

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

H^3 HEISENBERG GRUBUNDA EĞRİLİKLER

Talat KÖRPİNAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd.Doç.Dr. Essin TURHAN

ELAZIĞ-2009

İÇİNDEKİLER	2
TEŞEKKÜR.....	3
SİMGELER LİSTESİ	4
ÖZET.....	5
ABSTRACT	6
BİRİNCİ BÖLÜM	
1.TEMEL KAVRAMLAR.....	7
1.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	7
İKİNCİ BÖLÜM	
2. HEISENBERG GRUBUNDA BİHARMONİK EĞRİLER.....	18
2.1. Heisenberg Grubun Genel Yapısı.....	18
2.2 Heisenberg Grubunda Biharmonik Eğriler.....	23
2.3 Heisenberg Grubunda Biharmonik Helisler.....	35
2.4 Heisenberg Grubunda Non-Geodezik Biharmonik Eğriler İçin Açık Formüller.....	39

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli Hocam; Sayın Yrd. Doç. Dr. Essin TURHAN'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca her türlü desteği esirgemeyen çok kıymetli Hocam; Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e teşekkürü bir borç bilirim.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{E}^n$: n-boyutlu Öklid Uzay

$Heis^3$: 3-boyutlu Heisenberg grup

(U, ψ) : Koordinat komşuluğu

$T_M(P)$: M manifoldu üzerinde tanjant vektörlerin uzayı

$\chi(M)$: M manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı

$g(,)$: 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde tanımlanan Riemann iç çarpımı.

R : Eğrilik tensör alanı

ρ : Ricci eğrilik tensorü

$[,]$: Lie operatörü

D : Riemann koneksiyonu

dv : Hacim elementi

∇ : Levi-Civita koneksiyonu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

H^3 HEISENBERG GRUBUNDA EĞRİLİKLER

Talat KÖRPINAR

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2009, Sayfa:40

Bu çalışma iki bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölüm; çalışmamıza temel oluşturan tanım ve teoremleri içermektedir.

İkinci bölüm çalışmamızın orijinal kısmıdır. Bu bölümde önce Heisenberg grubu ve özellikleri verilmiştir. Sonra Heisenberg grubunda biharmonik eğriler için karakterizasyon yapılmıştır. Ayrıca Heisenberg grubunda non-geodezik biharmonik eğrilerin helis olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra biharmonik eğriler için parametrik denklemler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Heisenberg Grup, Biharmonik Eğri, Helis

ABSTRACT

Masters Thesis

CURVATURES IN HEISENBERG GROUP H^3

Talat KÖRPINAR

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2009, page: 40

This thesis consist of two chapters.

In the first chapter; fundamental definitions and theorems are given.

The second chapter is original part of our study. In this chapter, firstly it is given that Heisenberg group and its properties. After, characterization is done for biharmonic curves in Heisenberg group. Also, it is proved that non geodesic biharmonic curves are helix. Finally, it is obtain that parametric equations for biharmonic curves.

Keywords: Heisenberg Group, Biharmonic Curve, Helix.

1. BÖLÜM

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1

X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

- (i) $X, \emptyset \in \tau$
- (ii) τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani, I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.
- (iii) τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis cümlesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dır, [9].

Tanım 1.1.2

X bir topolojik uzay olsun ve farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları, sırasıyla, U ve V olsun. Eğer U ve V yi $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde seçilebiliyorsa X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzay* denir, [9].

Tanım 1.1.3

X ve Y birer topolojik uzay olsun. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

- (i) f sürekli,
- (ii) f^{-1} mevcut,
- (iii) f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna X 'den Y 'ye bir *homeomorfizm* denir,[9].

Tanım 1.1.4

M bir Hausdorff uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye *n-boyutlu topolojik manifold* (veya kısaca *topolojik n-manifold*) denir.

- (i) M bir Hausdorff uzaydır.

- (ii) M nin herbir açık alt cümlesi E^n Öklid uzayının bir açık cümlesine veya E^n homeomorftur.
- (iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [10].

Tanım 1.1.5

M bir topolojik n -manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasının M de ki bir U açık komşuluğu, Ψ homeomorfizmi sayesinde E^n nin bir V açık altcümlesine homeomorfik ise (U, Ψ) ikilisine M nin p noktasındaki bir *koordinat komşuluğu* (*harita*) denir, [10].

Tanım 1.1.6

M , n -boyutlu topolojik bir manifold ve $V_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{V_\alpha\}$ ailesi de M nin bir örtüsü olsun. Bu durumda herbir V_α açığının E^n deki bir U_α açık altcümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. A bir indeks cümlesini göstermek üzere, elde edilen (U_α, Ψ_α) koordinat komşuluklarının

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

ailesine M nin bir *atlası* denir, [10].

Tanım 1.1.7

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun bir atlası

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

olsun. Eğer

$$\Psi_\alpha(U_\alpha) \cap \Psi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekildeki $\forall(\alpha, \beta) \in A \times A$ için $\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$ ve $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ fonksiyonları, $r > 0$ olmak üzere, C^r sınıftan diferensiyellenebilir ise S ye C^r *sınıftan atlas* denir, [10].

Tanım 1.1.8

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun C^r -sınıftan bir atlası var ise M ye C^r -sınıftan diferensiyellenebilir manifold denir. Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için

S diferensiyellenebilir ise, o zaman M ye C^∞ sınıfından *diferensiyellenebilir manifold* denir, [10].

Tanım 1.1.9

E^n 'nin iki alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için;

(i) $\Psi \in C^k(U, V)$,

(ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$, önermeleri sağlanıyorsa Ψ ye C^k sınıfından *diffgeomorfizm* denir, [10].

Tanım 1.1.10

I , $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

fonksiyonuna E^n de bir *eğri* denir.

Bir $t \in I$ değerine karşılık eğrinin, elde edilen $\alpha(t)$ noktası;

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$$

şeklinde dir. Buradaki α_i fonksiyonları $I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. E^n nin koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise,

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha$$

biçimindedir, [22].

Tanım 1.1.11

$\alpha : I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}|_t = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), ..., \frac{d\alpha_n}{dt}(t))$$

vektörüne eğrinin *hız vektörü* denir ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisi bir tanjant vektördür, bu vektör kısaca $\alpha'(t)$ şeklinde gösterilir, [10].

Tanım 1.1.12

$\alpha : I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine *regüler eğri* denir, [10].

Tanım 1.1.13

$$\begin{aligned} v_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow v_p[f] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall p \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- (i) $v_p[\lambda f + \mu g] = \lambda v_p[f] + \mu v_p[g]$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (ii) $v_p[fg] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$.

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme M nin p noktasında bir *tanjant vektör* denir, [10].

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_M(p) = \{v_p | v_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. Bu cümle üzerinde, iç ve dış işlem, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanırsa $T_M(p)$ bir reel vektör uzayı olur. $T_M(p)$ vektör uzayına, M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir.

$$\begin{aligned} \oplus : T_M(p) \times T_M(p) &\longrightarrow T_M(p) \\ (v_p, u_p) &\longrightarrow v_p \oplus u_p \end{aligned}$$

$$(v_p \oplus u_p)[f] = v_p[f] + u_p[f] \text{ , } \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_M(p) &\longrightarrow T_M(p) \\ (\lambda, u_p) &\longrightarrow \lambda \odot u_p \end{aligned}$$

$$(\lambda \odot v_p)[f] = \lambda v_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Tanım 1.1.14

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bir

$$X : M \xrightarrow{1:1} \bigcup_{p \in M} T_M(p)$$

olarak tanımlanan, X fonksiyonuna M üzerinde *vektör alanı* denir.

M üstünde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow X \oplus Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\lambda, X) &\longrightarrow \lambda \odot X\end{aligned}$$

Bu cümle toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır. Bu $\chi(M)$ vektör uzayına M üzerinde *vektör alanları uzayı* denir, [9].

Tanım 1.1.15

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümünde

- (i) 2-lineer
- (ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)
- (iii) Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. (Bu takdirde V vektör uzayına bir *Lie cebiri* denir.) ,[12].

Tanım 1.1.16

M bir C^∞ -manifold olsun. $\forall x, y \in M$, $\forall a \in \mathbb{R}$ için g metriği

$$g(ax, ay) = ag(x, y)$$

özellikliğini sağlarsa g ye *sol invariant metrik* denir, [9].

Tanım 1.1.17

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, C^∞ fonksiyonların cebirinde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* yada *metrik tensör* denir.

- (i) $\langle, \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) $\langle, \rangle$ dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\langle X, X \rangle > 0, \langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0, X \in \chi(M)$.

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞ –manifolda , *Riemann manifoldu* denir, [12].

Tanım 1.1.18

M bir C^∞ -manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiride $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

- (i) $\langle, \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) $\langle, \rangle$ dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\forall Y \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$,[12].

Tanım 1.1.19

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow D_X Y \end{aligned}$$

operatörü

- (i) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z \quad X, Y, Z \in \chi(M)$
- (ii) $D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$
- (iii) $D_{fX}Y = f D_X Y, f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- (iv) $D_X fY = f D_X Y + X[f]Y$

özellikleri sağlıyor ise D ye M üzerinde bir *afin koneksiyon* ve D_X e de X vektör alanı yönünde *kovaryant türev* denir, [10].

Tanım 1.1.20

Eğer bir $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi üzerinde Y bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde

$$D_T Y = 0$$

ise Y vektör alanına α eğrisi üzerinde bir paralel *vektör alanıdır* denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde

$$D_T T = 0$$

ise α eğrisine bir *geodezik eğri* adı verilir, [10].

Tanım 1.1.21

M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerindeki afin koneksiyonu D olmak üzere,

- (i) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$, $X, Y \in \chi(M)$
- (ii) $X[< Y, Z >] = < D_X Y, Z > + < Y, D_X Z >$, $Z \in \chi(M)$

özellikleri sağlamıyor ise D ye *Riemann koneksiyonu* denir, [12].

Tanım 1.1.22

M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $X, Y \in T_M(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R : T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) \times T_M(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p, Z_p, W_p) &\longrightarrow R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \\ R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) &= < X_p, R(Z_p, W_p)Y_p > \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensör alanına *Riemann eğrilik tensör alanı* ve bunun bir $p \in M$ noktasındaki değerine de *Riemann eğriliği* denir ve

$$K(p) = < X, R(X, Y)Y >$$

biçiminde gösterilir, [12].

Tanım 1.1.23

G boştan farklı bir cümle olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

ikili işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G, \cdot)$ ikilisine bir *grup* denir.

- (i) $\forall x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
- (ii) $\forall x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ olacak şekilde G de bir tek e birim elemanı vardır.
- (iii) $\forall x \in G$ için $x \cdot x' = x' \cdot x = e$ olacak şekilde G de bir tek x' inversi vardır.

Eğer G grubu " $\cdot$ " işlemine göre değişimli ise, yani $\forall x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa, G ye *değişimli grup* denir, [6].

Tanım 1.1.24

G bir grup olsun. $(G, G_n) \subset G_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots, s-1$ olmak üzere

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_s = \{e\}$$

biçiminde G nin normal alt gruplarının bir serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir.

Tanım 1.1.25

Bir $(G, \cdot)$ grubu ve bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (G, X, τ) üçlüsüne bir *topolojik grup* denir.

- (i) X in noktalarının cümlesi ile G nin elemanlarının cümlesi aynıdır.
- (ii)

$$\begin{aligned} \cdot : X \times X &\longrightarrow X \\ (a, b) &\longrightarrow a \cdot b^{-1} \end{aligned}$$

işlemi süreklidir. Burada G ye topolojik uzayın *temel grubu* ve X e de topolojik uzayın *temel uzay* denir, [9].

Tanım 1.1.26

G bir topolojik grup ve $a \in G$ olsun.

$$\begin{aligned} L(a) : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow ax \end{aligned}$$

dönüşümüne *sol dönüşüm*,

$$\begin{aligned} R(a) : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow xa \end{aligned}$$

dönüşümüne de *sağ dönüşüm* denir, [9].

Tanım 1.1.27

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlarsa (M, G) ikilisine bir *Lie grubu* denir.

- (i) M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.
- (ii)

$$\begin{aligned} \alpha_G : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow ab^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir, [9].

Tanım 1.1.28

$(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$ olmak üzere V cümlesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $\otimes$ işlemi

$$\begin{aligned} \otimes : V \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha \otimes \beta \end{aligned}$$

olmak üzere

- (i) $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a \in F$ için $(a \odot \alpha) \otimes \beta = a \odot (\alpha \otimes \beta)$
- (ii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$
- (iii) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$ özellikleri sağlanıyorsa $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot, \otimes)$ cebirsel yapısına *cebir* denir.

Eğer $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için

- (i) $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$ sağlanıyorsa V ye *birleşimli cebir*,
- (ii) $\gamma \otimes \beta = \beta \otimes \gamma$ sağlanıyorsa V ye *değişimli cebir*,
- (iii) $\gamma \otimes e = e \otimes \gamma = \gamma$ sağlanıyorsa V ye *birimli cebir* denir, [6].

Tanım 1.1.29

K bir cisim olsun. $m1_K = 0_K$ olacak şekilde $m > 0$ tamsayısı varsa böyle m lerin en küçüğüne K cisminin *karakteristiği* denir, [6].

Tanım 1.1.30

Karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde Lie operatörü ile tanımlanan lineer bir uzaya *Lie cebiri* denir, [6].

Tanım 1.1.31

(M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu ve

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

bir dönüşüm olsun.

$$E_1(f) = \int_{\Omega} h(df, df) dv_g \quad (1.1.1)$$

integraline f in $\Omega \subset M$ kompakt bölgesi üzerindeki *enerjisi* denir, [1].

Tanım 1.1.32

(M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu olsun.

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

dönüşümü (1.1.1) enerjisinin kritik noktası ise f e *harmonik dönüşüm* denir, [2].

Tanım 1.1.33

(M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu ve

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

bir dönüşüm olsun. f in *gerilim alanı*

$$\tau(f) = iz \nabla df$$

biçiminde tanımlanır, [2].

Tanım 1.1.34

(M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu ve

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

bir dönüşüm olsun. $\tau(f)$, f in gerilim alanı ve dv_g de M in hacim elementi olmak üzere,

$$E_2(f) = \int_{\Omega} h(\tau(f), \tau(f)) dv_g \quad (1.1.2)$$

integrale f in $\Omega \subset M$ kompakt bölgesi üzerindeki *bienerjisi* denir, [1].

Tanım 1.1.35

(M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu olsun.

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

dönüşümü (1.1.2) bienerjisinin kritik noktası ise f e *biharmonik dönüşüm* denir, [2].

Teorem 1.1.36

M bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \rightarrow M$ biharmonik eğri olsun. Bu takdirde γ eğrisi

$$\nabla_{\gamma'}^3 \gamma' + R(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') \gamma' = 0$$

denklemini sağlar, [4].

Tanım 1.1.37

M bir manifold $\gamma : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. w 1-formu için

$$w(\gamma') = 0$$

biçiminde ise γ eğrisine *horizontal eğri* denir, [5].

2. BÖLÜM

2. $Heis^3$ HEISENBERG GRUBUNDA BİHARMONİK EĞRİLER

2.1 $Heis^3$ Heisenberg Grubunun Genel Yapısı

$$Heis^3 = \left\{ w = w(x, y, t) = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, t \in IR \right\}$$

olmak üzere

$$Heis^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}$$

$Heis^3$ cümlesi üzerinde

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})(x, y, t) = (\tilde{x} + x, \tilde{y} + y, \tilde{t} + t + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x) \quad (2.1.1)$$

çarpım işlemi tanımlansın. O zaman $Heis^3$ cümlesi bu işlemle birlikte bir gruptur.

$Heis^3$ grubunun birim elemanı $0 = (0, 0, 0)$ ve herhangi bir (z, t) elemanın tersi $(z, t)^{-1} = (-z, -t)$ şeklindedir.

Herhangi $a, b \in Heis^3$ elemanlarının komütatörü

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

Kabul edelimki

$$a = (x_1, y_1, t_1), \quad b = (x_2, y_2, t_2), \quad c = (x_3, y_3, t_3) \in Heis^3$$

olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} [a, b] &= (x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2)(x_1, y_1, t_1)^{-1}(x_2, y_2, t_2)^{-1} \\ &= (x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2)(-x_1, -y_1, -t_1)(-x_2, -y_2, -t_2) \\ &= (x_1 + x_2 - x_1 - x_2, y_1 + y_2 - y_1 - y_2, t_1 + t_2 - t_1 - t_2 + \alpha) \\ &= (0, 0, \alpha) \end{aligned}$$

Burada $\alpha = x_1y_2 - x_2y_1$ biçimindedir. Buradan $[a, b] \neq 0$ dır. Bu nedenle $Heis^3$ grubu değişimli değildir. Diğer taraftan $a, b, c \in Heis^3$ elemanlarının çift komütatörü;

$$\begin{aligned} [[a, b], c] &= [(0, 0, \alpha), (x_3, y_3, t_3)] \\ &= (0, 0, \alpha)(x_3, y_3, t_3)(0, 0, -\alpha)(-x_3, -y_3, -t_3) \\ &= (x_3 - x_3, y_3 - y_3, \alpha + t_3 - \alpha - t_3) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $Heis^3$ grubu, 2-adım nilpotent Lie grubudur. $Heis^3$ grubu için g metriği;

$$g = dx^2 + dy^2 + (dt + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy)^2 \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanır, [1]. $Heis^3$ grubunun Lie cebiri $heis^3$ olmak üzere

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial t}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

ortonormal bir baz ve duali de

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = dt + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy$$

olsun. Burada e_1, e_2, e_3 vektör alanları için bracket operatörü,

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_3, e_1] = 0, [e_2, e_3] = 0$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1e_2 - e_2e_1 \\ &= (1, 0, -\frac{1}{2}y)(0, 1, \frac{1}{2}x) - (0, 1, \frac{1}{2}x)(1, 0, -\frac{1}{2}y) \\ &= (1, 1, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) - (1, 1, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) \\ &= (0, 0, 1) \\ &= e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_3, e_1] &= e_3 e_1 - e_1 e_3 \\
&= (0, 0, 1)(1, 0, -\frac{1}{2}y) - (1, 0, -\frac{1}{2}y)(0, 0, 1) \\
&= (1, 0, 1 - \frac{1}{2}y) - (1, 0, 1 - \frac{1}{2}y) \\
&= (0, 0, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= e_2 e_3 - e_3 e_2 \\
&= (0, 1, \frac{1}{2}x)(0, 0, 1) - (0, 0, 1)(0, 1, \frac{1}{2}x) \\
&= (0, 1, 1 + \frac{1}{2}x) - (0, 1, 1 + \frac{1}{2}x) \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_3, e_1] = 0, [e_2, e_3] = 0. \quad (2.1.4)$$

Önerme 2.1.1

$$g = dx^2 + dy^2 + (dt + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy)^2$$

metriğin Riemann koneksiyonunun kovaryant türevlerine ait matris;

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{e_1} e_1 & \nabla_{e_1} e_2 & \nabla_{e_1} e_3 \\ \nabla_{e_2} e_1 & \nabla_{e_2} e_2 & \nabla_{e_2} e_3 \\ \nabla_{e_3} e_1 & \nabla_{e_3} e_2 & \nabla_{e_3} e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. Burada matrisin (i, j) - yinci elemanı $\nabla_{e_i} e_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$) dir.

İspat:

X, Y, Z vektör alanları için Coshul formülü

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \}$$

biçimde tanımlanır. Burada e_1, e_2, e_3 vektör alanları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_1, e_3 \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle [e_1, e_1], e_3 \rangle - \langle [e_1, e_3], e_1 \rangle + \langle [e_3, e_1], e_1 \rangle \} \\ \langle \nabla_{e_1} e_1, e_3 \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle 0, e_3 \rangle - \langle 0, e_1 \rangle + \langle 0, e_1 \rangle \} \\ \langle \nabla_{e_1} e_1, e_3 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.3) den $e_3 \neq 0$ olduğundan

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0 \quad (2.1.6)$$

dır. Benzer hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle - \langle [e_2, e_3], e_1 \rangle + \langle [e_3, e_1], e_2 \rangle \} \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle e_3, e_3 \rangle - \langle 0, e_1 \rangle + \langle 0, e_2 \rangle \} \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{2} \implies 2\nabla_{e_1} e_2 = e_3 \implies \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3$$

dır. Diğer kovaryant türevlerde benzer hesaplamalar sonucu,

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0 \quad , \quad \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3 \quad , \quad \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2} e_2 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2} e_3 \quad , \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0 \quad , \quad \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1 \\ \nabla_{e_3} e_1 &= -\frac{1}{2} e_2 \quad , \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1 \quad , \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.1.22 den

$$R_{abc} = R(e_a, e_b)e_c \quad , \quad R_{abcd} = R(e_a, e_b, e_c, e_d) \quad (2.1.7)$$

yazılır. $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

den $R_{121} = R(e_1, e_2)e_1$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_1 \\
&= -\nabla_{e_1} \left(-\frac{1}{2}e_3\right) + \nabla_{e_2}(0) + \nabla_{e_3} e_1 \\
&= -\frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{2}e_2 \\
&= -\frac{3}{4}e_2
\end{aligned}$$

olur. R_{121} , R_{232} ve R_{1212} de benzer şekilde

$$\begin{aligned}
R_{121} &= -\frac{3}{4}e_2, \quad R_{131} = \frac{1}{4}e_3, \quad R_{122} = \frac{3}{4}e_1 \\
R_{232} &= \frac{1}{4}e_3, \quad R_{133} = -\frac{1}{4}e_1
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$R_{1212} = -\frac{3}{4}, \quad R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{4} \tag{2.1.9}$$

elde edilir.

2.2 Heis³ de Biharmonik Eğriler

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen diferensiyellenebilir ve düzlemsel olmayan bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ ise $Heis^3$ de γ boyunca ortonormal çatı alanı olsun. γ eğrisinin; T teğet, N normal ve B binormal vektör alanı olup $\{T, N, B\}$ ye *Frenet çatısı* denir. O zaman $k = |\nabla_T T| \neq 0$ ve τ ya, sırasıyla, γ nın *eğriliği* ve *torsiyonu* adı verilir. Buna göre Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= kN \\ \nabla_T N &= -kT - \tau B \\ \nabla_T B &= \tau N\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

şeklinde yazılır, [3]. Ayrıca

$$\begin{aligned}T &= T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3 \\ N &= N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 \\ B &= B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

olarak ifade edelim. (2.2.1) denklemlerinden ;

$$\nabla_T^3 T + R(T, kN)T = 0\tag{2.2.3}$$

eşitliğini hesaplayalım. İlk olarak;

$$\begin{aligned}\nabla_T^3 T &= \nabla_T^2(\nabla_T T) \\ &= \nabla_T^2(kN) \\ &= \nabla_T(\nabla_T kN) \\ &= \nabla_T(k'N + k(-kT - \tau B)) \\ &= k''N + k'(-kT - \tau B) - 2kk'T - k^2(kN) - k'\tau B - \tau'kB - k\tau(\tau N) \\ &= (-3kk')T + (k'' - k^3 - k\tau^2)N + (-2k'\tau - \tau'k)B\end{aligned}$$

dir. Bu ifadeyi, (2.2.3) de yerine yazılırsa

$$(-3kk')T + (k'' - k^3 - k\tau^2)N + (-2k'\tau - \tau'k)B + kR(T, N)T = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik, sırasıyla, T, N, B ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned}-3kk' &= 0 \\ k'' - k^3 - k\tau^2 + kR(T, N, T, N) &= 0 \\ -2k'\tau - \tau'k + kR(T, N, T, B) &= 0\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

sistemi elde edilir. Eğrilik tensörünün her bileşene göre lineer olması ve (2.2.2) eşitlikleri,

$$R(T, N, T, N) = \sum_{i,j,l,p=1}^3 T_l N_p T_i N_j R_{lpji}$$

denkleminde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} R(T, N, T, N) = & T_1 N_2 T_1 N_2 R_{1212} + T_1 N_2 T_2 N_1 R_{1221} + T_2 N_1 T_2 N_1 R_{2121} \\ & + T_2 N_1 T_1 N_2 R_{2112} + T_1 N_3 T_1 N_3 R_{1313} + T_1 N_3 T_3 N_1 R_{1331} \\ & + T_3 N_1 T_3 N_1 R_{3131} + T_3 N_1 T_1 N_3 R_{3113} + T_2 N_3 T_2 N_3 R_{2323} \\ & + T_2 N_3 T_3 N_2 R_{2332} + T_3 N_2 T_3 N_2 R_{3232} + T_3 N_2 T_2 N_3 R_{3223} \end{aligned}$$

bulunur. (2.1.9) dan

$$\begin{aligned} R(T, N, T, N) = & -\frac{3}{4}T_1^2 N_2^2 + \frac{3}{4}T_1 N_2 T_2 N_1 - \frac{3}{4}T_2^2 N_1^2 + \frac{3}{4}T_2 N_1 T_1 N_2 \\ & + \frac{1}{4}T_1^2 N_3^2 - \frac{1}{4}T_1 N_3 T_3 N_1 + \frac{1}{4}T_3^2 N_1^2 - \frac{1}{4}T_3 N_1 T_1 N_3 \\ & + \frac{1}{4}T_2^2 N_3^2 - \frac{1}{4}T_2 N_3 T_3 N_2 + \frac{1}{4}T_3^2 N_2^2 - \frac{1}{4}T_3 N_2 T_2 N_3 \end{aligned}$$

yada

$$\begin{aligned} R(T, N, T, N) = & -\frac{3}{4}(T_1 N_2 - T_2 N_1)^2 + \frac{1}{4}(T_1 N_3 - T_3 N_1)^2 \quad (2.2.5) \\ & + \frac{1}{4}(T_2 N_3 - T_3 N_2)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} B &= T \times N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} \\ &= B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B_1 &= T_2 N_3 - T_3 N_2 \\ B_2 &= T_3 N_1 - T_1 N_3 \\ B_3 &= T_1 N_2 - T_2 N_1 \end{aligned}$$

olur. Bu değerler (2.2.5) de yerine yazılırsa

$$R(T, N, T, N) = -\frac{3}{4}B_3^2 + \frac{1}{4}B_2^2 + \frac{1}{4}B_1^2$$

elde edilir. Burada $B = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$ birim uzunluklu olduğundan,

$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 1$$

dir. Bu değer son eşitlikte göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} R(T, N, T, N) &= -\frac{3}{4}B_3^2 + \frac{1}{4}(1 - B_3^2) \\ R(T, N, T, N) &= \frac{1}{4} - B_3^2 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

olur. Benzer şekilde $R(T, N, T, B)$ hesaplanırsa

$$R(T, N, T, B) = \sum_{i,j,l,p=1}^3 T_l N_p T_i B_j R_{lpij},$$

$$\begin{aligned} R(T, N, T, B) &= T_1 N_2 T_1 B_2 R_{1212} + T_1 N_2 T_2 B_1 R_{1221} + T_2 N_1 T_2 B_1 R_{2121} \\ &\quad + T_2 N_1 T_1 B_2 R_{2112} + T_1 N_3 T_1 B_3 R_{1313} + T_1 N_3 T_3 B_1 R_{1331} \\ &\quad + T_3 N_1 T_3 B_1 R_{3131} + T_3 N_1 T_1 B_3 R_{3113} + T_2 N_3 T_2 B_3 R_{2323} \\ &\quad + T_2 N_3 T_3 B_2 R_{2332} + T_3 N_2 T_3 B_2 R_{3232} + T_3 N_2 T_2 B_3 R_{3223}, \\ &= -\frac{3}{4}T_1^2 N_2 B_2 + \frac{3}{4}T_1 N_2 T_2 B_1 - \frac{3}{4}T_2^2 N_1 B_1 + \frac{3}{4}T_2 N_1 T_1 B_2 \\ &\quad + \frac{3}{4}T_1^2 N_3 B_3 - \frac{1}{4}T_1 N_3 T_3 B_1 + \frac{1}{4}T_3^2 N_1 B_1 - \frac{1}{4}T_3 N_1 T_1 B_3 \\ &\quad + \frac{1}{4}T_2^2 N_3 B_3 - \frac{1}{4}T_2 N_3 T_3 B_2 + \frac{1}{4}T_3^2 N_2 B_2 + \frac{1}{4}T_3 N_2 T_2 B_3. \end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned} R(T, N, T, B) &= -\frac{3}{4}(T_1 B_2 - T_2 B_1)(T_1 N_2 - T_2 N_1) \\ &\quad + \frac{1}{4}(T_1 N_3 - T_3 N_1)(T_1 B_3 - T_3 B_1) \\ &\quad + \frac{1}{4}(T_2 N_3 - T_3 N_2)(T_2 B_3 - T_3 B_2) \end{aligned}$$

bulunur. $B = T \times N$ olduğu yukarıdaki ifadede göz önüne alınırsa,

$$R(T, N, T, B) = \frac{3}{4}N_3B_3 - \frac{1}{4}N_2B_2 - \frac{1}{4}N_1B_1 \quad (2.2.7)$$

olur. Ayrıca (2.2.2) den,

$$N_1B_1 + N_2B_2 + N_3B_3 = 0 \quad (2.2.8)$$

yazılır. Buradan $N_3B_3 = -N_1B_1 - N_2B_2$ bulunur. Bu değer (2.2.7) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} R(T, N, T, B) &= \frac{3}{4}N_3B_3 + \frac{1}{4}(-N_2B_2 - N_1B_1) \\ &= \frac{3}{4}N_3B_3 + \frac{1}{4}N_3B_3 \\ R(T, N, T, B) &= N_3B_3 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

olur. (2.2.6) ve (2.2.9) ifadeleri (2.2.4) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -3kk' &= 0 \\ k'' - k^3 - k\tau^2 + k\left(\frac{1}{4} - B_3^2\right) &= 0 \\ -2k'\tau - \tau'k + kN_3B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.1:

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir diferensiyellenebilir eğri olsun. O zaman γ eğrisinin non-geodezik biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} k &= \text{sabit} \neq 0 \\ k^2 + \tau^2 &= \frac{1}{4} - B_3^2 \\ \tau' &= N_3B_3 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

dir. Burada k ve τ eğrinin, sırasıyla, eğrilik ve burulması; N_3, B_3 ise C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat:

($\Rightarrow$;) Kabul edelimki γ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş non-geodezik biharmonik eğri olsun. Biharmonik eğri tanımından dolayı (2.2.3) şartı sağlanır. (2.2.10) sisteminin ilk denklemden $k = sbt \neq 0$ olduğu görülür. Ayrıca bu değer (2.2.10) sisteminin ikinci ve üçüncü denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -k^3 - k\tau^2 + \frac{k}{4} - kB_3^2 &= 0 \\ -\tau'k + kN_3B_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliklerin her iki tarafı $k \neq 0$ sabiti ile bölünürse,

$$\begin{aligned} k^2 + \tau^2 &= \frac{1}{4} - B_3^2 \\ \tau' &= N_3B_3 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

elde edilir.

($\Leftarrow$;) Kabul edelimki (2.2.11) sistemi sağlansın. (2.2.11), (2.2.10) da gözönüne alınırsa (2.2.3) denkleminin sağlandığı görülür. O halde γ biharmonik eğridir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.2.2:

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen non-geodezik eğri ve $k = \text{sabit} \neq 0$ olsun. Eğer $N_3B_3 \neq 0$ ise o zaman γ biharmonik eğri değildir. Burada k , γ eğrisinin eğriliği ve N_3 , B_3 ler C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat:

İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelimki $N_3B_3 \neq 0$ ve γ bir biharmonik eğri olsun. Gösterelimki γ bir biharmonik eğri değildir.

Gerçekten; $\nabla_T T$ kovaryant türevi için (2.1.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \nabla_{T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3} (T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3) \\
&= T_1 \{ \nabla_{e_1} (T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3) \} + T_2 \{ \nabla_{e_2} (T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3) \} \\
&\quad + T_3 \{ \nabla_{e_3} (T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3) \} \\
&= T_1 \{ (\nabla_{e_1} T_1) e_1 + (\nabla_{e_1} T_2) e_2 + \frac{1}{2} T_2 e_3 + (\nabla_{e_1} T_3) e_3 - \frac{1}{2} T_3 e_2 \} \\
&\quad + T_2 \{ (\nabla_{e_2} T_1) e_1 - \frac{1}{2} T_1 e_3 + (\nabla_{e_2} T_2) e_2 + (\nabla_{e_2} T_3) e_3 + \frac{1}{2} T_3 e_1 \} \\
&\quad + T_3 \{ (\nabla_{e_3} T_1) e_1 - \frac{1}{2} T_1 e_2 + (\nabla_{e_3} T_2) e_2 + \frac{1}{2} T_2 e_1 + (\nabla_{e_3} T_3) e_3 \}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&= [T_1 (\nabla_{e_1} T_1) + T_2 (\nabla_{e_2} T_1) + T_3 (\nabla_{e_3} T_1) + T_3 T_2] e_1 \\
&\quad + [T_1 (\nabla_{e_1} T_2) + T_2 (\nabla_{e_2} T_2) + T_3 (\nabla_{e_3} T_2) - T_1 T_3] e_2 \\
&\quad + [T_1 (\nabla_{e_1} T_3) + T_2 (\nabla_{e_2} T_3) + T_3 (\nabla_{e_3} T_3)] e_3
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3$ olduğu $\nabla_T T_1$ de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_T T_1 &= \nabla_{T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3} (T_1) \\
\nabla_T T_1 &= T_1 (\nabla_{e_1} T_1) + T_2 (\nabla_{e_2} T_1) + T_3 (\nabla_{e_3} T_1) = T'_1
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler $\nabla_T T_2$ ve $\nabla_T T_3$ için yapılırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_T T_1 &= T_1 (\nabla_{e_1} T_1) + T_2 (\nabla_{e_2} T_1) + T_3 (\nabla_{e_3} T_1) = T'_1 \\
\nabla_T T_2 &= T_1 (\nabla_{e_1} T_2) + T_2 (\nabla_{e_2} T_2) + T_3 (\nabla_{e_3} T_2) = T'_2 \\
\nabla_T T_3 &= T_1 (\nabla_{e_1} T_3) + T_2 (\nabla_{e_2} T_3) + T_3 (\nabla_{e_3} T_3) = T'_3
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

elde edilir. Bu değerler son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\nabla_T T = (T'_1 + T_2 T_3) e_1 + (T'_2 - T_1 T_3) e_2 + T'_3 e_3 \tag{2.2.14}$$

olur. Diğer taraftan, (2.2.1) in ilk eşitliğinde, normal vektör alanı N nin, (2.2.2) deki değeri yerine yazılırsa

$$\nabla_T T = k N_1 e_1 + k N_2 e_2 + k N_3 e_3 \tag{2.2.15}$$

bulunur. (2.2.15) ile (2.2.14) karşılaştırılırsa

$$(T'_1 + T_2 T_3) e_1 + (T'_2 - T_1 T_3) e_2 + T'_3 e_3 = k N_1 e_1 + k N_2 e_2 + k N_3 e_3 \tag{2.2.16}$$

yazılır. Buradan

$$kN_3 = T'_3 \quad (2.2.17)$$

elde edilir. $F(s)$, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere kabul edelimki,

$$T_3(s) = kF(s), \quad f(s) = F'(s), \quad k = \text{sabit} \neq 0 \quad (2.2.18)$$

olsun. (2.2.18) sistemi (2.2.17) ile birlikte düşünülürse

$$N_3(s) = f(s) \quad (2.2.19)$$

olur.

$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3 \quad (2.2.20)$$

birim teğet vektör alanı olduğundan,

$$||T||^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = 1$$

dir. Burada (2.2.18) deki $T_3(s)$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} T_1^2 + T_2^2 + (kF(s))^2 &= 1 \\ T_1^2 + T_2^2 &= 1 - (kF(s))^2 \end{aligned}$$

olur. Son ifade trigonometrik olarak parametrize edilirse

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{1 - (kF(s))^2} \cos \beta(s) \\ T_2 &= \sqrt{1 - (kF(s))^2} \sin \beta(s) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

şeklinde yazılır. (2.2.18) ve (2.2.21) eşitlikleri (2.2.20) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{1 - (kF(s))^2} \cos \beta(s) e_1 + \sqrt{1 - (kF(s))^2} \sin \beta(s) e_2 \\ &\quad + kF(s) e_3 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.2.18) den T_3 ün, (2.2.21) den T_1 ve T_2 nin türevleri hesaplanır. Hesaplanan değerler ile (2.2.18) ve (2.2.21) birlikte, (2.2.14) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (\sqrt{1 - (kF(s))^2} (kF - \beta'(s)) \sin \beta(s) - \frac{k^2 F f}{\sqrt{1 - (kF(s))^2}} \cos \beta(s)) e_1 \\ &\quad - (\sqrt{1 - (kF(s))^2} (kF - \beta'(s)) \cos \beta(s) - \frac{k^2 F f}{\sqrt{1 - (kF(s))^2}} \sin \beta(s)) e_2 \\ &\quad + k f e_3 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2.1) den

$$k^2 = |\nabla_T T|^2 \quad (2.2.24)$$

yazılır. (2.2.23), (2.2.24) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} k^2 &= (1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2 \sin^2 \beta(s) + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2} \cos^2 \beta(s) \\ &\quad - 2\sqrt{1 - (kF(s))^2}(kF - \beta'(s)) \frac{k^2 F f}{\sqrt{1 - (kF(s))^2}} \sin \beta(s) \cos \beta(s) \\ &\quad + (1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2 \cos^2 \beta(s) + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2} \sin^2 \beta(s) \\ &\quad + 2\sqrt{1 - (kF(s))^2}(kF - \beta'(s)) \frac{k^2 F f}{\sqrt{1 - (kF(s))^2}} \sin \beta(s) \cos \beta(s) + k^2 f^2 \\ k^2 &= (1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2 \sin^2 \beta(s) + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2} \cos^2 \beta(s) \\ &\quad + (1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2 \cos^2 \beta(s) + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2} \sin^2 \beta(s) + k^2 f^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik k^2 ye göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} (1 - f^2)k^2 &= (1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2(\sin^2 \beta(s) + \cos^2 \beta(s)) \\ &\quad + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2}(\sin^2 \beta(s) + \cos^2 \beta(s)). \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$(1 - (kF(s))^2)(kF - \beta'(s))^2 + \frac{k^4 F^2 f^2}{1 - (kF(s))^2} + (1 - f^2)k^2 = 0.$$

veya

$$(kF - \beta'(s))^2 = k^2 \frac{1 - f^2 - k^2 F^2}{(1 - (kF(s))^2)^2}.$$

ya da

$$kF - \beta'(s) = \pm k \frac{\sqrt{1 - f^2 - k^2 F^2}}{1 - (kF(s))^2} \quad (2.2.25)$$

elde edilir. (2.2.25), (2.2.23) de kullanılır ve $\nabla_T T = kN$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} N = & (\pm \frac{\sqrt{1-f^2-k^2F^2}}{\sqrt{1-(kF(s))^2}} \sin \beta(s) - \frac{kFf}{\sqrt{1-k^2F^2}} \cos \beta(s))e_1 \quad (2.2.26) \\ & + (\pm \frac{\sqrt{1-f^2-k^2F^2}}{\sqrt{1-(kF(s))^2}} \cos \beta(s) - \frac{kFf}{\sqrt{1-k^2F^2}} \sin \beta(s))e_2 \\ & + fe_3 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $B = T \times N$ olduğundan,

$$\begin{aligned} B = T \times N &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} \\ &= (T_2N_3 - T_3N_2)e_1 + (T_3N_1 - T_1N_3)e_2 + (T_1N_2 - T_2N_1)e_3 \end{aligned}$$

olur. Burada (2.2.2) den B nin değeri göz önüne alınırsa,

$$B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 = (T_2N_3 - T_3N_2)e_1 + (T_3N_1 - T_1N_3)e_2 + (T_1N_2 - T_2N_1)e_3$$

yazılır. Buradan da

$$B_3 = T_1N_2 - T_2N_1 \quad (2.2.27)$$

elde edilir. (2.2.21) ve (2.2.26) dan, sırasıyla T_1, T_2 ve N_1, N_2 nin değerleri (2.2.27) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B_3 = & \sqrt{1-k^2F^2} \cos \beta(s) [\pm \frac{\sqrt{1-f^2-k^2F^2}}{\sqrt{1-k^2F^2}} \cos \beta(s) - \frac{kFf}{\sqrt{1-k^2F^2}} \sin \beta(s)] \\ & - \sqrt{1-k^2F^2} \sin \beta(s) [\pm \frac{\sqrt{1-f^2-k^2F^2}}{\sqrt{1-k^2F^2}} \sin \beta(s) - \frac{kFf}{\sqrt{1-k^2F^2}} \cos \beta(s)] \\ = & \pm \sqrt{1-f^2-k^2F^2} \cos^2 \beta(s) - kFf \sin \beta(s) \cos \beta(s) \quad (2.2.28) \\ & \pm \sqrt{1-f^2-k^2F^2} \sin^2 \beta(s) + kFf \sin \beta(s) \cos \beta(s) \\ = & \pm \sqrt{1-f^2-k^2F^2} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta(s)) \end{aligned}$$

ya da

$$B_3 = \pm \sqrt{1-f^2-k^2F^2} \quad (2.2.29)$$

olur. (2.2.1) denkleminde ikincisi e_3 ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \nabla_T N, e_3 \rangle = \langle -kT - \tau B, e_3 \rangle = -kT_3 - \tau B_3 \quad (2.2.30)$$

bulunur. Şimdi $\nabla_T N$ yi hesaplayalım. Bunun için (2.2.2) den T ve N nin değeri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= \nabla_{T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3} (N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3) \\ &= T_1 (\nabla_{e_1} (N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3)) + T_2 (\nabla_{e_2} (N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3)) \\ &\quad + T_3 (\nabla_{e_3} (N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3)) \\ &= T_1 [(\nabla_{e_1} N_1) e_1 + (\nabla_{e_1} N_2) e_2 + (\nabla_{e_1} N_3) e_3 + \frac{1}{2} N_2 e_3 - \frac{1}{2} N_3 e_2] \\ &\quad + T_2 [(\nabla_{e_2} N_1) e_1 + (\nabla_{e_2} N_2) e_2 + (\nabla_{e_2} N_3) e_3 - \frac{1}{2} N_1 e_3 + \frac{1}{2} N_3 e_1] \\ &\quad + T_3 [(\nabla_{e_3} N_1) e_1 + (\nabla_{e_3} N_2) e_2 + (\nabla_{e_3} N_3) e_3 - \frac{1}{2} N_1 e_2 + \frac{1}{2} N_2 e_1] \\ &= [T_1 (\nabla_{e_1} N_1) + T_2 (\nabla_{e_2} N_1) + T_3 (\nabla_{e_3} N_1) + \frac{1}{2} (N_3 T_2 + T_3 N_2)] e_1 \\ &\quad + [T_1 (\nabla_{e_1} N_2) + T_2 (\nabla_{e_2} N_2) + T_3 (\nabla_{e_3} N_2) - \frac{1}{2} (N_1 T_3 + T_1 N_3)] e_2 \\ &\quad + [T_1 (\nabla_{e_1} N_3) + T_2 (\nabla_{e_2} N_3) + T_3 (\nabla_{e_3} N_3) + \frac{1}{2} (N_2 T_1 - T_2 N_1)] e_3 \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

elde edilir. Ayrıca $T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3$ olduğu $\nabla_T N_1$ de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T N_1 &= \nabla_{T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3} (N_1) \\ \nabla_T N_1 &= T_1 (\nabla_{e_1} N_1) + T_2 (\nabla_{e_2} N_1) + T_3 (\nabla_{e_3} N_1) = N'_1 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler $\nabla_T N_2$ ve $\nabla_T N_3$ için yapılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T N_1 &= T_1 (\nabla_{e_1} N_1) + T_2 (\nabla_{e_2} N_1) + T_3 (\nabla_{e_3} N_1) = N'_1 \\ \nabla_T N_2 &= T_1 (\nabla_{e_1} N_2) + T_2 (\nabla_{e_2} N_2) + T_3 (\nabla_{e_3} N_2) = N'_2 \\ \nabla_T N_3 &= T_1 (\nabla_{e_1} N_3) + T_2 (\nabla_{e_2} N_3) + T_3 (\nabla_{e_3} N_3) = N'_3 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

elde edilir. (2.2.32), (2.2.31) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= [N'_1 + \frac{1}{2} (N_3 T_2 + T_3 N_2)] e_1 \\ &\quad + [N'_2 - \frac{1}{2} (N_1 T_3 + T_1 N_3)] e_2 + [N'_3 + \frac{1}{2} (N_2 T_1 - T_2 N_1)] e_3 \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

bulunur. Bu ifade e_3 ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \nabla_T N, e_3 \rangle = N'_3 + \frac{1}{2}(N_2 T_1 - T_2 N_1) \quad (2.2.34)$$

elde edilir. (2.2.34) de (2.2.30) göz önüne alınırsa,

$$\langle \nabla_T N, e_3 \rangle = N'_3 + \frac{1}{2}B_3 \quad (2.2.35)$$

yazılır. (2.2.30) ve (2.2.35) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$N'_3 + \frac{1}{2}B_3 = -kT_3 - \tau B_3 \quad (2.2.36)$$

olur. (2.2.18) den T_3 , (2.2.19) dan N_3 ve (2.2.29) den B_3 değerleri, (2.2.36) da yerine yazılırsa,

$$f' \pm \frac{\sqrt{1 - f^2 - k^2 F^2}}{2} = -k^2 F \pm \tau \sqrt{1 - f^2 - k^2 F^2}$$

ya da

$$\tau = \pm \frac{f' + k^2 F}{\sqrt{1 - f^2 - k^2 F^2}} - \frac{1}{2} = \frac{B'_3}{N_3} - \frac{1}{2} \quad (2.2.37)$$

elde edilir. Kabulümüzden γ biharmonik eğri olduğundan (2.2.11) sisteminin üçüncü denkleminde,

$$N_3 = \frac{\tau'}{B_3} \quad (2.2.38)$$

yazılır. (2.2.38) değeri, (2.2.37) de göz önüne alınırsa

$$\tau = \frac{B'_3}{N_3} - \frac{1}{2} = \frac{B_3 B'_3}{\tau'} - \frac{1}{2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 2\tau\tau' &= 2B_3 B'_3 - \tau' \\ (\tau^2)' &= (B_3^2)' - \tau' \\ \tau^2 &= B_3^2 - \tau + c \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

elde edilir. Burada c keyfi sabittir. Diğer taraftan (2.2.11) den

$$B_3^2 = \frac{1}{4} - k^2 - \tau^2 \quad (2.2.40)$$

yazılır. (2.2.11) den $k = \text{sabit} \neq 0$ olduğu ile (2.2.40) değeri (2.2.39) da yerine yazılırsa

$$2\tau^2 + \tau = c, \quad c = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu durumda τ sabittir. Bu ise $\tau' = N_3 B_3 \neq 0$ varsayımı ile çelişir. O halde γ biharmonik eğri değildir. İspat tamamlanır. ■

Buradan aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.2.3:

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen non-geodezik eğri olsun. O zaman γ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} k &= \text{sabit} \neq 0 \\ \tau &= \text{sabit} \\ N_3 B_3 &= 0 \\ k^2 + \tau^2 &= \frac{1}{4} - B_3^2 \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

olmasıdır. Burada k ve τ , sırasıyla, eğrinin eğrilik ve burulması ve N_3, B_3 de C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

2.3 Heis³ Heisenberg Grubunda Biharmonik Helisler

Teorem 2.3.1:

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen non-geodezik eğri olsun. $B_3 = 0$ ise $\tau^2 = \frac{1}{4}$ dır. Bu takdirde γ biharmonik eğri değildir. Burada τ eğrinin burulması, N_3, B_3 ise C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat:

Kabul edelimki $B_3 = 0$ olsun. İlk olarak $\tau^2 = \frac{1}{4}$ olduğunu gösterelim. $\alpha = \alpha(s)$ ve $\beta = \beta(s)$ olmak üzere (2.2.22) denkleminde $kF = \cos \alpha$ olarak alınırsa, T birim vektör alanı;

$$T = \sin \alpha \cos \beta e_1 + \sin \alpha \sin \beta e_2 + \cos \alpha e_3 \quad (2.3.1)$$

şeklinde yazılır. (2.2.20) ve (2.3.1) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$T_1 = \sin \alpha \cos \beta, \quad T_2 = \sin \alpha \sin \beta, \quad T_3 = \cos \alpha \quad (2.3.2)$$

elde edilir. Bu değerler (2.2.14) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (\alpha' \cos \alpha \cos \beta - (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta) e_1 \\ &\quad + (\alpha' \cos \alpha \sin \beta + (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta) e_2 \\ &\quad - \alpha' \sin \alpha e_3 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.2.2), (2.2.1) de göz önüne alınırsa

$$\nabla_T T = kN_1 e_1 + kN_2 e_2 + kN_3 e_3 \quad (2.3.4)$$

olur. (2.3.3) ile (2.3.4) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} kN_1 e_1 + kN_2 e_2 + kN_3 e_3 &= (\alpha' \cos \alpha \cos \beta - (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta) e_1 \\ &\quad + (\alpha' \cos \alpha \sin \beta + (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta) e_2 \\ &\quad - \alpha' \sin \alpha e_3 \end{aligned}$$

yazılır. İki fonksiyonun eşitliği tanımından

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{k}(\alpha' \cos \alpha \cos \beta - (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta) \\ N_2 &= \frac{1}{k}(\alpha' \cos \alpha \sin \beta + (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta) \\ N_3 &= -\frac{1}{k}\alpha' \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

elde edilir.

$$B = T \times N = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$B = (T_2N_3 - T_3N_2)e_1 + (N_1T_3 - N_3T_1)e_2 + (T_1N_2 - T_2N_1)e_3 \quad (2.3.6)$$

olur. (2.2.2) den B nin değeri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 &= (T_2N_3 - T_3N_2)e_1 + (N_1T_3 - N_3T_1)e_2 \\ &\quad + (T_1N_2 - T_2N_1)e_3 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

yazılır. Buradan

$$B_3 = T_1N_2 - T_2N_1 \quad (2.3.8)$$

elde edilir. (2.3.3) den T_1 ve T_2 , (2.3.5) den N_1 ve N_2 değerleri (2.3.8) de yerine konursa

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{1}{k} \sin \alpha \cos \beta [\alpha' \cos \alpha \sin \beta + (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta] \\ &\quad - \frac{1}{k} \sin \alpha \sin \beta [\alpha' \cos \alpha \sin \beta + (\beta' - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta] \end{aligned}$$

ya da

$$B_3 = \frac{\sin^2 \alpha (\beta' - \cos \alpha)}{k} \quad (2.3.9)$$

bulunur. (2.3.9) da kabul edelim ki $B_3 = 0$ olsun. Bu durumda $\sin \alpha = 0$ veya $\beta' - \cos \alpha = 0$ olmalıdır. Buna göre;

(i) Eğer $\sin \alpha = 0$ ise (2.3.3) den $T = e_3$ olacağından γ bir geodezik eğri olur. Dolayısıyla γ non-geodezik bir eğri olduğundan $\sin \alpha \neq 0$ olmalıdır.

(ii) Eğer

$$\beta' - \cos \alpha = 0 \quad (2.3.10)$$

ise (2.3.10) eşitliği (2.3.3) de göz önüne alınırsa

$$\nabla_T T = \alpha'(\cos \alpha \cos \beta e_1 + \cos \alpha \sin \beta e_2 - \sin \alpha e_3) \quad (2.3.11)$$

bulunur. $\alpha' > 0$ alınması genelliği bozmaz. O zaman (2.2.1) ve (2.3.11) birlikte göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} N &= \cos \alpha \cos \beta e_1 + \cos \alpha \sin \beta e_2 - \sin \alpha e_3 \\ B &= -\sin \beta e_1 + \cos \beta e_2 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (2.3.5) den N'_1, N'_2, N'_3 hesaplanır. Hesaplanan bu değerler ile (2.3.5) ve (2.3.1) değerleri (2.2.33) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= (-\alpha' \sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \beta) e_1 + (-\alpha' \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \cos \beta) e_2 \\ &\quad - \alpha' \cos \alpha e_3 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

elde edilir. (2.3.13), (2.3.12) daki B ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \nabla_T N, B \rangle = \frac{1}{2} \quad (2.3.14)$$

bulunur. Ayrıca (2.2.1) sisteminin üçüncü denklemi ile B iç çarpıma tabi tutulursa,

$$-\tau = \langle \nabla_T N, B \rangle \quad (2.3.15)$$

olur. (2.3.14) ve (2.3.15) birlikte düşünülürse,

$$-\tau = \frac{1}{2} \quad (2.3.16)$$

ya da

$$\tau^2 = \frac{1}{4}$$

elde edilir. Şimdi γ eğrisinin biharmonik olmadığını gösterelim. (2.2.11) in ikinci denkleminde (2.3.16) kullanılırsa,

$$k^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - B_3^2$$

olur. Hipotezden $B_3^2 = 0$ olduğu burada göz önüne alınırsa $k = 0$ elde edilir. Bu ise (2.2.11) in birinci denklemi ile çelişir. O halde γ biharmonik eğri değildir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Sonuç 2.3.2

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen non-geodezik biharmonik helis olsun. O takdirde,

$$\begin{aligned} B_3 &= \text{sabit} \neq 0 \\ N_3 &= 0 \\ k^2 + \tau^2 &= \frac{1}{4} - B_3^2 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

eşitlikleri geęerli olur.

2.4 Heis³ de Non-Geodezik Biharmonik Eğriler İçin Parametrik Denklemler

Yardımcı Teorem 2.4.1:

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen non-geodezik bir eğri olsun. Eğer $N_3 = 0$ ise

$$\alpha = \text{sabit} \quad (2.4.1)$$

dir.

İspat:

γ yay uzunluklu bir eğri olduğundan

$$\gamma' = T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3$$

ve

$$||T|| = 1$$

dir. (2.2.1) ve (2.2.13) birlikte düşünülürse

$$(T'_1 + T_2 T_3) e_1 + (T'_2 - T_1 T_3) e_2 + T'_3 e_3 = k N_1 e_1 + k N_2 e_2 + k N_3 e_3 \quad (2.4.2)$$

yazılır. İki fonksiyonun eşitliği tanımı kavramı tanımı gereğince

$$T'_3 = k N_3, \quad k \neq 0 \quad (2.4.3)$$

olur. hipotezden $N_3 = 0$ olduğundan,

$$T'_3 = 0 \Leftrightarrow T_3 = \text{sabit}$$

elde edilir. O halde (2.3.1) den

$$T_3 = \cos \alpha = \text{sabit} \quad (2.4.4)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 2.4.2

$Heis^3$ de bütün non-geodezik biharmonik eğrilerin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{A} \sin \alpha \sin(As + a) + b \\ y(s) &= \frac{1}{A} \sin \alpha \cos(As + a) + c \\ z(s) &= \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2A}\right)s - \frac{b}{2A} \sin \alpha \cos(As + a) \\ &\quad - \frac{b}{2A} \sin \alpha \sin(As + a) + d \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $x(s), y(s), z(s)$ verilen eğrinin koordinat fonksiyonlarıdır.

İspat.

Kabul edelimki $\gamma : I \rightarrow Heis^3$ non-geodezik biharmonik eğri olsun. Yardımcı Teorem 2.4.1 den $\alpha = \text{sabit}$ olduğundan $\alpha' = 0$ elde edilir. Bu ifade (2.3.3) denkleminde yazılırsa;

$$\nabla_T T = \sin \alpha (\cos \alpha - \beta') (\sin \beta e_1 - \cos \beta e_2)$$

olur. Ayrıca yukarıdaki ifade ve (2.2.1) birlikte düşünülürse,

$$N = \sin \beta e_1 - \cos \beta e_2 \quad (2.4.5)$$

ve

$$k = \sin \alpha (\cos \alpha - \beta') \quad (2.4.6)$$

elde edilir. (2.3.1) ve (2.4.5) den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} B &= T \times N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta & 0 \end{vmatrix} \\ B &= \cos \beta \cos \alpha e_1 + \sin \beta \cos \alpha e_2 - \sin \alpha e_3 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

bulunur. Ayrıca (2.3.1) den T_i ve (2.4.5) den N_i ($i = 1, 2, 3$) değerleri (2.2.33) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= \left(\beta' - \frac{1}{2} \cos \alpha\right) \cos \beta e_1 + \left(\beta' - \frac{1}{2} \cos \alpha\right) \sin \beta e_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \alpha e_3 \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

elde edilir. Şimdi β' nün sabit olduğunu gösterelim. (2.4.8) denklemi B ile iç çarpıma tabi tutulur ve (2.2.1) sistemi göz önüne alınırsa

$$-\tau = \langle \nabla_T N, B \rangle = (\cos \alpha) \beta' + \frac{1}{2} - (\cos \alpha)^2 \quad (2.4.9)$$

bulunur. γ birim hızlı non-geodezik biharmonik eğri olduğundan Teorem 2.2.1 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \beta' &= \text{sabit} \\ \beta' &\neq \cos \alpha \\ k^2 + \tau^2 &= \frac{1}{4} - B_3^2 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

elde edilir. Şimdi ise (2.4.6), (2.4.7), (2.4.9) ve (2.4.10) birlikte düşünülürse

$$B_3 = -\sin \alpha \quad (2.4.11)$$

elde edilir. Ayrıca (2.4.6), (2.4.9) ve (2.4.11) ifadeleri (2.4.10) sisteminin üçüncü denkleminde yazılırsa,

$$\sin^2 \alpha (\cos \alpha - \beta')^2 + ((\cos \alpha) \beta' + \frac{1}{2} - (\cos \alpha)^2)^2 = \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} &\sin^2 \alpha (\cos \alpha - \beta')^2 + \cos^2 \alpha (\cos \alpha - \beta')^2 \\ &= -\beta' \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Eğer bu eşitlik düzenlenirse

$$(\beta')^2 - \beta' \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

veya

$$(\beta')^2 - \beta' \cos \alpha + 1 - \cos^2 \alpha = 0$$

ya da

$$(\beta')^2 - (\cos \alpha) \beta' + 1 - (\cos \alpha)^2 = 0 \quad (2.4.12)$$

olarak elde edilir. (2.4.12) denkleminin çözümü,

$$\beta' = \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{5 \cos^2 \alpha - 4}}{2} = A = \text{sabit}$$

dır. Burada $\cos^2 \alpha \geq \frac{4}{5}$ olmak üzere,

$$\alpha \in (0, \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}] \cup [\arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}, \pi) \quad , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

dır. Eğer

$$\beta'(s) = A$$

eşitliği integrallenirse

$$\beta(s) = As + a, a \in \mathbb{R} \quad (2.4.15)$$

olur.

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

olduğundan (2.1.3) ve (2.3.1) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \\ &= \sin \alpha \cos \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial z} \right) + \sin \alpha \sin \beta \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin \alpha \cos \beta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} x(s) \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} y(s) \sin \alpha \cos \beta \right) e_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) &= (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \\ &\quad \left(\frac{1}{2} x(s) \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} y(s) \sin \alpha \cos \beta \right)) \end{aligned}$$

dır. (2.4.13) den dolayı,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sin \alpha \cos(As + a) \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \alpha \sin(As + a) \\ \frac{dz}{ds} &= \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha (x(s) \sin(As + a) - y(s) \cos(As + a)) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer bu denklem sistemi integrallenirse,

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{A} \sin \alpha \sin(As + a) + b \\ y(s) &= -\frac{1}{A} \sin \alpha \cos(As + a) + c \\ z(s) &= \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2A}\right)s - \frac{b}{2A} \sin \alpha \cos(As + a) \\ &\quad - \frac{b}{2A} \sin \alpha \sin(As + a) + d \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.4.3

$Heis^3$ de non-geodezik biharmonik horizontal eğri bulunamaz.

İspat.

$\gamma : I \rightarrow Heis^3$ non-geodezik biharmonik eğri olsun. (2.2.13), (2.2.34) ve (2.2.33) denklemleri tekrar burada göz önüne alalım. Buna göre

$$\nabla_T T = (T'_1 + T_2 T_3)e_1 + (T'_2 - T_1 T_3)e_2 + T'_3 e_3,$$

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= [N'_1 + \frac{1}{2}(N_3 T_2 + T_3 N_2)]e_1 + [N'_2 - \frac{1}{2}(N_1 T_3 + T_1 N_3)]e_2 \\ &\quad + [N'_3 + \frac{1}{2}(N_2 T_1 - T_2 N_1)]e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_T B &= [B'_1 + \frac{1}{2}(B_3 T_2 + T_3 B_2)]e_1 + [B'_2 - \frac{1}{2}(B_1 T_3 + T_1 B_3)]e_2 \\ &\quad + [B'_3 + \frac{1}{2}(B_2 T_1 - T_2 B_1)]e_3. \end{aligned}$$

Bu sistemin her iki tarafı e_3 ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T T, e_3 \rangle &= T'_3 \\ \langle \nabla_T N, e_3 \rangle &= N'_3 + \frac{1}{2}(N_2 T_1 - T_2 N_1) \\ \langle \nabla_T B, e_3 \rangle &= B'_3 + \frac{1}{2}(B_2 T_1 - T_2 B_1) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.2.1) denklem sistemi için de yazılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T T, e_3 \rangle &= kN_3 \\ \langle \nabla_T N, e_3 \rangle &= -kT_3 - \tau B_3 \\ \langle \nabla_T B, e_3 \rangle &= \tau N_3\end{aligned}\tag{2.4.15}$$

olur. (2.4.14) ve (2.4.15) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}kN_3 &= T'_3 \\ -kT_3 - \tau B_3 &= N'_3 + \frac{1}{2}B_3 \\ \tau N_3 &= B'_3 + \frac{1}{2}N_3\end{aligned}\tag{2.4.16}$$

eşitlikleri elde edilir. $\gamma : I \rightarrow Heis^3$ eğrisi non-geodezik biharmonik horizontal eğri olarak kabul edildiğinden, sırasıyla, (2.4.15) ve (2.4.16) göz önüne alınırsa $N_3 = 0$, $T_3 = 0$ dir. Bu değerler (2.4.16) ün ikinci eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$-\tau B_3 = \frac{1}{2}B_3$$

elde edilir. γ biharmonik eğri olduğundan $B_3 \neq 0$ dır. O halde

$$\tau = -\frac{1}{2}\tag{2.4.17}$$

olur. (2.2.40) de

$$k^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2$$

dir. (2.4.17), (2.4.11) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$k^2 + B_3^2 = 0.$$

elde edilir. Bu eşitliğin sıfır olması için

$$k = 0, \quad B_3 = 0$$

olmalıdır ki bu da eğrinin biharmonik olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $Heis^3$ de non-geodezik biharmonik eğri olmadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Kaynaklar

- [1] Arslan, K., Ezentaş R., Murathan, C. T. Sasahara Biharmonic sub-manifolds in 3-dimensional (κ, μ) –manifolds, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005:22 (2005) 3575–3586
- [2] Balmus, A. On the biharmonic curves of the Euclidian and Berger 3-dimensional spheres, Sci. Ann. Univ. Agric. Sci. Vet. Med., 47, 87–96.
- [3] Caddeo, R., Oniciuc, C., Piu P., Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 62 (2004), 265–277
- [4] Caddeo, R., Montaldo, S., Piu, P., On Biharmonic Maps, Contemporary Mathematics, Volume 288, (2001), 286-290
- [5] Călin, O., Mangione, V., Variational Calculus on Sub-Riemannian Manifolds, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.8, No.1, 2003, pp. 21-32.
- [6] Çalharp, F., "Soyut Cebir-I", H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, 1981
- [7] Ekmekci, N., Yaz, N. Biharmonic general helices in contact and Sasakian manifolds, Tensor (N.S.), 65, 103–108.
- [8] Ergüt, M., “Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair” Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983
- [9] Hacısalihoğlu, H., H., “Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş”, İstanbul; 1980
- [10] Hacısalihoğlu, H., H., “Diferensiyel geometri”, Cilt 1; 2002
- [11] Hacısalihoğlu, H., H., “Lineer Cebir”, Cilt 1, 7.Baskı; 2002
- [12] Hacısalihoğlu, H., H., “Diferensiyel geometri”, Cilt 3; 2003
- [13] Helgason, S., “Differential Geometry and Symmetric Spaces”, Academic Press; 1962
- [14] Inoguchi, J. -I. Biharmonic curves in Minkowski 3-space, Int. J. Math. Math. Sci., 21, 1365–1368.
- [15] Jiang, G.Y. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [16] Marenich, V. Geodesics in Heisenberg groups. – Geom. Dedicata 66 (1997), 175–185.
- [17] Milnor, J., "Curvatures of left invariant metrics on Lie groups" Advances in mathematics, 1976.
- [18] O'Neill, B., "Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity" Academic Press, Inc., New York, 1983

- [19] Rahmani, S., Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, Journal of Geometry and Physics 9, 295-302, 1992.
- [20] Sabuncuoğlu, A., “Diferensiyel geometri”, Ankara, 2004
- [21] Turhan, E., Bazı Kompleks Lie Gruplarının Eğrilik Özellikleri; Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997
- [22] Uluçay, C., “Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri”, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara; 1978,

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Sivas'ta doğdum. İlk öğrenimimi Çepni İlkokulunda tamamladım. 1995 yılında Çepni Lisesi'ne başladım ve 1998 yılında bu okuldan mezun oldum. 1999 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2003 yılında bu bölümden mezun oldum. Şubat 2004 tarihinde Fırat Üniversitesi'nde Tezsiz Yüksek Lisans'a başladım ve Ocak 2005 tarihinde mezun oldum. 13 Şubat 2006 tarihinde Fırat Üniversitesi Rektörlüğüne memur olarak atandım. Eylül 2006 tarihinde Fırat Üniversitesi Matematik Bölümünde Yüksek Lisans'a başladım. Halen Fırat Üniversitesi Rektörlüğünde memur olarak çalışmaktayım.