j} - w_{2j-1}^{2i} \right), \\
w_{2j}^{(2i-1)*} - w_{2i-1}^{(2j)*} &= \cot \theta \left(w_{2i}^{2j} - w_{2i-1}^{2j-1} \right), \\
w_{2i}^{(2j)*} - w_{2j}^{(2i)*} &= \cot \theta \left(w_{2i}^{2j-1} - w_{2j}^{2i-1} \right), \\
w_{2j-1}^{(2i-1)*} - w_{2i-1}^{(2j-1)*} &= \cot \theta \left(w_{(2i-1)*}^{(2j)*} - w_{(2j-1)*}^{(2i)*} \right), \\
w_{2i}^{(2j)*} - w_{2j}^{(2i)*} &= \cot \theta \left(w_{(2i)*}^{(2j-1)*} - w_{(2j)*}^{(2i-1)*} \right), \\
w_{(2i-1)*}^{(2j-1)*} - w_{2i-1}^{(2j-1)*} &= \cot \theta \left(w_{2i-1}^{(2j)*} - w_{2i}^{(2j-1)*} \right), \\
w_{(2j)*}^{(2i-1)*} - w_{2j}^{2i-1} &= \cot \theta \left(w_{2i-1}^{(2j-1)*} - w_{2i}^{(2j)*} \right), \\
w_{(2i)*}^{(2j)*} - w_{2i}^{2j} &= \cot \theta \left(w_{2i-1}^{(2j)*} - w_{2i}^{(2j-1)*} \right), \\
w_{2j-1}^{(2i)*} - w_{2i}^{(2j-1)*} &= \cot \theta \left(w_{(2i)*}^{(2j)*} - w_{(2i-1)*}^{(2j-1)*} \right)
\end{aligned}$$

olur, [1].

5.1.2. Yardımcı Teorem: M , bir $\overline{M}^m(4c)$ kompleks uzay formunun n -boyutlu uygun bir alt manifoldu olsun. O halde $\overline{M}^m(4c)$ nin $\overline{R}$ eğrilik tensörü M e teğet herhangi X, Y, Z vektör alanları için

$$\left(\overline{R}(X, Y)Z \right)^\perp = \varepsilon \{ \langle JY, Z \rangle FX - \langle JX, Z \rangle FY + 2 \langle X, JY \rangle FZ \}$$

sağlanır. Burada $\left(\overline{R}(X, Y)Z \right)^\perp$, $\overline{R}(X, Y)Z$ nin normal bileşenidir, [1].

5.1.3. Tanım: Bir Kaehlerian manifoldunun n -boyutlu bir M alt manifoldunun H -umbilik diye adlandırılabilmesi için gerek ve yeter şart onun h ikinci temel formu $e_1, \dots, e_n$ lokal ortonormal çatısına göre bazı λ ve μ uygun fonksiyonlar olmak üzere

$$h(e_1, e_1) = \lambda e_{1^*}, \quad h(e_2, e_2) = \dots = h(e_n, e_n) = \mu e_{1^*}$$

$$h(e_1, e_j) = \lambda e_{j^*}, \quad h(e_j, e_k) = 0, \quad j \neq k \text{ ve } j, k = 2, \dots, n$$

olmasıdır. Burada $e_{1^*}, \dots, e_{n^*}$, sırasıyla, $Fe_1, \dots, Fe_n$ lerin doğrultularında birim vektörlerdir, [1].

5.1.4. Tanım: $\mu = 0$ ile bir H -umbilik slant alt manifold basitçe silindirik slant manifold diye adlandırılır, [1].

5.1.5. Yardımcı Teorem: Bir $\overline{M}^n$ Kaehlerian n -manifoldunun her n -boyutlu H -umbilik uygun slant alt manifoldları Kaehlerian slanttır, [1].

5.1.6. İspat: H -umbilik alt manifoldların tanımından ve bir Kaehlerian manifoldun uygun slant M alt manifoldunun bir Kaehlerian slant olması için gerek ve yeter şart A, M nin şekil operatörü, X, Y, M ye teğet olmak üzere $A_{FX}Y = A_{FY}X$ eşitliğinin var olmasıdır. Bu şarttan yararlanarak ispat yapılır.

5.2. H -Umbilik Slant Alt Manifoldların Sınıflandırması

5.2.1. Tanım: Bir (N, g) Riemann manifoldu, bir $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve TN teğetler cümlesi üzerinde aşağıdaki aksiyomları sağlayan P endomorfizmi var ise bir slant uzay formu diye adlandırılır.

1) X, Y, N e teğet olmak üzere

$$\nabla P = 0, \quad P^2 = -(\cos^2 \theta)I$$

ve

$$g(PX, Y) + g(X, PY) = 0$$

olur.

2) N sabit slant ikinci eğriliğine sahip yani $X \neq 0$ olmak üzere X, PX ile gerilen slant 2-düzlemin $K(X, PY)$ slant kesit eğriliği $X \in TN$ vektörünün seçiminden bağımsızdır, [1].

Açık olarak (M, g, J) bir kompleks uzay formu ise bir Kaehlerian manifoldunun bir M Kaehlerian slant alt manifoldu bir slant uzay formu olur. Burada $J = (\sec \theta)P$ dir.

Bu kısmın amacı aşağıdaki sınıflandırma teoremini ispatlamaktır.

5.2.2. Teorem: $M, n > 2$ olmak üzere $\overline{M}^n(4c)$ tam basit irtibatlı kompleks uzay

formunun n -boyutlu bir H -umbilik uygun slant alt manifoldu olsun. O halde aşağıdaki üç durumdan biri sağlanır.

- 1) M düzlemseldir ve $\mathbb{C}^n$ kompleks Öklid n -uzayında bir slant n -düzlemin açık bir parçası olarak daldırılmış olur.
- 2) M düzlemseldir ve $\mathbb{C}^n$ de silindirik bir slant alt manifold olarak daldırılmıştır.
- 3) $c < 0$ için M , $4c \cos^2 \theta$ sabit slant ikinci eğrilikli bir slant uzay formudur ve M ,

$\lambda = 2\mu = \pm 2\sqrt{-c} \sin \theta$ ile Tanım (5.1.3) ü sağlayan $CH^n(4c)$ kompleks hiperbolik n -uzayında bir H -umbilik alt manifold olarak daldırılmış olur, [1].

5.2.3. İspat: M , bir $\overline{M}^n(4c)$ nin H -umbilik uygun slant alt manifoldu ise M nin ikinci temel formu, bazı uygun $e_1, \dots, e_m, e_{1^*}, \dots, e_{m^*}$ lokal ortonormal çatısına göre bazı uygun λ ve μ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= \lambda e_{1^*}, \quad h(e_2, e_2) = \dots = h(e_n, e_n) = \mu e_{1^*}, \\ h(e_1, e_j) &= \lambda e_{j^*}, \quad h(e_j, e_k) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

şeklinde verilir. Y. Teorem (5.1.5) den M nin bir Kaehlerian slant olduğu söylenir. (5.1.4) ve (5.2.1) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} w_1^{1^*} &= \lambda w^1, \quad w_1^{j^*} = w_j^{1^*} = \mu w^1, \quad 2 \leq j \leq n, \\ w_j^{k^*} &= 0, \quad 2 \leq j \neq k \leq n. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

ve

$$w_1^{1^*} = \sum_{k=1}^n h_{1k}^{1^*} w^k$$

olduğundan

$$h_{1k}^{1^*} = g(h(e_1, e_k), e_{1^*}) = \begin{cases} \lambda g(e_{1^*}, e_{1^*}) = \lambda, & k=1 \\ \mu g(e_{k^*}, e_{1^*}) = 0, & k=2, 3, \dots \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$h(e_1, e_k) = \begin{cases} \lambda e_{1^*}, & k=1 \\ \mu e_{k^*}, & k=2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_1^{1^*} = \lambda w^1$$

olur.

Y. Teorem (5.1.1) ve (5.2.2) den

$$\begin{aligned}
w_1^{2*} &= w_1^2 - (\lambda + \mu) \cot \theta w_1^1, \\
w_{2k-1}^{1*} &= w_{2k-1}^1 - \mu \cot \theta w^{2k-1}, \quad k \geq 2, \\
w_{2k}^{1*} &= w_{2k}^1 + \mu \cot \theta w^{2k-1}, \quad k \geq 2, \\
w_j^{2*} &= w_j^2 - \mu \cot \theta w^j, \quad j \geq 3, \\
w_l^{j*} &= w_l^j, \quad j, l \geq 3,
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

bulunur. $\lambda = \mu = 0$ ise M total geodezik θ -slant alt manifolddur. $c \neq 0$ ile $\overline{M}^n(4c)$ kompleks uzay formunun tek bir total geodezik alt manifolduyla kompleks alt manifold ya da total reel alt manifold olur. Fakat M uygundur yani ne kompleks ne de total reel değilse $c = 0$ dir.

Şimdi M total geodezik olmasın. $X = e_1$, $Y = Z = e_2$ olmak üzere

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

dir. Codazzi denklemi ve (5.1.1), (5.2.1-3) ve Y. Teorem (5.1.2) den

$$e_1 \mu = (\lambda - 2\mu) w_1^2(e_2), \tag{5.2.4}$$

$$e_2 \mu = 3\mu w_1^2(e_1) - (\lambda + \mu) \mu \cot \theta + 3c \sin \theta \cos \theta, \tag{5.2.5}$$

$$\mu w_1^j(e_1) = 0, \quad j = 3, \dots, n \tag{5.2.6}$$

olur.

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = c \{ \langle JY, Z \rangle FX - \langle JX, Z \rangle FY + 2 \langle X, JY \rangle FZ \}$$

eşitliğini kullanarak

$$(\overline{R}(e_1, e_2)e_2)^\perp = c \{ \langle Je_2, e_2 \rangle Fe_1 - \langle Je_1, e_2 \rangle Fe_2 + 2 \langle e_1, Je_2 \rangle Fe_2 \}$$

$$\langle Je_2, e_2 \rangle = \langle Pe_2, e_2 \rangle = \langle -\cos \theta e_1, e_2 \rangle = 0$$

$$\langle Je_1, e_2 \rangle = \langle Pe_1, e_2 \rangle = \langle \cos \theta e_2, e_2 \rangle = \cos \theta$$

ve

$$\langle Je_2, e_1 \rangle = -\cos \theta$$

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(e_1, e_2)e_2)^\perp &= c \{ 0 - \cos \theta Fe_2 - 2 \cos \theta Fe_2 \} = -3c \cos \theta Fe_2 \\
&= -3c \sin \theta \cos \theta e_2^*
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(D_{e_1} h)(e_2, e_2) - (D_{e_2} h)(e_1, e_2) = D_{e_1} h(e_2, e_2) - 2h(\nabla_{e_1} e_2, e_2) - D_{e_2} h(e_1, e_2) \\ + h(\nabla_{e_2} e_1, e_2) + h(e_1, \nabla_{e_2} e_2)$$

olur. Burada

$$\nabla_{e_1} e_2 = \sum_{k=1}^n w_2^k(e_1) e_k = w_2^1(e_1) e_1 + w_2^2(e_1) e_2 + \dots$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^n w_1^k(e_2) e_k = w_1^1(e_2) e_1 + w_1^2(e_2) e_2 + \dots$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \sum_{k=1}^n w_2^k(e_2) e_k = w_2^1(e_2) e_1 + w_2^2(e_2) e_2 + \dots$$

dir.

$$w_i^j = 0 \Rightarrow h(\nabla_{e_2} e_1, e_2) = w_1^2(e_1) \mu e_{2^*}$$

$$h(\nabla_{e_2} e_1, e_2) = w_1^2(e_2) \mu e_{1^*}$$

$$h(e_1, \nabla_{e_2} e_2) = \sum_{k=1}^n w_2^k(e_2) \mu e_{k^*}$$

ve

$$D_{e_2} \mu e_{2^*} = \mu D_{e_2} e_{2^*} + e_2(\mu) e_{2^*} = \mu \sum_{j=1}^n w_{2^*}^j(e_2) e_j + \mu \sum_{j=1}^n w_{2^*}^{j^*}(e_2) e_{j^*} + e_2(\mu) e_{2^*}$$

$$D_{e_1} \mu e_{1^*} = \mu D_{e_1} e_{1^*} + e_1(\mu) e_{1^*} = \mu \sum_{j=1}^n w_{1^*}^j(e_1) e_j + \mu \sum_{j=1}^n w_{1^*}^{j^*}(e_1) e_{j^*} + e_1(\mu) e_{1^*}$$

olduğundan

$$(D_{e_1} h)(e_2, e_2) - (D_{e_2} h)(e_1, e_2) = D_{e_1} \mu e_{1^*} - 2w_2^1(e_1) \mu e_{2^*} - D_{e_2} \mu e_{2^*} \\ + w_1^2(e_2) \mu e_{1^*} + \sum_{k=1}^n w_2^k(e_2) \mu e_{k^*} = -3c \sin \theta \cos \theta e_{2^*} \quad (5.2.7)$$

olur. Son eşitliğin e_{1^*} ile iç çarpımı alındığında

$$\langle D_{e_2} \mu e_{2^*}, e_{1^*} \rangle = \mu w_{2^*}^{1^*}(e_2)$$

ve

$$\langle D_{e_1} \mu e_{1^*}, e_{1^*} \rangle = e_1(\mu)$$

elde edilir. Burada

$$e_1(\mu) - \mu w_{2^*}^{1^*}(e_2) + \mu w_1^2(e_2) + \mu w_2^1(e_2) = 0 \\ \Rightarrow e_1(\mu) = \mu(-w_{1^*}^2(e_2)) = -\mu(w_1^2(e_2) - (\lambda + \mu) \cot \theta w^1(e_2))$$

dir. (5.2.7) eşitliğinin e_{2^*} ile iç çarpımı alındığında

$$\langle D_{e_2} \mu e_{2^*}, e_{2^*} \rangle = e_2(\mu)$$

$$\langle D_{e_1} \mu e_{1^*}, e_{2^*} \rangle = \mu w_{1^*}^{2^*}(e_1) = \mu w_1^2(e_1) - \mu(\lambda + \mu) \cot \theta$$

ve

$$\mu w_1^2(e_1) - \mu(\lambda + \mu) \cot \theta - 2\mu w_1^2(e_1)\mu - e_2\mu = -3c \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow e_2\mu = 3\mu w_1^2(e_1) - \mu(\lambda + \mu) \cot \theta + 3c \sin \theta \cos \theta$$

bulunur. $j \geq 3$ olmak üzere (5.2.7) eşitliği e_j^* ile iç çarpıma tabi tutulduğunda

$$\langle D_{e_1} \mu e_{1^*}, e_{j^*} \rangle = \left\langle \mu \sum_{k=1}^n w_{1^*}^j(e_1) e_k + \mu \sum_{k=1}^n w_{1^*}^{k^*}(e_1) e_{k^*} + e_1(\mu) e_{1^*}, e_{j^*} \right\rangle = \mu w_{1^*}^{j^*}(e_1)$$

$$\langle D_{e_2} \mu e_{2^*}, e_{j^*} \rangle = \mu w_{2^*}^{j^*}(e_2)$$

olur. Diğer taraftan

$$\mu w_{1^*}^{j^*}(e_1) - 2(0) - \mu w_{2^*}^{j^*}(e_2) + \mu w_2^j(e_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mu w_{1^*}^{j^*}(e_1) + \mu w_j^2(e_2) - \mu^2 \cot \theta w^j(e_2) - \mu w_j^2(e_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mu w_{1^*}^{j^*}(e_1) = 0$$

bulunur. Böylece

$$\langle D_{e_1} \mu e_{1^*}, e_{j^*} \rangle = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $j \geq 3$ için $X = e_1$, $\{Y, Z\} = \{e_2, e_j\}$ olmak üzere Codazzi

denklemini, (5.2.1), (5.2.2) eşitlikleri ve Y. Teorem (5.1.1) ile Y. Teorem (5.1.2) kullanılarak

$$e_2\mu = \mu w_1^2(e_1) + 2c \sin \theta \cos \theta \quad (5.2.8)$$

$$\mu w_1^j(e_1) = 0 \quad (5.2.9)$$

$$\mu w_2^{2k}(e_1) = (\lambda - 2\mu) w_1^k(e_2) = (\lambda - 2\mu) w_1^2(e_k), \quad k \geq 3 \quad (5.2.10)$$

bulunur. (5.2.5) eşitliğindeki değer (5.2.8) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$3\mu w_1^2(e_1) - (\lambda + \mu)\mu \cot \theta + 3c \sin \theta \cos \theta = \mu w_1^2(e_1) + 2c \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow 2\mu w_1^2(e_1) = (\lambda + \mu)\mu \cot \theta - c \sin \theta \cos \theta \quad (5.2.11)$$

elde edilir.

$j > 1$ için $X = Z = e_1$, $Y = e_{2j-1}$ olmak üzere Codazzi denklemi ve (5.1.1), (5.2.1-3)

eşitlikleri ve Y. Teorem (5.1.2) kullanılarak

$$e_1\mu = (\lambda - 2\mu) w_1^{2j-1} e_{2j-1}, \quad (5.2.12)$$

$$e_{2j-1}\lambda = (\lambda - 2\mu) w_1^{2j-1}(e_1), \quad (5.2.13)$$

$$(\lambda - 2\mu)w_1^2(e_{2j-1}) = (\lambda - 2\mu)w_1^k(e_{2j}) = 0, \quad k \neq 2, 2j-1, 2j, \quad (5.2.14)$$

$$(\lambda - 2\mu)w_1^{2j}(e_{2j-1}) = (\lambda - 2\mu)\mu \cot \theta(e_1) \quad (5.2.15)$$

$j > 1$ için $X = e_{2j-1}$, $Y = e_1$, $Z = e_{2j}$ olmak üzere Codazzi denklemi ve (5.1.1), (5.2.1-3) eşitlikleri ve Y. Teorem (5.1.2) kullanılarak

$$(\lambda - 2\mu)w_1^2(e_{2j-1}) = c \sin \theta \cos \theta + \mu^2 \cot \theta \quad (5.2.16)$$

bulunur. (5.2.15) eşitliğindeki değer (5.2.16) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$(2\mu - \lambda)\mu \cot \theta = c \sin \theta \cos \theta + \mu^2 \cot \theta$$

$$\Rightarrow (2\mu^2 - \lambda\mu - \mu^2) \cot \theta = c \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \mu^2 - \lambda\mu = c \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda)\mu = c \sin^2 \theta \quad (5.2.17)$$

elde edilir. (5.2.11) eşitliği $\cot \theta$ ile bölündüğünde

$$2\mu w_1^2(e_1) \tan \theta = (\lambda + \mu)\mu - c \sin^2 \theta$$

bulunur. Bu durumda (5.2.17) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} 2\mu w_1^2(e_1) \tan \theta &= (\lambda + \mu)\mu - (\mu - \lambda)\mu = \lambda\mu + \mu^2 - \mu^2 + \lambda\mu = 2\lambda\mu \\ \Rightarrow \mu w_1^2(e_1) &= \lambda\mu \cot \theta \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

olur.

Diğer yandan $j \geq 3$ için $X = e_2$, $Y = Z = e_j$ olmak üzere Codazzi denklemi ve (5.1.1), (5.2.1-3) eşitlikleri ve Y. Teorem (5.1.2) kullanılarak

$$e_2\mu = 0 \quad (5.2.19)$$

$$\mu w_1^2(e_2) = \mu w_1^j(e_j), \quad j \geq 3 \quad (5.2.20)$$

$$\mu w_1^k(e_2) = 0, \quad k \geq 3 \quad (5.2.21)$$

$$3\mu w_1^j(e_2) = \mu w_1^2(e_j) \quad (5.2.22)$$

bulunur. (5.2.19) ve (5.2.9) eşitliklerinden $\mu w_1^2(e_1) = -2c \sin \theta \cos \theta$ elde ederiz. Böylece (5.2.18) eşitliği göz önüne alındığında

$$\lambda\mu = -2c \sin^2 \theta$$

elde edilir. Bu eşitlik (5.2.17) eşitliği ile birlikte düşünüldüğünde

$$\lambda\mu = -2(\mu - \lambda)\mu \Rightarrow -\lambda\mu + 2\lambda\mu - 2\mu^2 = 0 \Rightarrow -2\mu^2 + \lambda\mu = 0 \Rightarrow \mu(\lambda - 2\mu) = 0 \quad (5.2.23)$$

bulunur.

Sonuç olarak slant alt manifold üzerindeki her bir noktada ya $\mu = 0$ ya da $\lambda = 2\mu$ olur.

Uygun slant alt manifold üzerindeki bazı noktalarda $\mu = 0$ ise (5.2.17) eşitliği $c = 0$ olur. Ayrıca bu durumda (5.2.17) ve (5.2.23) eşitliklerinden, benzer şekilde $\mu = 0$ olur. Böylece (2) deki durum elde edilir.

$\lambda = 2\mu$ ve $\mu \neq 0$ ise (5.2.17) eşitliği $\varepsilon < 0$ ve $\mu = \pm\sqrt{-c} \sin \theta$ olduğunu ifade eder. Böylece M nin R eğrilik tensörü

$$R(X, Y; Z, W) = c \cos^2 \theta \{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \} + c \{ \langle PX, W \rangle \langle PY, Z \rangle - \langle PX, Z \rangle \langle PY, W \rangle + 2 \langle X, PY \rangle \langle PZ, W \rangle \} \quad (5.2.24)$$

eşitliğini sağlar.

Bu durumda M , $4c \cos^2 \theta$ slant ikinci eğrilikli bir slant uzay formudur. Sonuç olarak (3) deki durum elde edilir.

5.3. Kaehlerian slant alt manifoldlarda genel eşitsizlikler

5.3.1. Teorem: $c \in \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere $\gamma: M \rightarrow M^n(4c)$ tam basit irtibatlı $M^n(4c)$ kompleks uzay formunda n -boyutlu bir Kaehlerian θ -slant alt manifold olsun. O halde

$$H^2 \geq \frac{2(n+2)}{n^2(n-1)} \tau - \frac{n+2}{n} \left(1 + \frac{3 \cos^2 \theta}{n-1} \right) c$$

elde edilir. Burada H^2 ortalama eğriliğin karesi ve τ ,

$$\tau = \sum_{i < j} K_{ij}$$

şeklinde tanımlı skalar kesit eğrilikdir. K_{ij} , bir $e_1, \dots, e_n$ lokal ortonormal çatısı için e_i ve e_j ile gerilen 2-düzlemin kesit eğriliğidir, [1].

5.3.2. İspat: M , $M^n(4c)$ nin kompleks bir alt manifoldu ise $\theta = 0$ dır ve M bir minimal alt manifolddur. Böylece yukarıdaki eşitsizlik durumunda eşitlik durumu sağlanarak $\tau \leq \frac{n(n+2)c}{2}$ olarak indirgenmesi için gerek ve yeter şart M nin total geodezik kompleks alt manifold olmasıdır.

Şimdi M nin $\theta \neq 0$ ile $\overline{M}^n(4c)$ nin Kaehlerian θ -slant alt manifoldu olduğunu varsayalım. O halde şekil operatörün $X, Y \in TM$ için

$$A_{FX}Y = A_{FY}X \quad (5.3.1)$$

eşitliğini sağlar.

Ortalama eğrilik fonksiyonunun tanımından

$$n^2 H^2 = \sum_i \left(\sum_j (h_{jj}^i)^2 + 2 \sum_{j < k} h_{jj}^i h_{kk}^i \right) \quad (5.3.2)$$

dir. (4.2.4) deki Gauss denkleminde

$$2\tau = n^2 H^2 - \sum_{i,j,k=1} (h_{jk}^i)^2 + (n(n-1) + 3n \cos^2 \theta) c \quad (5.3.3)$$

yazılabilir. Burada $h_{jk}^i = \langle h(e_j, e_k), e_i^* \rangle$ dir. Böylece (5.3.1), (5.3.2) ve (5.3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\tau = \frac{1}{2} (n(n-1) + 3n \cos^2 \theta) c + \sum_i \sum_{j < k} h_{jj}^i h_{kk}^i - \sum_{i \neq j} (h_{jj}^i)^2 - 3 \sum_{i < j < k} (h_{jk}^i)^2 \quad (5.3.4)$$

elde edilir.

$$m = \frac{(n+2)}{(n-1)} \text{ olsun. Bu durumda (5.3.2), (5.3.3) ve (5.3.4) den}$$

$$\begin{aligned} n^2 H^2 - m(2\tau - n(n-1)c - 3n \cos^2 \theta) &= \sum_i (h_{jj}^i)^2 + (1+2m) \sum_{i \neq j} (h_{jj}^i)^2 + (3n \cos^2 \theta) c \\ &\quad + 6m \sum_{i < j < k} (h_{jk}^i)^2 - 2(m-1) \sum_i \sum_{j < k} h_{jj}^i h_{kk}^i \\ &= \sum_i (h_{ii}^i)^2 + 6m \sum_{i < j < k} (h_{jk}^i)^2 + (m-1) \sum_{i \neq j, k} \sum_{j < k} (h_{jj}^i - h_{kk}^i)^2 \\ &\quad + (1+2m - (n-2)(m-1)) \sum_{j \neq i} (h_{jj}^i)^2 - 2(m-1) \sum_{j \neq i} h_{ii}^i h_{jj}^i \\ &= 6m \sum_{i < j < k} (h_{jk}^i)^2 + (m-1) \sum_{i \neq j, k} \sum_{j < k} (h_{jj}^i - h_{kk}^i)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} (h_{ii}^i - (n-1)(m-1)h_{jj}^i)^2 \end{aligned}$$

$$n^2 H^2 - m(2\tau - n(n-1)c - 3n \cos^2 \theta) \geq 0 \quad (5.3.5)$$

bulunur.

Bu ise ispatı tamamlar.

5.3.3. Teorem: M , $\theta \neq 0$ ile $\overline{M}^n(4c)$ nin n -boyutlu bir θ -slant alt manifoldu olsun. O halde

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - \frac{(n(n-1) + 3n \cos^2 \theta)c}{n(n-1)} \quad (5.3.6)$$

bir $P \in M$ noktasında eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart P nin total umbilik nokta olmasıdır.

5.3.4. İspat: P , M nin bir noktası olsun. $P \in M$ noktasında $T_P M$ teğet uzayı ve $T_P^\perp M$ normal uzay için, sırasıyla, $\{e_1, \dots, e_k\}$ ve $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ ortonormal bazlarını seçelim. Burada e_{k+1} ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda ve $e_1, \dots, e_k$, A_{k+1} şekil operatörünü köşegenleştirir.

O halde

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

$$A_r = h_{ij}^r, \quad \sum_{i=1}^k h_{ii}^k = 0, \quad k+2 \leq r \leq n$$

elde edilir. Gauss denkleminde

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{r=k+2}^n \sum_{i,j=1}^k (h_{ij}^r)^2 - (n(n-1) + 3n \cos^2 \theta)c \quad (5.3.8)$$

olur. Diğer yandan

$$\sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum a_i a_j \quad (5.3.9)$$

dir. Böylece yukarıdaki eşitlikten

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^k a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (5.3.10)$$

olur. (5.3.7) ve (5.3.9) birlikte düşünüldüğünde

$$n(n-1)\|H\|^2 \geq 2\tau + \sum_{r=k+2}^n \sum_{i,j=1}^k (h_{ij}^r)^2 - (n(n-1) + 3n \cos^2 \theta)c \quad (5.3.11)$$

bulunur. Bu ise teoremdaki (5.3.6) eşitsizliğini ifade eder. (5.3.6) nin eşitlik durumu bir $P \in M$ noktasında sağlanıyorsa (5.3.9) ve (5.3.11) dan $A_r = 0$ ($r = k+2, \dots, n$) ve $a_1 = \dots = a_k$ elde edilir.

Sonuç olarak P total umbilik noktadır. Burada tersinin ispatı açıktır.

Bu ise ispatı tamamlar.

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

5.3.5. Sonuç: M , $\theta \neq 0$ açısı ile $\overline{M}^n(4c)$ nin 2-boyutlu bir θ -slant yüzey olsun. Bu durumda bir $P \in M$ noktasında

$$\|H\|^2 \geq \tau - (1 + 3 \cos^2 \theta)c \quad (5.3.12)$$

eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart P nin total umbilik nokta olmasıdır.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Alohalı.R., H.**, 2005, Geometry of Slant Submanifolds, King Saud University, Saudi Arabia.
- [2] **Chen, B., Y., Tazawa, Y.**, 2000, Slant submanifolds of complex projective and complex hyperbolic spaces. Glasgow Math. J., Printed in the United Kingdom.
- [3] **Chen, B., Y.**, 2002, Classification of flat slant surfaces in complex Euclidean plane, J. Math. Soc. Japan.
- [4] **Erman, S.**, 2009, Kompleks Uzay Formlarında Holomorfik Helisler, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [5] **.Hacısalıhoğlu, H., H.**, 1998, “Diferensiyel Geometri”, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [6] **Hacısalıhoğlu, H., H.**, 2003, “Diferensiyel Geometri”, Hacısalıhoğlu Yayıncılık, Ankara.
- [7] **Kenmatsu, K., Zhou, D.**, 2000, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two dimensional complex space forms, Amer. J. Math., 122, 295-317.
- [8] **Yano, K., Kon, M.**, 1984, Structures on Manifolds, World Scientific Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2009 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2011 yılında Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.