

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE**

Mahmut IŞIK

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2002

116612

116612

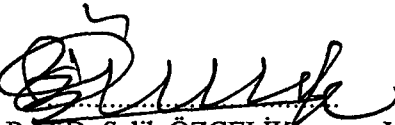
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

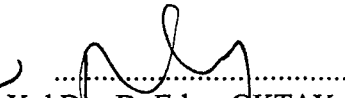
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

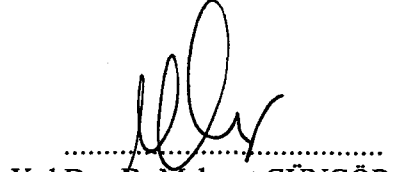
Mahmut IŞIK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, 27.06.2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.


Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK
Danışman


Yrd. Doç. Dr. Erkan OKTAY
Üye


Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR
Üye

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
SİMGELER LİSTESİ.....	IV
 I.BÖLÜM	
1. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	1
 II.BÖLÜM	
2. FARK DİZİLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	5
 III.BÖLÜM	
3.GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI.....	13
 IV.BÖLÜM	
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI.....	23
 KAYNAKLAR.....	32

ÖZET

Doktora Tezi

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE**

Mahmut IŞIK

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2002, Sayfa: 32

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; genelleştirilmiş fark dizi uzayları ve istatistiksel yakınsaklıkla ilgili temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $\Delta_v^m(X) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x_k \in X\}$ dizi uzayı tanımlanmıştır ve bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; Δ_v^m -istatistiksel yakınsaklık, Δ_v^m -istatistiksel Cauchy dizisi ve Kuvvetli $\Delta_{v,p}^m$ -Cesaro toplanabilir dizilerin uzayı tanımlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Fark dizi uzayı, İstatistiksel yakınsaklık.

SUMMARY

Ph. D Thesis

**ON THE STATISTICAL CONVERGENCE OF GENERALIZED DIFFERENCE
SEQUENCE SPACES**

Mahmut IŞIK

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

2002, Page : 33

..... This thesis consists of four chapter.

In the first chapter we give the fundamental definitions and theorems.

In the second chapter we give properties of generalized difference sequence spaces and statistical convergence.

In the third chapter we define the sequence spaces, $\Delta_v^m(X) = \{x = (x_k) : \Delta_v^m x_k \in X\}$, $(m \in N)$, where X is any sequence space and properties of $\Delta_v^m(X)$ are examined.

In the fourth chapter Δ_v^m -statistical Convergence, Δ_v^m -Statistical Cauchy Sequence and strongly $\Delta_{v,p}^m$ -Cesaro Summable Sequence Spaces are examined.

Key words : Difference Sequence Spaces, Statistical Convergence.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren, bu çalışmanın planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK 'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Mikail ET 'e ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR 'e teşekkürü bir borç bilirim.

Mahmut IŞIK



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{W}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı
$\delta(K)$	: K 'nın doğal yoğunluğu
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\mathcal{W}_p$	: Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir dizilerin uzayı
h.h.k.	: Hemen hemen her k için
$\Delta_v^m(S)$	: Δ_v^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\Delta_{v_p}^m$	: Kuvvetli $\Delta_{v_p}^m$ Cesaro toplanabilir dizilerin uzayı

1.BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay adı verilir. $\forall \lambda, \mu \in K$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

$$(L1) \quad x + y = y + x$$

$$(L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(L3) \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$(L4) \quad \text{Her bir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$(L5) \quad 1 \cdot x = x$$

$$(L6) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$(L8) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$$

[Maddox, 1970].

Tanım 1.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X 'de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$\forall n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $s \in X$ varsa (x_n) dizisi X 'de yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow s$ veya

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ yazılır [Bayraktar, 1994].

Tanım 1.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N3) Şartı $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ (α skaler) şeklinde olursa bu takdirde X bir p-normlu uzay olur [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [Musayev ve Alp, 2000].

Tanım 1.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay tam ise yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.6. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k: x \rightarrow C, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK uzayı denir [Goes ve Goes, 1970].

Tanım 1.1.7. (X, d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M 'nin noktaları ile M 'nin yığılma noktalarından oluşan cümleye M 'nin kapanışı denir ve $\bar{M}$ ile gösterilir [Bayraktar, 1994].

Teorem 1.1.1. M' nin kapalı olması için gerek ve yeter şart

$$\overline{M} = M$$

olmasıdır [Bayraktar, 1994].

Tanım 1.1.8. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ birer normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani $x \in X$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir.

Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alır [Kantorovich ve Akilov, 1982].

Tanım 1.1.9. X normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X 'in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [Kreyszig, 1978].

Tanım 1.1.10. X ve Y topolojik uzaylar olsunlar $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir ve örten, f sürekli, f^{-1} de sürekli ise f 'e X 'den Y 'ye bir homeomorfizmdir denir. $f: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise f ve f^{-1} de açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denk uzaylardır [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.11. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y: y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda < 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvekstir denir [Musayev ve Alp, 2000].

Tanım 1.1.12. $X \subset w$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_k) \in X$ ve $y = (y_k) \in X$ olmak üzere $x.y = (x_k.y_k) \in X$ oluyorsa, yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X 'e bir dizi cebiri denir [Kamphthar ve Gupta, 1981].

Tanım 1.1.13. (X, d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun. $\bar{S} = X$ ise S 'ye X 'de yoğundur denir [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.14. $S \subset X$ olsun. Eğer $\bar{S}$, açık cümle içermiyorsa S 'ye X 'de hiçbir yerde yoğun değildir denir [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.15. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X sayılabilir yoğun bir alt cümleye sahip ise X 'e ayrılabilir uzay denir [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.16. X bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. S , hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa S 'ye birinci kategoriden cümle denir.

S birinci kategoriden değil ise yani hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilmiyorsa ikinci kategoridendir denir [Maddox, 1970].

Tanım 1.1.17. X lineer uzay ve $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ bu uzay üzerinde iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

olacak şekilde pozitif a, b sayıları varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk norm denir [Bayraktar, 1994].

2. BÖLÜM

2.1. FARK DİZİLERİ VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde [Et ve Çolak, 1995] tarafından tanımlanan $\Delta^m(c_0)$, $\Delta^m(c)$, $\Delta^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının bilinen özellikleri ve [Et ve Esi, 2000] tarafından tanımlanan $\Delta_v^m(c_0)$, $\Delta_v^m(c)$, $\Delta_v^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının bilinen birkaç topolojik özellikleri verilecektir.

Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı w ile gösterilecektir. $w, x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. Bu çalışmada sık sık kullanacağız.

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \sup |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır. Fark dizileri kavramı ilk olarak H.Kızmaz tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz

$$\Delta x = (x_k - x_{k+1})$$

olmak üzere

$$l_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu gösterdi. Daha sonra Çolak, 1989 yılında

$v = (v_k)$ kompleks sayıların sıfırdan farklı bir dizisi

$$(\Delta_v x_k) = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$$

ve X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere

$$\Delta_v(x) = \{x = (x_k) : \Delta_v x_k \in X\}$$

dizi uzayının birkaç topolojik özelliğini inceledi. Son olarak Et ve Çolak

$$m \in N, \quad \Delta^0 x = (x_k), \quad \Delta x = (x_k - x_{k+1})$$

$$\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

$$\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere

$$l_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k): \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzayları tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile bir BK uzayı olduğunu gösterdiler.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı bir kompleks terimli herhangi bir dizi olmak üzere yukarıdaki uzaylar Et ve Esi tarafından

$$\Delta_v^m(l_{\infty}) = \{x = (x_k): \Delta_v^m x \in l_{\infty}\}$$

$$\Delta_v^m(c) = \{x = (x_k): \Delta_v^m x \in c\}$$

$$\Delta_v^m(c_0) = \{x = (x_k): \Delta_v^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarına genelleştirildi. Burada $m \in N$,

$$\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$$

$$\Delta_v x_k = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$$

$$\Delta_v^m x_k = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$$

ve

$$\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$$

dir.

X , l_{∞} , c veya c_0 uzaylarından birini göstermek üzere $\Delta_v^m(X)$ 'in bilinen bazı özelliklerini aşağıda vereceğiz.

Teorem 2.1.1.

$\Delta_v^m(l_{\infty})$, $\Delta_v^m(c)$, $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzayları

$$\|x\| = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta_v^m x\|_{\infty}$$

normu ile bir BK uzayıdır [Et ve Esi, 2000].

Teorem 2.1.2.

- i) $\Delta_v^m(c), \Delta_v^m(c_0)$ dizi uzayları $\Delta_v^m(l_\infty)$ 'in kapalı bir alt uzayıdır.
- ii) $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_0)$ ayrılabilir uzaylardır.
- iii) $\Delta_v^m(c), \Delta_v^m(c_0)$ ve $\Delta_v^m(l_\infty)$ dizi uzayları bir dizi cebiri değildir.

Teorem 2.1.3.

$$x \in \Delta_v^m(l_\infty) \Rightarrow \sup_k k^{-m} |v_k x_k| < \infty$$

Tanım 2.1.1.

X bir dizi uzayı olsun.

$$X^\alpha = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |a_k x_k| < \infty \quad \forall x \in X \right\}$$

cümlesine X 'in α duali denir ve X^α ile gösterilir. $X \subset Y$ ise $Y^\alpha \subset X^\alpha$ dir.

$X \subset (X^\alpha)^\alpha = X^{\alpha\alpha}$ olduğu açıktır. Eğer $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X 'e bir α uzayı denir.

Özel olarak bir α uzayı Köthe uzayı ve perfekt uzay olarak adlandırılır [Kamptan ve Gupta, 1981].

Teorem 2.1.4.

$$U_1 = \left\{ a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k v_k^{-1}| < \infty \right\}$$

ve

$$U_2 = \left\{ a = (a_k) : \sup_k k^{-m} |a_k v_k| < \infty \right\}$$

olsun.

- i) $(\Delta_v^m(l_\infty))^{\mathcal{P}} = (\Delta_v^m(c))^{\mathcal{P}} = (\Delta_v^m(c_0))^{\mathcal{P}} = U_1$
 ii) $(\Delta_v^m(l_\infty))^{\mathcal{P}\mathcal{A}} = (\Delta_v^m(c))^{\mathcal{P}\mathcal{A}} = (\Delta_v^m(c_0))^{\mathcal{P}\mathcal{A}} = U_2$

dir [Et ve Esi, 2000].

Sonuç 2.1.1.

$\Delta_v^m(l_\infty)$, $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_0)$ uzayları perfekt değildirler.

Teorem 2.1.5.

- i) $\Delta_v^m(c_0) \subset \Delta_v^{m+1}(c_0)$
 $\Delta_v^m(c) \subset \Delta_v^{m+1}(c)$
 $\Delta_v^m(l_\infty) \subset \Delta_v^{m+1}(l_\infty)$

ve bu kapsama kesindir.

- ii) $\Delta_v^m(c_0) \subset \Delta_v^m(c) \subset \Delta_v^m(l_\infty)$

ve bu kapsamalar kesindir.

Teorem 2.1.6.

$u = (u_k)$ ve $v = (v_k)$ sıfırdan farklı herhangi iki dizi olsun.

- i) $\sup_k k^m |v_k^{-1} x_k| < \infty$ ise $\Delta_v^m(l_\infty) \subset \Delta_u^m(l_\infty)$
 ii) Eğer $k^m |v_k^{-1} x_k| \rightarrow l$, $(k \rightarrow \infty)$ ise $\Delta_v^m(c) \subset \Delta_u^m(c)$
 iii) Eğer $k^m |v_k^{-1} x_k| \rightarrow 0$, $(k \rightarrow \infty)$ ise $\Delta_v^m(c_0) \subset \Delta_u^m(c_0)$

dir.

İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk defa Fast tarafından 1951 yılında verildi.. Schoenberg, 1959 'da istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın birkaç temel özelliğini ifade etti.

Hem Fast hem de Schoenberg sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğunu gösterdiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık [Salat, 1980],

[Fridy, 1985], [Fridy and Orhan, 1993], [Savaş ve Nuray, 1993] , [Başarı, 1995], [Mursaleen, 2000] ve [Et, 2000] tarafından çalışıldı.

Tanım 2.1.2. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}| \quad \text{şeklinde tanımlanır. Burada } |\{k \leq n, k \in K\}|$$

ifadesi K 'nın n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [Fridy, 1985].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir p özelliğini sıfır yoğunluklu bir cümle dışında bütün k 'lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi p özelliğini hemen hemen her k için sağlıyor denir ve h.h.k. ile gösterilir. Sıfır yoğunluklu cümle tanımından yararlanarak istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani h.h.k. için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $\text{st} - \lim x_k = L$ veya

$x_k \xrightarrow{\text{st}} L$ şeklinde gösterilir [Fridy, 1985].

Tanım 2.1.4. $\varepsilon > 0$ olsun h.h.k. için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa yani;

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [Fridy, 1985].

Tanım 2.1.5. $x \in w$ ve $p \in R^+$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir $L \in C$ sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir denir. Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir dizilerin uzayı w_p ile gösterilecek ve

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \rightarrow 0, \text{ en az bir } L, p > 0 \text{ ve } n \rightarrow \infty \right\}$$

şeklinde ifade edilecektir [Maddox, 1970].

Teorem 2.1.7. $st - \lim x_k = a$, $st - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu takdirde

- i) $st - \lim (x_k + y_k) = a + b$
- ii) $st - \lim cx_k = ca$

dir [Fast, 1951].

Buna göre istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi lineer uzaydır.

m_0 ile sınırlı istatistiksel yakınsak tüm reel dizilerin cümlesini, m ile reel terimli sınırlı tüm dizilerin uzayını, S_0 ile reel terimli tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini, S ile reel terimli tüm dizilerin cümlesini göstereyim.

Teorem 2.1.8. m_0, m dizi uzayının kapalı bir alt lineer uzaydır [Salat, 1981].

Teorem 2.1.9. m_0, m 'de hiçbir yerde yoğun değildir [Salat, 1981].

Teorem 2.1.10.

- i) S_0, S 'de yoğundur.

- ii) S_0, S 'de birinci kategoridendir.
- iii) $S - S_0, S$ 'de ikinci kategoridendir [Salat, 1981].



3. BÖLÜM

3.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $\Delta_v^m(X)$ in bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1. X herhangi bir dizi uzayı $v = (v_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $v_k \neq 0$ olacak şekilde herhangi kompleks terimli dizi

$$\Delta_v^m x = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$$

olmak üzere $\Delta_v^m(X)$ dizi uzayını

$$\Delta_v^m(X) = \{x \in w : \Delta_v^m x \in X\}$$

şeklinde tanımlayacağız.

Teorem 3.1.1. X bir vektör uzayı ise $\Delta_v^m(X)$ 'de bir vektör uzayıdır.

İspat: $x, y \in \Delta_v^m(X)$ ve α bir skaler olsun. Kompleks veya reel terimli tüm dizilerin uzayı w bir vektör uzayı ve $\Delta_v^m(X) \subset w$ olduğundan $x, y \in \Delta_v^m(X)$ ve $\alpha \in K$ için $x + y \in \Delta_v^m(X)$ ve $\alpha x \in \Delta_v^m(X)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

i) $x, y \in \Delta_v^m(X)$ olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m x_k, \Delta_v^m y_k \in X$ dir. X bir lineer uzay olduğundan

$$\Delta_v^m x_k + \Delta_v^m y_k \in X$$

dir. Δ^m lineer bir operatör olduğundan

$$\Delta_v^m x_k + \Delta_v^m y_k = \Delta_v^m (x_k + y_k) \in X$$

dir. Buradan $x + y \in \Delta_v^m(X)$ elde edilir.

ii) $x \in \Delta_v^m(X)$ ise $\Delta_v^m x_k \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\alpha \Delta_v^m x_k \in X$ olup $\alpha x \in \Delta_v^m(X)$ dir.

Teorem 3.1.2. $X, \|\cdot\|$ ile normlu uzay ise $\Delta_v^m(X)$ 'de

$$\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| \quad (3.1.1.)$$

normu ile normlu uzaydır.

İspat: $N_1)$ $\|x\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| \geq 0$

olduğu aşıkardır.

$$N_2) \quad \|x\|_{\Delta_v} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m(x)\| = 0$$

olsun. Bu takdirde $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ ve $\forall k \in N$ için

$$\left\| \binom{m}{0} x_k v_k - \binom{m}{1} x_{k+1} v_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} v_{k+m} \right\| = 0$$

$k=1$ için

$$\binom{m}{0} x_1 v_1 - \binom{m}{1} x_2 v_2 + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{m+1} v_{m+1} = 0$$

ise $\binom{m}{m} x_{m+1} v_{m+1} = 0$ 'dır. Buradan $\forall k \in N$ için $v_k \neq 0$ olduğundan $x_{m+1} = 0$ elde edilir.

Böyle devam edilirse $\forall k \in N$ için $x_k = 0$ olur ki buradan $x = \theta$ elde edilir. Tersine $x \in \theta$ ise $\|x\|_{\Delta_v} = 0$ dir.

$$\begin{aligned} N_3) \quad \|\alpha x\|_{\Delta_v} &= \sum_{i=1}^m |\alpha x_i v_i| + \|\Delta_v^m \alpha x\| \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \left\| \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} x_{k+j} v_{k+j} \right\| \right) \end{aligned}$$

$$= |\alpha| \|\Delta_v^m x\|$$

$$\begin{aligned} N_4) \quad \|x + y\|_{\Delta_v} &= \sum_{i=1}^m |x_i v_i + y_i v_i| + \|\Delta_v^m(x + y)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m x\| + \sum_{i=1}^m |y_i v_i| + \|\Delta_v^m y\| \\ &= \|x\|_{\Delta_v} + \|y\|_{\Delta_v} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m(X)$ 'de (3.1.1) ' deki norm ile bir Banach uzayıdır.

İspat: $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \Delta_v^m(X)$ olmak üzere (x^s) , $\Delta_v^m(X)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun.

Bu durumda $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta_v} \rightarrow 0$$

dır. O halde

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta_v} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \|\Delta_v^m(x_k^s) - \Delta_v^m(x_k^t)\| \rightarrow 0, \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

olur. Böylece $(x_i^1, x_i^2, \dots)$, $(i \leq m)$ ve $(\Delta_v^m(x_k^1), \Delta_v^m(x_k^2), \dots)$ sırasıyla C ve X 'de Cauchy dizisidir. C ve X tam olduklarından bu diziler sırasıyla C ve X 'de yakınsaktır. C 'de $x_i^s \rightarrow x_i$, $(i \leq m)$ ve X 'de $\Delta_v^m(x^s) \rightarrow (y_k)$, $(s \rightarrow \infty)$ olsun.

$$\begin{aligned} x_k &= v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i \\ &= v_k^{-1} \sum_{i=1}^k (-1)^m \binom{k+m-i-1}{m-1} y_{i-m} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

olmak üzere $y_k = \Delta_v^m x_k$ diyelim. Burada $y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$ olarak alınmıştır. Eğer $x \in D\Delta_v^m(X)$ ise (yeteri kadar büyük k 'lar için örneğin $k \geq 2m$ için), (3.1.2) sağlanacak şekilde bir tek $y = y_k \in X$ vardır. (Biz bu çalışmada $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ olarak kabul ediyoruz)

Burada $D\Delta_v^m(X) = \{x = (x_k) : x \in \Delta_v^m(X), x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\}$ 'dır. Diğer taraftan $x \in \Delta_v^m(X)$ ise $x' = (x'_k) \in D\Delta_v^m(X)$ olmak üzere

$$x'_k = \begin{cases} x_k, & k \leq m \text{ ise} \\ x'_k, & k > m \text{ ise} \end{cases}$$

olarak yazılabilir. O halde

$$\Delta_v^m(x^s) = (\Delta_v^m(x_k^1), \Delta_v^m(x_k^2), \dots)$$

dizisi X de $\Delta_v^m(x)$ e yakınsar. Buradan $s \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x\|_{\Delta_v} \rightarrow 0$$

dır. Böylece $\Delta_v^m(X)$ Banach uzayıdır.

Teorem 3.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ normu ile bir BK uzayı ise $\Delta_v^m(X)$ de (3.1.1) 'deki norm ile bir BK uzayıdır.

İspat: X Banach uzayı ise $\Delta_v^m(X)$ de Teorem (3.1.3) 'den dolayı bir Banach uzayıdır.

Şimdi $\forall k \in N$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\|x_k^n - x_k\|_{\Delta_v} \rightarrow 0$$

olsun. Bu takdirde $k \leq m$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve $\forall k \in N$ için

$$\|\Delta_v^m(x_k^n - x_k)\| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

buradan $\forall k \in N$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu nedenle $\Delta_v^m(X)$ bir BK uzayıdır.

Şimdi de farz edelim ki $X \subset l_\infty$ ve $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun.

D operatörünü

$$D: \Delta_v^m(X) \rightarrow \Delta_v^m(X)$$

$$x \rightarrow Dx = y = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. D lineer operatördür. Gerçekten de $x, y \in \Delta_v^m(X)$ için

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad D(x+y) &= (0, 0, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, x_{m+2} + y_{m+2}, \dots) \\ &= (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) + (0, 0, \dots, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots) \\ &= Dx + Dy \\ \text{ii)} \quad D(\alpha x) &= (0, 0, \dots, \alpha x_{m+1}, \alpha x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) \\ &= \alpha Dx \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\|Dx\|_{\Delta_v} \leq K \|x\|_{\Delta_v}$$

olacak şekilde $K > 0$ bulunduğundan D sınırlıdır.

Şimdi $D[\Delta_v^m(X)] = D \Delta_v^m(X)$ olarak alalım.

Bu uzay $\Delta_v^m(X)$ un bir alt uzayı olup $D \Delta_v^m(X)$ üzerindeki norm

$$\|x\|_{\Delta_v} = \|\Delta_v^m(x)\|$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi de

$$\Delta_v^m: D \Delta_v^m(X) \rightarrow X$$

$$\Delta_v^m x = y = (\Delta_v^m x_k)$$

şeklinde tanımlayalım. Δ_v^m lineer homeomorfizmdir. Δ_v^m 'nın lineer olduğu açıktır.

1) Δ_v^m operatörü birebirdir. $x, y \in D(\Delta_v^m)$ ve $\Delta_v^m(x) = \Delta_v^m(y)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\Delta_v^m(x_k - y_k) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (x_{k+i} v_{k+i} - y_{k+i} v_{k+i}) \\ &= \binom{m}{0} (x_k v_k - y_k v_k) + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} (x_{k+m} v_{k+m} - y_{k+m} v_{k+m}) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. $x, y \in D(\Delta_v^m)$ olduğundan ilk m terim sıfırdır. Buradan

$$(-1)^m \binom{m}{m} (x_{k+m} v_{k+m} - y_{k+m} v_{k+m}) = 0$$

buradan da $x_{k+m} v_{k+m} = y_{k+m} v_{k+m}$ böylece $\forall k \in N$ için $x_k = y_k$ yani $x = y$ elde edilir.

2) $\Delta_v^m(x)$ örtendir. Gerçekten, $\forall y \in \Delta_v^m(x)$ için $y_k = \Delta_v^m x_k$ olacak şekilde en az bir $x \in D(\Delta_v^m(X))$ vardır. Gerçekten;

$$x_k = v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i$$

olarak seçilirse $\Delta_v^m(x) = y$ elde edilir.

3) $\Delta_v^m(x)$ sınırlıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\|\Delta_v^m\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta_v^m(x)\|}{\|x\|_{\Delta_v}} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta_v^m(x)\|}{\|\Delta_v^m(x)\|} \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Bu ise $\Delta_v^m(x)$ 'nin sınırlı olduğunu gösterir.

4) $(\Delta_v^m)^{-1}$ sınırlı olduğunu gösterelim

$$y_k = v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{m}{i} \binom{k-i-1}{m-1} x_i$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (\Delta_v^m)^{-1} : X &\rightarrow D\Delta_v^m(X) \\ x &\rightarrow (\Delta_v^m)^{-1} x_k = y_k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan da

$$\begin{aligned} \|(\Delta_v^m)^{-1}\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_{\Delta_v}}{\|x\|} \\ &= \sup_k \frac{\|\Delta_v^m (\Delta_v^m)^{-1} x_k\|}{\|x\|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan sınırlıdır. Buradan X ile $D\Delta_v^m(X)$ uzayları denk topolojik uzaylardır.

Bundan başka

$$\|\Delta_v^m(x)\| = \|x\|_{\Delta_v}$$

ve

$$\|(\Delta_v^m)^{-1}\|_{\Delta_v} = \|x\|$$

olduğundan Δ_v^m , $(\Delta_v^m)^{-1}$ operatörleri normu korurlar.

Teorem 3.1.5. $X \subset Y$ ise $\Delta_v^m(X) \subset \Delta_v^m(Y)$ dir. Eğer $X \subset Y$ kesin ise $\Delta_v^m(X) \subset \Delta_v^m(Y)$ de kesindir.

İspat: $x \in \Delta_v^m(X)$ olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m(x_k) \in X \subset Y$ olduğundan $\Delta_v^m(x_k) \in Y$ 'dir. Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $X = c$, $Y = l_\infty$ olsun ve

$$x = (1, 0, 1, 0, \dots), \quad v = (1, 1, 1, \dots)$$

seçelim. Böylece

$$\Delta_v^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1} \text{ olup } x \in \Delta_v^m(l_\infty) - \Delta_v^m(c) \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.1.6. X bir dizi cebiri olsa bile $\Delta_v^m(X)$ 'in dizi cebiri olması gerekmez.

İspat: c_0 'ın bir dizi cebiri olduğu bilinmektedir. $x = (k)$, $y = (k^{m-1})$ ve $v = (1, 1, 1, \dots)$

seçilirse $x, y \in \Delta_v^m(c_0)$ olduğu halde $x.y \notin \Delta_v^m(c_0)$ 'dır.

Sonuç 3.1.1. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n < m$ ise $\Delta_v^n(X) \subset \Delta_v^m(X)$ 'dir.

Teorem 3.1.7. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. Eğer A konveks ise $\Delta_v^m(A)$ 'da konvektir.

İspat: $x, y \in \Delta_v^m(A)$ olsun. Bu takdirde $\Delta_v^m x, \Delta_v^m y \in A$ 'dir. Δ^m lineer olduğundan $0 \leq \lambda < 1$ için

$$\lambda \Delta_v^m x + (1 - \lambda) \Delta_v^m y = \Delta_v^m (\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

dir. A konveks olduğundan $(\lambda \Delta_v^m x + (1 - \lambda) \Delta_v^m y) \in A$ ve böylece $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in \Delta_v^m(A)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.8. m pozitif bir tamsayı olsun.

$$i) \quad \Delta^m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^m(A_n)$$

$$ii) \quad \Delta^m \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^m(A_n)$$

[Et, 2000].

Teorem 3.1.9. X bir Banach uzayı ve $A \subset X$ kapalı olsun. Bu takdirde, $\Delta_v^m(A)$ 'da $\Delta_v^m(X)$ 'de kapalıdır.

İspat: $A \subset X$ olduğundan $\Delta_v^m(A) \subset \Delta_v^m(X)$ 'dir. Şimdi $\overline{\Delta_v^m(A)} = \Delta_v^m(\overline{A})$ olduğunu gösterelim. $x \in \overline{\Delta_v^m(A)}$ olsun, bu takdirde $(n \rightarrow \infty)$

$$\|x^n \rightarrow x\| \rightarrow 0$$

olacak şekilde $\Delta_v^m(A)$ 'da bir (x^n) dizisi vardır. Buradan $\Delta_v^m(A)$ 'da $(n \rightarrow \infty)$

$$\|(x_k^n) \rightarrow (x_k)\|_{\Delta_v} \rightarrow 0$$

dır. Böylece A 'da $(n \rightarrow \infty)$

$$\sum_{i=1}^m |x_i^n - x_i| + \|\Delta_v^m(x_k^n) - \Delta_v^m(x_k)\| \rightarrow 0$$

dir. Buradan $\Delta_v^m(x) \in \overline{A}$ 'dır. Bu ise $x \in \Delta_v^m(\overline{A})$ olmasını gerektirir.

Tersine $x \in \Delta_v^m(\overline{A})$ olsun. Buradan $\Delta_v^m(x) \in \overline{A}$ 'dır. A kapalı olduğundan $A = \overline{A}$ 'dır. Buradan $\Delta_v^m(x) \in A$ 'dır. Diğer taraftan $\Delta_v^m(A) \subset \overline{\Delta_v^m(A)}$ 'dır. Buradan da $x \in \overline{\Delta_v^m(A)}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.10. X ayrılabilir bir cümle ise $\Delta_v^m(X)$ 'de ayrılabilir.

İspat: X ayrılabilir olsun. Bu takdirde $\overline{A} = X$ olacak şekilde X 'in sayılabilir bir A alt cümlesi vardır. $\overline{A} = X$ olduğundan $\overline{\Delta_v^m(A)} = \Delta_v^m(\overline{A}) = \Delta_v^m(X)$ 'dir.

$$f : \Delta_v^m(A) \rightarrow A, f(x) = \Delta_v^m x_k$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon birebir ve örtendir. A sayılabilir olduğundan $\Delta_v^m(A)$ 'da sayılabilir. Böylece $\Delta_v^m(X)$ 'da ayrılabilir.

Teorem 3.1.11. X bir Banach uzayı ve $A \subset X$ olsun.

- i) A, X 'de hiçbir yerde yoğun değil ise $\Delta_v^m(A)$ 'da $\Delta_v^m(X)$ 'de hiçbir yerde yoğun değildir.
- ii) A, X 'de yoğun ise o zaman $\Delta_v^m(A)$ 'da $\Delta_v^m(X)$ 'de yoğundur.
- iii) $\Delta_v^m(w) = w$

dir.

İspat:

- i) A, X 'de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olsun fakat $\Delta_v^m(A), \Delta_v^m(X)$ 'de yoğun olsun. Bu takdirde $\left(\overset{\circ}{A}\right) = \emptyset$ olur. Fakat $\overline{\Delta_v^m(A)} \neq \emptyset$ 'dir. Bu takdirde $\overline{A}$ hiçbir açık cümle içermez. Fakat $B(a) \subset \overline{\Delta_v^m(A)}$ 'dir. Burada $B(a)$, a merkezli r yarı çaplı açık yuvardır. Buradan

$$a \in B(a) \subset \overline{\Delta_v^m(A)} = \Delta_v^m(\overline{A})$$

dir. Bu ise $\Delta_v^m(a) \in \overline{A}$ olmasını gerektirir. O halde $B(\Delta_v^m(A)) \cap A \neq \emptyset$ 'dir. Diğer taraftan

$$B(\Delta_v^m(A)) \cap A \subset \overline{A}$$

dir. Buda $\left(\overset{\circ}{A}\right) = \emptyset$ olması ile çelişir. Buradan $\overline{\Delta_v^m(A)} = \emptyset$ 'dir.

- ii) A, X 'de yoğun olsun. Bu takdirde $\overline{A} = X$ 'dir. Teorem (3.1.5) göz önüne alınırsa $\overline{\Delta_v^m(A)} = \Delta_v^m(X)$ olduğu görülür.
- iii) Tanım gereği, $\Delta_v^m(w) \subset w$ 'dir. Tersine $x \in w$ olsun.

$$\Delta_v^m(x_k) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$$

olduğu göz önüne alınırsa $x \in \Delta_v^m(w)$ elde edilir.

4. BÖLÜM

4.1. Δ_v^m - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde $v = (v_k)$ ($\forall k \in N$ için $v_k \neq 0$ olma şartını kaldıracağız) herhangi bir dizi olmak üzere Δ_v^m -istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli $\Delta_{v_p}^m$ Cesaro toplanabilme kavramını tanımlayacak ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi vermeye çalışacağız.

Tanım 4.1.1. $x \in w$ olsun

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta_v^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına Δ_v^m -istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm Δ_v^m -istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini $\Delta_v^m(S)$ ile göstereceğiz. $x \in \Delta_v^m(S)$ olması durumunda da $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(S))$ yazacağız. Eğer $m=0$ ise bu uzayı S_v ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.1. $\Delta_v^m(S)$ bir vektör uzayıdır.

İspat: Teorem (2.1.7) ve Teorem (3.1.1) göz önüne alınırsa ispatı kolayca görülür.

Tanım 4.1.2. $x \in w$ ve $\forall \varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta_v^m x_k - \Delta_v^m x_N \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa x dizisine Δ_v^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir. İlk olarak Δ_v^m istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı ile daha önceden verilen dizi uzayları arasındaki ilişkileri inceleyelim.

Tanım 4.1.3. $x \in w$ ve $p \in R^+$ olsun.

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir $L \in C$ varsa x dizisi L 'ye kuvvetli $\Delta_{v_p}^m$ -Cesaro toplanabilir denir.

Kuvvetli $\Delta_{v_p}^m$ -Cesaro toplanabilir dizilerin uzayı $\Delta_v^m(w_p)$ ile gösterilir ve

$$\Delta_v^m(w_p) = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p \rightarrow 0, \text{ en az bir } L, p > 0 \text{ ve } n \rightarrow \infty \right\}$$

şeklinde gösterilir. $x \in \Delta_v^m(w_p)$ olması halinde $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(w_p))$ şeklinde yazarız. Eğer $m=0$ ve $v=(1,1,\dots)$ ise $\Delta_v^m(w_p)$ uzayı w_p ile aynı uzaydır.

Teorem 4.1.2. $\forall k \in N$ için $v_k \neq 0$ olsun. $\Delta_v^m(w_p)$ dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_{\Delta_1} = \sum_{i=1}^m |v_i x_i| + \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir BK uzayı $0 < p < 1$

$$\|x\|_{\Delta_1} = \sum_{i=1}^m |v_i x_i|^p + \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k|^p$$

normu ile tam p-normlu uzaydır.

İspat: Teorem (3.1.2) 'den elde edilir.

$\Delta_v^m(w_p)$ üzerinde yukarıdaki teoremden bahsedilen normdan farklı bir normu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz. $k \in [2^r, 2^{r+1})$ olsun. $\Delta_v^m(w_p)$ uzayı

$$\|x\|_{\Delta_2} = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \sup_r \left(2^{-r} \sum_r |\Delta_v^m x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

normu ile tam normlu bir BK uzayıdır.

$$\|x\|_{\Delta_2} = \sum_{i=1}^m |x_i v_i|^p + \sup_r \left(2^{-r} \sum_k |\Delta_v^m x_k|^p \right) \quad 0 < p < 1$$

normu ile de tam p-normlu bir uzaydır.

Sonuç 4.1.1: $\|x\|_{\Delta_1}$ ve $\|x\|_{\Delta_2}$ normları denk normlardır.

Aşağıdaki teoremden görüleceği gibi $\Delta_v^m(S)$ dizi uzayı daha önceden tanımlanan tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayından farklıdır. Bu durumda $\Delta_v^m(S)$ dizi uzayının incelenmesi oldukça anlamlıdır.

Teorem 4.1.3.

- i) $\Delta_v^m(c) \subset \Delta_v^m(S)$ ve bu kapsama kesindir.
- ii) $\Delta_v^m(S)$ ile $\Delta_v^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- iii) $\Delta_v^m(S)$ ile l_∞ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- iv) S ile $\Delta_v^m(S)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- v) S ile $\Delta_v^m(c)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- vi) S ile $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- vii) S ile $\Delta_v^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- viii) S_v ile $\Delta_v^m(S)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak S_v , $\Delta_v^m(S)$ yi kapsamaz.
- ix) S_v ile $\Delta_v^m(S)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- x) S_v ile $\Delta_v^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xi) S_v ile $\Delta_v^m(c)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xii) S_v ile $\Delta_v^m(c)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xiii) S_v ile l_∞ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xiv) S_v ile $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.

- xv) S_v ile $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xvi) $\Delta_v^m(S)$ ile $\Delta^m(S)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.
- xvii) $\Delta_v^m(S)$ ile $\Delta^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirini kapsamazlar.

İspat:

- i) $c \subset S$ olduğundan Teorem (3.1.5) göz önüne alınırsa

$$\Delta_v^m(c) \subset \Delta_v^m(S)$$

elde edilir. Şimdi kapsamanın kesin olduğunu gösterelim.

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

dizisi göz önüne alınırsa $\Delta_v^m x \in S$ fakat $\Delta_v^m x \notin c$ olduğu görülür. Sıfır dizisi aşağıdaki dizi uzaylarının her birine ait olduğundan $x = 0$ seçilirse $\forall k \in N$ için $v_k x_k = 0$ olur, ve bu dizi aşağıdaki uzayların her birinin elemanıdır. Dolayısıyla bahsedilen dizi uzaylarının ortak elemanları vardır.

- ii) (4.1.1) 'de tanımlanan diziyi göz önüne alalım. Bu dizi $\Delta_v^m(S)$ 'nin elemanıdır. Fakat $\Delta_v^m(l_\infty)$ 'un elemanı değildir. Tersine $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ ve $v = (1, 1, 1, \dots)$ alınırsa

$$\Delta_v^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$$

olup, $x \in \Delta_v^m(l_\infty)$ fakat $x \notin \Delta_v^m(S)$ dir.

- iii) x dizisi (4.1.4) 'deki gibi olsun.
 $v = (v_k)$ dizisi de

$$v_k = \begin{cases} 0 & , \quad k = n^2 \text{ ise} \\ 1 & , \quad k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

şeklinde seçelim. $x \notin l_\infty$ fakat $x \in \Delta_v^m(S)$ 'dir.

Tersine

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \quad \text{ise} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

şeklinde tanımlansın ve $v = (1, 1, 1, \dots)$ olsun.

$$\Delta_v^m(x_k) = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$$

olur. $x \in l_\infty$ fakat $x \notin \Delta_v^m(S)$ 'dir.

- iv) $x = (1, 1, 1, \dots)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır. Yani $x \in S$ 'dir. $v = (1, 0, 1, 0, \dots)$ tanımlanırsa

$$v x = (1, 0, 1, 0, \dots) \text{ olup}$$

$$\Delta_v^m x = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$$

olur. Böylece $x \notin \Delta_v^m(S)$ dir.

Tersine $x = (k)$ seçelim. Bu takdirde $x \notin S$ dir. $v = (1, 1, 1, \dots)$ alınırsa $v x = (k)$

olur. $\Delta_v^m x = 0$ olup bu dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $x \in \Delta_v^m(S)$ 'dir.

- v) $x = (1, 1, 1, \dots)$ ve $v = (1, 0, 1, 0, \dots)$ alınırsa $x \in S$ olup $v x = (1, 0, 1, 0, \dots)$,
 $\Delta_v^m x = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ olup $x \notin \Delta_v^m(c)$ 'dir.

Tersine $x = (k)$ seçilirse $x \notin S$ 'dir. $v = (1, 1, 1, \dots)$ alınırsa $v x = (k)$ olur.

$$\Delta_v^m x = 0$$

olduğundan $x \in \Delta_v^m(c)$ 'dir.

- vi) (v) 'deki diziler göz önüne alınarak ispat yapılabilir.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = n^2 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \quad \text{ise} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

dizisini tanımlayalım ve $v = (1, 1, 1, \dots)$ şeklinde seçilirse $x \in S$ ama $x \notin \Delta_v^m(l_\infty)$

olur.

Tersine $x = (k)$ ve $v = (1,1,1,...)$ seçilirse $x \notin S$ fakat $x \in \Delta_v^m(l_\infty)$ olur.

viii) $x = (k)$ ve $v = (1,1,1,...)$ alınırsa $x \notin S_v$ fakat $x \in \Delta_v^m(S)$ 'dir.

ix) $x = (k)$, $v = (1,1,1,...)$ seçilirse $x \notin S_v$ fakat $x \in \Delta^m(S)$ 'dir. Tersine $x = (1,0,1,0,...)$, $v = (0,1,0,1,...)$ alınırsa $x \in S_v$ fakat $x \notin \Delta^m(S)$ 'dir.

x) x dizisi (4.1.4) 'deki gibi $v = (1,1,1,...)$ seçersek $x \in S_v$ fakat $x \notin \Delta_v^m(l_\infty)$ olur.

Tersine $x = (k)$, $v = (k)$ alınırsa $x \notin S_v$ fakat $x \in \Delta_v^m(l_\infty)$ olur.

xi) x dizisi (4.1.4) 'deki gibi ve $v = (1,1,1,...)$ alınırsa $x \in S_v$ fakat $x \notin \Delta^m(c)$ 'dir.

Tersine $x = (k)$ ve $v = (1,1,1,...)$ alınırsa $x \notin S_v$ fakat $x \in \Delta^m(c)$ olur.

xii) (xi) 'deki diziler alınırsa ispatı kolayca yapılabilir.

xiii) x dizisi (4.1.4) 'deki gibi ve v dizisini de (4.1.2) 'deki gibi alırsak $v.x = 0$ olup istatistiksel yakınsaktır. Tersine $x = (1,0,1,0,...)$, $v = (1,1,1,...)$ alınırsa $x \in l_\infty$ fakat $x \notin S_v$ 'dir.

xiv) (xi) 'deki diziler alınırsa ispatı kolayca yapılabilir.

xv) (xi) 'deki diziler alınırsa ispatı kolayca yapılabilir.

xvi) $x = (k^{m+1})$, $v = (k^{-2})$ alınırsa $x \notin \Delta^m(S)$ fakat $x \in \Delta_v^m(S)$ 'dir. Tersine $x = (k^m)$, $v = (k)$ alınırsa

$$\Delta^m(x_k) = (-1)^m m!$$

$$\Delta^m(k^{m+1}) = (-1)^{m+2} [(m+1)! (k + \frac{m}{2})]$$

elde edilir. $x \in \Delta^m(S)$ fakat $x \notin \Delta_v^m(S)$ 'dir.

xvii) $x = (k^{m+1})$, $v = (\frac{1}{k^2})$ alınırsa

$$\Delta^m(k^{m+1}) = (-1)^{m+2} [(m+1)! (k + \frac{m}{2})]$$

$$v_k x_k = (k^{m-1}) \text{ ve } \Delta^m(k^{m-1}) = 0$$

elde edilir. Buna göre $x \in \Delta_v^m(S)$ fakat $x \notin \Delta^m(l_\infty)$ 'dir. Tersine $x = (1,0,1,0,...)$,

$v = (1,1,1,...)$ seçilirse $x \notin \Delta_v^m(S)$ fakat $x \in \Delta^m(l_\infty)$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.4. $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(w_p))$ ise $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(S))$
- ii) $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(l_\infty))$ ve $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(S))$ ise $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(w_p))$
- iii) $\Delta_v^m(S) \cap \Delta_v^m(l_\infty) = \Delta_v^m(w_p) \cap \Delta_v^m(l_\infty)$ 'dir.

İspat:

- i) $x \in \Delta_v^m(w_p)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |\Delta_v^m x_k - L| \geq \varepsilon}}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |\Delta_v^m x_k - L| < \varepsilon}}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |\Delta_v^m x_k - L| \geq \varepsilon}}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p \\ &\geq \frac{1}{n} \left\{ k \leq n : \frac{1}{n} |\Delta_v^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \varepsilon^p \end{aligned}$$

yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için $x \in \Delta_v^m(S)$ elde edilir.

- ii) $x \in \Delta_v^m(l_\infty)$ ve $x \in \Delta_v^m(S)$ olsun.

$M = \|\Delta_v^m x\| + L$ diyelim. $\varepsilon > 0$ olsun, N_ε sayısını $\forall n > N_\varepsilon$ için

$$n^{-1} \left\{ k \leq n : |\Delta_v^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim ve $L_n = \left\{ k \leq n : |\Delta_v^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ diyelim. Bu

takdirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} |\Delta_v^m x_k - L|^p + \sum_{k \notin L_n} |\Delta_v^m x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2M^p} \right) M^p + \frac{1}{n} n \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Buradan $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(w_p))$ elde edilir.

iii) (i) ve (ii) 'den ispatı kolayca yapılabilir.

Teorem 4.1.5. x, Δ_v^m -istatistiksel yakınsak bir dizi ise x, Δ_v^m -istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: x, Δ_v^m -istatistiksel yakınsak bir dizi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde h.h.k. için

$$|\Delta_v^m x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. N sayısını h.h.k. için $|\Delta_v^m x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçelim.

Bu takdirde h.h.k. için

$$\begin{aligned}
|\Delta_v^m x_k - \Delta_v^m x_N| &= |\Delta_v^m x_k - L + L - \Delta_v^m x_N| \\
&\leq |\Delta_v^m x_k - L| + |\Delta_v^m x_N - L| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan x dizisi Δ_v^m -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.1.6. y, Δ_v^m -istatistiksel yakınsak bir dizi ve x de h.h.k. için $\Delta_v^m x_k = \Delta_v^m y_k$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu takdirde x, Δ_v^m -istatistiksel yakınsaktır.

İspat: h.h.k. için $\Delta_v^m x_k = \Delta_v^m y_k$ ve $y_k \rightarrow L(\Delta_v^m(S))$ olsun $\varepsilon > 0$ olmak üzere her bir $n \in N$ için

$$\begin{aligned}
\{k \leq n : |\Delta_v^m x_k - L| \geq \varepsilon\} &\subseteq \{k \leq n : \Delta_v^m x_k \neq \Delta_v^m y_k\} \\
&\cup \{k \leq n : |\Delta_v^m y_k - L| \geq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $y_k \rightarrow L(\Delta_v^m(S))$ olduğundan eşitsizliğin ikinci tarafındaki ikinci ifade sabit sayıda eleman içerir. Bunu $g = g(\varepsilon)$ ile gösterelim. Her iki tarafı n 'ye böler ve $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\lim_n n^{-1} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta_v^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ \leq \lim_n n^{-1} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta_v^m x_k \neq \Delta_v^m y_k \right| \right\} \right| + \lim_n \frac{g}{n}$$

elde ederiz. Son ifade de $\Delta_v^m x_k \neq \Delta_v^m y_k$ olduğundan $x_k \rightarrow L(\Delta_v^m(s))$ elde edilir.

Teorem 4.1.7. $\Delta_v^m(m_0)$, $\Delta_v^m(m)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: Teorem (2.1.8), Teorem (3.1.1) ve Teorem (3.1.9) 'dan elde edilir.

Teorem 4.1.8. $\Delta_v^m(m_0)$, $\Delta_v^m(m)$ 'de hiçbir yerde yoğun değildir.

İspat: Salat, keyfi E lineer normlu uzayının E 'den farklı keyfi her kapalı alt uzayının E 'de hiçbir yerde yoğun olmadığını göstermiştir. Teorem (4.1.6) 'dan

$$\Delta_v^m(m_0) \subset \Delta_v^m(m)$$

dir. Yukarıdaki sonuca göre $\Delta_v^m(m_0) \neq \Delta_v^m(m)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$x = \{(-1)^k\} \text{ ve } v = (1, 1, \dots) \text{ seçelim. Bu takdirde}$$

$$x \in \Delta_v^m(m) \text{ fakat } x \notin \Delta_v^m(m_0)$$

dır. Gerçekten $x = \{(-1)^k\}$, $v = (1, 1, \dots)$ ise o zaman

$$\Delta_v^m(x_k) = \{(-1)^k 2^m\}$$

dir.

Sonuç 4.1.2. m_0 ile $D(\Delta_v^m(m_0))$ denk topolojik uzaylardır.

KAYNAKLAR

- Akilov, G. P. ve Kantorovich, 1982, **Functional Analysis**, Pergaman Press, Oxford.
- Başarır, M., 1995, **On The Δ -Statistical Convergence of Sequence**, F.Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, 7 (2), 1-6.
- Bayraktar, M., 1994, **Fonksiyonel Analiz**, Erzurum.
- Chung, K.L., 1968, **A Course in Probability Theory**, Academic Press, New York.
- Connor, J.S., 1988, **The Statistical and Strong-p-Cesaro Convergence of Sequence**, Analysis 8, 47-63.
- Çolak, R., 1989, **On Some Generalized Sequence Spaces**, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A₁, V. 38, 35-46.
- Çolak, R., 1989, **On Invariant Sequence Spaces**, Erciyes Univ. Journal of Sci., 5, 1-2, 81-88.
- Et, M. ve Çolak, R., 1995, **On Some Generalized Difference Sequence Spaces**, Soochow Journal of Mathematics, Vol 21(4), 377-386.
- Et, M. ve Esi, A., 2000, **On Köthe Toeplitz Duals of Genaralized Difference Sequence Spaces**, Bull. Malaysian Math. Soc.(Second Series), 23 ,1-8
- Et, M., ve Nuray, F., 2001, **Δ^m -Statistical Convergence**, Indian J. Pure and Appl. Math., (32) 6, 961-969.
- Et, M., 2000, **On Some Topological Properties of Generalized Difference Sequence Spaces**, Internat J. Math. and Math. Sci., 24 (11), 785-791.
- Fast, H., 1951, **Sur la Convergance Statistique**, Colloq. Math., 2, 241-244.
- Fridy, J.A., 1985, **On Statistical Convergence**, Analysis, 5, 301-313.
- Fridy, J.A. ve Orhan, C., 1993, **Lacunary Statistical Summability**, J.Math. Anal. Appl., 173, 497-504.
- Fridy, J.A. ve Orhan, C., 1993, **Lacunary Statistical Convergence**, Pacific J. Math., 160, 43-51.

Goes, G. ve Goes, S., 1970, **Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients** 1, Math. Z., 118, 93-102.

Kamphtham, P.K. ve Gupta, M., 1981, **Sequence Spaces and Series**, Marcel Dekker Inc., New York.

Kappos, D.A., 1969, **Probability Algebras and Stochastic Spaces**, Academic Press, New York.

Kızmaz, H., 1981, **On Certain Sequence Spaces**, Canad. Math. Bull., 24 (2), 169-176.

Kreyszig, E., 1978, **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley and Sons, New York.

Maddox, I.J., 1970, **Elements of Functional Analysis**, Cambridge Univ. Press, London.

Mursaleen, 2000, **λ -Statistical Convergence**, Math. Slovaca, 50, No 1, 111-115.

Musayev, B. ve Alp, M., 2000, **Fonksiyonel Analiz**, Kütahya.

Papoulis, A., 1965, **Probability Random Variables and Stochastic Processes**, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

Salat, T., 1980, **On Statistically Convergent Sequence of Real Numbers**, Math. Slovaca, 30, No 2, 139-150.

Schoenberg, I.J., 1959, **The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods**, Amer. Math. Monthly 66, 361-365.

Serfling, R.J., 1980, **Approximation Theorems of Mathematical Statistics**, John Wiley and Sons, New York.

Savaş, E. ve Nuray, F., 1993, **Invariant Statistical Convergence and A-Invariant Statistical Convergence**, Indian J. Pure Appl. Math., 25 (3), 267-274.

Whittle, P., 1970, **Probability**, John Wiley and Sons, New York.

Wilks, S.S., 1962, **Mathematical Statistical**, John Wiley and Sons Inc, New York.