

GALILEI UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

Türker ÖĞRENMİŞ

Yüksek Lisans Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

TEMMUZ-2018

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLEİ UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Türker ÖĞRENMİŞ

(101121104)

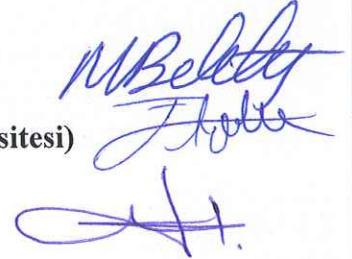
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 03.07.2018

Tezin Savunulduğu Tarih: 25.07.2018

Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN (Fırat Üniversitesi)

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif AKYOL (Bingöl Üniversitesi)



Temmuz-2018

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın ortaya çıkması süresince gerek literatür araştırması esnasında gerekse oluşumunda her daim yanımda olan, bilgi ve birikimlerinden faydalandığım çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a, ayrıca her zaman ilgi ve alakasını esirgemeyen ve önerilerinden istifade ettiğim bölümümüz öğretim üyesi Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN' a teşekkür eder, saygı ve hürmetlerimi sunarım.

Türker ÖĞRENMİŞ

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. BÖLÜM	
1. GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Öklit Uzayının Temel Kavramları	3
2.2. Galilei Uzayının Temel Kavramları.....	10
3. BÖLÜM	
3. GALILEI UZAYINDA EĞRİLER	17
3.1. Galilei Uzayında Eğriler için Frenet Formülleri	17
3.2. Galilei Uzayında Helisler	19
3.3. Galilei Uzayında Bertrand Eğriler	21
4. BÖLÜM	
4. GALILEI UZAYINDA YÜZEYLER	23
4.1. Temel Formlar ve Eğrilikler	23
4.2. Galilei Uzayında Dönel Yüzeyler	24
4.3. Galilei Uzayında Öteleme Yüzeyleri	25
4.4. Galilei Uzayında Değişkenlerine Ayrılabilir Yüzeyler.....	32
5. BÖLÜM	
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	35

KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

ÖZET

GALİLEİ UZAYINDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak diferensiyel geometrinin önemli bir araştırma alanı olan eğriler ve yüzeyler konusu hakkında yapılan temel çalışmalar kısaca açıklandı. Daha sonra Öklit uzayı ve Galilei uzayın temel kavramları ve tez çalışmasına ışık tutacak diğer kavramlar verildi. Ardından 3-boyutlu Galilei uzayında eğriler konusu detaylıca verildi. Son bölümde ise 3-boyutlu Galilei uzayında yüzeyler konusu detaylıca verildi. Son olarak bazı yüzey çeşitlerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak, bu eğrilikler cinsinden ele alınan yüzeyler için yapılan bazı sınıflandırmalar verildi.

SUMMARY

CURVES AND SURFACES IN GALILEI SPACE

In this thesis, firstly the fundamental definitions on curves and surfaces which are an important research area of differential geometry are briefly explained. Later, the basic definitions of Euclidean space and Galilei space and other notions which will shed light on the study of thesis are given. Then the curves in 3-dimensional Galilei space are given in detail. Finally, the theme of surfaces in 3-dimensional Galilei space are given in detail. Moreover, by calculating Gauss and mean curvatures of some types surfaces, several classifications in literature for these are provided.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Galilei uzayında nokta, doğru ve düzlem	10
Şekil 2.2 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de düzlemler.....	13

SEMBOLLER LİSTESİ

V	: Vektör uzayı
M	: Yüzey
E^3	: Boyutu 3 olan Öklit uzayı
E^n	: Boyutu n olan Öklit uzayı
G_3	: Boyutu 3 olan Galilei uzay
T	: Eğrinin birim teğet vektör alanı
N	: Eğrinin asli normal vektör alanı
B	: Eğrinin binormal vektör alanı
κ ve τ	: Eğrinin sırasıyla birinci ve ikinci eğriliği (torsiyonu-burulması)
W	: Yüzeyin Normal vektör alanı
D	: Afin konneksiyonu
χ	: Vektör alanı
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğriliği
E, F, G	: Birinci temel formun katsayıları
h_{ij}	: Birinci temel formun katsayıları
L, M, N	: İkinci temel formun katsayıları
S	: Şekil operatörü
$\langle, \rangle$	: İç çarpım
$\ , \ $	: Norm
$r(u, v)$	: 3-boyutlu Galilei uzayında yüzey

1.BÖLÜM

1. GİRİŞ

Diferansiyel Geometri alanında eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi her zaman araştırmacılar için önemli bir çalışma alanı oluşturmıştır. Eğri ve yüzey kavramı geometrinin doğuşundan bugüne kadar Öklit uzayında ve ardından Öklitsel olmayan bir çok uzayda diferansiyel ve integral hesabın metodları ele alınarak bir çok bilim insanı tarafından detaylıca incelenmiştir. Öklit ve Öklitsel olmayan uzaylarda eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisinin çalışılması uzun bir geçmişe sahiptir. Öklit uzayının klasik içeriği bazı diğer geometrilere dönüştürülebilen sonuçların bir kaynağıdır. Bu alanda ele alınan ve bir çok araştırmacıya ışık tutan çok kıymetli temel çalışmalar bulunmaktadır [1-7].

Eğri kavramının incelenmeye başladığı ilk anlardan bugüne kadar bir çok araştırmacı ilk olarak bir eğri üzerinde tanımlanan Frenet üçyüzlülerini incelemişlerdir. Frenet elemanları olarak adlandırılan $\kappa(s), \tau(s), T(s), N(s), B(s)$ ifadeleri kullanılarak eğriler için bir çok karakterizasyon elde edilmiştir. Çalışılan uzaya göre bu Frenet elemanları bir takım farklılıklarla karşımıza çıkmaktadırlar. Bu konuda da bir çok çalışmaya ulaşmak mümkündür [8-11].

Genel bakış açısının özelde düşünülmesi ile diferansiyel geometride eğriler konusunda yazılmış birçok kitap ve yapılmış bir çok makale bulunmaktadır. Eğri kavramının bir çok uzayda ele alınması ile birlikte kıymetli çalışmalar ortaya çıkmaktadır. Geometride özellikle helisler ve Bertrand eğri kavramı da çok özel bir yere sahiptir [12,13].

Eğri kavramının daha genel bir yapısı olan yüzeyler de bir çok araştırmacı tarafından ele alınarak detaylıca incelenmiştir. Eğri kavramına göre daha geniş bir çalışma alanı oluşturan yüzey kavramının birçok uzayda birçok çeşidi bulunmaktadır. Örnek verilecek olursa doğrusal yüzeyler, öteleme yüzeyleri, dönel yüzeyler, değişkenlerine ayrılabilir yüzeyler ilk olarak Öklit uzayında ele alınmış ve ardından farklı uzaylarda çalışma alanı oluşturmışlardır. Farklı uzaylarda bu konularda yapılan başlıca çalışmalardan bazıları [14-17] şeklindedir.

Son zamanlarda Öklitsel olmayan yeni geometriler birçok araştırmacı için yeni bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Yeni geometriler tanımlamanın bir yolu Cayley-Klein uzayı aracılığı ile olur. Bu uzaylar kuadrikler ve düzlemlerin bir dizisinden oluşan $P_n(R)$ projektif uzayının bir alt cümlesine (ideal figür) sahip olan projektif uzaylar olarak tanımlanır. $P_n(R)$ projektif uzayının ideal figürünü değişmez bırakan izdüşellikleri bir Cayley-Klein uzayının hareketler

grubu denilen izdüşelliklerin altgrubunu tanımlar. İdeal figür yardımı ile metriksel kavramlar da tanımlanabilir. Bunlar hareketler grubunun değişmezleridir.

3-boyutlu $P_3(R)$ projektif uzayında eliptik, hiperbolik, Öklitsel, Minkowski, basit ve duble izotropik, Galilei, pseudo-Galilei, quasi-eliptik, quasi-hiperbolik gibi Cayley-Klein uzayının çeşitli tipleri tanımlanabilir. Bu uzaylarda eğriler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi [25] de detaylıca verilmiştir. Ayrıca 4-boyutlu Galilei uzayı klasik Newton mekaniği ile ilişkili olup ilk koordinat zamanı temsil ederken diğer koordinatlar uzay koordinatlarını ifade etmektedirler. Bu nedenle Fizik alanında bu uzayın uygulamaları oldukça geniştir.

Özellikle Galilei uzayı eğriler ve yüzeyler konusunda çalışan veya çalışacak olan araştırmacılar için ilgi odağı haline gelmektedir. Bu alanda yapılan çalışmalar için de [18- 23, 26] kaynaklarına bakılabilir.

Bu tez çalışması esnasında ilk olarak Öklit ve Galilei uzaylarında eğriler ve yüzeylerle ilgili temel kitap ve makaleler araştırılarak incelendi. Ardından bu kaynaklarda bulunan temel kavramlar çalışmanın ikinci kısmında verildi. Daha sonra Galilei uzayında ele alınan eğriler konusunda detaylıca incelemeler yapılarak, Frenet elemanları, helisler ve bertrand eğri kavramları ele alındı. Son olarak da Galilei uzayında daha önceden çalışılan dönel yüzeyler, öteleme yüzeyleri ve değişkenlerine ayrılabilir yüzey kavramları verildi.

2. BÖLÜM

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklit Uzayının Temel Kavramları

Tanım 2.1.1. Bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve A da boştan farklı bir cümle olsun. Aşağıdaki ifadeleri gerçekleyen bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu mevcut ise bu A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş olan bir afin uzay adı verilir [11].

$$A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, R) = f(P, Q) + f(Q, R) \text{ dir.}$$

$A_2) \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde yalnız ve bir $Q \in A$ noktası mevcuttur.

Tanım 2.1.2. Reel bir afin uzay A ve bir vektör uzayı da V olsun. Bu afin uzay ile birleşen V de tanımlı işlem (iç çarpım)

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa bu iç çarpım (Öklit iç çarpımı) yardımı ile A afin uzayında iki nokta arasındaki uzaklık, iki vektör arasındaki açı gibi ölçüye dayalı ifadelerden bahsedilebilir. Bu durumda A afin uzayı, bu iç çarpım ile birlikte da yeni bir isim olarak Öklit uzay ismini alır [11].

Tanım 2.1.3. $d, E^n \times E^n$ kartezyen çarpımından $\mathbb{R}$ ye tanımlı

$$(u, v) \rightarrow d(u, v) = \|\vec{uv}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$$

fonksiyonuna ve $d(u, v)$ reel sayısına sırasıyla E^n n-boyutlu standart Öklit uzayında uzaklık fonksiyonu ile Öklit metriği adı verilir [11].

Tanım 2.1.4. n-boyutlu E^n standart Öklit uzayını göz önüne alalım. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$

şeklindeki açının ölçüsü; $\cos \theta = \frac{\langle \vec{xy}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{xy}\| \|\vec{yz}\|}$ şeklinde verilen eşitliği yardımı ile hesaplanan θ

reel sayıdır [11].

Tanım 2.1.5. E^n n-buyutlu Öklit uzayında bir U açık alt cümlesini göz önüne alırsak $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde verilen f fonksiyonuna, k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler, C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denilir [11].

Tanım 2.1.6. X bir cümle olsun. X nin alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olmak üzere eğer τ , aşağıda verilen şartları gerçekliyorsa verilen cümle üzerinde bir topoloji adını alır. Ayrıca (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay adı verilir [11].

$$T_1 : X, \emptyset \in \tau$$

$$T_2 : \text{Her } A_1, A_2 \in \tau \text{ ise } A_1 \cap A_2 \in \tau$$

$$T_3 : \tau \text{ da alınan herhangi sayıda elamanların birleşimi yine de } \tau \text{ ya aittir.}$$

Tanım 2.1.7. İki topolojik uzay X ve Y olsun. Bu iki uzay arasında $f : X \rightarrow Y$ şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Eğer f fonksiyonu sürekli, ayrıca tersi olan f^{-1} tersi mevcut ve terside de sürekli ise topolojik dönüşüm (homeomorfizm) adını alır [11].

Tanım 2.1.8. X bir topolojik uzay olsun. Eğer bu topolojik uzayın farklı P ve Q noktaları için, bu uzayda P ve Q noktalarını kapsayan iki açık A_P ve A_Q gibi alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu X topolojik uzayına da Hausdorff uzay denir [11].

Tanım 2.1.9. Bir topolojik uzay M olsun. Bu M topolojik uzayı için aşağıda verilen ifadeler sağlanıyor ise M topolojik uzayına n -boyutlu topolojik manifold adı verilir [11].

M_1) M topolojik uzayı bir hausdorff uzayıdır.

M_2) M topolojik uzayının açık alt cümlelerinin her biri E^n Öklit uzayına veya E^n nin herhangi alt (açık) cümlesine homeomorftur.

M_3) M topolojik uzayı sayılabilir açık cümleler ile örtülebilir olmalıdır.

Tanım 2.1.10. Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. Eğer

$$\chi : M \rightarrow \cup_p T_M(p)$$

şeklinde tanımlanan bire-bir örten bir χ fonksiyonu varsa bu fonksiyona vektör alanı denir. Burada $\chi(M)$ ye de M üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir [11].

Tanım 2.1.11. Bir C^∞ manifold olarak M yi göz önüne alalım. Bu M manifoldu üzerinde $\mathcal{X}(M)$ vektör alanlarının uzayını ele alırsak $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ den $\mathcal{X}(M)$ e tanımlı

$$D(X, Y) = D_X Y$$

şeklinde tanımlı D fonksiyonu için,

$$1) D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$2) D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ifadeleri gerçekleşiyorsa bu D fonksiyonuna M manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon ve D_X ifadesine de X e göre tanımlı kovaryant türev operatörü adı verilir [11].

Tanım 2.1.12. Bir Riemann manifoldu M ve D de, M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

1) D konneksiyonu C^∞ sınıfındandır.

2) M Riemann manifoldunun bir A bölgesi üzerinde C^∞ sınıfından olan her $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.

3) Bir M Riemann manifoldunun A bölgesi üzerinde C^∞ sınıfından olan her $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ve $p \in A$ için

$$X_p[< Y, Z >] = < D_X Y, Z > |_p + < Y, D_X Z > |_p$$

dir; özellikleri sağlanıyorsa D konneksiyonuna M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bir Riemann konneksiyonu ve D_X ifadesine de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü adı verilir [11].

Tanım 2.1.13. n -boyutlu E^n Öklit uzayında bir hiperyüzey M olsun. M nin şekil operatörü de S olsun. D , n -boyutlu Öklit uzayı E^n de Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + < S(X), Y > N$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ ye M hiperyüzeyi üzerinde tanımlı Gauss anlamında kovaryant türev ve yukarıda verilen eşitliğe de Gauss denklemi adı verilir [11].

Tanım 2.1.14. M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt cümlesi olsun. M cümlesinin her bir p noktası için, $\mathbb{R}^3$ de p nin bir A komşuluğu ve $\mathbb{R}^2$ deki bir U açık alt kümesinden, $\mathbb{R}^3$ e tanımlı bir φ fonksiyonu aşağıda verilen iki ifadeyi sağlayacak şekilde elde edilebiliyorsa, bu M alt cümlesine ye $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey adı verilir [11].

- 1) $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde diferensiyellenebilir, regüler bir φ fonksiyonu vardır.
- 2) $\varphi(U) = M \cap A$ olacak şekilde bir $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ homeomorfizmi mevcuttur.

Tanım 2.1.15. $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun. α ve β vektörlerinin x vektörel çarpımı

$$x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde hesaplanır [11]. Burada e_i , $i = 1, 2, 3$ ifadeleri $\mathbb{R}^3$ uzayının standart baz vektörleridir.

Tanım 2.1.16. Bir V reel vektör uzayını göz önüne alalım. V reel vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım işlemi diye aşağıdaki aksiyomları verilen $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne (reel değerli fonksiyona) denir ve bu işlemin değeri $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir [11].

- 1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, $\forall u, v \in V$ dir. (Simetri şartı)
- 2) $\langle a u_1 + b u_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle$
 $\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = a \langle u, v_1 \rangle + b \langle u, v_2 \rangle$ (Bilineerlik şartı)
- 3) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$. (Pozitif tanımlılık şartı)

Tanım 2.1.17. Bir V reel vektör uzayını göz önüne alalım. V üzerinde belli bir iç çarpım işlemi tanımlanabilirse bu V vektör uzayına tanımlanan iç çarpım ile birlikte iç çarpım uzayı adı verilir [11].

Tanım 2.1.18. Bir V reel vektör uzayını göz önüne alalım. Bu vektör uzayında ele alınan $u \in V$ vektörü için elde edilen

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

ifadesine $u \in V$ vektörünün normu (veya uzunluğu) denir [11].

Tanım 2.1.19. $\mathbb{R}$ nin bir I açık alt aralığını göz önüne alalım. I dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı

$$\begin{aligned} \alpha : I & \xrightarrow{\text{diferensiyellenebilir}} E^n \\ t & \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

şeklindeki α fonksiyonuna E^n de bir eğri denir. Yani bir eğri I aralığındaki noktaların α fonksiyonu altında E^n deki görüntülerinin geometrik yeridir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine α nın parametresi (değişkeni) denir [11].

Tanım 2.1.20. Bir r eğrisini (I, α) koordinat komşuluğu ile ele alalım. $\forall s \in I$ için eğer $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise bu r eğrisi verilen (I, α) koordinat komşuluğuna göre bir birim hızlı eğri adını alır. [11].

Tanım 2.1.21. E^n uzayında $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. Eğer her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine bu uzayda regüler eğri denir [11].

Tanım 2.1.22. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi üstündeki X vektör alanının bileşenlerinin her biri düzgün fonksiyonlar ise X vektör alanı düzgün vektör alanıdır denir [11].

Tanım 2.1.23. $v, w \in X(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p \in \mathbb{R}^n$ için $(D_v w)_{(p)} = D_{v(p)} w$

eşitliğiyle tanımlı $D_v w$ vektör alanına w nın v yönündeki kovaryant türevi denir [11].

Tanım 2.1.24. E^3 uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde bir birim hızlı eğriyi göz önüne alalım.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile elde edilen $T(s)$ vektörüne, verilen α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında tanımlı birim teğet vektör alanı denir [11].

Tanım 2.1.25. E^3 uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde bir birim hızlı eğriyi göz önüne alalım.

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

eşitliği ile elde edilen $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında tanımlı asli normal vektör alanı (birim dik vektör alanı) denir [11].

Tanım 2.1.26. E^3 uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde bir birim hızlı eğriyi göz önüne alalım.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile elde edilen $B(s)$ vektörüne de verilen α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında tanımlı binormal vektör alanı adı verilir.

Ayrıca $\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsüne de verilen α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında tanımlı Frenet üçyüzlüsü denir [11].

Tanım 2.1.27. Öklit uzayında ele alınan bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. Burada $\alpha(s)$ noktasında, sırasıyla,

$$\text{Sp } \{T(s), N(s)\}, \text{ Sp } \{N(s), B(s)\} \text{ ve } \text{Sp } \{B(s), T(s)\}$$

ile birleşen afin alt uzaylara oskütatör, normal ve rektifiyan düzlem adı verilir [11].

Tanım 2.1.28. M bir yüzey olsun. M üzerinde tanımlı birim normal vektör alanı N olsun. M yüzeyinin her p noktasında

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M) \quad , \quad S_p(v_p) = -D_{v_p} N$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonuna, M yüzeyinin şekil operatörü denir. Burada bu şekil operatörü yüzeyin N birim normal vektör alanına bağlıdır [11].

Tanım 2.1.29. $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey M olsun. M nin her bir p noktasına

$$I_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

şeklinde bir I_p fonksiyonunu karşılık getiren I fonksiyonuna, M yüzeyi üzerinde tanımlı birinci temel form denir. Ayrıca

$$II_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

şeklinde tanımlı II fonksiyonuna da, M yüzeyi üzerinde tanımlı ikinci temel form adı verilir. [11].

Tanım 2.1.30. 3-boyutlu Öklit uzayında verilen bir M yüzeyinin parametrik denklemi

$$r(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$$

şeklinde olsun. Bu eşitlikte verilen a, b, c (diferensiyellenebilir) fonksiyonlarına M yüzeyinin koordinat fonksiyonları denir. Bu durumda yukarıda denklemi verilen M yüzeyinin birinci ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla,

$$E = \langle r_x, r_x \rangle, \quad F = \langle r_y, r_x \rangle, \quad G = \langle r_y, r_y \rangle,$$

$$L = \langle r_{xx}, Z \rangle, \quad M = \langle r_{xy}, Z \rangle, \quad N = \langle r_{yy}, Z \rangle,$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Burada M yüzeyinin birim normal vektörü

$$W = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|}$$

eşitliği ile elde edilir. Verilen bu M yüzeyi için Gauss ve ortalama eğrilikleri de sırasıyla

$$H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}, \quad K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

formülleri ile hesaplanır [11].

Tanım 2.1.31. E^3 uzayında bir yüzey M olsun. Eğer M yüzeyinin bir p noktasında

$$\langle S(v_p), v_p \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir v_p vektörü varsa bu v_p vektörüne bir asimtotik vektör denir [11].

Tanım 2.1.32. E^3 uzayında bir M yüzeyini ve regüler bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisini göz önüne alalım. Bu α eğrisinin her $t \in I$ noktasındaki $\alpha'(t)$ ile hesaplanan hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimtotik vektörüne karşılık geliyor ise α eğrisi de verilen bu M yüzeyi içinde bir asimtotik eğri adını alır [11].

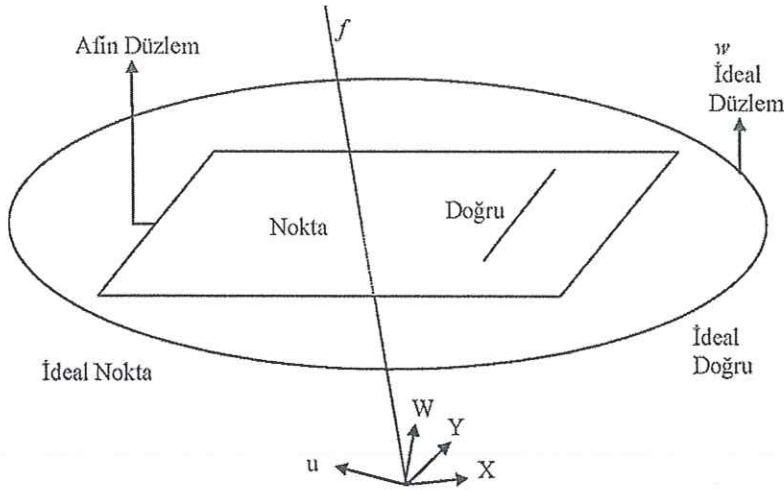
Sonuç 2.1.1. M yüzeyi içinde regüler bir eğri β ve Z de M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. β eğrisinin bir asimtotik eğri olması için $\langle \beta'', Z \rangle = 0$ olması gerek ve yeterlidir. [11].

Tanım 2.1.33. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyini ve $\alpha : I \rightarrow M$ şeklinde α eğrisini göz önüne alalım. Z vektör alanı da bu M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. Eğer burada α'' vektör

alanı, $Zo\alpha$ vektör alanının lineer birleşimi olarak yazılabiliyor ise $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisine, bu M yüzeyi içerisinde bir jeodezik eğri adı verilir [11].

2.2. Galilei Uzayında Temel Kavramlar

Galileo geometri Öklit dışı geometrilerden bir tanesidir. 3-boyutlu G_3 Galilei uzayı bir kompleks projektif uzayının; $I_1, I_2 \in f$ gibi iki ideal noktayı, bu ideal noktaların üzerinde bulunduğu f reel ideal doğrusunu ve bu ideal doğruyu kapsayan w reel ideal düzlemine sahip olan bir şeklidir. Bu uzayın nokta, doğru ve düzlemleri aşağıdaki şekilde (Şekil 2.2.1) belirtilebilir. Ayrıca Galilei geometri, $(0, 0, +, +)$ projektif işaretine sahip olan reel Cayley - Klein geometrilerinin özel bir halidir.



Şekil 2.1 Galilei uzayında nokta, doğru ve düzlem

G_3 Galilei uzayında hareketler grubu matris formunda

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cos\varphi & \sin\varphi \\ e & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Bu eşitlikten görüldüğü gibi ötelemeler, x-ekseni etrafında dönmeler ve x-ekseni etrafında affine sharing dönüşümleri G_3 Galilei uzayının izometrilerini oluşturur. Belirtilen bu hareket boyunca G_3 Galilei uzayında bulunan doğrular dört gruba ayrılabilir. Bu dört doğru grubu aşağıdaki şekilde belirtilir:

- 1) İzotropik olmayan reel doğrular.
- 2) İzotropik reel doğrular.

3) İzotropik ve reel olmayan doğrular.

4) f ideal doğrusu

İzotropik olmayan reel doğrular, ideal doğru olan f doğrusunu kesmeyen doğrulardır. İzotropik reel doğrular w düzleminde bulunmayan doğrulardır ve bu doğrular f ideal doğrusunu keserler. Non-izotropik reel olmayan doğrular, f ideal dorusunun dışındaki w nın diğer bütün doğrularıdır.

Şimdi aşağıda Galilei geometrinin bazı önemli temel kavramlarını verelim. Daha detaylı bilgiler için bu temel kavramların alındığı [8,9,10,21,23] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.2.1: $\mathbb{R}^2$ reel afin düzlem ve $X(x_1, x_2)$ ve $Y(y_1, y_2)$ bu düzlemde iki vektör olsun. Bu düzlem üzerinde

$$\langle X, Y \rangle_G = \begin{cases} x_1 y_1, & x_1 \neq 0 \text{ veya } y_1 \neq 0 \text{ ise} \\ x_2 y_2, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma Galilei iç çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım ile $\mathbb{R}^2$ reel afin düzlemi birlikte düşünülürse $(\mathbb{R}^2, \langle X, Y \rangle_G)$ ikilisine Galilei düzlemi denir ve bu düzlem kısaca G_2 ile gösterilir. Bu düzleme izotropik düzlem adı da verilir.

Tanım 2.2.2: G_2 Galilei düzleminde $P(p_1, p_2)$ ve $Q(q_1, q_2)$ gibi iki nokta göz önüne alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d(P, Q) = \begin{cases} |q_1 - p_1|, & p_1 \neq q_1 \text{ ise} \\ |q_2 - p_2|, & p_1 = q_1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3: $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu reel afin uzay ve $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ bu düzlemde iki vektör olsun. Bu uzayda

$$\langle X, Y \rangle_G = \begin{cases} x_1 y_1, & x_1 \neq 0 \text{ veya } y_1 \neq 0 \text{ ise} \\ x_2 y_2 + x_3 y_3, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de Galilei iç çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım ile $\mathbb{R}^3$ reel afin uzayı birlikte düşünülürse $(\mathbb{R}^3, \langle X, Y \rangle_G)$ ikilisine Galilei uzayı denir ve bu uzay kısaca G_3 ile gösterilir.

Tanım 2.2.4: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir $X(x, y, z)$ vektörünü göz önüne alalım. Eğer ele alınan bu $X(x, y, z)$ vektörü için $x=0$ oluyorsa bu $X(x, y, z)$ vektörü izotropik vektör adını alır. Yani G_3 de $A(0, y, z)$ formundaki vektörler izotropik vektörlerdir.

Tanım 2.2.4: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir $X(x, y, z)$ vektörünü göz önüne alalım. Eğer ele alınan bu $X(x, y, z)$ vektörü için $x \neq 0$ oluyorsa bu $X(x, y, z)$ vektörüne izotropik olmayan vektör adı verilir. Yani G_3 de $A(x \neq 0, y, z)$ formundaki vektörler izotropik olmayan vektörlerdir.

Tanım 2.2.5: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $X(x, y, z)$ bir izotropik vektör olsun. Bu $X(0, y, z)$ vektörü için eğer $y^2 + z^2 = 1$ ise bu $X(0, y, z)$ vektörüne birim izotropik vektör denir.

Tanım 2.2.6: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $X(x, y, z)$ bir izotropik olmayan vektör olsun. Bu $X(x, y, z)$ vektörü için $x = 1$ ise, yani bu vektör $X(1, y, z)$ formunda ise birim izotropik olmayan vektör adını alır. Yani 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bütün birim izotropik olmayan vektörler $X(1, y, z)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.7: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $P(p_1, p_2, p_3)$ ve $Q(q_1, q_2, q_3)$ gibi iki nokta göz önüne alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d(P, Q) = \begin{cases} |q_1 - p_1|, & p_1 \neq q_1 \text{ ise} \\ \sqrt{(q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}, & p_1 = q_1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $X(x, y, z)$ vektörünün normu;

$$\|X\| = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & x = 0 \end{cases}$$

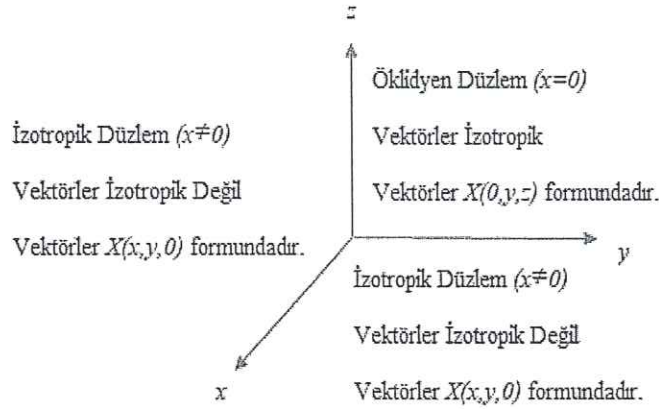
şeklinde tanımlanır. Yani bir $X(0, y, z)$ izotropik vektörünün normu $\|X\| = \sqrt{y^2 + z^2}$, bir $X(x \neq 0, y, z)$ izotropik olmayan vektörün normu $\|X\| = x$ şeklindedir.

Tanım 2.2.9: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörü göz önüne alalım. Bu iki vektörün vektörel çarpımları

$$X \times_G Y = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, & x_1 \neq 0 \text{ veya } y_1 \neq 0 \text{ ise} \\ \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, & x_1 = 0 \text{ ve } y_1 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, e_2, e_3\}$ uzayın standart baz vektörleridir.

Tanım 2.2.10: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de düzlemler Öklitsel ve izotropik düzlemler olmak üzere iki ayrı gruba ayrılır. Bu düzlemlerden $x = \text{sabit}$ denklemini sağlayan düzlemlere Öklitsel düzlem, $x \neq \text{sabit}$ denklemini sağlayan düzlemlere de izotropik düzlem adı verilir.



Şekil 2.2 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de düzlemler

Tanım 2.2.11: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. $\alpha(I) \subset G_3$ noktalar kümesine Galilei uzayında bir eğri adı verilir. Burada $s \in I$ için

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

olmak üzere $x, y, z: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellebilir fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları adı verilir.

Tanım 2.2.12: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ vektörüne α eğrisinin teğet vektörü adı verilir.

Tanım 2.2.13: 3-boyutlu Galilei uzayın G_3 de verilen bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$ eğrisinin teğet vektörü izotropik olmayan bir vektör ise (yani $x'(s) \neq 0$ ise) bu α eğrisine admissible (uygun – kabul edilebilir) eğri adı verilir.

Tanım 2.2.14: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, s ye de yay parametresi adı verilir.

Dolayısıyla ,

$$\alpha(s) = (0, y(s), z(s)) \text{ iken}$$

$\alpha'(s) = (0, y'(s), z'(s))$ olup $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{[y'(s)]^2 + [z'(s)]^2} = 1$ ise α eğrisi birim hızlı eğridir.

$$\alpha(s) = (s, y(s), z(s)) \text{ iken}$$

$$\alpha'(s) = (1, y'(s), z'(s)) \text{ ve } \|\alpha'(s)\| = 1 ,$$

olduğundan α eğrisi yine birim hızlı eğridir.

Tanım 2.2.15: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık cümle ve $r: U \rightarrow G_3$ bir immersiyon olsun. Bu immersiyon yardımı ile elde edilen $r(U)$ noktalar cümlesine G_3 de bir yüzey adı verilir ve kısaca r ile gösterilir.

Tanım 2.2.16: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir r yüzeyini göz önüne alalım. Eğer bu yüzeyin her noktasındaki teğet düzlemi izotropik ise, bu r yüzeyi admissible (uygun – kabul edilebilir) yüzey olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.17: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık cümle olmak üzere bir r yüzeyi

$$\begin{aligned} r: U &\rightarrow G_3 \\ (u, v) &\rightarrow r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

dönüşümü ile verilsin. Burada r fonksiyonuna yüzeyin parametrizasyonu, x, y, z fonksiyonlarına da yüzeyin koordinat fonksiyonları adı verilir. Yukarıdaki dönüşümden elde edilen $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ ve $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ kısmi türevlerine, bu yüzeyin teğet düzleminin baz vektörleri denir.

Sonuç 2.2.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir r yüzeyinin admissible (uygun –kabul edilebilir) yüzey olması için gerek ve yeter şart r_u ve r_v kısmi türevlerinin en az birinin sıfırdan farklı olmasıdır.

Tanım 2.2.18: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de iki değişkenli reel değerli $z = z(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alırsak, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen ve

$$r(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

parametrizasyonuna sahip olan yüzeye Monge yüzeyi adı verilir.

Tanım 2.2.19: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $U \subseteq R^2$ bir açık cümle olmak üzere parametrik denklemi

$$\begin{aligned} M: U &\rightarrow G_3 \\ (u_1, u_2) &\rightarrow r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2)) \end{aligned}$$

ile verilen bir M yüzeyini göz önüne alalım. Yukarıda ele alınan r_k $1 \leq k \leq 3, U$ üzerinde tanımlı reel değerli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Burada kısmi türevler

$$(r_k)_{u_i} = \partial r_k / \partial u_i \text{ ve } (r_k)_{u_i u_j} = \partial^2 r_k / \partial u_i \partial u_j, \quad 1 \leq k \leq 3 \text{ ve } 1 \leq i, j \leq 2$$

şeklinde gösterilebilir. Dolayısıyla yukarıdaki sonuç şu şekilde verilebilir. Verilen bir M yüzeyin admissible bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $(r_1)_{u_i} \neq 0, \quad i = 1, 2$ olmasıdır.

Tanım 2.2.20: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de f ve g reel değerli iki fonksiyon olmak üzere $z(x, y) = f(x) + g(y)$ fonksiyonunu göz önüne alırsak, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen ve

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$$

parametrizasyonuna sahip olan yüzeye bir öteleme yüzeyi adı verilir.

Tanım 2.2.21: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de f ve g reel değerli iki fonksiyon olmak üzere $z(x, y) = f(x)g(y)$ fonksiyonunu göz önüne alırsak, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen ve

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

parametrizasyonuna sahip olan yüzeye homotetiksel yüzey veya değişkenlerine ayrılabilir (factorable) yüzey adı verilir [6].

3. BÖLÜM

3. GALILEI UZAYINDA EĞRİLER

3.1. Galilei Uzayında Eğriler için Frenet Formülleri

Tanım 3.1.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned}\alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))\end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım. Bu α eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla,

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{[y''(s)]^2 + [z''(s)]^2}}{\|\alpha'(s)\|^3}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s)\|^5 \kappa^2(s)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned}\alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (s, y(s), z(s))\end{aligned}$$

birim hızlı eğrisini göz önüne alalım. Bu α eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla,

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{[y''(s)]^2 + [z''(s)]^2}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\kappa^2(s)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.3: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned}\alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (s, y(s), z(s))\end{aligned}$$

birim hızlı admissible eğrisini göz önüne alalım. O zaman

$$T(s) = \alpha'(s) = (1, y'(s), z'(s))$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = (0, \frac{y''(s)}{\kappa(s)}, \frac{z''(s)}{\kappa(s)})$$

$$B(s) = (0, -\frac{z''(s)}{\kappa(s)}, \frac{y''(s)}{\kappa(s)})$$

şeklinde tanımlı $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine α eğrisinin Frenet vektörleri adı verilir. Bu vektörler α eğrisinin sırası ile, teğet, normal ve binormal vektörleri olarak adlandırılır. α eğrisinin Frenet vektörlerinin türevleri olan

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

formüllerine Frenet formülleri adı verilir.

Ayrıca bir α eğrisi verildiğinde bu eğri için hesaplanan $\kappa(s)$, $\tau(s)$, $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ ifadelerine bu eğrinin Frenet elemanları adı da verilir [23].

Örnek 3.1.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow G_3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (s, \cos s, \sin s) \end{aligned}$$

eğrisini göz önüne alalım.

Verilen eğrinin parametrik gösterimi $\alpha(s) = (s, \cos s, \sin s)$ olduğundan buradan s e göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = (1, -\sin s, \cos s)$$

olup

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

dir. O halde verilen α eğrisi birim hızlı eğridir. Tanım 3.1.3 göz önüne alınırsa

$$T(s) = \alpha'(s) = (1, -\sin s, \cos s)$$

bulunur. Bu son eşitlikten tekrar s e göre türev alınırsa

$$\alpha''(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$$

elde edilir. Tanım 3.1.2 den

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{(-\cos s)^2 + (-\sin s)^2} = 1$$

olduğundan

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)} = (0, -\cos s, -\sin s)$$

elde edilir. Ayrıca

$$B(s) = \left(0, -\frac{z''(s)}{\kappa(s)}, \frac{y''(s)}{\kappa(s)}\right) = (0, \sin s, -\cos s)$$

bulunur. Verilen α eğrisinin burulması ise

$$\tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\kappa^2(s)} = 1$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla verilen α eğrisinin $\kappa(s), \tau(s), T(s), N(s), B(s)$ Frenet elamanları bulunmuş olur.

3.2. Galilei Uzayında Helisler

Tanım 3.2.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

şeklinde bir α eğrisini göz önüne alalım. κ ve τ da bu α eğrisinin sırasıyla eğrilik ve burulması olsun. Eğer bu α eğrisi için κ ve τ sabit iseler verilen bu eğri dairesel helis olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.2.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

şeklinde bir α eğrisini göz önüne alalım. κ ve τ da bu α eğrisinin sırasıyla eğrilik ve burulması olsun. Eğer bu α eğrisi için

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

ise bu eğri genel helis olarak adlandırılır [12].

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir çok araştırmacı helisler üzerine çalışmalar yapmışlardır. Ülkemizde bu alanda ilk çalışmalardan biri olan [12] de araştırmacıların elde ettikleri sonuçlardan bazıları aşağıdaki verilebilir.

Teorem 3.2.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - K \nabla_T T = 3\kappa' \nabla_T N$$

olmasıdır. Burada $K = \frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2$ olarak alınmıştır

Sonuç 3.2.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = -\tau^2 \nabla_T T$$

olmasıdır.

Teorem 3.2.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - K \nabla_T T = 3\lambda\tau' \nabla_T N$$

olmasıdır. Burada $K = \frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2$ ve $\lambda = \frac{\kappa}{\tau}$ olarak alınmıştır.

Teorem 3.2.3: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - \tilde{K} \nabla_T B = 3\kappa' \nabla_T N$$

olmasıdır. Burada $\tilde{K} = \frac{\kappa''}{\tau} + \kappa\tau$ olarak alınmıştır.

Teorem 3.2.4: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T - \tilde{K} \nabla_T B = 3\lambda\tau' \nabla_T N$$

olmasıdır. Burada $\tilde{K} = -\frac{\kappa''}{\tau} + \kappa\tau$ ve $\lambda = \frac{\kappa}{\tau}$ olarak alınmıştır.

Sonuç 3.2.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir eğri α olsun. α eğrisinin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısına uygun olarak bir dairesel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T \nabla_T \nabla_T T = \kappa\tau \nabla_T B$$

olmasıdır.

3.3. Galilei Uzayında Bertrand Eğriler

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir çok araştırmacı eğriler üzerine çalışırken özel bir çalışma alanı olarak Bertrand eğriler üzerine de çalışmalar yapmışlardır. Ülkemizde bu uzayda Bertrand Eğriler üzerine ilk çalışmalardan biri olan [13] de araştırmacıların elde ettikleri sonuçlardan bazıları aşağıdaki verilebilir.

Tanım 3.3.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de α ve $\bar{\alpha}$ her $s \in I$ ve $\bar{s} \in J$ için $\kappa_\alpha(s) \neq 0, \bar{\kappa}_\alpha(s) \neq 0, \tau_\alpha(s) \neq 0, \bar{\tau}_\alpha(s) \neq 0$ eğriliklerine sahip iki eğri olsun. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{\bar{T}_\alpha, \bar{N}_\alpha, \bar{B}_\alpha\}$ sırasıyla α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin uygun noktalardaki Frenet üçyüzlüsü olsun. Eğer $\{N_\alpha, \bar{N}_\alpha\}$ lineer bağımsız yani α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin $s \in I$ ve $\bar{s} \in J$ noktalarındaki normal vektörleri paralel ise o zaman $(\alpha, \bar{\alpha})$ eğri çifti G_3 de Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır [13].

Burada $\bar{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin Bertrand eğrisi olarak ta adlandırılır. Yukarıdaki tanım göz önüne alınırsa 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti için

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + u(s) N_\alpha(s)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\bar{u}(\bar{s}(s)) = u(s)$ olacak şekilde $\bar{s} = \bar{s}(s)$ dir.

Teorem 3.3.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $(\alpha, \bar{\alpha})$ bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + u(s) N_\alpha(s)$$

eşitliğinde verilen $u(s)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon olur [13].

Teorem 3.3.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de α ve $\bar{\alpha}$ iki eğri olsun. Bu iki eğrinin Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin sabit burulmalı bir eğri olmasıdır, yani $\tau_\alpha(s) = \text{sabit}$ olmasıdır [13].

Teorem 3.3.3: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $(\alpha, \bar{\alpha})$ bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu iki eğrinin uygun noktalardaki torsiyonları çarpımı, $\tau_\alpha(s) \cdot \bar{\tau}_\alpha(s) = \text{sabit}$ dir. Yani G_3 de Schell's teoremi geçerlidir [13].

Tanım 3.3.2: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de α bir eğri olsun. Eğer bu α eğrisinin asli normal vektörü bir başka eğrinin binormal vektörü ise o zaman bu eğri G_3 de bir Mannheim eğri olarak adlandırılır [13].

Teorem 3.3.3-4: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de α bir eğri olsun. α eğrisinin bir Mannheim eğri olması için gerek ve yeter şart bu eğrinin κ_α ve τ_α eğrilikleri arasında bazı c sabitleri için $\kappa_\alpha = c\tau_\alpha^2$ eşitliğinin sağlanmasıdır [13].

4. BÖLÜM

4. GALILEI UZAYINDA YÜZEYLER

4.1. Temel Formlar ve Eğrilikler

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de $U \subseteq R^2$ bir açık cümle olmak üzere parametrik denklemi

$$\begin{aligned} r: U &\rightarrow G_3 \\ (u_1, u_2) &\rightarrow r(u_1, u_2) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2)) \end{aligned}$$

şeklinde verilen bir M yüzeyini göz önüne alalım.

Verilen bu M yüzeyi için birinci temel formunun katsayıları

$$g_i = (r_1)_{u_i}, \quad h_{ij} = (r_2)_{u_i}(r_2)_{u_j} + (r_3)_{u_i}(r_3)_{u_j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.1.1)$$

şeklinde hesaplanır.

M yüzeyinin normal vektör alanı hesaplanırken kullanılan W fonksiyonunu

$$W = \sqrt{((r_3)_{u_1}(r_1)_{u_2} - (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2})^2 + ((r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_2)_{u_1}(r_1)_{u_2})^2}$$

şeklinde tanımlayalım. Dolayısıyla M yüzeyi için elde edilen birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{W} (0, (r_3)_{u_1}(r_1)_{u_2} - (r_1)_{u_1}(r_3)_{u_2}, (r_1)_{u_1}(r_2)_{u_2} - (r_2)_{u_1}(r_1)_{u_2}) \quad (4.1.2)$$

şeklinde olur. Burada $N \cdot N = 1$ olduğu açıktır.

M yüzeyinin ikinci temel formu ise

$$II = L_{11}du_1^2 + L_{12}du_1du_2 + L_{22}du_2^2 \quad (4.1.3)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$L_{ij} = \frac{1}{g_1} \left(g_1(0, (r_2)_{u_i u_j}, (r_3)_{u_i u_j}) - (g_i)_{u_j}(0, (r_2)_{u_1}, (r_3)_{u_1}) \right) \cdot N, \quad g_1 \neq 0 \quad (4.1.4)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Yukarıda verilen M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{W^2}, \quad H = \frac{g_2^2 L_{11} - 2g_1g_2 L_{12} + g_1^2 L_{22}}{2W^2} \quad (4.1.5)$$

formüllerini ile hesaplanır [21].

Burada hatırlatmak gerekir ki, 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de verilen bir M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için ortalama eğriliğinin sıfıra özdeş olması gerek ve yeterdir. Benzer şekilde; 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir M yüzeyinin flat olması için ise Gauss eğriliğinin sıfıra özdeş olması gerek ve yeterdir [21].

4.2. Galilei Uzayında Dönel Yüzeyler

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de dönme hareketi

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = y \cos t + z \sin t$$

$$\bar{z} = y \sin t + z \cos t$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki şekilde verilen denklemler aslında x-eksenine göre bir dönme ifade etmektedir.

Her noktasındaki teğet vektörü izotropik olan (izotropik olmayan) eğrilere izotropik (izotropik olmayan) eğri adı verilir.

Parametrik denklemi

$$(f(u), g(u), 0)$$

ile verilen bir izotropik olmayan eğrinin (dayanak eğrisi) x-ekseni etrafında dönmesi ile

$$r(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v)$$

yüzeyi elde edilir.

Eğer dayanak eğrisi

$$(f(u), 0, g(u))$$

şeklide seçilirse ve x-ekseni etrafında bu eğri döndürülürse

$$r(u, v) = (f(u), g(u) \sin v, g(u) \cos v)$$

yüzeyi elde edilir.

Yukarıda elde edilen bu iki yüzey 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de dönel yüzey olarak adlandırılır. Bu tür yüzeyler yapısal anlamda Galilei uzayına benzer olan pseudo-Galilei uzayında eğrilikleri sabit olacak şekilde [24] de detaylıca incelenmiştir.

4.3. Galilei Uzayında Öteleme Yüzeyleri

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de f ve g reel değerli iki fonksiyon olmak üzere $z(x, y) = f(x) + g(y)$ fonksiyonunu ele alırsak, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$$

şeklinde bir öteleme yüzeyini göz önüne alalım.

Böyle bir öteleme yüzeyi lokal olarak iki eğrinin toplamı şeklinde yazılabilen bir yüzeydir. Eğer $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$ ve $\beta(y) = (0, y, g(y))$ şeklinde alınırsa yukarıda belirtilen öteleme yüzeyi $r(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ şeklinde yazılabilir. Bu ise bir öteleme yüzeyinin iki eğrinin toplamı olarak yazılabileceğini ve geometrik olarak bir eğrinin diğer bir eğri boyunca ötelemesinden oluştuğunu ifade eder.

Bu çalışmada ise [21] de göz önüne alınan iki düzlem eğrisinin ötelenmesi ile elde edilen öteleme yüzeylerini inceleyeceğiz.

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de iki tip öteleme yüzeyi vardır. Bu yüzeyler aşağıdaki şekilde verilebilir.

1.Tip : Teğet vektörü izotropik olmayan bir eğri ile bir izotropik eğrinin ötelenmesi ile elde edilen öteleme yüzeyi.

2.Tip : İki izotropik olmayan eğrinin ötelenmesi ile elde edilen öteleme yüzeyi.

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de 1.Tip bir öteleme yüzeyi $z(x, y) = f(x) + g(y)$ fonksiyonu ele alınırsa, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen

$$r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)) \quad (4.3.1)$$

parametrik gösterimine sahip bir yüzeydir. Böyle bir $r(x, y)$ yüzeyini göz önüne alalım. Bir öteleme eğrisi $y = 0$ düzleminde bulunan ve izotropik olmayan $\alpha(x) = (x, 0, f(x))$ eğrisidir. Bir diğeri ise $x = 0$ düzleminde bulunan ve izotropik olan $\beta(y) = (0, y, g(y))$ eğrisidir. (4.1.5) formüllerinden birincisi kullanılırsa (4.3.1) ile verilen $r(x, y)$ öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{f''(x)g''(y)}{(1 + (g'(y))^2)^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada ' ile fonksiyonların uygun değişkenlerine göre adi türevler gösterilmektedir. Öklitsel durumunun aksine K fonksiyonundaki x ve y değişkenleri ayrılabilir olduğundan K fonksiyonunun sabit olması için gerek ve yeter şart

$$f''(x) = \text{sabit} \neq 0 \text{ ve } \frac{g''(y)}{(1+(g'(y))^2)^2} = \text{sabit} \neq 0 \quad (4.3.2)$$

veya

$$f''(x) = 0 \text{ veya } \frac{g''(y)}{(1+(g'(y))^2)^2} = 0 \quad (4.3.3)$$

olmasıdır. İlk olarak (4.3.2) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\frac{g''(y)}{(1 + (g'(y))^2)} + \arctang g'(y) = Ay + B, \quad A, B \in R$$

adi diferansiyel denkleminin çözümü $g(y)$ iken

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R$$

elde ederiz.

Eğer β öteleme eğrisi $(h(u))^2 + (k(u))^2 = 1$ iken $\beta(u) = (0, h(u), k(u))$ olacak şekilde u yay uzunluğu ile tekrar parametrelendirilirse Gauss eğriliği

$$K = f''(x)k''(u)$$

şeklinde hesaplanır ve bu adi diferansiyel denklem çözülürse

$$k(u) = \frac{1}{2}Au^2 + Bu + C, \quad (4.3.4)$$

ve

$$h(u) = \frac{Au+B}{2A}\sqrt{1 - (Au + B)^2} + \frac{1}{2A}\arcsin(Au + B) + C_1 \quad (4.3.5)$$

elde edilir. Burada $A, B, C, C_1 \in R$ dir.

Bu elde edilen yüzey, öteleme eğri ailelerinden biri olan parabollerden (Galilei geometrideki parabolik çemberler) oluşan özel bir öteleme yüzeyidir.

İkinci olarak (4.3.3) ifadesi göz önüne alınırsa

$$z(x, y) = ax + b + g(y)$$

veya

$$z(x, y) = f(x) + cy + d$$

silindiriksel yüzeyi elde edilir. Yani yüzeyi oluşturan eğrilerden en az biri doğrudur.

Bu elde edilen sonuçlar ile aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de, eğer S bir sabit Gauss eğrilikli 1.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $k(u), h(u)$ ile verilen özel bir yüzeye ($K \neq 0$) veya izotropik olan ya da olmayan doğrultmanlara sahip silindiriksel ($K = 0$) bir yüzeye eşdeğerdir [21].

(4.1.5) formüllerinden ikincisi kullanılırsa (4.3.1) ile verilen $r(x, y)$ öteleme yüzeyinin ortalama eğriligi

$$H = \frac{g''(y)}{2(1 + (g'(y))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde hesaplanır.

Teorem 4.3.2: 3-boyutlu Galilei uzayında, eğer S bir sabit ortalama eğrilikli ($H = \text{sabit} \neq 0$) 1.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S,

$$z(x, y) = f(x) - \frac{1}{2H} \sqrt{1 - (2Hy + c_1)^2} + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{sabit}$$

şeklinde bir yüzeye eşdeğerdir [21].

İspat: $h'(y) = 2H(1 + h^2(y))^{\frac{3}{2}}$, $H = \text{sabit}$ adi diferansiyel denklemi $h(y) = g'(y)$ alınarak çözülürse

$$h(y) = \frac{2Hy + c_1}{\sqrt{1 - (2Hx + c_1)^2}}, c_1 \in R$$

elde edilir.

Bu çözümden şunu söyleyebiliriz ki Öklit uzayındaki durumun aksine bu yüzey regle yüzey değildir.

Burada örnek olarak $f(x) = \sin x$ alınırsa sabit ortalama eğrilikli 1.Tip bir öteleme yüzeyi elde edilir.

Teorem 4.3.3: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de eğer S bir sıfır ortalama eğrilikli ($H = 0$) 1.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S ,

$$z(x, y) = f(x) + ay + b, \quad a, b \in R$$

şeklinde izotropik doğrultmana sahip (bu yüzden $K = 0$) bir silindirik yüzeye eşdeğerdir [21].

Diğer bir değişle elde edilen yüzey, $(0, 1, a)$ sabit izotropik doğrultuya sahip doğrultmanlı bir regle yüzey olur.

Bu teorem Galilei uzayında minimal yüzeyleri tanımlayan aşağıdaki teoremle aynı anlamı taşımaktadır.

Teorem 4.3.4: [23] G_3 de minimal yüzeyler tepe noktaları ideal doğru üzerinde bulunan koniler ile C tipinden regle yüzeylerdir. Bu minimal yüzeyler ideal doğruya sahip bütün kanonik regle yüzeylerdir.

Şimdi de 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de

$$r(u, v) = (u + v, g(v), f(u))$$

şeklinde iki izotropik olmayan eğrinin ötelenmesi ile elde edilen 2.Tip bir öteleme yüzeyini göz önüne alalım. Bu yüzey biri $y = 0$ izotropik düzleminde bulunan $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$, diğeri ise $z = 0$ izotropik düzleminde bulunan $\beta(v) = (0, v, g(v))$ eğrilerinin ötelenmesi ile elde edilmiştir. (4.1.5) formülleri kullanılırsa yukarıda verilen 2.Tip öteleme yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \frac{1}{W^4} f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)$$

ve

$$H = \frac{1}{2W^3} [f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)]$$

şeklinde hesaplanır, burada $W^2 = [f'(u)]^2 + [g'(v)]^2$ dir. Ayrıca türevler uygun değişkenlere göre alınmıştır.

Burada Gauss eğriliğinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $f''(u) = 0$ veya $g''(v) = 0$ olmasıdır. Bu durumda $f(u) = au + b$ veya $g(v) = cv + d$, $a, b, c, d \in R$ olmalıdır. Bu yüzden elde edilen 2.Tip öteleme yüzeyi izotropik olmayan doğrultmana sahip silindirik bir yüzey olur.

Eğer elde edilen bu yüzey için hesaplanan Gauss eğriliği sabit ise

$$K = \frac{1}{W^4} f'(u)f''(u)g'(v)g''(v)$$

eşitliği göz önüne alınır ve u ve v ye göre uygun türevler kullanılırsa

$$\frac{\partial K}{\partial u} = h(v) \frac{W^2 e'(u) + 4e^2(u)}{W^6} = 0$$

ve

$$\frac{\partial K}{\partial v} = e(u) \frac{W^2 h'(v) + 4h^2(v)}{W^6} = 0$$

elde edilir, burada $e(u) = f'(u)f''(u)$ ve $h(v) = g'(v)g''(v)$ dir. Bu eşitliklerin birlikte sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $e(u) = 0$ veya $h(v) = 0$ olmasıdır. Bu yüzden hem $f(u) = au + b$, $a, b \in R$ hem de $g(v) = cv + d$, $c, d \in R$ olur. Her iki durumda da öteleme eğrileri izotropik olmayan doğrulardır.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.5: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de, eğer S bir sabit Gauss eğrilikli 2.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S izotropik olmayan doğrultmana sahip (bu yüzden $K = 0$) bir silindirik yüzeye eşdeğerdir [21].

Şimdi de 2.Tip öteleme yüzeyinin

$$H = \frac{1}{2W^3} [f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)]$$

ortalama eğriliğini göz önüne alalım. Burada $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v) = 0$$

olmasıdır, yani

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{g''(v)}{g'(v)}$$

dir. Bu ise

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{g''(v)}{g'(v)} = c$$

olacak şekilde bir $c \in R$ sabitinin mevcut olduğunu gösterir.

Eğer $c = 0$ ise o zaman

$$f''(u) = 0, g''(v) = 0$$

olur ve bu izotropik düzlemi üretir.

Eğer $c \neq 0$ ise o zaman

$$f(u) = \frac{1}{c}e^{cu} + c_1, \quad g(v) = -\frac{1}{c}e^{-cv} + c_2, \quad c, c_1, c_2 \in R$$

olur ve 2.Tip öteleme yüzeyi

$$r(u, v) = (u + v, -\frac{1}{c}e^{-cv} + c_2, \frac{1}{c}e^{cu} + c_1)$$

şeklinde elde edilir. Bu elde ettiğimiz yüzeyi $\bar{u} = u + v, \bar{v} = -\frac{1}{c}e^{-cv} + c_2$ olarak yeniden parametrelendirirsek

$$r(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, -e^{c\bar{u}}\bar{v} + d), d \in R$$

yüzeyini elde ederiz. Bu yüzey sabit olmayan doğrultulu izotropik doğrultmanlara sahip bir regle yüzeydir. Bu yüzden Teorem 4.3.4. aşağıdaki teorem ile aynı anlamı taşımaktadır.

Teorem 4.3.6: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de, eğer S bir sıfır ortalama eğrilikli ($H = 0$) 2.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S , izotropik doğrultmana sahip silindirik olmayan bir regle yüzeye eşdeğerdir [21].

Son olarak 2.Tip öteleme yüzeyinin

$$H = \frac{1}{2W^3} [f''(u)g'(v) + f'(u)g''(v)]$$

ortalama eğriliğinin sıfırdan farklı bir sabit olması halini inceleyelim. Bu eşitlikten u ya göre ve ardından v ye göre türev alınırsa

$$f'''g' + f''g' = 6Wf'f''H,$$

$$(f'''g'' + f''g'')W = 6Hf'f''g'g''$$

elde edilir. Buradan $f''(u) \neq 0$ ve $g''(v) \neq 0$ olmak üzere

$$6H = \left(\frac{f'''}{f''} + \frac{g'''}{g''} \right) \sqrt{\frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(g')^2}}$$

bulunur. Bu son eşitlikten u ya göre türev alınırsa

$$\left(\frac{f'''}{f''} \right)' \sqrt{\frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(g')^2}} - \left(\frac{f'''}{f''} \right) \frac{f''}{(f')^3 \sqrt{\frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(g')^2}}} = 0$$

veya

$$\left(\frac{f'''}{f''} \right)' \sqrt{\left(\frac{1}{(f')^2} + \frac{1}{(g')^2} \right)^3} = 6H \frac{f''}{(f')^3}$$

elde edilir. Şimdi bu son eşitlikten v ya göre türev alınırsa ve $f''(u) \neq 0$ ve $g''(v) \neq 0$ kabul edilirse

$$\left(\frac{f'''}{f''} \right)' = 0$$

elde ederiz bu ise

$$H = 0$$

olması demektir ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $f''(u) = 0$ ve $g''(v) = 0$ olmalıdır. Eğer $f''(u) = 0$ alınırsa $f'(u) = a$, $a \in R$ olur. O zaman g fonksiyonu

$$ag''(v) = 2H(a^2 + (g'(v))^2)^{\frac{3}{2}}$$

adi diferensiyel denklemini sağlar. Burada $h(v) = g'(v)$ alınırsa

$$h(v) = \frac{2aHv + c}{\sqrt{1 - (2aHv + c)^2}}, \quad c \in R,$$

bulunur ve bu son eşitlikten integral alınırsa

$$g(v) = -\frac{1}{2aH} \sqrt{1 - (2aHv + c)^2} + c_1, \quad c, c_1 \in R$$

elde edilir.

Elde edilen bu 2.Tip öteleme yüzeyi $\beta(v) = (v, g(v), 0)$ eğrisi boyunca ötelenen izotropik olmayan doğrultmanlara sahip silindirik yüzeylerin ([26] deki C tipinden regle yüzeyler) özel bir sınıfı formundadır. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.7: 3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de, eğer S bir sabit ortalama eğrilikli ($H \neq 0$)

2.Tip öteleme yüzeyi ise o zaman S,

$$r(u, v) = \left(u + v, -\frac{1}{2aH} \sqrt{1 - (2aHv + c)^2} + d, au + b \right), \quad a, b, c, d \in R$$

şeklinde bir silindirik yüzeye eşdeğerdir, yani

$$x = \frac{1}{a}(z - b) + \frac{1}{2aH} \sqrt{1 - 4a^2H^2(y - d)^2}$$

dir [21].

4.4. Galilei Uzayında Değişkenlerine Ayrılabilir Yüzeyler

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de f ve g reel değerli iki fonksiyon olmak üzere

$z(x, y) = f(x)g(y)$ fonksiyonunu ele alırsak, bu fonksiyonun grafiğine karşılık gelen

$$r(x, y) = (x, y, f(x)g(y))$$

şeklinde bir factorable (değişkenlerine ayrılabilir) yüzeyi göz önüne alalım. Galilei uzayında Factorable yüzey kavramı [6] da detaylıca incelenmiştir. Bu çalışmadan bazı bilgileri aşağıdaki şekilde verebiliriz.

3-boyutlu Galilei uzayı G_3 de lokal olarak değişkenlerine ayrılabilir yüzey

$$r(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f_1(u_1) f_2(u_2)), \quad (4.4.1)$$

$$r(u_1, u_3) = (u_1, f_1(u_1) f_3(u_3), u_3), \quad (4.4.2)$$

ya da

$$r(u_2, u_3) = (f_2(u_2) f_3(u_3), u_2, u_3) \quad (4.4.3)$$

şeklinde verilebilir. Yukarıda verilen f_i fonksiyonları tüm $i \in \{1, 2, 3\}$ için ele alınan diferensiyellenebilir tek değişkenli fonksiyonlardır. (4.4.1), (4.4.2) ve (4.4.3) eşitlikleri ile ifade edilen yüzeyler, sırasıyla, birinci, ikinci ve üçüncü tip değişkenlerine ayrılabilir yüzey olarak isimlendirilir [6].

Teorem 4.4.1: G_3 Galilei uzayında sıfır Gauss eğrilikli bir M^2 değişkenlerine ayrılabilir yüzeyini göz önüne alalım. Burada bu M^2 yüzeyi eğer, birinci tip bir değişkenlerine ayrılabilir yüzey (ikinci tip / üçüncü tip) ise bu M^2 yüzeyi için aşağıdaki ifadelerden biri gerçekleşir.

(a) f_1 ve f_2 fonksiyonlarından en az biri $(f_1, f_3 / f_2, f_3)$ sabit bir fonksiyon olmalıdır,

(b) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ şeklindedir, ayrıca $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i \in \{1, 2\}$ ($i \in \{1, 3\} / i \in \{2, 3\}$) olmalıdır,

(c) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i) \xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ şeklindedir, ayrıca $\alpha_i \neq 0, 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_i \alpha_j = 1, \xi_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ dir ($i \in \{1, 3\} / i \in \{2, 3\}$) olmalıdır.

Bu teoremin terside doğrudur. Yani yukarıdaki üç şartı sağlayan sağlayan ve değişkenlerine ayrılabilir bir yüzey aynı zamanda sıfır Gauss eğriliğine sahiptir denilir [6].

Teorem 4.4.2: M^2, G_3 Galilei uzayı G_3 de bir değişkenlerine ayrılabilir yüzey olsun. Bu verilen M^2 yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart:

(a) birinci tip bir M^2 yüzeyi için lineer bir f_2 fonksiyondur,

(b) ikinci tip bir M^2 yüzeyi için lineer bir f_3 fonksiyondur.

(c) üçüncü tip bir M^2 yüzeyi için aşağıdaki üç ifadeden biri geçerlidir:

(c.i) f_2 ve f_3 fonksiyonlarından en az biri sabittir.

(c.ii) $f_i(u_i) = \gamma_i e^{\beta_i u_i}$ olmalıdır, ayrıca burada $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} - \{0\}, i \in \{2, 3\}$ dür.

(c.iii) $f_i(u_i) = [(1 - \alpha_i)\xi_i u_i + \lambda_i]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$ olmalıdır, burada $\alpha_i \neq 1, \alpha_i \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_2 + \alpha_3 = 2, \xi_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{2, 3\}$,

şartlarından birinin sağlamasıdır [6].

Teorem 4.4.3: 3- boyutlu Galilei uzayı G_3 de bir yüzey göz önüne alındığında, bu yüzey $\frac{K}{H} = \text{sabit} \neq 0$ eşitliğini sağlayan birinci ve ikinci tip bir değişkenlerine ayrılabilir yüzey olamaz [6].

5. BÖLÜM

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk olarak diferensiyel geometrinin önemli bir araştırma alanı olan eğriler ve yüzeyler konusu hakkında yapılan temel çalışmalar kısaca açıklanmıştır. Ardından Öklit uzayı ve Galilei uzayın temel kavramları ve tez çalışmasına ışık tutacak diğer kavramlar ele alınmış ve 2.Bölüm altında bu ifadeler verilmiştir. Daha sonra 3-boyutlu Galilei uzayında eğriler konusu detaylıca incelenerek, bazı araştırmacılar tarafından Frenet elemanları, helisler ve bertrand eğri kavramları ile ilgili elde edilen karakterizasyonlar açıklanmıştır. Çalışmanın bir diğer bölümünde ise 3-boyutlu Galilei uzayında yüzeyler konusu ele alınmış, öteleme yüzeyleri, dönel yüzeyler ve değişkenlerine ayrılabilir yüzeyler ilk olarak tanım olarak verilmiş ve ardından bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak, eğriliklerin sabit veya sıfır olması durumlarına göre araştırmacıların elde ettiği bazı sınıflandırmalar verilmiştir.

Eğri ve yüzey kavramı geometrinin doğuşundan bugüne kadar Öklit uzayında ve ardından Öklitsel olmayan bir çok uzayda diferansiyel ve integral hesabın metodları ele alınarak bir çok bilim insanı tarafından detaylıca incelenmiştir. Bu çalışmada Öklitsel olmayan bir uzay olan 3-boyutlu Galilei uzayında çalışılan eğriler ve yüzeyler incelenmiş ve ardından diğer Öklitsel olmayan uzaylarda bu çalışmalar yardımı ile ne gibi sınıflandırmalar yapılabileceği konusunda fikirler ortaya çıkmıştır.

3-boyutlu $P_3(R)$ projektif uzayında eliptik, hiperbolik, Öklitsel, Minkowski, basit ve duble izotropik, Galilei, pseudo-Galilei, quasi-eliptik, quasi-hiperbolik gibi Cayley-Klein uzayının çeşitli tipleri tanımlanmış olup, bu uzaylarda eğriler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi bir çok araştırmacı tarafından detaylıca verilmiştir. Ancak bu uzaylarda henüz eğriler ve yüzeylerle ilgili çalışılmaya muhtaç bir çok alanın olduğu aşikârdır. Ayrıca 4-boyutlu Galilei uzayı klasik Newton mekaniği ile ilişkili olup ilk koordinat zamanı temsil ederken diğer koordinatlar uzay koordinatlarını ifade etmektedirler. Bu nedenle Fizik alanında bu uzayın uygulamaları oldukça geniştir. Bu yapılan tartışmalar ışığında bir çok araştırmacı bu konularda çalışabilecek bir çok problem bulacaktır ve çözülmeyi bekleyen bir çok problemin olduğu da bir büyük gerçektir.

KAYNAKLAR

- [1] A.T. Ali, H. S. Abdel Aziz, H. Sorour, Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-Space, J. Egyptian Math. Soc. 21 (2013), 285–294.
- [2] Aydın, M.E., A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropic space, J. Geom. 107(3) (2016), 603-615.
- [3] Aydın, M. E., Öğrenmiş, A. O. and Ergüt, M., Classification of Factorable Surfaces in the Pseudo-Galilean Space, Glasnik Matematički, 50(70) 2015, 429-439.
- [4] Chen, B.-Y., 1973, Geometry of Submanifolds, M. Dekker, New York.
- [5] Carmo, MP Do., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- [6] Erdur, A., 3-Boyutlu Galilean Uzayında Factorable Yüzeyler, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2016.
- [7] Erjavec, Z., Divjak, B., Horvat, D., The general solutions of Frenet's system in the equiform geometry of the Galilean, pseudo-Galilean, simple isotropic and double isotropic space, Int. Math. Forum. 6(1) (2011), 837-856.
- [8] Divjak, B., Curves in Pseudo Galilean Geometry, Annales Univ. Sci. Budapest, 41 (1998), 117-128.
- [9] Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo Galilean Spaces, Acta Math. Hungar., 98(3) (2003), 203-215.
- [10] Kamenarović, I., Existence Theorems for Ruled Surfaces in The Galilean Spaces G_3 , Rad HAZU. Mat. 456, 10 (1991), 183-196.
- [11] Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.
- [12] Öğrenmiş, A.O., Ergüt M. and Bektaş, M., On the helices in the Galilean Space $\mathbb{G}^3$, Iranian Journal of Science & Technology A 31(A2) (2007), 177 181.
- [13] Öğrenmiş, A.O., Öztekin, H. and Ergüt M., Bertrand Curves in Galilean Space and Their Characterizations, Kragujevac J. Math. 32 (2009), 139-147.

- [14] Yu, Y. and Liu, H., The factorable minimal surfaces, *Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom.* 11 (2007), 33-39.
- [15] Meng, H. and Liu, H., Factorable surfaces in Minkowski space, *Bull. Korean Math. Soc.* 46(1) (2009), 155-169.
- [16] Yoon, D.W., Surfaces of revolution in the three dimensional pseudo-Galilean space, *Glas. Mat. Ser. III* 48(2) (2013), 415-428.
- [17] Dillen, F., Kühnel, W., Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, *Manuscripta Math.* 98 (1999), 307–320.
- [18] Divjak, B. and Sipus, Z. M., Some special surfaces in the pseudo Galilean- space, *Acta Math. Hungar.* 118 (2008), 209-226.
- [19] Divjak, B. and Sipus, Z. M., Minding isometries of ruled surfaces in pseudo-Galilan space, *J. Geom.* 77 (2003), 35-47.
- [20] Sipus, Z. M., Ruled Weingarten Surface in the Galilean Space, *Period. Math. Hungar.* 56 (2008), 213-225.
- [21] Sipus, Z. M. and Divjak, B., Translation surfaces in the Galilean Space, *Glas. Mat. Ser. III* 46(2) (2011), 455-469.
- [22] Yoon, D. W., Surfaces of revolution in the three dimensional pseudo-Galilean space, *Glas. Mat. Ser.III* 48(2) (2013), 415-428.
- [23] Röschel, O., Die Geometrie Des Galileischen Raumes, *Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz*, Ber.256,(1986), 1-20.
- [24] Sipus, Z. M. and Divjak, B., Surfaces of Constant Curvature in the Pseudo-Galilean Space, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* Volume 2012, Article ID 375264, 28 pages doi:10.1155/2012/375264.
- [25] O. Giering, *Vorlesungen uber hohere Geometrie*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany, 1982.
- [26] O. Röschel, Torusflächen des galileischen Raumes, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, vol. 23, no. 3-4 (1988), pp. 401–410.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Tunceli'nin Pertek ilçesinde doğmuşum. 1992 yılında Elazığ Cumhuriyet İlkokulundan, 1995 yılında Elazığ Ortaokulundan ve 1998 yılında Elazığ Mehmet Akif Ersoy Lisesinden mezun oldum. 2000 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde eğitim öğretime başlayarak 2004 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2005-2015 yılları arasında Elazığ Final Dergisi Dershanelerinde, 2015-2016 yılları arasında da Elazığ Final Temel Lisesinde öğretmen olarak görev yaptım. 2016 yılından itibaren Elazığ - Merkez - Necip Fazıl Kısakürek Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

Türker ÖĞRENMİŞ