

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACE-LIKE
YÜZEYLER**

Meltem ÖĞRENMİŞ

Tez Yöneticisi

Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAĞIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACE-LIKE YÜZEYLER

Meltem ÖĞRENMİŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, 07/09/2007 tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından
oybirliği / oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye: Prof. Dr. Vedat ASİL

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Tamamlanan yüksek lisans tezi çalışmalarım sırasında, yüksek lisans eğitiminin her aşamasında; şükran borçlu olduğum, bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, değerli önerileri ve katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Meltem ÖĞRENMİŞ

İÇİNDEKİLER

İçindekiler	I
Şekiller Listesi	II
Simgeler Listesi	III
Özet	IV
Abstract	V

BİRİNCİ BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar	1
1.2. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar	8

İKİNCİ BÖLÜM

2. SPACE-LIKE YÜZEYLER	15
2.1. Giriş	15
2.2. $k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler	16
2.3. $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler ile $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ Eşitliğine Sahip Time-like Yüzeyler Arasındaki Bäcklund Dönüşümü	24
2.4. $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler Üzerindeki Bäcklund Dönüşümü	35
Kaynaklar	37

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.2.1	23
Şekil 2.2.2	24

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-Boyutlu Reel Vektör Uzayı
$\langle \ , \ \rangle$	:	Simetrik Bilineer Form
M	:	C^∞ –Manifold
$\mathbb{R}_1^n$	:	Minkowski Uzayı
$\ \ \ $	:	Norm
∇	:	Kovaryant Türev
$[\ , \]$	:	Lie Operatörü
$\overline{M}$	:	Hiperyüzey
η	:	Birim Normal Vektör Alanı
I	:	Birinci Temel Form
$II(h)$	:	İkinci Temel Form
$A(S)$	:	Şekil Operatörü
k_1	:	Birinci Eğrilik
k_2	:	İkinci Eğrilik

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACE-LIKE YÜZEYLER

Meltem ÖĞRENMİŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 38

Bu tez iki bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde ilk olarak, $k_1k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$ eşitliğine sahip yüzeylerin bir ailesinin inşa edilmesi durumu verildi. Daha sonra ise $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ eşitliğine sahip space-like yüzeyler ile $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip time-like yüzeyler arasındaki Bäcklund dönüşümü verildi. Bundan başka $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip space-like yüzeyler üzerindeki Bäcklund dönüşümü verildi.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzay, Space-like Yüzey, Lax Çifti, Sh-Laplace Denklemi, Bäcklund dönüşümü

ABSTRACT

Ms. Thesis

SPACE-LIKE SURFACES ON 3-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Meltem ÖĞRENMİŞ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2007, Page: 38

This thesis consists of two chapters.

In the first chapter some fundamental definitions and theorems are given which will be used in the later chapter.

In the two chapter, Construction of a family of space-like surfaces with $k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$. Later, Bäcklund transformation between space-like surfaces with $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ and space-like surfaces with $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ are given. Furthermore, Bäcklund transformation on space-like surfaces with $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ is given.

Key Words: Minkowski 3-Space, Space-like Surfaces, Lax Pair, Sh -Laplace Equation, Bäcklund Transformation

BİRİNCİ BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. $M, \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir P noktası için P nin $\mathbb{R}^3$ de bir A komşuluğu ve $\mathbb{R}^2$ nin bir U açık alt kümesinden $\mathbb{R}^3$ uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi doğrulayacak biçimde bulunabiliyorsa, M ye $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir [13].

1. $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ve regüler bir fonksiyondur.
2. $\varphi(u) = M \cap A$ dır ve $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ fonksiyonu homeomorfizmdir.

Tanım 1.1.2. En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad (1.1.1)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin bir $P(u, v)$ düzgün noktasındaki $\vec{n}(u, v)$ normal birim vektörünün birinci mertebeden kısmi türev vektörleri, $\vec{n}$ ye dik olduklarından, P deki teğet düzleme paralel vektörlerdir. O halde bunları, koordinat çizgilerinin $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ teğet vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde yazabiliriz.

$$\vec{n}_u = a_{11} \vec{x}_u + a_{12} \vec{x}_v, \quad \vec{n}_v = a_{21} \vec{x}_u + a_{22} \vec{x}_v \quad (1.1.2)$$

Bunları sırası ile $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ vektörleri ile çarpar ve I. ve II. temel formun katsayıları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} H^2 a_{11} &= FM - GL, & H^2 a_{12} &= FL - EM \\ H^2 a_{21} &= FN - GM, & H^2 a_{22} &= FM - EN \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

veya

$$\begin{aligned} \vec{n}_u &= \frac{1}{H^2} [(FM - GL) \vec{x}_u + (FL - EM) \vec{x}_v] \\ \vec{n}_v &= \frac{1}{H^2} [(FN - GM) \vec{x}_u + (FM - EN) \vec{x}_v] \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

şeklinde elde edilen formüllere Weingarten Formülleri adı verilir [18].

Tanım 1.1.3. Koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdıkları sistem dik ise, $F \equiv 0$ dir. ve (1.1.4) formülleri

$$\vec{n}_u = -\left(\frac{L}{E}\vec{x}_u + \frac{M}{G}\vec{x}_v\right), \quad \vec{n}_v = -\left(\frac{M}{E}\vec{x}_u + \frac{N}{G}\vec{x}_v\right) \quad (1.1.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer, ek olarak koordinat çizgileri yüzey üzerinde $M \equiv 0$ özdeşliğini sağlayabilecek şekilde seçilirse (1.1.5) formüllerinde

$$r = \frac{L}{E}, \quad \bar{r} = \frac{N}{G} \quad (1.1.6)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\vec{n}_u + r\vec{x}_u = \vec{0}, \quad \vec{n}_v + \bar{r}\vec{x}_v = \vec{0} \quad (1.1.7)$$

şeklinde elde edilen bu son formüllere Olin-Rodrigues Formülleri adı verilir [18].

Tanım 1.1.4. En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin düzgün bir $P(u, v)$ noktasında, yer vektörünün ikinci mertebeden

$$\vec{x}_{uu}, \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{vv}$$

kısmi türev vektörleri, lineer olarak bağımsız $\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}$ vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabilirler:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + \alpha_1 \vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + \alpha_2 \vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + \alpha_3 \vec{n} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Elde edilen (1.1.8) formüllerine Gauss formülleri adı verilir. Γ_{ij}^k katsayılarında 2-inci türden Christoffel sembolleri adını alırlar [18].

(1.1.8) deki her üç eşitliği skalar olarak $\vec{n}$ ile çarptığımızda,

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uu}, \quad M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv}, \quad N = \vec{n} \cdot \vec{x}_{vv}$$

olduğu da göz önüne alınırsa

$$\alpha_1 = L, \quad \alpha_2 = M, \quad \alpha_3 = N$$

elde edilir.

Ayrıca

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$$

olduğundan, burada sırasıyla u ve v ye göre kısmi türev alınırsa;

$$\begin{aligned} F_u &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uu} + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{uv} = \vec{x}_v \vec{x}_{uu} + \frac{1}{2} E_v \\ F_v &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uv} + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} = \vec{x}_u \vec{x}_{vv} + \frac{1}{2} G_u \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \vec{x}_v \vec{x}_{uu} &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \vec{x}_u \vec{x}_{vv} &= F_v - \frac{1}{2} G_u \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

yazılabilir.

Buna göre, (1.1.8) denklemlerinin, skalar olarak, $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ ile çarpımları sonucunda da, (1.1.9) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} E_u; \quad F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} E_v; \quad F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_u, \\ E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 &= F_v - \frac{1}{2} G_u; \quad F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} G_v \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

bulunur.

Buradan

$$\begin{aligned} 2H^2\Gamma_{11}^1 &= GE_u + FE_v - 2FF_u, & 2H^2\Gamma_{11}^2 &= 2EF_u - EE_v - FE_u, \\ 2H^2\Gamma_{12}^1 &= GE_v - FG_u, & 2H^2\Gamma_{12}^2 &= EG_u - FE_v, \\ 2H^2\Gamma_{22}^1 &= 2GF_v - GG_u - FG_v, & 2H^2\Gamma_{22}^2 &= EG_v + FG_u - 2FF_v \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 1.1.1. En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin düzgün bir noktasında hesaplanan Gauss formüllerinin Γ_{ij}^k katsayıları, sadece birinci temel formun katsayılarına ve bunların birinci mertebeden kısmi türevlerine bağlıdır [18].

Yüzeyin koordinat çizgileri bir dik sistem oluşturduklarında, $F \equiv 0$ özdeşliği göz önüne alınırsa (1.1.8) formüllerini (1.1.10) yardımıyla

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E} \vec{x}_u - \frac{E_v}{2G} \vec{x}_v + L \vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E} \vec{x}_u + \frac{G_u}{2G} \vec{x}_v + M \vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E} \vec{x}_u + \frac{G_v}{2G} \vec{x}_v + N \vec{n} \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.1.5. Koordinat çizgilerinin birbirlerini dik kestikleri (1.1.12) formüllerinde, bunların teğet birim vektörlerini

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}; \quad \vec{t}^* = \frac{\vec{x}_v}{\sqrt{G}}$$

ile gösterelim. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{t}_u &= -\frac{E_v}{2H} \vec{t}^* + \frac{L}{\sqrt{E}} \vec{n}; & \vec{t}_v &= \frac{G_u}{2H} \vec{t}^* + \frac{M}{\sqrt{E}} \vec{n}; \\ \vec{t}_u^* &= \frac{E_v}{2H} \vec{t} + \frac{M}{\sqrt{G}} \vec{n}; & \vec{t}_v^* &= -\frac{G_u}{2H} \vec{t} + \frac{N}{\sqrt{G}} \vec{n}; \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

yazılabilir.

Eğer f 1-nci sınıftan skalar ya da vektörel bir fonksiyon olmak üzere

$$f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}; \quad f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}} \quad (1.1.13)$$

alınırsa ve

$$g = -(\lg \sqrt{E})_2, \quad \bar{g} = (\lg \sqrt{G})_1, \quad t = \frac{M}{H} \quad (1.1.14)$$

eşitlikleri kullanılırsa, (1.1.6) formülleri yardımıyla, (1.1.12) formüllerini

$$\begin{aligned} \vec{x}_{11} &= \vec{t}_1 = g \vec{t}^* + r \vec{n}, & \vec{x}_{12} &= \vec{t}_2 = \bar{g} \vec{t}^* + t \vec{n}, \\ \vec{x}_{21} &= \vec{t}_1^* = -g \vec{t} + t \vec{n}, & \vec{x}_{22} &= \vec{t}_2^* = -\bar{g} \vec{t} + \bar{r} \vec{n} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

şeklinde yazabiliriz.

Buradan

$$\vec{x}_{12} - \vec{x}_{21} = g \vec{x}_1 + \bar{g} \vec{x}_2 \quad (1.1.16)$$

olur.

Benzer düşünce ile hareket edersek Weingarten formüllerinden

$$(\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2)_1 = \vec{n}_1 = -r \vec{t} - t \vec{t}^*, \quad (\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2)_2 = \vec{n}_2 = -t \vec{t} - \bar{r} \vec{t}^* \quad (1.1.17)$$

elde edilir.

Elde edilen (1.1.14) ve (1.1.16) formüllerine Darboux-Ribaucour Formülleri adı verilir [18].

Tanım 1.1.6. Gauss formüllerinin bir $P(u, v)$ düzgün noktasma uygulandığı yüzey eğer 3-üncü sınıftan ise, aynı noktada yer vektörünün

$$(\vec{x}_{uu})_v = (\vec{x}_{uv})_u, \quad (\vec{x}_{vv})_u = (\vec{x}_{uv})_v$$

özdeşliklerini gerçekleştirmesi gerekir. O halde (1.1.8) formüllerini kullanacak olursak

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L \vec{n})_v &= (\Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M \vec{n})_u \\(\Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + N \vec{n})_u &= (\Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M \vec{n})_v\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu özdeşliklerde, Γ_{ij}^k ler yerine (1.1.11) formülleri ile elde edilen değerler yerine yazılarak ve kısmi türevler alınarak, yeniden Gauss ve Weingarten Formüllerinden yararlanılırsa, her iki özdeşlikten

$$\begin{aligned}A_1 \vec{x}_u + A_2 \vec{x}_v + A_3 \vec{n} &= \vec{0} \\B_1 \vec{x}_u + B_2 \vec{x}_v + B_3 \vec{n} &= \vec{0}\end{aligned}$$

biçiminde birer vektörel denklem çıkarılır.

Böylece

$$A_j = 0, \quad B_j = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

denklemlerinin gerçekleşmesi gerekir. Bu denklemleri açtığımızda $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenirse, sırası ile,

$$\begin{aligned}F \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \\E \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^2)^2, \quad (1.1.18) \\L_v - M_u &= L \Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N \Gamma_{11}^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}G \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^1)^2, \\F \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1, \quad (1.1.19) \\M_v - N_u &= L \Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N \Gamma_{12}^2\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Bu iki grup formülün sonuçlarına Mainardi-Codazzi Formülleri adı verilir [18].

Eğer yüzey üzerinde $F \equiv 0$ ise (1.1.18) formülleri (1.1.12) yardımı ile

$$\begin{aligned} L_v + \frac{E_u}{2E}M - \frac{E_v}{2G}N &= M_u + \frac{E_v}{2E}L + \frac{G_u}{2G}M, \\ N_u - \frac{G_u}{2E}L - \frac{G_v}{2G}M &= M_v + \frac{E_v}{2E}M + \frac{G_u}{2G}N \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer yüzey üzerinde $M \equiv 0$ ise

$$\begin{aligned} L_v - \frac{E_v}{2G}N &= \frac{E_v}{2E}L, \\ N_u - \frac{G_u}{2E}L &= \frac{G_u}{2G}N \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

olur. (1.1.6), (1.1.12) ve (1.1.13) formülleri yardımı ile (1.1.21) formüllerinden

$$\begin{aligned} r_2 &= g(r - \bar{r}) \\ \bar{r}_1 &= \bar{g}(r - \bar{r}) \end{aligned}$$

formülleri elde edilir.

Eğer yüzey sıfır uzunlukta eğrilere (minimal eğrilere) oranlanırsa yüzey üzerinde özdeş olarak $E = 0$, $G = 0$ olacağından (1.1.11) formülleri

$$\Gamma_{11}^1 = (\lg | F)_u, \quad \Gamma_{22}^2 = (\lg | F)_v, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$$

eşitliklerini verir ve (1.1.8) formülleride

$$\vec{x}_{uu} = (\lg | F)_u \vec{x}_u + L \vec{n}, \quad \vec{x}_{uv} = M \vec{n}, \quad \vec{x}_{vv} = (\lg | F)_v \vec{x}_v + N \vec{n}$$

şeklini alır.

Mainardi-Codazzi Formülleri ise

$$L_v - M_u = -M(\lg | F)_u, \quad M_v - N_u = M(\lg | F)_v$$

olur ve buradan

$$\left(\frac{M_u - L_v}{M}\right)_v = \left(\frac{M_v - N_u}{M}\right)_u$$

elde edilir [18].

Tanım 1.1.7. $\phi(u, v : \lambda)$, $SU(2)$ değerli bir fonksiyon olsun. Öyleki $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğer parametresi olarak bilinir. Lax denklemleri

$$\begin{aligned}\phi_u &= U\phi \\ \phi_v &= V\phi\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

şeklinde tanımlanır öyleki $U(u, v : \lambda)$ ve $V(u, v : \lambda)$ $SU(2)$ değerli bir fonksiyonlar olup (1.1.22) deki denklemlerin tutarlılık şartı olan

$$U_v - V_u + UV - VU = 0\tag{1.1.23}$$

denklemini sağlarlar. Burada U ve V Lax Çifti diye adlandırılır [13].

Tanım 1.1.8. Gauss ve Ortalama eğrilikleri arasında ilişki olan yüzeylere Weingarten yüzeyleri adı verilir [13].

Tanım 1.1.9. $U = U(x, t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Delta U &= \sin U \\ \Delta U &= \sinh \alpha\end{aligned}$$

denklemlerine sırasıyla, Sine-Laplace ve Sinh-Laplace Denklemleri adı verilir [16].

1.2. Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 1.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$

$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

özelliklerine sahip ise, $\langle, \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [17].

Tanım 1.2.2. V bir n boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

olsun. $\forall v \in V$ için $\langle \xi, v \rangle = 0$ olacak şekilde bir $\xi \neq 0 \in V$ vektörü mevcut ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna V üzerinde dejenere simetrik bilinear form denir. Aksi taktirde $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna nondejenere denir. Buradan $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formun nondejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$

olmasıdır. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki simetrik bilinear form, V uzayının altuzayı üzerine dejenere veya nondejenere bir bilinear form indirger [9].

Tanım 1.2.3. $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu simetrik bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir:

1. Definit Durum: Eğer,

- (a) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif definit,
- (b) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif definit denir.

2. Semi-Definit Durum: Eğer,

- (a) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif semi-definit,
- (b) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif semi-definit denir.

3. Nondejenere Durum:

Eğer, $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna nondejenere simetrik bilinear form denir [17].

Tanım 1.2.4. Bir V vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilinear form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt vektör uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir [17].

Tanım 1.2.5. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde nondejenere simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. Bu durumda $\langle, \rangle$ ye bir skalar çarpma veya semi-Öklidyen metrik; V vektör uzayına da semi-Öklidyen uzay denir [9].

Tanım 1.2.6. V bir semi-Öklidyen uzay olsun. $v \in V$ olmak üzere

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v ye space-like vektör,
- ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye time-like vektör,
- iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (light-like) vektör denir [9].

Tanım 1.2.7. M bir C^∞ - manifold olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, nondejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir ve ν ile gösterilir [17].

Tanım 1.2.8. n -boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve her $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \text{ ise} \\ 1, & 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i$$

şeklinde tanımlı

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna Minkowski iç çarpımı denir. Bu fonksiyon ile birleşen $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da n -boyutlu standart Minkowski uzayı veya kısaca Minkowski uzayı denir ve

$$L^n(1, n-1) = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$$

veya kısaca $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.2.9. $\mathbb{R}_1^n$ n -boyutlu Minkowski uzayında bir vektör $\vec{w}$ olsun. $\vec{w}$ nin normu

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{|\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle|}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 1.2.10. $X, Y \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall p \in \mathbb{R}_1^n$ için $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n) |_{p \in T_p(\mathbb{R}_1^n)}$ dir. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektör alanı için

$$y_i : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ - sınıfından iseler, Y vektör alanına C^∞ - sınıfındandır denir.

Bu durumda, Y nin X e göre Kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X[y_i] = \langle \vec{\nabla} y_i, X \rangle = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n]) \\ &= (\langle \vec{\nabla} y_1, X \rangle, \langle \vec{\nabla} y_2, X \rangle, \dots, \langle \vec{\nabla} y_n, X \rangle) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ∇ ya Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki Minkowski anlamında Kovaryant türevi denir [1].

Teorem 1.2.1. $\mathbb{R}_1^n$ n -boyutlu Minkowski uzayında X, Y, Z ve W C^∞ - sınıfından vektör alanları olsun. Bu taktirde,

- i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
 - ii) $\nabla_{X+W}(Y) = \nabla_X Y + \nabla_W Y$
 - iii) $\nabla_{f(p)X} Y = f(p) \nabla_X Y, f \in C^\infty(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}), p \in \mathbb{R}_1^n$
 - iv) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$
- dir [2].

Teorem 1.2.2. n -boyutlu Minkowski uzayı ve $\mathbb{R}_1^n$ üzerinde tanımlı vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}_1^n)$ ve ∇ da Minkowski anlamında Kovaryant türev olsun. O zaman $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ vektör alanları C^∞ - sınıfından olmak üzere

- i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
 - ii) $\nabla_{X_p}(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle|_p + \langle Y, \nabla_X Z \rangle|_p$
- dir [1].

Tanım 1.2.11. n -boyutlu Minkowski uzayı ve $\mathbb{R}_1^n$ üzerinde tanımlı vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}_1^n)$ ve ∇ da Minkowski anlamında Kovaryant türev olsun. X, Y, Z ve W

C^∞ - sınıfından vektör alanları olmak üzere

- i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- ii) $\nabla_{X+W}(Y) = \nabla_X Y + \nabla_W Y$
- iii) $\nabla_{f(p)X} Y = f(p) \nabla_X Y, f \in C^\infty(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}), p \in \mathbb{R}_1^n$
- iv) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$
- v) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- vi) $\nabla_{X_p}(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle|_p + \langle Y, \nabla_X Z \rangle|_p$

eşitliklerini sağlayan Kovaryant türeve Levi-Civita Konneksiyonu denir [17].

Sonuç 1.2.1. ∇ bir Levi-Civita Konneksiyonu ve $\chi(\mathbb{R}_1^n)$ de Minkowski uzayında vektör alanları cümlesi olmak üzere, $\forall X, V, W \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ için

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_V W, X \rangle &= V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle \\
&\quad - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğe Koszul Formülü denir [17].

Tanım 1.2.12. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Minkowski altmanifold $\overline{M}$ olsun. Eğer $\dim \overline{M} = (n - 1)$ ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^n$ nin Minkowski hiperyüzeyi denir.

Burada $\overline{M}$ time-like altmanifold ise $\overline{M}$ ye time-like hiperyüzey; $\overline{M}$ space-like altmanifold ise $\overline{M}$ ye space-like hiperyüzey denir.

Ayrıca $\overline{M}$ time-like bir hiperyüzey ve η bu hiperyüzeyin bir birim normalidir ise

$$\langle \eta, \eta \rangle = 1$$

dir, yani η space-like birim normal vektör alanıdır.

Benzer şekilde $\overline{M}$ space-like bir hiperyüzey ve η bu hiperyüzeyin birim normalidir ise

$$\langle \eta, \eta \rangle = -1$$

dir, yani η time-like birim normal vektör alanıdır [12].

Tanım 1.2.13. $\mathbb{R}_1^n$ bir n -boyutlu Minkowski manifoldu ve $\mathbb{R}_1^n$ in m -boyutlu bir Minkowski altmanifoldu M olsun. $\mathbb{R}_1^n$ ve M üzerindeki Levi-Civita Konneksiyonları, sırasıyla, $\overline{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere genelleştirilmiş Gauss Denklemi;

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanır, burada h , M nin $\mathbb{R}_1^n$ deki II.Temel formudur [17].

X herhangi bir vektör alanı ve ξ de normal vektör alanı olmak üzere Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad (1.2.2)$$

şeklinde verilir. Buradaki A_ξ , ξ ye göre M nin şekil operatörüdür. $\nabla^\perp$ ise M nin normal demeti üzerinde metrik konneksiyondur.

(1.2.1) ve (1.2.2) eşitliklerinden

$$\langle \overline{\nabla}_X Y, \xi \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \quad (1.2.3)$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \quad (1.2.4)$$

olur. (1.2.3) ve (1.2.4) eşitliklerinden

$$\langle h(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \quad (1.2.5)$$

dir.

$\chi^\perp(M)$ nin ortonormal baz vektör alanı $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}\}$ olsun. $h^j(X, Y)$, $j = 1, \dots, n - m$ fonksiyonları C^∞ - sınıfından diferensiyellenebilir olmak üzere,

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} h^j(X, Y) \xi_j \quad (1.2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (1.2.3) ve (1.2.5) eşitlikleri (1.2.6) da göz önüne alınırsa,

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle \xi_j \quad (1.2.7)$$

veya

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle A_{\xi_j} X, Y \rangle \xi_j \quad (1.2.8)$$

elde edilir [7].

Tanım 1.2.14. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Minkowski hiperyüzeyi M olsun. M nin normal vektör alanı ξ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere

$$S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = -\nabla_X \xi$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M nin Şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir [10].

İKİNCİ BÖLÜM

2. SPACE-LIKE YÜZEYLER

2.1. Giriş

Cao ve Tian [5] çalışmasında, 3-boyutlu Minkowski uzayında, k_1 ve k_2 asli eğrilikler ve m de keyfi sabit olmak üzere sh -Laplace çözümleri ile

$$k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$$

eşitliğine sahip space-like yüzeylerin bir ailesi inşa etti.

Soliton teori bakış açısı ile, 3-boyutlu uzayda bir yüzey için Gauss-Weingarten formülü, Gauss-Codazzi denklemlerinin bir Lax çiftidir [8].

Ayrıca Weingarten yüzeyleri için Gauss-Codazzi denklemleri [19] ve [20] de elde edilmiştir. Yani k_1 ve k_2 asli eğrilikleri için

$$f(k_1, k_2) = 0$$

bağıntısına sahip olan yüzeyler için Gauss-Codazzi denklemlerini elde etmişlerdir.

Bundan dolayı, Gauss-Codazzi denklemlerinin bir çözümü ile Gauss-Weingarten formülü çözülerek, k_1 ve k_2 asli eğrilikleri için $f(k_1, k_2) = 0$ bağıntısına sahip bir Weingarten yüzeyi inşa edilebilir. Fakat pratikte,

$$f(k_1, k_2) = 0$$

keyfi fonksiyonu için Gauss-Codazzi denklemi non-lineer bir denklemdir ve genel olarak bu denklemi çözmek kolay değildir. Gauss-Codazzi denkleminin bir çözümü verilse bile biri hala Gauss-Codazzi formülünün teorik olarak çözümünün karşısındadır. M^3 Minkowski 3-uzayda sabit negatif eğrilikli space-like yüzeyler için ($k_1 k_2 = 1$) Gauss-Codazzi denklemi $sh - Laplace$ denklemdir. [8] $sh - Laplace$ denkleminin çözümü ile Hu [15], M^3 de sabit negatif eğrilikli space-like yüzeylerin bir ailesini inşa etmiştir.

Ayrıca Cao ve Tian [5] de, ilk olarak m keyfi bir sabit olmak üzere

$$k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$$

eşitliğine sahip Weingarten space-like yüzeyler için Gauss-Codazzi denkleminin hala $sh - Laplace$ denklemi olduğunu işaret etmiştir. Buradan Gauss-Weingarten formülünün çözümü ile

$$k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$$

eşitliğine sahip space-like yüzeylerin bir ailesi bulunmuştur. Bu yüzeylerin bir genelleştirilmesi [15] de elde edilmiştir. Bu çalışmada ise hiç bir umbilik nokta içermeyen yüzeyleri tartıştık.

Daha sonra space-like yüzeyler üzerindeki Bäcklund dönüşümleri yine Cao ve Tian tarafından [5] de incelenmiştir. İlk olarak $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ eşitliğine sahip olan bir space-like yüzey ele alınarak bu yüzeyin I. ve II. temel formları ile ilgili yardımcı tereomler verildi. Ele alınan bu space-like yüzey yardımı ile bir başka $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip olan bir time-like yüzey elde edildi. Yani $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ eşitliğine sahip olan bir space-like yüzey ile $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip olan bir time-like yüzey arasındaki Bäcklund dönüşümü verildi. Bundan başka $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip olan space-like yüzeyler üzerindeki Bäcklund dönüşümü verildi.

2.2. $k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler

S yüzeyi

$$k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$$

eşitliğine sahip space-like bir yüzey olsun. Yani

$$(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2, \quad (l^2 - m^2 = 1)$$

şartını sağlayan bir yüzey olsun.

e_1, e_2 asli doğrultulardaki tanjant vektör alanları ve e_3 de normal vektör alanı $(e_1^2 = e_2^2 = -e_3^2 = 1)$ olmak üzere S yüzeyi zerindeki bir Lorentzian ortonormal çatı alanı $\{r : e_1, e_2, e_3\}$ olsun.

O zaman hareket denklemleri

$$dr = w_1 e_1 + w_2 e_2 \quad (2.2.1)$$

ve

$$de_i = \sum_{j=1}^3 w_{ij} e_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.2)$$

şeklindedir. Burada

$$w_{12} = -w_{21}$$

$$w_{13} = w_{31}$$

$$w_{23} = w_{32}$$

dir.

İlk olarak S yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının, sırasıyla

$$I = a^2 du^2 + b^2 dv^2$$

ve

$$II = k_1 a^2 du^2 + k_2 b^2 dv^2 \quad a, b > 0$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. O zaman

$$w_1 = a du$$

$$w_2 = b dv$$

$$w_{13} = w_{31} = -k_1 a du$$

$$w_{23} = w_{32} = -k_2 b dv$$

$$w_{12} = -w_{21} = -\frac{a_v}{b} du + \frac{b_u}{a} dv$$

elde ederiz. Buradan Codazzi denklemleri

$$(k_1 - k_2) a_v + k_{1v} a = 0$$

ve

$$(k_2 - k_1) b_u + k_{2u} b = 0$$

şeklinde olur. Ayrıca

$$(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2, \quad (l^2 - m^2 = 1)$$

olduğundan

$$k_1 - m = l \frac{l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2}}{l \cosh \frac{\alpha}{2} - m \sinh \frac{\alpha}{2}}$$

ve

$$k_2 - m = l \frac{l \cosh \frac{\alpha}{2} - m \sinh \frac{\alpha}{2}}{l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2}}$$

kabul edebiliriz. O zaman Codazzi denklemleri kullanılarak

$$a = l \cosh \frac{\alpha}{2} - m \sinh \frac{\alpha}{2}$$

ve

$$b = l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2}$$

olacak şekilde u ve v parametrelerini seçebiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(l \cosh \frac{\alpha}{2} - m \sinh \frac{\alpha}{2} \right) du \\ w_2 &= \left(l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2} \right) dv \\ w_{13} &= w_{31} = \sinh \frac{\alpha}{2} du \\ w_{23} &= w_{32} = \cosh \frac{\alpha}{2} dv \\ w_{12} &= -w_{21} = -\frac{\alpha_v}{2} du + \frac{\alpha_u}{2} dv \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

elde edilir.

(2.2.3) denklemi göz önüne alınırsa (2.2.2) denklemini

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha_v & \sinh \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha_v & 0 & 0 \\ \sinh \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\alpha_u & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_u & 0 & \cosh \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cosh \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

Gauss denklemi

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = \sinh \alpha \quad (2.2.5)$$

şeklinde $sh - Laplace$ denklemdir. (2.2.4) denklemi (2.2.5) denkleminin bir Lax çiftidir.

(2.2.5) ile verilen $sh - Laplace$ denklemi

$$\alpha = 2 \sinh^{-1} \left(-\frac{1}{\sinh(\lambda u + \mu v)} \right) \quad (2.2.6)$$

şeklinde çözümlere sahiptir. Burada λ ve μ sabitlerdir.

Ayrıca

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \quad \lambda > 0, \quad \lambda u + \mu v < 0$$

olmak üzere (2.2.6) denkleminde

$$\sinh \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sinh(\lambda u + \mu v)} \quad (2.2.7)$$

ve

$$\cosh \frac{\alpha}{2} = -\frac{\cosh(\lambda u + \mu v)}{\sinh(\lambda u + \mu v)} \quad (2.2.8)$$

elde ederiz.

(2.2.4) ile verilen Lax Çiftinin ilk kısmını

$$\begin{aligned} e_{1u} &= -\mu \sinh \frac{\alpha}{2} e_2 + \sinh \frac{\alpha}{2} e_3 \\ e_{2u} &= \mu \sinh \frac{\alpha}{2} e_1 \\ e_{3u} &= \sinh \frac{\alpha}{2} e_1 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
a &= -e_2 + \mu e_3 \\
b &= \lambda e_1 - \mu e_2 + e_3 \\
c &= \lambda e_1 + \mu e_2 - e_3
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

olmak üzere (2.2.9) denklemi

$$\begin{aligned}
a_u &= 0 \\
b_u &= \lambda \sinh \frac{\alpha}{2} b \\
c_u &= -\lambda \sinh \frac{\alpha}{2} c
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

şeklinde olur. (2.2.11) denkleminin integrali alınrsa

$$\begin{aligned}
a &= a_0(v) \\
b &= -b_0(v) \coth \frac{\lambda u + \mu v}{2} \\
c &= -c_0(v) \tanh \frac{\lambda u + \mu v}{2}
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

elde ederiz. Burada $a_0(v)$, $b_0(v)$ ve $c_0(v)$, v nin vektör değerli fonksiyonlarıdır.

(2.2.12) denklemini (2.2.4) ile verilen Lax Çiftinin ikinci kısmında yerine yazacak olursak birtakım hesaplamalar ile

$$\begin{aligned}
a'_0(v) &= -\frac{1}{2}b_0(v) + \frac{1}{2}c_0(v) \\
b'_0(v) &= -a_0(v) \\
c'_0(v) &= a_0(v)
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

elde ederiz. (2.2.13) denkleminin genel çözümleri

$$\begin{aligned}
a_0(v) &= c_1 \cosh v + c_2 \sinh v \\
b_0(v) &= -c_1 \sinh v - c_2 \cosh v + c_3 \\
c_0(v) &= c_1 \sinh v + c_2 \cosh v + c_3
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

olur. Burada c_1 , c_2 ve c_3 keyfi sabit vektörlerdir. (2.2.12) ve (2.2.14) denklemlerinden

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ u &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_0(0) &= c_1 \\ b_0(0) &= -c_2 + c_3 \\ c_0(0) &= c_2 + c_3 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

elde ederiz.

(2.2.10) denklemini göz önüne alacak olursak

$$\begin{aligned} a_0(0) &= -e_2^0 + \mu e_3^0 \\ b_0(0) &= \lambda e_1^0 - \mu e_2^0 + e_3^0 \\ c_0(0) &= \lambda e_1^0 + \mu e_2^0 - e_3^0 \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

yazabiliriz. Burada $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$, M^3 ün bir Lorentzian ortonormal bazıdır.

(2.2.10) denkleminde (2.2.4) ile verilen Lax Çiftinin

$$\begin{aligned} e_1 &= -\coth \xi e_1^0 - \frac{1}{\lambda \sinh \xi} (\sinh v - \mu \cosh v) e_2^0 - \frac{1}{\lambda \sinh \xi} (\cosh v - \mu \sinh v) e_3^0 \\ e_2 &= -\frac{\mu}{\lambda \sinh \xi} e_1^0 + \frac{1}{\lambda^2} (\cosh v - \mu \sinh v - \mu \coth \xi (\sinh v - \mu \cosh v)) e_2^0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} (\sinh v - \mu \cosh v - \mu \coth \xi (\cosh v - \mu \sinh v)) e_3^0 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

genel çözümlerini elde ederiz. Burada $\xi = \lambda u + \mu v$ dir.

(2.2.1) denklemini çözecek olursak

$$dr = +\left(l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2}\right) dv e_2 \tag{2.2.18}$$

elde edilir. Buradan

$$r_u = (l \cosh \frac{\alpha}{2} - m \sinh \frac{\alpha}{2}) du e_1 \quad (2.2.19)$$

yazılır. (2.2.7), (2.2.8) ve (2.2.17) denklemleri kullanılarak (2.2.19) denkleminde

$$\begin{aligned} r &= r_0(v) + \frac{1}{\lambda}(l(\xi - \coth \xi) + \frac{m}{\sinh \xi})e_1^0 \\ &+ \frac{1}{\lambda^2}(\frac{1}{\sinh \xi}(\mu \cosh v - \sinh v) + m(\sinh v - \mu \cosh v) \coth \xi)e_2^0 \\ &+ \frac{1}{\lambda^2}(\frac{1}{\sinh \xi}(\mu \sinh v - \cosh v) + m(\cosh v - \mu \sinh v) \coth \xi)e_3^0 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

elde ederiz. Burada $r_0(v)$, v nin vektör değerli bir fonksiyonudur. Ayrıca (2.2.18) den

$$r_v = \left(l \sinh \frac{\alpha}{2} - m \cosh \frac{\alpha}{2} \right) e_2 \quad (2.2.21)$$

elde edilir.

Ayrıca (2.2.7), (2.2.8) ve (2.2.17) denklemleri kullanılarak (2.2.21) denkleminde

$$r'_0(v) + \frac{l\mu}{\lambda}e_1^0 + \frac{m\mu}{\lambda^2}(\sinh v - \mu \cosh v)e_2^0 + \frac{m\mu}{\lambda^2}(\cosh v - \mu \sinh v)e_3^0 \quad (2.2.22)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$r_0(v) = \frac{l\mu}{\lambda}e_1^0 - \frac{m\mu}{\lambda^2}(\cosh v - \mu \sinh v)e_2^0 - \frac{m\mu}{\lambda^2}(\sinh v - \mu \cosh v)e_3^0 \quad (2.2.23)$$

olur. (2.2.20) ve (2.2.23) denklemleri kullanılarak (2.2.1) denkleminin

$$\begin{aligned} r &= (lu - \frac{1}{\lambda} \coth \xi + \frac{m}{\lambda \sinh \xi})e_1^0 \\ &+ (-\frac{m\mu}{\lambda^2}(\cosh v - \mu \sinh v) - \frac{1}{\lambda^2 \sinh \xi}(\sinh v - \mu \cosh v) \\ &+ \frac{m}{\lambda^2}(\sinh v - \mu \cosh v) \coth \xi)e_2^0 + (-\frac{m\mu}{\lambda^2}(\sinh v - \mu \cosh v) \\ &- \frac{1}{\lambda^2 \sinh \xi}(\cosh v - \mu \sinh v) + \frac{m}{\lambda^2}(\cosh v - \mu \sinh v) \coth \xi)e_3^0 \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

genel çözümlerini elde ederiz.

Genelliği kaybetmeksizin, M^3 ün bir Lorentzian bazını

$$(\tilde{e}_1^0, \tilde{e}_2^0, \tilde{e}_3^0) = (e_1^0, \frac{1}{\lambda}(e_2^0 - \mu e_3^0), \frac{1}{\lambda}(e_3^0 - \mu e_2^0)) \quad (2.2.25)$$

şeklinde seçebiliriz. O zaman M^3 de

$$k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$$

eşitliğine sahip space-like yüzeylerin bir ailesini aşağıdaki şekilde elde ederiz [6]:

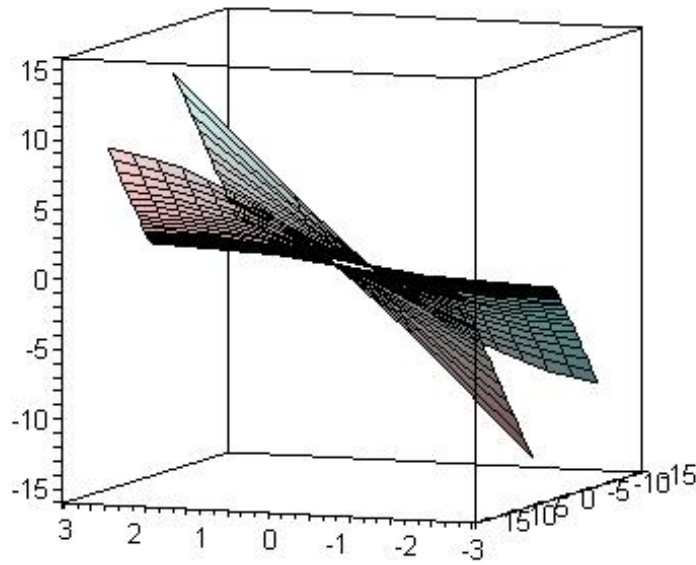
$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= lu - \frac{1}{\lambda} \coth(\lambda u + \mu v) + \frac{m}{\lambda \sinh(\lambda u + \mu v)} \\ S_{\lambda, m} := x_2(u, v) &= -\frac{l \sinh v}{\lambda \sinh(\lambda u + \mu v)} - \frac{m \mu \cosh v}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} \sinh v \coth(\lambda u + \mu v) \quad (2.2.26) \\ x_3(u, v) &= -\frac{l \cosh v}{\lambda \sinh(\lambda u + \mu v)} - \frac{m \mu \sinh v}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} \cosh v \coth(\lambda u + \mu v) \end{aligned}$$

Burada $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ve $l^2 - m^2 = 1$ dir.

Eğer $l = 1$ ve $m = 0$ alınırsa, $S_{\lambda, 0}$ yüzeyi S_λ space-like yüzeyine döndürür. Bu ise [8] de verilmiştir.

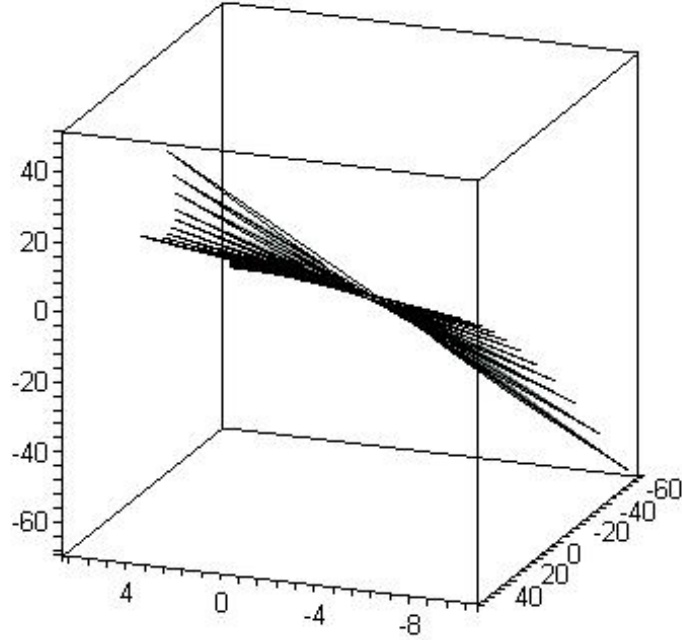
MAPLE yazılımı kullanılarak l, m, λ ve μ parametrelerinin belirli değerleri için $S_{\lambda, \mu}$ yüzeyinin grafiği çizilebilir.

Örneğin $l = \sqrt{2}$, $m = 1$, $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ için $S_{1,1}$ in grafiği şekil 2.2.1 de görülebilir.



şekil 2.2.1

Eğer $l = \sqrt{2}$, $m = 1$, $\lambda = \mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alınırsa $S_{\frac{\sqrt{2}}{2},1}$ in grafiği ise şekil 2.2.2 deki gibi olur.



şekil 2.2.2

2.3. $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler ile $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ Eşitliğine Sahip Time-like Yüzeyler Arasındaki Bäcklund Dönüşümü

S , $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$, $(m^2 - l^2) \neq 0$ eşitliğine sahip bir space-like yüzey olsun. e_1, e_2 asli doğrultudaki tanjant vektör alanları ve e_3 normal vektör alanı ($e_1^2 = e_2^2 = -e_3^2 = 1$) olmak üzere $\{r : e_1, e_2, e_3\}$ bir ortonormal Lorentzian çatı alanı olsun. O zaman hareket denklemleri

$$dr = w_1 e_1 + w_2 e_2$$

$$de_i = \sum_{j=1}^3 w_{ij} e_j \quad i = 1, 2, 3$$

şeklindedir. Burada

$$w_{12} = -w_{21}$$

$$w_{13} = w_{31}$$

$$w_{23} = w_{32}$$

dir.

İlk olarak S yüzeyinin birinci ve ikinci temel formlarının, sırasıyla

$$I = a^2 du^2 + b^2 dv^2$$

ve

$$II = k_1 a^2 du^2 + k_2 b^2 dv^2$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. O zaman

$$w_1 = a du$$

$$w_2 = b dv$$

$$w_{13} = w_{31} = -k_1 a du$$

$$w_{23} = w_{32} = -k_2 b dv$$

$$w_{12} = -w_{21} = -\frac{a_v}{b} du + \frac{b_u}{a} dv$$

elde ederiz. Buradan Codazzi denklemleri

$$(k_1 - k_2) a_v + k_{1v} a = 0$$

ve

$$(k_2 - k_1) b_u + k_{2u} b = 0$$

şeklinde olur. Codazzi denklemlerinden

$$k_1 - m = l \frac{\cosh \frac{\alpha}{2}}{\sinh \frac{\alpha}{2}}$$

ve

$$k_2 - m = l \frac{\sinh \frac{\alpha}{2}}{\cosh \frac{\alpha}{2}}$$

olur ve

$$a = \sinh \frac{\alpha}{2} \text{ ve } b = \cosh \frac{\alpha}{2}$$

olacak şekilde u ve v parametrelerini seçebiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} w_1 &= \sinh \frac{\alpha}{2} du \\ w_2 &= \cosh \frac{\alpha}{2} dv \\ w_{12} &= -w_{21} = -\frac{\alpha_v}{2} du + \frac{\alpha_u}{2} dv \\ w_{13} &= w_{31} = -(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) du \\ w_{23} &= w_{32} = -(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) dv \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

olur. Gauss denklemi ise

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = (m^2 + l^2) \sinh \alpha + 2ml \cosh \alpha \tag{2.3.2}$$

şeklindedir. (Codazzi denklemleride (2.3.2) ye özdeştir.

O halde aşağıdaki yardımcı teoremleri verebiliriz [5].

Yardımcı Teorem 2.3.1. S , $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$, $(m^2 - l^2) \neq 0$ eşitliğine sahip bir space-like yüzey olsun. O zaman S yüzeyi,

$$I = \sinh^2 \frac{\alpha}{2} du^2 + \cosh^2 \frac{\alpha}{2} dv^2$$

birinci temel form ve

$$II = \sinh \frac{\alpha}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) du^2 + \cosh \frac{\alpha}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) dv^2$$

ikinci temel form olmak üzere (u, v) koordinatına sahip grafik ile çizilebilir. Burada $\alpha(u, v)$,

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = (m^2 + l^2) \sinh \alpha + 2ml \cosh \alpha$$

denklemini gerçektir.

Yardımcı Teorem 2.3.2. Eğer $\alpha(u, v)$

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = (m^2 + l^2) \sinh \alpha + 2ml \cosh \alpha$$

denkleminde α ise τ ($\tau \neq 0$) bir adi sabittir. O zaman α' üzerinde

$$\frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_v + \alpha_u) = \cos \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) - \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \quad (2.3.3)$$

ve

$$\frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_u - \alpha_v) = -\sin \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) - \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \quad (2.3.4)$$

denklemleri tam olarak integrallenebilir. Ayrıca $\alpha'(u, v)$

$$\alpha'_{uu} + \alpha'_{vv} = (m^2 - l^2) \sin \alpha' \quad (2.3.5)$$

denklemini sağlar.

İspat: (2.3.3) ve (2.3.4) den

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_{vu} + \alpha_{uu}) &= -\frac{\alpha'_u}{2} \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad + \frac{\alpha_u}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad - \frac{\alpha'_u}{2} \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad - \frac{\alpha_u}{2} \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_{uv} - \alpha_{vv}) &= -\frac{\alpha'_v}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad - \frac{\alpha_v}{2} \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad + \frac{\alpha'_v}{2} \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\ &\quad - \frac{\alpha_v}{2} \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cosh^2 \tau (\alpha'_{vu} - \alpha'_{uv} + \alpha_{uu} + \alpha_{vv}) &= \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_u - \alpha_v) \left[-\sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \right. \\
&\quad \left. - \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_v + \alpha_u) \left[\cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \right. \\
&\quad \left. - \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \right] \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.3.3) ve (2.3.4) ifadeleri (2.3.6) da yerine yazılırsa

$$\alpha'_{vu} - \alpha'_{uv} + \alpha_{uu} + \alpha_{vv} = (m^2 + l^2) \sinh \alpha + 2ml \cosh \alpha$$

elde ederiz.

$\alpha(u, v)$ (2.3.2), (2.3.3) ve (2.3.4) eşitliklerini sağladığından tam olarak integrallenebilir.

(2.3.3) ve (2.3.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_{vv} + \alpha_{uv}) &= -\frac{\alpha'_v}{2} \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad + \frac{\alpha_v}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad - \frac{\alpha'_v}{2} \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad - \frac{\alpha_v}{2} \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_{uu} - \alpha_{vu}) &= -\frac{\alpha'_u}{2} \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad - \frac{\alpha_u}{2} \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad + \frac{\alpha'_u}{2} \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}) \\
&\quad - \frac{\alpha_u}{2} \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cosh^2 \tau (\alpha'_{uu} + \alpha'_{vv}) &= \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_v + \alpha_u) \left[-\sin \frac{\alpha'}{2} \left(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sinh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} \left(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cosh \tau (\alpha'_u - \alpha_v) \left[-\cos \frac{\alpha'}{2} \left(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} \left(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2} \right) \right] \tag{2.3.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.3.3) ve (2.3.4) ifadeleri (2.3.7) de göz önne alınırsa

$$\alpha'_{uu} + \alpha'_{vv} = (m^2 - l^2) \sinh \alpha'$$

bulunur.

Bu yüzden (2.3.3) ve (2.3.4) ifadeleri (2.3.2) ve (2.3.5) eşitlikleri arasındaki Bäcklund Dönüştürme verir.

$\alpha(u, v)$, (2.3.3) ve (2.3.4) denklemlerinin bir çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned}
e &= \cos \frac{\alpha'}{2} e_1 + \sin \frac{\alpha'}{2} e_2 \\
e^\perp &= -\sin \frac{\alpha'}{2} e_1 + \cos \frac{\alpha'}{2} e_2 \\
e'_3 &= \cosh \tau e^\perp + \sinh \tau e_3
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Ayrıca S' nün

$$r' = \frac{m^2 - l^2}{m^2 + l^2} r + \frac{\cosh \tau}{m^2 + l^2} (l e - m e^\perp) + \frac{m}{m^2 + l^2} (1 - \sinh \tau) e_3 \tag{2.3.8}$$

şeklinde tanımlı bir yüzey olduğunu kabul edelim.

Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz [5].

Teorem 2.3.1. e'_3 , S' yüzeyinin bir normal vektör alanıdır.

İspat: (2.3.1) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
dr &= \sinh \frac{\alpha}{2} due_1 + \cosh \frac{\alpha}{2} dve_2, \\
de &= [\frac{1}{2}(\alpha'_u - \alpha_v)du + \frac{1}{2}(\alpha'_v + \alpha_u)dv]e^\perp \\
&\quad - [\cos \frac{\alpha'}{2}(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})du + \sin \frac{\alpha'}{2}(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dv]e_3 \quad (2.3.9) \\
de^\perp &= -[\frac{1}{2}(\alpha'_u - \alpha_v)du + \frac{1}{2}(\alpha'_v + \alpha_u)dv]e \\
&\quad + [\sin \frac{\alpha'}{2}(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})du - \cos \frac{\alpha'}{2}(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dv]e_3
\end{aligned}$$

ve

$$de_3 = -(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})due_1 - (l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dve_2 \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\frac{m^2 - l^2}{m^2 + l^2} dr e'_3 &= \frac{m^2 - l^2}{m^2 + l^2} \cosh \tau (-\sin \frac{\alpha'}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} du + \cos \frac{\alpha'}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} dv) \\
\frac{l \cosh \tau}{m^2 + l^2} de e'_3 &= \frac{l}{m^2 + l^2} \cosh^2 \tau [\frac{1}{2}(\alpha'_u - \alpha_v)du + \frac{1}{2}(\alpha'_v + \alpha_u)dv] \\
&\quad + \frac{l \cosh \tau \sinh \tau}{m^2 + l^2} [\cos \frac{\alpha'}{2}(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})du \\
&\quad + \sin \frac{\alpha'}{2}(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dv] \\
-\frac{m \cosh \tau}{m^2 + l^2} de^\perp e'_3 &= \frac{m \cosh \tau \sinh \tau}{m^2 + l^2} [\sin \frac{\alpha'}{2}(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})du \\
&\quad - \cos \frac{\alpha'}{2}(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dv] \\
\frac{m(1 - \sinh \tau)}{m^2 + l^2} de_3 e'_3 &= \frac{m(1 - \sinh \tau) \cosh \tau}{m^2 + l^2} [\sin \frac{\alpha'}{2}(l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2})du \\
&\quad - \cos \frac{\alpha'}{2}(l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2})dv]
\end{aligned}$$

bulunur.

Burada (2.3.3) ve (2.3.4) kullanılarak basit bir hesaplama ile

$$dr' e'_3 = 0$$

elde edilir, yani e'_3 , S' yüzeyinin normal vektör alanıdır.

Ayrıca $e_3'^2 = 1$ olduğundan S' bir timelike yüzeydir.

Yardımcı Teorem 2.3.3. S' yüzeyinin I. temel formu I' ,

$$\begin{aligned} I' &= \frac{m^2 - l^2}{(m^2 + l^2)^2} \left[\left(l \cos \frac{\alpha'}{2} + m \sin \frac{\alpha'}{2} \right)^2 du^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(l \sin \frac{\alpha'}{2} - m \cos \frac{\alpha'}{2} \right)^2 dv^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

şeklindedir [5].

Yardımcı Teorem 2.3.4. S' yüzeyinin II. temel formu II' ,

$$\begin{aligned} II' &= \frac{m^2 - l^2}{m^2 + l^2} \left[\sin \frac{\alpha'}{2} \left(l \cos \frac{\alpha'}{2} + m \sin \frac{\alpha'}{2} \right) du^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\alpha'}{2} \left(l \sin \frac{\alpha'}{2} - m \cos \frac{\alpha'}{2} \right) dv^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

şeklindedir [5].

Teorem 2.3.2. S' yüzeyinin asli eğrilikleri olan k_1' ve k_2' ,

$$(k_1' - m)(k_2' - m) = -l^2$$

denklemini sağlar [5].

İspat: Yardımcı Teorem 2.3.3. ve 2.3.4. birlikte göz önüne alınırsa,

$$k_1' = \frac{(m^2 + l^2) \sin \frac{\alpha'}{2}}{(l \cos \frac{\alpha'}{2} + m \sin \frac{\alpha'}{2})}$$

ve

$$k_2' = -\frac{(m^2 + l^2) \cos \frac{\alpha'}{2}}{(l \sin \frac{\alpha'}{2} - m \cos \frac{\alpha'}{2})}$$

olduğundan

$$(k_1' - m)(k_2' - m) = -l^2$$

elde ederiz. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

O halde $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ eşitliğine sahip bilinen bir space-like yüzeyden, $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ eşitliğine sahip bir time-like yüzeyler ailesini inşa etmek için sadece tam olarak integrellenebilir (2.3.3) ve (2.3.4) denklemlerini çözülmesi gerekir.

Tersine, S' nün $(k'_1 - m)(k'_2 - m) = -l^2$ ($m^2 - l^2 < 0$) denklemini sağlayan ve asli eğrilikleri, sırasıyla, k'_1, k'_2 olan, I. ve II. temel formları da sırasıyla (2.3.11) ve (2.3.12) ile verilen bir time-like yüzey olduğunu kabul edelim. S' üzerinde, e'_1, e'_2 asli doğrultudaki tanjant vektör alanları ve e'_3 normal vektör alanı ($e'^2_1 = -e'^2_2 = e'^2_3 = 1$) olmak üzere $\{r' : e'_1, e'_2, e'_3\}$ bir ortonormal Lorentzian çatı alanı olsun. O zaman hareket denklemleri

$$dr' = w'_1 e'_1 + w'_2 e'_2$$

$$de'_i = \sum_{j=1}^3 w'_{ij} e'_j \quad i = 1, 2, 3$$

şeklinde. Burada

$$\begin{aligned} w'_1 &= \frac{\sqrt{m^2 - l^2}}{m^2 + l^2} (l \cos \frac{\alpha'}{2} + m \sin \frac{\alpha'}{2}) du \\ w'_2 &= \frac{\sqrt{m^2 - l^2}}{m^2 + l^2} (l \sin \frac{\alpha'}{2} - m \cos \frac{\alpha'}{2}) dv \\ w'_{12} &= w'_{21} = -\frac{\alpha'_v}{2} du + \frac{\alpha'_u}{2} dv \\ w'_{13} &= -w'_{31} = \sqrt{m^2 - l^2} \sin \frac{\alpha}{2} du \\ w'_{23} &= w'_{32} = \sqrt{m^2 - l^2} \cos \frac{\alpha}{2} dv \end{aligned}$$

dir ve $\alpha'(u, v)$, (2.3.5) denklemini sağlar.

$\alpha(u, v)$, (2.3.3) ve (2.3.4) denklemlerinin bir çözümü olacak şekilde

$$\begin{aligned} e' &= \frac{l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{m^2 - l^2}} e'_1 + \frac{l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{m^2 - l^2}} e'_2 \\ e'^\perp &= \frac{l \cosh \frac{\alpha}{2} + m \sinh \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{m^2 - l^2}} e'_1 - \frac{l \sinh \frac{\alpha}{2} + m \cosh \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{m^2 - l^2}} e'_2 \\ e'_3 &= \cosh \tau e'^\perp - \sinh \tau e'_3 \end{aligned}$$

yazılabilir.

Ayrıca S nin

$$r = \frac{m^2 + l^2}{m^2 - l^2} r' - \frac{\cosh \tau}{m^2 - l^2} (l e' - m e'^\perp) + \frac{m}{m^2 - l^2} (1 + \sinh \tau) e'_3$$

şeklinde tanımlı bir yüzey olduğunu kabul edelim.

S yüzeyi için aşağıdaki teoremleri verebiliriz [5].

Teorem 2.3.3. e_3 , S yüzeyinin bir normal vektör alanıdır. Ayrıca $e_3^2 = -1$ olduğundan S bir space-like yüzeydir.

Teorem 2.3.3. S yüzeyinin asli eğrilikleri olan k_1 ve k_2 ,

$$(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$$

denklemini sağlar.

O halde $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ denklemini sağlayan time-like yüzeyler ile $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ denklemini sağlayan space-like yüzeyler arasında Backlund dönüşümü elde edilir.

Örnek 2.3.1. S space-like yüzeyi için $m^2 - l^2 > 0$ olmak üzere

$$r = \left(\frac{m}{m^2 - l^2} \sinh \sqrt{m^2 - l^2} v, \frac{l}{m^2 - l^2} u, \frac{m}{m^2 - l^2} \cosh \sqrt{m^2 - l^2} v \right) \quad (2.3.13)$$

şeklinde olsun. $\theta = \sqrt{m^2 - l^2} v$ olmak üzere

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0) \\ e_2 &= (\cosh \theta, 0, \sinh \theta) \\ e_3 &= (-\sinh \theta, 0, -\cosh \theta) \end{aligned}$$

olur.

S yüzeyinin I. ve II. temel formları, sırasıyla,

$$I = \frac{l^2}{m^2 - l^2} du^2 + \frac{m^2}{m^2 - l^2} dv^2$$

ve

$$II = m dv^2$$

bulunur.

S yüzeyinin k_1 ve k_2 asli eğrilikleri, sırasıyla,

$$k_1 = 0$$

ve

$$k_2 = m - \frac{l^2}{m}$$

olur ve bundan dolayı

$$(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$$

elde edilir. Burada $\sinh \frac{\alpha}{2} = -\frac{l}{\sqrt{m^2 - l^2}}$ ve $\cosh \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - l^2}}$ dir.

Ayrıca (2.3.3) ve (2.3.4) ifadeleri

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cosh \tau \alpha'_v &= -\sqrt{m^2 - l^2} \sinh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} \\ \frac{1}{2} \cosh \tau \alpha'_u &= -\sqrt{m^2 - l^2} \sin \frac{\alpha'}{2} \end{aligned}$$

denklemlerine indirgenir. Dolayısıyla c bir sabit olmak üzere

$$\tan \frac{\alpha'}{4} = e^w \quad w = -\frac{\sqrt{m^2 - l^2}}{\cosh \tau} u - \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau} \sqrt{m^2 - l^2} v + c$$

yazabiliriz.

Bundan başka

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha'}{2} &= \sec h w & \cos \frac{\alpha'}{2} &= -\tanh w \\ e &= \cos \frac{\alpha'}{2} e_1 + \sin \frac{\alpha'}{2} e_2 = (\sec h w \cosh \theta, -\tanh w, \sec h w \sinh \theta) \\ e^\perp &= -\sin \frac{\alpha'}{2} e_1 + \cos \frac{\alpha'}{2} e_2 = (\tanh w \cosh \theta, -\sec h w, -\tanh w \sinh \theta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r' &= \frac{m^2 - l^2}{m^2 + l^2} r - \frac{\cosh \tau}{m^2 + l^2} (l e - m e^\perp) + \frac{m}{m^2 + l^2} (1 - \sinh \tau) e_3 \\ &= \left(\frac{m \sinh \tau \sinh \theta}{m^2 + l^2} + \frac{\cosh \tau \cosh \theta}{m^2 + l^2} (l \sec h w + m \tanh w), \right. \\ &\quad \left. \frac{l \sqrt{m^2 - l^2}}{m^2 + l^2} u + \frac{\cosh \tau}{m^2 + l^2} (-l \tanh w + m \sec h w), \right. \\ &\quad \left. \frac{m \sinh \tau \cosh \theta}{m^2 + l^2} + \frac{\cosh \tau \sinh \theta}{m^2 + l^2} (l \sec h w + m \tanh w) \right) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

elde edilir.

Burada (2.3.13) ile verilen, $(k_1 - m)(k_2 - m) = l^2$ denklemini sağlayan space-like bir yüzeyden $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ denklemini gerçekleyen, (2.3.14) deki time-like yüzeylerin bir ailesini (c ve τ ya bağlı olan) elde etmiş olduk [5].

2.4. $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ Eşitliğine Sahip Space-like Yüzeyler Üzerindeki Bäcklund Dönüşümü

S , $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$, eşitliğine sahip bir space-like yüzey olsun. e_1, e_2 asli doğrultudaki tanjant vektör alanları ve e_3 normal vektör alanı ($e_1^2 = e_2^2 = -e_3^2 = 1$) olmak üzere $\{r : e_1, e_2, e_3\}$ bir ortonormal Lorentzian çatı alanı olsun. O zaman

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = (m^2 - l^2) \sin \alpha - 2ml \cos \alpha \quad (2.3.15)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos \frac{\alpha}{2} du \\ w_2 &= \sin \frac{\alpha}{2} dv \\ w_{12} &= -w_{21} = \frac{\alpha_v}{2} dv + \frac{\alpha_u}{2} du \\ w_{13} &= w_{31} = -(l \sin \frac{\alpha}{2} + m \cos \frac{\alpha}{2}) du \\ w_{23} &= w_{32} = -(l \cos \frac{\alpha}{2} - m \sin \frac{\alpha}{2}) dv \end{aligned}$$

olacak şekilde u ve v parametrelerini seçebiliriz.

$$\frac{1}{2} \sinh \tau (\alpha'_u - \alpha_v) = -\sin \frac{\alpha'}{2} (l \cos \frac{\alpha}{2} - m \sin \frac{\alpha}{2}) - \cosh \tau \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sin \frac{\alpha}{2} + m \cos \frac{\alpha}{2}) \quad (2.3.16)$$

ve

$$\frac{1}{2} \sinh \tau (\alpha'_v + \alpha_u) = \cos \frac{\alpha'}{2} (l \sin \frac{\alpha}{2} + m \cos \frac{\alpha}{2}) + \cosh \tau \sin \frac{\alpha'}{2} (l \cos \frac{\alpha}{2} - m \sin \frac{\alpha}{2}) \quad (2.3.17)$$

denklemleri (2.3.15) denklemi ile

$$\alpha'_{uu} - \alpha'_{vv} = -(m^2 + l^2) \sin \alpha' \quad (2.3.18)$$

denklemleri arasındaki Bäcklund dönüşümünü verir.

$\alpha'(u, v)$ (2.3.16) ve (2.3.17) denklemlerinin bir çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned} e &= \cos \frac{\alpha'}{2} e_1 + \sin \frac{\alpha'}{2} e_2 \\ e^\perp &= -\sin \frac{\alpha'}{2} e_1 + \cos \frac{\alpha'}{2} e_2 \\ e'_3 &= \cosh \tau e_3 + \sinh \tau e^\perp \end{aligned}$$

şeklinde olur.

S' nün

$$r' = r - \frac{\sinh \tau}{m^2 + l^2}(le + me^\perp) + \frac{m}{m^2 + l^2}(1 - \cosh \tau)e_3$$

şeklinde tanımlı bir yüzey olduğunu kabul edersek aşağıdaki teoremleri verebiliriz [5].

Teorem 2.4.1. e'_3 , S' yüzeyinin bir normal vektör alanıdır. Ayrıca $e'^2_3 = -1$ olduğundan S' bir space-like yüzeydir.

Teorem 2.4.2. S yüzeyinin asli eğrilikleri olan k'_1 ve k'_2 ,

$$(k'_1 - m)(k'_2 - m) = -l^2$$

denklemini sağlar.

Bu ise $(k_1 - m)(k_2 - m) = -l^2$ denklemini sağlayan space-like yüzeyler üzerindeki Bäcklund Dönüşümünü verir.

KAYNAKLAR

- [1] Beem, J. K., and Ehrlich, P. E., 1981, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc. New York.
- [2] Bektaş, M., 1995, Yüksek Lisans Tezi, F.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.
- [3] Bektaş, M., 1998, Doktora Tezi, F.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.
- [4] Bobenko, A. I., 1994, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases., Harmonic Maps and Integrable Systems, Braunschweig: Vieweg, 83-127.
- [5] Cao, X. F. and Tian C., 1997, Bäcklund transformations on surfaces with $(k_1 - m)(k_2 - m) = \pm l^2$ in $\mathbb{R}^{2,1}$, J. Phys. A: Math. Gen. 30, 6009-6020.
- [6] Cao, X. F., 2002, The Construction of space-like surfaces with $k_1 k_2 - m(k_1 + k_2) = 1$ in Minkowski three-space, J. Phys. A: Math. Gen. 35, 6049-6053.
- [7] Chen, B. Y., and Ishikawa, S., 1998, Biharmonic Pseudo-Riemannian Submanifolds in Pseudo-Euclidean Spaces, Kyushu journal of Mathematic, Vol.52, No.1.
- [8] Chern, S. S., 1981, Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation., Ann. Pol. Math., 39, 63-9.
- [9] Duggal, K. L., and Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Its Applications, Kluwer, Dortrecht.
- [10] Ekmekçi, N., 1991, Doktora Tezi, A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [11] Ergüt, M., Aydın, A. P., and Bildik, N., 1988, The Geometry of The Canonical Relative Systems and One Parameter Motions in 2-Dimensional Lorentzian Space, The Journal of Fırat University, (1), 113-122.
- [12] Ferrandez, A., and Lucas, P., 1992, Null 2-type Hypersurfaces in a Lorentzian Space, Canad. Math. Bull. Vol(35)3, 354-360.
- [13] Gürses, M., 2001, Soliton Yüzeyleri, Türk Matematik Derneği Ankara Şubesi Etkinliği, Yaşayan Türkçe Derlemeler No.1, Ankara.
- [14] Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2.
- [15] Hu, H. S., 1985, The construction of hyperbolic surfaces in three-dimensional Minkowski space and sinh-Laplace equation, Acta. Math. Sin., 1, 79-86.

- [16] Hu, H.S., 1999, Darboux Transformations Between $\Delta\alpha = \sinh \alpha$ and $\Delta\alpha = \sin \alpha$ and the Application to Pseudo-Spherical Congruences in $\mathbb{R}^{2,1}$, Letters in Mathematical Physics, 48, 187-195.
- [17] O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [18] Şemin, F., 1987, Diferensiyel Geometri-II, Marmara Üniv. Y.No.441, Fen-Edeb. Fak. Yay. No.6, İstanbul.
- [19] Tian, C. and Cao, X.F., 1997, Bäcklund transformations on surfaces with $aK + bH = c$, Chin. Ann. Math., 18A, 529-38.
- [20] Wu, H., 1993, Weingarten Surfaces and nonlinear partial differential equations, Ann. Global Anal. Geom., 11, 49-64.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Elazığ ilinde doğmuşum. İlk okulu Elazığ Şair Hayri İlkokulu' nda, orta okulu Elazığ Mezre Orta Okulu' nda tamaladım. 1998 yılında Elazığ Mehmet Akif Ersoy Lisesi' nden mezun oldum. 1999 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde lisans öğrenimime başladım. 2003 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında Tezsiz yüksek Lisans öğrenimime başladım ve 2005 yılında bu anabilim dalında öğrenimimi tamamladım. 2005-2006 öğretim yılında Elazığ Özel Bilgem Lisesi' nde matematik Öğretmeni olarak görev yaptım. evli ve bir çocuk annesiyim.

Meltem ÖĞRENMİŞ