



**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE λ – İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK**

Büşra Nur ER
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yavuz ALTIN
AĞUSTOS-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE λ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra Nur ER
(161121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Temmuz 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Ağustos 2018

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Muhammed ÇINAR (M.Ş.Ü)

Doç.Dr. Emrah YILMAZ (F.Ü)

AĞUSTOS-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, emeğini her zaman üzerimde hissettiğim, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Yavuz ALTIN' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan ve karşılaştığım problemlerde tartışmalarıyla desteğini benden esirgemeyen sayın Doç. Dr. Emrah Yılmaz ve Prof. Dr. Mikail Et hocalarıma ve yaşamım boyunca hep yanımda olan emeklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Büşra Nur ER

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
TABLolar	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	3
2.1. Zaman Skalasında Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2. Zaman Skalası Üzerinde Ölçü ve Lebesgue İntegrali	11
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK , CESÀRO TOPLANABİLME VE İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK	14
3.1. İstatistiksel Yakınsaklık ilgili Temel Tanım ve Teoremler	14
3.2. Ölçülebilir Fonksiyonların İstatistiksel Limiti ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik	19
4. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	21
4.1. Zaman Skalası Üzerinde Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık ve Cesàro Toplanabilme	21
5. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE α . DERECEDE λ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK	27
5.1. Zaman Skalası Üzerinde α . Dereceden λ – İstatistiksel Yakınsaklık	27
5.2. Zaman Skalası Üzerinde α . Dereceden λ – İstatistiksel Sınırlılık ...	32
6. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	36
7. KAYNAKLAR	37

ÖZET

İstatistiksel yakınsaklık, toplanabilme teorisi ve fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda, istatistiksel yakınsaklık çeşitli şekillerde tanımlanmış ve birçok matematikçi tarafından keyfi zaman skalası üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışmada keyfi zaman skalası üzerinde λ - istatistiksel yakınsaklık verilecek ve λp - Cesàro toplanabilme ile α . dereceden λ -istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ifade edilecektir. Bu kısımlar verilmeden önce ise, zaman skalası ile ilgili kavram ve teoremler ifade edilecek ve istatistiksel yakınsaklık klasik anlamda anlatılacaktır. Son olarak keyfi zaman skalası üzerinde α . dereceden λ -istatistiksel sınırlılık kavramı verilecek ve kapsama bağıntıları ispatlanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme.

SUMMARY

λ – Statistical Convergence on Time Scales

Statistical convergence has an important place in summability theory and functional analysis. In recent years, statistical convergence has been defined in various forms and has been studied by many mathematicians on an arbitrary time scale. In this study, λ – statistical convergence will be given on an arbitrary time scale and the relation between λp – Cesàro summability and α . grade λ –statistical convergence will be expressed on that time scale. Before these parts are given, concepts and theorems related to the time scale will be expressed and the statistical convergence will be explained in the classical sense. Finally, α . grade λ – statistical boundedness will be given and inclusion relations will be proved.

Keywords: Time scales, Statistical convergence, Cesàro summability.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Keyfi zaman skalası
σ	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
μ	: Graininess fonksiyonu
Δf	: İleri fark operatörü
f^Δ	: Hilger türevi
$f^{\Delta\Delta}$	: İkinci mertebeden Hilger türevi
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$\ell_\infty(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde sınırlı diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_0	: İstatistiksel yakınsak sıfır dizileri uzayı
$\delta(S)$	: S kümesinin doğal yoğunluğu
$h.h.k$	: Hemen hemen her k için
$st_{\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\Delta - h.h.t$	: Δ –hemen hemen her t için
st_λ	: λ – istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$st_{\mathbb{T}}^\lambda$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde λ –istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda,\alpha)}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde α .dereceden λ –istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda,\alpha)}(b)$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde α .dereceden λ –istatistiksel sınırlı diziler uzayı
$[W, \lambda, p, \alpha]_{\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde α . dereceden kuvvetli λp – Cesàro toplanabilir diziler uzayı

TABLÖLAR

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1 : Zaman skolasında noktaların sınıflandırılması	4
Tablo 1.2 : Zaman skolasında noktaların şematik olarak gösterimi	5



1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık, ilk olarak Zygmund [1] tarafından "hemen hemen yakınsaklık" terimi adı altında 1935 deki "Trigonometrik Seriler" kitabının ilk baskısında Fourier serilerinin istatistiksel yakınsaklığıyla ilişkili teorem ispatlarında kullanıldı.

Bu kavram Steinhaus [2] tarafından Polonya'da Wrocław Üniversitesinde düzenlenen bir konferansta tanıtılmıştır. Daha sonra Fast [3] reel ve kompleks terimli diziler için istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiştir. Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklık kavramının bazı temel özellikleri ile regüler toplanabilme kavramını inceledi. Daha sonra bu kavram Šalát [5], Fridy [6], Connor [7] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Fridy ve Orhan [8] tarafından istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmıştır. Bhardwaj ve Gupta [9], Et, Mohiuddine ve Şengül [10] tarafından bu kavram yakınsaklık modellerine uygulanmıştır. İlk olarak Gadjiev ve Orhan [11] tarafından istatistiksel yakınsaklık için derece kavramı verilmiştir. Daha sonra Çolak [12] , $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirip reel sayı dizileri için α . dereceden doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve $p > 0$ için α . dereceden kuvvetli p -Cesàro yakınsaklık tanımlarını vermiş ve bazı kapsama teoremlerini incelemiştir. 1965 yılında Leindler [13] tarafından de la Vallée-Poussin toplanabilme metodu verildi. Bu toplanabilme metodundan yararlanarak 2000 yılında Mursaleen [14] tarafından λ - istatistiksel yakınsaklık kavramı verildi. λ - istatistiksel yakınsaklığın derecelendirilmiş metotodu ise Çolak ve Bektaş [15] tarafında verilmiştir. Daha sonra Çolak [16] Λ -sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için bazı kapsama bağıntılarını vermiştir.

İstatistiksel yakınsaklık konusunda ölçü kavramı 1990 yılında ilk defa Connor [17] tarafından verildi. Daha sonra Móricz [18] tarafından ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik tanımları verilmiştir. Ayrıca ölçülebilir bir fonksiyonun kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliği ile ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkilerde incelemiştir. Son zamanlarda Nuray [19] tarafından reel değerli ölçülebilir fonksiyonların λ - istatistiksel yakınsaklığı incelendi. Srivastava ve Et [20] tarafından reel değerli ölçülebilir fonksiyonların lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı çalışılmıştır.

Zaman skalası 1987-1988 yıllarında alman matematikçi Stephan Hilger [21] tarafın-

dan ortaya konmuştur. Stephan Hilger'in amacı sürekli ve ayrık analizi aynı çatı altında toplayan bir teori oluşturmaktır. Bunun içinde her ikisini kapsayan bir küme alınmış ve bu kümeye daha sonraki dönemlerde zaman skalası adı verilmiştir. Zaman skalası pek çok yazar tarafından çalışılmıştır ([22],[23],[24]). Zaman skalası reel sayılar kümesinin keyfi, kapalı ve boş olmayan bir alt kümesidir.

Son zamanlarda toplanabilme teorisinde zaman skalası üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yer tutmaktadır.

Batit [25] zaman skalası üzerinde $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere $\ell_\infty(\mathbb{T})$, $c(\mathbb{T})$ ve $c_0(\mathbb{T})$ fonksiyon uzaylarını tanımladı.

Zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık tanımı ilk defa 2012 yılında Seyyit Seyyidoglu ve Özkan Tan [26] tarafından verilmiştir. Turan ve Duman [27], zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca Yılmaz, Altın ve Koyunbakan [28] zaman skalası üzerinde λ -istatistiksel yakınsaklık ve λ -toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiştir. Daha sonra Altın [29] Λ -sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için zaman skalası üzerinde bazı kapsama bağıntılarını incelemiştir. Seyyidoglu ve Tan [30] tarafından zaman skalası üzerinde istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmıştır.

Bu çalışmada zaman skalası üzerinde ölçülebilir fonksiyonların α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel kavramları ve bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkileri ortaya konulmuştur. Ayrıca zaman skalası üzerinde ölçülebilir fonksiyonların α . dereceden istatistiksel sınırlı ve α . dereceden λ -istatistiksel sınırlı kavramları tanımlanıp bu iki kavram arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak zaman skalası tanımı verildi. Daha sonra ise zaman skalasında delta türev, ölçü ve Lebesgue integrali kavramları ifade edildi. Buna ilaveten istatistiksel yakınsaklık kavramı hakkında kısa bilgiler ve örnekler verildi. Son olarak ölçülebilir fonksiyonların zaman skalasında istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenip, bazı kapsama teoremleri verildi.

2.1. Zaman Skalasında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. Reel sayılar kümesinin keyfi, kapalı ve boş olmayan bir alt kümesine zaman skalası denir. Böylece

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0, 1]$$

ile gösterilen, reel sayılar kümesi, tam sayılar kümesi, doğal sayılar kümesi ve $[0, 1]$ kapalı aralığı birer zaman skalasıdır. Fakat

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0, 1)$$

ile gösterilen rasyonel sayılar kümesi, irrasyonel sayılar kümesi, karmaşık sayılar kümesi ve $(0, 1)$ açık aralığı birer zaman skalası değildir. Zaman skalası genellikle $\mathbb{T}$ sembolü ile ifade edilir [21].

Tanım 2.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için zaman skalası üzerinde tanımlanan $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tanım 2.1.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için zaman skalası üzerinde tanımlanan $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $\emptyset$ boş küme olmak üzere;

$$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$$

$$\inf \mathbb{T} = \sup \emptyset$$

olarak kabul edilir [21].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ olarak tanımlanan,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

fonksiyonuna graininess fonksiyonu denir [21].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü ve $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü olsun.

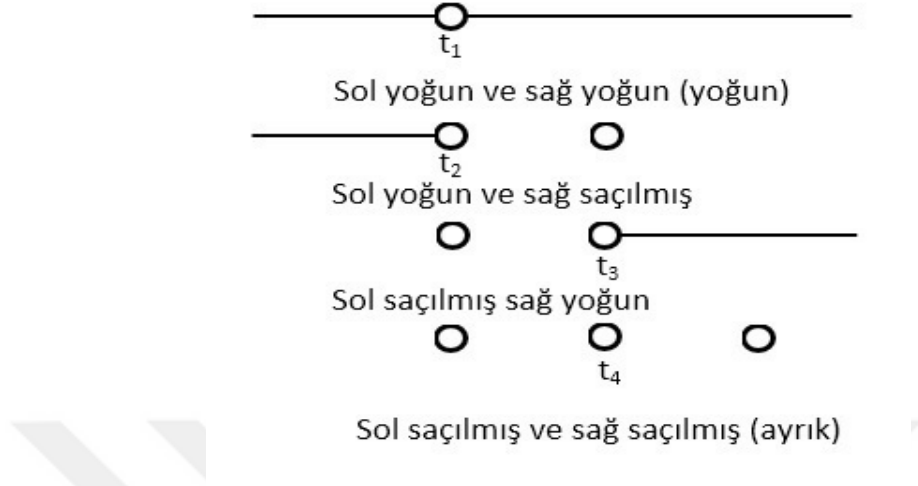
Eğer $\sigma(t) > t$ ise, $t \in \mathbb{T}$ noktasına sağdan saçılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına soldan saçılmış nokta denir. $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise, $t \in \mathbb{T}$ noktasına ayırık nokta denir. Ayrıca, $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına sağda yoğun nokta, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına solda yoğun nokta denir. $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise, $t \in \mathbb{T}$ noktasına yoğun nokta denir [21].

Zaman skalasında noktaların sınıflandırılması Tablo 1.1 de gösterilmiştir. Noktaların şematik gösterimi Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.1 Zaman skalasında noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t ayırık nokta	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun nokta	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Tablo 1.2 Zaman skalasında noktaların şematik olarak gösterimi



Örnek 2.1.6. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için nokta sınıflandırılması ve graininess fonksiyonları aşağıdaki şekildedir.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = t$$

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = t$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

olup $\rho(t) = t = \sigma(t)$ olduğundan her nokta yoğun noktadır.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t + 1, t + 2, \dots\} = t + 1$$

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t - 1, t - 2, \dots\} = t - 1$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

olup $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan her nokta ayrık noktadır.

Tanım 2.1.7. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilmiş olan $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} - [(\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup(\mathbb{T}) < \infty \\ \mathbb{T}, & \sup(\mathbb{T}) = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [21].

Örnek 2.1.8. $\mathbb{T} = [0, 1] \cup \{3, 5\} \cup [6, 7] \cup \{8\}$ şeklinde verilen zaman skalası için $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi, $\sup \mathbb{T} = 8 < \infty$ olup, Tanım 2.1.7 gereğince $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{8\} = [0, 1] \cup \{3, 5\} \cup [6, 7]$ şeklinde olur.

Tanım 2.1.9. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

$$[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

$$(a, b) = \{t \in \mathbb{T} : a < t < b\}$$

$$[a, b) = \{t \in \mathbb{T} : a < t \leq b\}$$

$$(a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$$

kümelerine sırası ile $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde kapalı, açık ve yarı açık aralıklar denir [21].

Tanım 2.1.10. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasının öyle bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu vardır ki, $\forall s \in U$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur. Bu eşitsizlik $|\sigma(t) - s|$ ile bölünürse;

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f^\Delta(t) \right| \leq \varepsilon$$

veya

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = f^\Delta(t) \quad (2.1.1)$$

elde edilir. Burada $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasındaki Hilger(delta) türevi denir. f^Δ fonksiyonu tüm $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktaları için mevcut ise, f fonksiyonuna $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Hilger(delta) türeve sahiptir denir. Dikkat edilirse (2.1.1) eşitliğinde;

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında $\sigma(t) = t$ olmak üzere

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

elde edilir. Bu adi anlamda türevdir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alındığında $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1-s} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

elde edilir. Bu ise ileri fark operatörüdür [21].

Örnek 2.1.11. $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(t) = t^2$ olsun. Buna göre f^Δ Hilger türevi aşağıdaki şekilde bulunur. $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \sigma(t) + s = \sigma(t) + t$$

olur. Buradan yola çıkılarak verilen fonksiyon için Hilger türevi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için verebiliriz.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t$ olduğundan,

$$f^\Delta(t) = f'(t) = \sigma(t) + t \Rightarrow f^\Delta(t) = t + t = 2t$$

elde edilir.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan,

$$f^\Delta(t) = \Delta f(t) = \sigma(t) + t \Rightarrow f^\Delta(t) = t + 1 + t = 2t + 1$$

elde edilir [21].

Teorem 2.1.12. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Hilger türevlenebilir olsun. Buna göre

i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

ii) Herhangi bir a sabiti için, $af : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilirdir ve

$$(af)^\Delta(t) = af^\Delta(t)$$

dir.

iii) $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları t noktasında Hilger türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$$

dir.

iv) $f(t) f(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilirdir

ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta}{f(t) f(\sigma(t))}$$

dir.

v) $g(t) g(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilirdir

ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t) g(t) - g^\Delta(t) f(t)}{g(t) g(\sigma(t))}$$

dir [21].

Örnek 2.1.13. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, x, y ve z fonksiyonları bir $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında türevlenebilir olmak üzere

$$(xyz)^\Delta = x^\Delta yz + x^\sigma y^\Delta z + x^\sigma y^\sigma z^\Delta$$

şeklindedir. Gerçekten

Eğer $yz = f$ olarak alınırsa

$$(xyz)^\Delta = (xf)^\Delta = x^\Delta f + x^\sigma f^\Delta = x^\Delta (yz) + x^\sigma (yz)^\Delta \quad (2.1.2)$$

elde edilir. Burada $(yz)^\Delta$ nin Hilger türevi hesaplanıp (2.1.2) de yerine yazılırsa

$$(xyz)^\Delta = x^\Delta yz + x^\sigma \{y^\Delta z + y^\sigma z^\Delta\} = x^\Delta yz + x^\sigma y^\Delta z + x^\sigma y^\sigma z^\Delta$$

elde edilir.

Teorem 2.1.14. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun.

i) f fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilir ise bu noktada sürekli.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılmış bir nokta ise, f fonksiyonu bu noktada Hilger türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

eşitliği sağlar.

iii) f fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilir ve t noktası sağ yoğun bir nokta ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklindedir.

iv) f fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

şeklindedir [21].

İspat. *i)* f fonksiyonu t noktasında Hilger türevli ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. Hilger türevi tanımından

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| < \varepsilon^* |\sigma(t) - s|, \quad \varepsilon^* \in (0, 1), \quad \forall s \in U$$

olacak şekilde t noktasının bir $U = (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ komşuluğu vardır. Böylece $\forall s \in U$ için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= \left| \begin{aligned} &\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\} \\ &- \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)\} + (t - s)f^\Delta(t) \end{aligned} \right| \\ &< \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t - s| |f^\Delta(t)| \\ &< \varepsilon^* [\mu(t) + |t - s| + \mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\ &< \varepsilon^* [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)] \end{aligned}$$

olup $\varepsilon^* [1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)] = \varepsilon$ olarak alınırsa, $\varepsilon^* \in (0, 1)$ ve

$$f(t) - f(s) < \varepsilon$$

olur. Bu f fonksiyonunun t noktasında sürekli olduğunu gösterir.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılmış ($\sigma(t) > t$) bir nokta olsun. Süreklilik tanımından

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$

olur. Limit tanımından $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

olur. t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, $\forall s \in U$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur. Böylece f fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Hilger türevlidir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

eşitliği sağlanır.

iii) f fonksiyonu t noktasında Hilger türevlenebilir ve t noktası sağ yoğun bir nokta ($\sigma(t) = t$) olsun. f fonksiyonu t noktasında Hilger türevli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, $\forall s \in U$ için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

olup $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$|[f(t) - f(s)] - f^\Delta(t)[t - s]| \leq \varepsilon |t - s|, s \in U$$

ve

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^\Delta(t) \right| \leq \varepsilon$$

olur. Böylece $\forall s \in U, s \neq t$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

iv) $\sigma(t) = t$ ise $\mu(t) = 0$ ve

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

eşitliği sağlanır. $\sigma(t) > t$, yani t noktası sağ saçılmış bir nokta ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

olup ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.15. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^\kappa)^\kappa$ kümesi üzerinde, f^Δ fonksiyonunun Hilger türevi olan

$$f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna, f fonksiyonunun ikinci mertebeden Hilger türevi denir. Benzer olarak f fonksiyonunun n . mertebeden Hilger türevi

$$f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklindedir [21].

Örnek 2.1.16. $f(t) = t^2$ fonksiyonunun ikinci mertebeden Hilger türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır. İlk olarak f fonksiyonunun birinci mertebeden Hilger türevini bulalım:

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \sigma(t) + s = \sigma(t) + t$$

olur. Buradan f nin ikinci mertebeden Hilger türevi:

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(\sigma(t)) + \sigma(t)) - (\sigma(s) + s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(\sigma(t)) + \sigma(t) - \sigma(s) - s}{\sigma(t) - s} \\ &= \frac{\sigma(\sigma(t)) + \sigma(t) - \sigma(t) - t}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{\sigma(\sigma(t)) - t}{\sigma(t) - t} \end{aligned}$$

bulunur.

2.2. Zaman Skalası Üzerinde Ölçü ve Lebesgue İntegrali

Bu kısımda zaman skalası üzerinde ölçülebilir fonksiyon ve Lebesgue integrali incelenecektir.

$\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere σ ileri sıçrama operatörü ve ρ geri sıçrama operatörü olsun.

$$[a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$$

şeklinde tanımlanan tüm aralıkların ailesini $\mathfrak{S}_1$ ile gösterelim. Burada $[a, a)_{\mathbb{T}}$ aralığı boş küme olarak alınacaktır.

$$m_1 : \mathfrak{S}_1 \rightarrow [0, \infty]$$

$$[a, b)_{\mathbb{T}} \rightarrow m_1([a, b)_{\mathbb{T}}) = b - a$$

şeklinde tanımlanan m_1 küme fonksiyonu $\mathfrak{S}_1$ ailesi üzerinde sayılabilir toplamsal bir ölçüdür. m_1 küme fonksiyonun Caratheodary genişlemesi μ_Δ ile gösterilir ve $\mathbb{T}$ üzerinde Lebesgue $-\Delta$ ölçüsü olarak adlandırılır [23].

Teorem 2.2.1. $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ olsun. Bu durumda $\{t_0\}$ kümesi $\Delta-$ ölçülebilirdir ve

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0 = \mu(t_0)$$

dır [23].

Lebesgue teorisinde tek nokta kümelerinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Fakat zaman skalası üzerinde $\mu_\Delta(\{t_0\}) = \mu(t_0)$ olup, $\mu(t_0)$ sayısı her zaman sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

Teorem 2.2.2. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olsun.

- i) $\mu_\Delta([a, b]_{\mathbb{T}}) = b - a$
- ii) $\mu_\Delta((a, b)_{\mathbb{T}}) = b - \sigma(a)$ dır.
- Eğer $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ ve $a \leq b$ ise
- iii) $\mu_\Delta((a, b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - \sigma(a)$
- iv) $\mu_\Delta([a, b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - a$ şeklindedir [23].

Tanım 2.2.3. $f : \mathbb{T} \rightarrow [-\infty, \infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\}$$

kümesi $\Delta-$ ölçülebilir ise f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde $\Delta-$ ölçülebilirdir denir [23].

Tanım 2.2.4. $S : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j = 1, 2, \dots, n$ için α_j ler birbirinden farklı olmak üzere $A_j = \{t \in \mathbb{T} : S(t) = \alpha_j\}$ kümeleri tanımlansın. $S = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ olacak şekilde yazılabiliyorsa S fonksiyonuna basit fonksiyon denir. Burada χ_{A_j} fonksiyonu A_j kümelerinin karakteristik fonksiyonudur, yani

$$\chi_{A_j}(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_j \\ 0, & t \notin A_j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [24].

Tanım 2.2.5. $E, \mathbb{T}$ nin $\Delta-$ ölçülebilir bir alt kümesi ve $S : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Yani S fonksiyonu Tanım 2.2.4 de ifade edilen A_j kümeleri ve α_j sayıları ile

aşağıdaki biçimde yazılsın

$$S = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$$

Bu durumda S fonksiyonunun E üzerinden Lebesgue Δ -integrali

$$\int_E S(t) \Delta t = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_{\Delta}(A_j \cap E)$$

biçiminde tanımlanır [24].

Sonuç 2.2.6. $f(s) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ olacak şekilde f sabit fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin Δ -ölçülebilir bir Ω kümesi üzerinden integrali

$$\int_{\Omega} f(s) \Delta s = \int_{\Omega} \alpha \Delta s = \alpha \mu_{\Delta}(\Omega)$$

dir.

Tanım 2.2.7. $E, \mathbb{T}$ nin Δ -ölçülebilir bir alt kümesi ve $f : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty]$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ -integrali

$$\int_E f(s) \Delta s = \sup \left\{ \int_E S(s) \Delta s : 0 \leq S \leq f \text{ ve } S \text{ basit fonksiyon} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [24].

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK , CESÀRO TOPLANABİLME VE İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

3.1. İstatistiksel Yakınsaklık ilgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda doğal yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $S \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir S kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesi S kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(S) = 0$ ise S kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [6].

Tanım 3.1.2. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme hariç bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” şeklinde gösterilir [6].

Doğal yoğunluk kavramından yararlanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.1.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - \gamma| < \varepsilon$ olacak şekilde bir γ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = \gamma$ şeklinde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı st ile gösterilir. Özel olarak $\gamma = 0$ olarak alınırsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel yakınsak sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi st_0 ile gösterilir [6].

Teorem 3.1.4. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = \gamma$ ise $st - \lim x_k = \gamma$ dir[33].

İspat. Kabul edelim ki $\lim x_k = \gamma$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için ve $k \geq N$ için $|x_k - \gamma| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $N \geq 1$ sayısı vardır. $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ olduğundan $st - \lim x = \gamma$ olur. Burada $A(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}$ dir.

Fakat bu teoremin tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $st - \lim x = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak $x = (x_k)$ yakınsak değildir. Bununla birlikte yukarıda tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu halde sınırlı da değildir.

Diğer taraftan, $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir. Yani ℓ_∞ ve st uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.

Teorem 3.1.5. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir. Yani $st - \lim x = \gamma_1$ ve $st - \lim x = \gamma_2$ ise $\gamma_1 = \gamma_2$ dir [33].

Teorem 3.1.6. $st - \lim x = \gamma_1$, $st - \lim y = \gamma_2$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $st - \lim cx_k = c\gamma_1$
- ii) $st - \lim (x_k + y_k) = \gamma_1 + \gamma_2$ dir [33].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin uzayının bir lineer uzay olduğu anlaşılr.

Tanım 3.1.7. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [6].

Teorem 3.1.8. Bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart istatistiksel yakınsak olmasıdır [33].

Tanım 3.1.9. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \gamma$$

olacak şekilde bir γ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına Cesàro yakınsaktır denir. Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \gamma) = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\},$$

ile gösterilir [31].

Tanım 3.1.10. $x = (x_k)$ dizisi γ ye yakınsak ise (x_k) dizisi γ - Cesàro yakınsaktır [31].

Tanım 3.1.11. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0,$$

olacak şekilde bir γ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi

$$[C, 1, p] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\},$$

ile gösterilir [32].

$\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan, ∞ a giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$$

şartlarına sahip bir dizisi olsun. Bu şekilde tanımlanan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.12. $S \subset \mathbb{N}$ olsun ve S 'nin λ -yoğunluğu

$$\delta_\lambda(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in S\}|$$

olarak tanımlansın. $\delta_\lambda(S)$, λ -yoğunluğu $\lambda_n = n$ durumunda $\delta(S)$ doğal yoğunluğuna indirgenir [14].

Tanım 3.1.13. Her $\varepsilon > 0$ için, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi γ 'ye λ -istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm λ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi st_λ ile gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda st_λ nın st 'e denk olduğu açıktır [14].

Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır [13].

Bir $x = (x_k)$ dizisine, $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow \gamma$ ise γ sayısına (V, λ) -toplanabilirdir denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ ise (V, λ) -toplanabilirlik $(C, 1)$ -toplanabilirliğe indirgenir. Sırasıyla γ 'ye kuvvetli Cesàro toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) -toplanabilir, yani $x_k \rightarrow \gamma [C, 1]$ ve $x_k \rightarrow \gamma [V, \lambda]$ olan $x = (x_k)$ dizilerinin kümesi için

$$\begin{aligned} [C, 1] &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma| = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\}, \\ [V, \lambda] &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in T_n} |x_k - \gamma| = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\} \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 3.1.14. $S \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir S kümesinin α .dereceden yoğunluğu

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesi S kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [12].

Eğer $\delta(S) = 0$ ise S kümesine sıfır α -yoğunluklu küme denir.

Tanım 3.1.15. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir γ sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $st^\alpha - \lim x = \gamma$ şeklinde gösterilir [12].

$x = (x_k)$, α ya göre sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa, o zaman bu dizi α ya göre hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{N}$ nin sonlu her alt kümesinin α -yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_a(E^c) = 1 - \delta_a(E)$ eşitliği $0 < \alpha < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\alpha = 1$ için sağlanır [12].

Tanım 3.1.16. $\alpha > 0$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0$$

olacak şekilde bir γ kompleks sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi α . dereceden p - kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir. α . dereceden p - kuvvetli Cesàro yakınsak dizilerin kümesi $[C, 1, p, \alpha]$ ile gösterilir. Yani;

$$[C, 1, p, \alpha] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\}$$

dir [12].

Tanım 3.1.17. $\lambda \in \Lambda$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve λ_n^α , λ_n nin α . kuvveti yani $\lambda_n = (\lambda_n^\alpha) = (\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \lambda_3^\alpha, \dots, \lambda_n^\alpha, \dots)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi γ ye α . dereceden λ - istatistiksel yakınsaktır veya γ ye st_λ^α yakınsaktır denir [15]. Bu durumda $st_\lambda^\alpha - \lim x = \gamma$ veya $x_k \rightarrow \gamma(st_\lambda^\alpha)$ yazılır. $\lambda_n = n$ özel halinde st_λ^α ile st^α uzayları birbirine denk olur.

Teorem 3.1.18. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

- i) $st_\lambda^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $st_\lambda^\alpha - \lim cx_k = cx_0$,
- ii) $st_\lambda^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $st_\lambda^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise $st_\lambda^\alpha - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır [15].

Tanım 3.1.19. $\alpha > 0$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - \gamma|^p = 0$$

olacak şekilde bir γ kompleks sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi α . dereceden p - kuvvetli (V, λ) yakınsaktır denir. α . dereceden p - kuvvetli (V, λ) yakınsak dizilerin kümesini $[V, \lambda, p, \alpha]$ ile gösterilir. Yani;

$$[V, \lambda, p, \alpha] = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{k \in I_n} |x_k - \gamma|^p = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\}$$

dir [15].

Tanım 3.1.20. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq M\}| = 0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sınırlıdır denir. İstatistiksel sınırlı dizilerinin kümesi $st(b)$ ile gösterilir [8].

Bhardwaj ve Gupta [9] tarafından istatistiksel sınırlılık kavramından yararlanılarak aşağıdaki tanım genelleştirilmiştir.

Tanım 3.1.21. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}| = 0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α . dereceden λ -istatistiksel sınırlıdır denir. Tüm α . dereceden λ -istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $st_\lambda^\alpha(b)$ ile gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda $st_\lambda^\alpha(b)$ nın $st^\alpha(b)$ 'e denk olduğu açıktır [9].

3.2. Ölçülebilir Fonksiyonların İstatistiksel Limiti ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda Móricz [18] tarafından ortaya konulan ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliği tanımları ifade edilmiştir. Ayrıca ölçülebilir bir fonksiyonun kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliği ile ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkiler incelemiştir.

Tanım 3.2.1. $a \geq 0$ olmak üzere, bir (a, ∞) aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir olan reel veya kompleks değerli fonksiyonları göz önüne alalım.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b - a} |\{a < x < b : |f(x) - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{C}$ sayısı mevcutsa f fonksiyonu γ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $|\{.\}|$ ile $\{.\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsü gösterilmiştir. Bu durumda

$$st - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \gamma$$

yazılır [18].

Teorem 3.2.2. Bir f fonksiyonu istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir.

Yani $st - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \gamma_1$ ve $st - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \gamma_2$ ise $\gamma_1 = \gamma_2$ dir [18].

Teorem 3.2.3. $st - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \gamma_1, st - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \gamma_2$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $st - \lim_{x \rightarrow \infty} cf(x) = c\gamma_1,$
- ii) $st - \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \gamma_1 + \gamma_2$ dir [18].

Tanım 3.2.4. $a \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonu bir (a, ∞) aralığı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - \gamma|^p dx = 0.$$

olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{C}$ sayısı varsa f fonksiyonu kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir [18].

Teorem 3.2.5. i) $0 < p < \infty$ için f fonksiyonu $\gamma \in \mathbb{C}$ sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise f nin istatistiksel limiti mevcuttur ve aynı γ sayısına eşittir.

ii) f fonksiyonunun istatistiksel limiti mevcut ve f sınırlıysa f fonksiyonu γ ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir [18].

4. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. Zaman Skalası Üzerinde Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık ve Cesáro Toplanabilme

Bu kısımda Seyyidoglu ve Tan [26] tarafından verilen zaman skalası üzerinde, doğal yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir. Ayrıca Turan ve Duman [27] tarafından zaman skalası üzerinde tanımlanan kuvvetli p -Cesáro toplanabilirlik ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Teorem 4.1.1. A kümesi, $\mathbb{T}$ nin bir Δ -ölçülebilir alt kümesi ve $a = \min \mathbb{T}$ olsun. $\mathbb{T}$ deki A kümesinin Δ -yoğunluğu

$$\delta_{\Delta}(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(A(t))}{\sigma(t) - a}$$

ile tanımlanır. Burada

$$A(t) = \{s \in A : s \leq t\}$$

ve $a \in \mathbb{T}$ dir [26]. $A(t) = A \cap [a, t]$ özdeşliğinden A nın ölçülebilirliği $A(t)$ nin ölçülebilirliğini gerektirir.

Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, sıfır Δ -yoğunluğa sahip bir küme hariç tüm t ler için P özelliğini sağlayan bir $f(t)$ fonksiyonu ise bu taktirde Δ - hemen hemen her t için $f(t)$, P yi sağlar denir ve bu durumda ' $\Delta - h.h.t$ ' yazılır.

$$M_d : = \{A \in \mathbb{T} : \Delta\text{-yoğunluğu } \mathbb{T} \text{ de mevcuttur}\}$$

$$M_d^0 : = \{A \in \mathbb{T} : \delta_{\Delta}(A) = 0\}$$

şeklinde gösterilir [26].

Lemma 4.1.2. *i) $A, B \in M_d$ ve $A \subset B$ ise $\delta_{\Delta}(A) \subset \delta_{\Delta}(B)$ dir.*

ii) $A \in M_d$ ise $0 \leq \delta_{\Delta}(A) \leq 1$ dir.

iii) $\mathbb{T} \in M_d$ ve $\delta_{\Delta}(\mathbb{T}) = 1$ dir.

iv) $A \in M_d$ ise $A^c \in M_d$ ve $\delta_{\Delta}(A) + \delta_{\Delta}(A^c) = 1$ dir.

v) $A, B \in M_d$ ve $A \subset B$ ise $B - A \in M_d$ ve $\delta_{\Delta}(B - A) = \delta_{\Delta}(B) - \delta_{\Delta}(A)$ dir.

vi) A bir ölçülebilir küme ve $A \subset B$ olmak üzere $B \in M_d^0$ ise $A \in M_d^0$ dir.

vii) $A_1, A_2, \dots, A_n, M_d^0$ den ise $\cup_{k=1}^n A_k, \cap_{k=1}^n A_k \in M_d^0$ dir.

viii) $\mathbb{T}$ nin her sınırlı ölçülebilir alt kümesi M_d^0 a aittir.

ix) $A \in M_d^0$ ve $B \in M_d$ ise $\delta_\Delta(A \cup B) = \delta_\Delta(B)$ dir [26].

Örnek 4.1.3. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ olsun. $\mathbb{N}$ deki $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ kümesinin Δ -yoğunluğu

$$\delta_\Delta(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_\Delta(A(t))}{\sigma(t) - a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lfloor t/2 \rfloor}{t} = \frac{1}{2}$$

ile verilir [26].

Tanım 4.1.4. ($st_{\mathbb{T}}$ - yakınsaklık) : Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$ ve $|f(t) - \xi| < \varepsilon$ eşitsizliği her $t \in K_\varepsilon$ için sağlanacak şekilde $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ mevcutsa $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu γ ye $st_{\mathbb{T}}$ -yakınsaktır denir. Bu durumda $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ yazılır [26].

Önerme 4.1.5. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma \Leftrightarrow$ her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - \gamma| \geq \varepsilon\}) = 0$ dır [26].

İspat. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda $\delta_\Delta(K_\varepsilon) = 1$ ve $|f(t) - \gamma| < \varepsilon$ eşitsizliği her $t \in K_\varepsilon$ için sağlanacak şekilde bir $K_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ alt kümesi mevcuttur. $K_\varepsilon \subset \{t \in \mathbb{T} : |f(t) - \gamma| < \varepsilon\}$, olduğundan $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - \gamma| < \varepsilon\}) = 1$ elde edilir. Böylece $\delta_\Delta(\{t \in \mathbb{T} : |f(t) - \gamma| \geq \varepsilon\}) = 0$ bulunur.

Teorem 4.1.6. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ mevcutsa, bu istatistiksel limit tektir [26].

İspat. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1$ ve $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_2$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için A ve B kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$A = \left\{ t : |f(t) - \gamma_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ ve } B = \left\{ t : |f(t) - \gamma_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Zaman skalası üzerinde istatistiksel limit tanımını göz önüne alarak,

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1 \iff \forall \varepsilon > 0, \delta_{\mathbb{T}}(A) = 0$$

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_2 \iff \forall \varepsilon > 0, \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0$$

yazılabilir. Şimdi $\gamma_1 = \gamma_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } 0 \leq |\gamma_1 - \gamma_2| < \varepsilon$$

olduğu gösterilmelidir. Aksini kabul edelim, $\exists \varepsilon > 0$ için $|\gamma_1 - \gamma_2| \geq \varepsilon$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |\gamma_1 - \gamma_2| \\ &= |\gamma_1 - f(t) + f(t) - \gamma_2| \\ &\leq |f(t) - \gamma_1| + |f(t) - \gamma_2| \end{aligned}$$

olmak zorundadır. Eğer $t \notin A \cup B$ ise, $|f(t) - \gamma_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|f(t) - \gamma_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. O halde $t \notin A \cup B$ için

$$\varepsilon \leq |\gamma_1 - f(t)| + |f(t) - \gamma_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur ve bu çelişki ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.7. $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1$ ve $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \gamma_2$ olsun. Bu durumda

- i) $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) + g(t)) = \gamma_1 + \gamma_2$
- ii) $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} (cf(t)) = c\gamma_1$ olur [26].

İspat. i) Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $A = \left\{ t : |f(t) - \gamma_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ ve $B = \left\{ t : |g(t) - \gamma_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1 &\iff \forall \varepsilon > 0, \delta_{\mathbb{T}}(A) = 0 \\ st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \gamma_2 &\iff \forall \varepsilon > 0, \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi $C = \{t : |f(t) + g(t) - \gamma_1 - \gamma_2| \geq \varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım. $\delta_{\mathbb{T}}(C) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$C \subset A \cup B$$

olduğunu iddia ediyoruz. Aksini kabul edelim, yani $C \not\subset A \cup B$ olsun. Bu durumda en az bir $t_0 \in C$ vardır öyle ki $t_0 \notin A \cup B$ gerçekleşir. Üstelik

$$t_0 \notin A \cup B \implies t_0 \notin A \text{ ve } t_0 \notin B$$

dir. $t_0 \notin A$ ise, $|f(t_0) - \gamma_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $t_0 \notin B$ ise, $|g(t_0) - \gamma_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece

$$|f(t_0) - \gamma_1| + |g(t_0) - \gamma_2| < \varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca

$$|f(t_0) + g(t_0) - \gamma_1 - \gamma_2| \leq |f(t_0) - \gamma_1| + |g(t_0) - \gamma_2| < \varepsilon \quad (4.1.1)$$

olup, (4.1.1) ten $t_0 \notin C$ elde edilir. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla $C \subset A \cup B$ olmalıdır. Lemma 4.1.2. yardımıyla

$$0 \leq \delta_{\mathbb{T}}(C) \leq \delta_{\mathbb{T}}(A \cup B) \leq \delta_{\mathbb{T}}(A) + \delta_{\mathbb{T}}(B) = 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ise

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) + g(t)) = \gamma_1 + \gamma_2$$

demektir.

ii) $c = 0$ ise durum açıktır. Şimdi $c \neq 0$ olmak üzere $E = \left\{ t : |f(t) - \gamma_1| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\}$ diyelim.

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1 \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ için, } \delta_{\mathbb{T}}(E) = 0 \quad (4.1.2)$$

olacağından her $t \in E$ için,

$$|f(t) - \gamma_1| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \implies |cf(t) - c\gamma_1| \geq \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise (4.1.2) uyarınca

$$st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} (cf(t)) = c\gamma_1$$

olmasına denktir.

Tanım 4.1.8. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $t_1 > t_0$ sayısı vardır öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - f(t_1)| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

ise, f fonksiyonuna “ $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy’dir” denir [26].

Teorem 4.1.9. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

i) f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel yakınsaktır.

ii) f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel Cauchy’dir.

iii) f fonksiyonu Δ -ölçülebilir g ve h fonksiyonlarının toplamı olarak yazılabilir, öyle ki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

ve

$$\delta_{\mathbb{T}}(\{t : h(t) \neq 0\}) = 0$$

olur. Ayrıca, f fonksiyonu sınırlı ise, g ve h fonksiyonları da sınırlıdır [26].

Lemma 4.1.10. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ ve f bir M sayısı ile üstten sınırlı ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} (f(s) - \gamma) \Delta s = 0$$

olur. Burada zaman skalası üzerindeki Lebesgue Δ -integrali kullanılmaktadır [27].

Tanım 4.1.11. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s = 0$$

olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{R}$ varsa, bu durumda f fonksiyonu “ $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde kuvvetli p -Cesáro toplanabilir” denir [27].

Lemma 4.1.12. (Zaman skalası üzerinde Markov eşitsizliği) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ için $\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\mu_{\Delta}(\Omega(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega(t)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

dir [27].

İspat. Her $s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \varepsilon \chi_{\Omega(t)}(s) \leq |f(s) - \gamma| \chi_{\Omega(t)}(s) \leq |f(s) - \gamma|$$

yazılabilir ve buradan

$$\varepsilon \int_{\Omega(t)} \Delta s \leq \int_{\Omega(t)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla,

$$\varepsilon \mu_{\Delta}(\Omega(t)) \leq \int_{\Omega(t)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.13. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

Bu durumda,

i) f fonksiyonu γ sayısına kuvvetli p -Cesáro toplanabilir ise, $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ dir.

ii) $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ ve f sınırlı bir fonksiyon ise, bu durumda f fonksiyonu γ sayısına kuvvetli p -Cesáro toplanabilirdir [27].

İspat. i) f fonksiyonu ξ sayısına kuvvetli p -Cesáro toplanabilir olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$ diyelim. Lemma 4.1.12 den

$$\varepsilon^p \mu_{\Delta}(\Omega(t)) \leq \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})$ sayısına bölüp $t \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\Omega(t))}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s = 0$$

elde edilir. Bu sonuç, $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ olması demektir.

ii) f fonksiyonu sınırlı ve $\mathbb{T}$ üzerinde γ sayısına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda pozitif bir M sayısı vardır öyle ki her $s \in \mathbb{T}$ için, $|f(s)| \leq M$ dir. Ayrıca,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\Omega(t))}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0 \quad (4.1.3)$$

olur. Buradaki $\Omega(t)$ kümesi, i) şıkkındaki gibidir. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s &= \int_{\Omega(t)} |f(s) - \gamma|^p \Delta s + \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega(t)} |f(s) - \gamma|^p \Delta s \\ &\leq (M + |\gamma|^p) \int_{\Omega(t)} \Delta s + \varepsilon^p \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\ &= (M + |\gamma|^p) \mu_{\Delta}(\Omega(t)) + \varepsilon^p \mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}}) \end{aligned}$$

olur. Yine eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})$ ile bölüp $t \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s \leq (M + |\gamma|^p) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(A)}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} + \varepsilon^p \quad (4.1.4)$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan (4.1.3) ve (4.1.4) den ispat tamamlanır.

5. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE α . DERECEDE λ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

5.1. Zaman Skalası Üzerinde α . Dereceden λ - İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda ölçülebilir fonksiyonların zaman skalası üzerinde $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere λ - istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımı verilecek ve zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler incenecektir. Ayrıca α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilirlik ile α . dereceden λ - istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 5.1.1. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ - ölçülebilir fonksiyon ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0,$$

olacak şekilde bir γ sayısı varsa zaman skalası üzerinde f fonksiyonu γ sayısına α . dereceden λ - istatistiksel yakınsaktır. Zaman skalası üzerinde tüm α . dereceden λ - istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ ile gösterilecektir. Bu durumda $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \gamma$ yazılır.

Teorem 5.1.2. $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ - ölçülebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun.

i) $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma_1$ ve $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \gamma_2$ ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) + g(t)) = \gamma_1 + \gamma_2$ dir.

ii) $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \gamma$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (cf(t)) = c\gamma$ dir.

Teorem 5.1.3. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde $\mathbf{s}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\lambda}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} > 0 \quad (5.1.1)$$

dir.

İspat. Verilen $\varepsilon > 0$ için, $f(s) \rightarrow \gamma(\mathbf{s}_{\mathbb{T}})$ olsun. Bu durumda

$$\mu_{\Delta}(s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon) \supset \mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{\Delta}(s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \geq \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ & = \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

dır. Böylece (5.1.1) eşitsizliğini kullanarak ve $t \rightarrow \infty$, için limit alınırsa $f(s) \rightarrow \gamma \left(\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} \right)$ elde edilir.

Tanım 5.1.4. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ -ölçülebilir bir fonksiyon, $\lambda \in \Lambda$, $\alpha > 0$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s = 0$$

olacak şekilde $\gamma \in \mathbb{R}$ varsa, f fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilir denir ve bu uzay $[W, \lambda, p, \alpha]_{\mathbb{T}}$ ile gösterilir. Eğer $p = 1$ seçilirse $[W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}}$ uzayını elde ederiz.

Lemma 5.1.5. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ -ölçülebilir bir fonksiyon $\varepsilon > 0$ için $\Omega(t, \lambda) = \{s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega(t, \lambda)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

dir.

İspat. $s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \varepsilon \chi_{\Omega(t, \lambda)}(s) \leq f(s) \chi_{\Omega(t, \lambda)}(s) \leq |f(s) - \gamma|$$

yazılabilir ve buradan

$$\varepsilon \int_{\Omega(t, \lambda)} \Delta s \leq \int_{\Omega(t, \lambda)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varepsilon \mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda)) \leq \int_{\Omega(t, \lambda)} |f(s) - \gamma| \Delta s \leq \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.6. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ -ölçülebilir bir fonksiyon, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

i) f fonksiyonu γ sayısına α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilir ise, $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \gamma$ dir.

ii) $s_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \gamma$ ve f sınırlı bir fonksiyon ise, bu durumda f fonksiyonu γ sayısına α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilir.

İspat. i) f fonksiyonu γ sayısına α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilir olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\Omega(t, \lambda) = \{s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$ diyelim. Lemma 5.1.5 den

$$\Omega(t, \lambda) = \{s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$$

$$\varepsilon^p \mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda)) \leq \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})$ sayısına bölüp $t \rightarrow \infty$ için limit alırsak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda))}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s = 0,$$

elde edilir. Bu sonuç $s_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \gamma$ olması demektir.

ii) f fonksiyonu sınırlı ve $\mathbb{T}$ üzerinde γ sayısına α . dereceden istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda pozitif bir M sayısı vardır öyle ki her $s \in \mathbb{T}$ için, $|f(s)| \leq M$ dir. Ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda))}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0, \quad (5.1.2)$$

olur. $\Omega(t, \lambda) = \{s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon\}$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s &= \int_{\Omega(t, \lambda)} |f(s) - \gamma|^p \Delta s + \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} / \Omega(t, \lambda)} |f(s) - \gamma|^p \Delta s \\ &\leq (M + |\gamma|)^p \int_{\Omega(t, \lambda)} \Delta s + \varepsilon^p \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\ &= (M + |\gamma|)^p \mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda)) + \varepsilon^p \mu_{\Delta_\lambda}^a([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}), \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafını $\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})$ sayısına bölüp $t \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma|^p \Delta s \\ &\leq (M + |\gamma|)^p \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(\Omega(t, \lambda))}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} + \varepsilon^p \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan (5.1.2) ve (5.1.3) den ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.7. $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}$ ve $\mu_{\Delta_{\beta(t)}}$, Λ da her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olacak şekilde iki dizi ve $0 < \alpha \leq \theta \leq 1$ olsun.

i)

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} > 0 \quad (5.1.4)$$

ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)} \subseteq \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$.

ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\beta}}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \quad (5.1.5)$$

ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}$ olur.

İspat. i) Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olmak üzere (5.1.4) in sağlandığını varsayalım.

Bu durumda $I_t \subset J_t$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\mu_{\Delta_{\beta}}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon) \geq \mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)$$

yazabiliriz. Böylece her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\Delta_{\beta}}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} &\geq \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \frac{1}{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &\times \mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

elde ederiz, burada $J_t = [t - \beta_t + t_0, t]$ dir.

Son eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için limit alınarak ve (5.1.4) kullanılarak $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)} \subseteq \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ kapsama bağıntısı elde edilir.

ii) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_{λ} -ölçülebilir fonksiyon, $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim f(s) = \gamma$, ve (5.1.5) sağlansın.

$I_t \subset J_t$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\Delta_{\beta}}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} &= \frac{\mu_{\Delta_{\beta}}(t - \beta_t + t_0 \leq s \leq t : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &+ \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &\leq \frac{\mu_{\Delta_{\beta}}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}) - \mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &+ \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &\leq \left(\frac{\mu_{\Delta_{\beta}}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} - \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_{\beta}}^{\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \right) \\ &+ \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - \gamma| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\lambda}}^{\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (5.1.5) den dolayı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\beta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1$$

olduğundan ve ikinci terim $f(s) \in \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. Böylece bu $f(s) \rightarrow \gamma(\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}) \implies f(s) \rightarrow \gamma(\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)})$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)} = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ elde ederiz.

Teorem 5.1.7 den, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.1.8. $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olacak şekilde iki dizi ve $0 < \alpha \leq \theta \leq 1$ olsun. (5.1.2) sağlanıyorsa $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}$ dir.

Teorem 5.1.9. $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}$ ve $\mu_{\Delta_{\beta(t)}}$, Λ da her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olacak şekilde iki dizi ve $0 < \alpha \leq \theta \leq 1$ olsun.

i) (5.1.4) sağlanırsa $[W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}} \subseteq [W, \beta, \theta]_{\mathbb{T}}$,

ii) (5.1.5) sağlanırsa $\ell_\infty(\mathbb{T}) \cap [W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}} \subseteq [W, \beta, \theta]_{\mathbb{T}}$ dir.

(Burada $\ell_\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f/f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| < \infty \right\}$ dir [25].)

İspat. i) Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olsun. Bu durumda $I_t \subset J_t$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s \\ & \geq \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s \\ & \geq \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda son eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için limit alınarak ve (5.1.4) kullanarak $[W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}} \subseteq [W, \beta, \theta]_{\mathbb{T}}$ elde ederiz.

ii) $f \in \ell_\infty(\mathbb{T}) \cap [W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}}$ olsun ve kabul edelim ki (5.1.5) sağlansın. $f \in \ell_\infty(\mathbb{T})$ olduğunda her $s \in \mathbb{T}$ için $|f(s) - \gamma| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Şimdi $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ ve böylece $\frac{1}{\mu_{\Delta_{\beta(t)}}} \leq \frac{1}{\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}}$ olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $I_t \subset J_t$

olup

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_{\Delta_\beta^\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - \gamma| \Delta s \\
& \geq \frac{1}{\mu_{\Delta_\beta^\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{J_t/I_t} |f(s) - \gamma| \Delta s \\
& \quad + \frac{1}{\mu_{\Delta_\beta^\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{I_t} |f(s) - \gamma| \Delta s \\
& \leq \left(\frac{\mu_{\Delta_\beta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}) - \mu_{\Delta_\lambda}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta^\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \right) M \\
& \quad + \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda^\alpha}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{I_t} |f(s) - \gamma| \Delta s
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (5.1.5) gereğince

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta^\theta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1$$

olduğundan ve ikinci terim $f \in [W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}}$ olması nedeniyle $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gider.

Böylece $\ell_\infty(\mathbb{T}) \cap [W, \lambda, \alpha]_{\mathbb{T}} \subseteq [W, \beta, \theta]_{\mathbb{T}}$ elde ederiz.

5.2. Zaman Skalası Üzerinde α . Dereceden λ - İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda zaman skalası üzerinde α . dereceden λ - istatistiksel sınırlılık kavramı verilecek ve bazı kapsama bağıntıları incelenecektir.

Tanım 5.2.1. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Δ -Cauchy olması için gerek ve yeter şart her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\mathbb{T}} \{(s \in \mathbb{T} : |f(s) - f(s_0)| \geq \varepsilon)\} = 0.$$

olacak şekilde bir $s_0 \in \mathbb{T}$ var olmasıdır [30].

Tanım 5.2.2. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ - ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0,$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa f fonksiyonuna zaman skalası üzerinde Δ - istatistiksel sınırlıdır denir ve tüm Δ -istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}(b)$ ile gösterilir [30].

Örnek 5.2.3. $f(s) = \frac{1}{s}$, tüm $t \in [0, 1]$ için $\mathbb{T} = [0, 1]$ aralığında bir fonksiyon olsun.

$$\delta_{[0,1]} \{(s \in \mathbb{T} : |f(s)| > 1)\} = 0,$$

olduğundan f , $[0, 1]$ aralığında Δ -sınırlıdır.

Teorem 5.2.4. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her Δ -istatistiksel yakınsak fonksiyon Δ -istatistiksel sınırlıdır.

İspat. $f(s)$, M ye Δ -istatistiksel yakınsak olsun. Buradan her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\mathbb{T}} \{(s \in \mathbb{T} : |f(s) - M| > \varepsilon)\} = 0$$

bulunur.

$$\{(s \in \mathbb{T} : |f(s)| > |M| + \varepsilon)\} \subset \{(s \in \mathbb{T} : |f(s) - M| > \varepsilon)\},$$

olduğundan $|f(s)| \leq |M| + \varepsilon$ h.h.s. elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 5.2.5. Her Δ -istatistiksel Cauchy dizisi Δ -istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat. f , Δ -istatistiksel Cauchy fonksiyonu olsun. O zaman her bir $\varepsilon > 0$ için $|f(s) - f(s_0)| < \varepsilon$ h.h.s. olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır. $M = \varepsilon + |f(s_0)|$ olmak üzere $|f(s)| < M$ h.h.s. olmasını gerektirir.

Örnek 5.2.6. $f(s) = (-1)^s$, $s \in \mathbb{T} = \mathbb{N}$ olsun. $f(s)$ istatistiksel sınırlıdır. Fakat Δ -istatistiksel Cauchy dizisi değildir.

Tanım 5.2.7. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ -ölçülebilir fonksiyon ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta}^\alpha([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0,$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa, f fonksiyonuna zaman skalası üzerinde α . dereceden Δ -istatistiksel sınırlıdır denir ve tüm α . dereceden Δ -istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi $s_{\mathbb{T}}^{(\alpha)}(b)$ ile gösterilir.

Tanım 5.2.8. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ -ölçülebilir fonksiyon ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0,$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa, f fonksiyonuna zaman skalası üzerinde α . dereceden Δ_λ - istatistiksel sınırlıdır denir ve tüm α . dereceden Δ_λ -istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$ ile gösterilir. $\alpha = 1$ olması durumunda f fonksiyonu zaman skalası üzerinde λ - istatistiksel sınırlıdır denir ve tüm Δ_λ -istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi de $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda)}(b)$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.9. $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}$ ve $\mu_{\Delta_{\beta(t)}}$, Λ da her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olacak şekilde iki dizi ve $0 < \alpha \leq \theta \leq 1$ olsun.

i)

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} > 0 \quad (5.2.1)$$

ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}(b) \subseteq \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$.

ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\beta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \quad (5.2.2)$$

ise $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b) = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}(b)$ olur.

İspat. i) Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}} \leq \mu_{\Delta_{\beta(t)}}$ olduğundan ve (5.2.1) in sağlandığını varsayalım. Bu durumda $I_t \subset J_t$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\mu_{\Delta_\beta}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M) \geq \mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)$$

yazabiliriz ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\Delta_\beta}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} &\geq \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \frac{1}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &\times \mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M). \end{aligned}$$

elde ederiz, burada $J_t = [t - \beta_t + t_0, t]$ dir.

Son eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için limit alınarak ve (5.2.1) eşitsizliğini kullanarak $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}(b) \subseteq \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$ olduğunu buluruz.

ii) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ -ölçülebilir fonksiyon ve, $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim f(s) = \gamma$ olsun. (5.2.2)

sağlansın $I_t \subset J_t$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\Delta_\beta}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} &= \frac{\mu_{\Delta_\beta}(t - \beta_t + t_0 \leq s \leq t : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ &+ \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\mu_{\Delta_\beta}(s \in [t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}}) - \mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\
&\quad + \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\
&\leq \left(\frac{\mu_{\Delta_\beta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} - \frac{\mu_{\Delta_\lambda}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} \right) \\
&\quad + \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq M)}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (5.2.2) den dolayı

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\beta}([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta_\beta}^\theta([t - \beta_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1$$

olduğundan ve ikinci terim $f(s) \in \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. Böylece $f(s) \rightarrow \gamma\left(\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)\right) \implies f(s) \rightarrow \gamma\left(\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}(b)\right)$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\beta, \theta)}(b) = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$ elde ederiz.

Sonuç 5.2.10. $\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}$ Λ da her $t \in \mathbb{T}$ için bir dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

i)

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} > 0,$$

olduğundan $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}(b) \subset \mathbf{s}_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}(b)$ dir.

ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda(t)}}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 1,$$

olduğundan $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^\lambda(b) \subset \mathbf{s}_{\mathbb{T}}(b)$ olur ve buradan $\mathbf{s}_{\mathbb{T}}^\lambda(b) = \mathbf{s}_{\mathbb{T}}(b)$ elde edilir.

6. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tezde, daha önce sayı dizileri için Çolak ve Bektaş [15] tarafından verilen $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere λ - istatistiksel yakınsaklık kavramından ve Móricz [18] tarafından verilen ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik tanımlarından yararlanarak ölçülebilir fonksiyonların zaman skalası üzerinde $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere λ - istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramı ile arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ölçülebilir fonksiyonların α . dereceden kuvvetli λp - Cesàro toplanabilirlik ile ölçülebilir fonksiyonların α . dereceden λ - İstatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Seyyidoğlu ve Tan [30] tarafından zaman skalası üzerinde istatistiksel sınırlılık kavramından ve Çolak [16] tarafından verilen Λ -sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için bazı kapsama bağıntılarından yararlanarak bu çalışmada zaman skalası üzerinde ölçülebilir fonksiyonların α . dereceden λ - istatistiksel sınırlılık kavramı verilmiştir ve bazı kapsama teoremleri elde edilmiştir.

7. KAYNAKLAR

1. **Zygmund, A.**, 1977. Trigonometric Series, Vol. I, II. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne.
2. **Steinhaus, H.**, 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73–74.
3. **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
4. **Schoenberg, I. J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly., 66, 361-375.
5. **Šalát, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
6. **Fridy, J. A.**, 1985. On the statistical convergence, Analysis., 5, 301-313.
7. **Connor, J. S.**, 1988. The statistical and strong p - Cesàro convergence of sequences, Analysis., 8 (1-2), 47–63.
8. **Fridy, J. A. ; Orhan, C.**, 1997. Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (12), 3625–3631.
9. **Bhardwaj, V. K. ; Gupta, S.**, 2014. On some generalizations of statistical boundedness, J. Inequal. Appl., 2014 : (12), 11 pp.
10. **Et, M. ; Mohiuddine, S. A. ; Şengül, H.**, 2016. On lacunary statistical boundedness of order α , Facta Univ. Ser. Math. Inform., 31 (3), 707–716.
11. **Gadjiev, A. D. ; Orhan, C.**, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32 (1), 129–138.
12. **Çolak, R.**, 2010. Statistical convergence of order α , Modern Methods in Analysis and Its Applications, Anamaya Pub., New Delhi, India, 121-129.
13. **Leindler, L.**, 1965. Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. (German), Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16, 375–387.

14. **Mursaleen, M.**, 2000. λ -statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1) , 111-115.
15. **Çolak, R. ; Bektaş, Ç. A.**, 2011. λ -statistical convergence of order α , Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.), 31 (3), 953–959.
16. **Çolak, R.**, 2011. On λ -statistical convergence, Proceeding of Conference on Summability and Applications, İstanbul-Turkey, p. 4-5.
17. **Connor, J. S.**, 1990. Two valued measures and summability, Analysis (Munich)., 10 (4), 373–385.
18. **Móricz, F.**, 2004. Statistical limits of measurable functions, Analysis (Munich)., 24 (1), 1–18.
19. **Nuray, F.**, 2010. λ -strongly summable and λ -statistically convergent functions, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 34(4), 335–338.
20. **Srivastava, H. M. ; Et, M.**, 2017. Lacunary statistical convergence and strongly lacunary summable functions of order α , Filomat., 31 (6), 1573–1582.
21. **Hilger, S.**, 1988. Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten [Ph.D. Thesis], Universität Würzburg.
22. **Bohner, M. ; Peterson, A.**, 2001. Dynamic Equations on Time Scales; An Introduction with Applications, Birkhauser, Boston.
23. **Guseinov, G. S.**, 2003. Integration on time scales, J. Math. Anal. Appl., 285, 107-127.
24. **Cabada, A. ; Vivero, D. R.**, 2006. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral: application to the calculus of Δ -antiderivatives, Math. Comput. Modelling., 43 (1-2), 194–207.
25. **Batit, O.**, 2007. Function spaces and their dual spaces on time scales, Int. J. Difference Equ., 2 (1), 13–23.
26. **Seyyidoglu, M. S. ; Tan, N. Ö.**, 2012. A note on statistical convergence on time scale, J. Inequal. Appl., 2012 : 219, 8 pp.

27. **Turan, C.; Duman, O.**, 2013. Statistical convergence on time scales and its characterizations, *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory*, Springer Proc. Math. Stat., Springer, New York, 41, 57-71.
28. **Yilmaz, E. ; Altin, Y.; Koyunbakan, H.**, 2016. λ -Statistically Convergence on Time Scales, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 23(1), 69–78.
29. **Altin, Y.**, 2017. Some results on λ - statistical convergence on time scales, *Maejo Int. J. Sci. Technol.*, 11(01), 90-96.
30. **Seyyidoglu, M. S. ; Tan, N. Ö.**, 2015. On a generalization of statistical cluster and limit points, *Adv. Difference Equ.*, 2015 : 55, 8 pp.
31. **Powell, R.E. ; Shah, S. M.**, 1972. *Summability Theory and Its Applications*, Van Nostrand-Reinhold Inc, London and New York.
32. **Maddox, I. J.**, 1970. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, London and New York.
33. **Tabib, K. K.**, 2012. *The Topology of Statistical Convergence*, Master of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.

ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 2012 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 2016 yılında mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek lisans eğitimime başladım.

