

**LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ
İÇİN BAZI METOTLAR VE ÇÖZÜMLERİN SAYISAL
ANALİZLERİ**

DOKTORA TEZİ

Bölent KILIÇ

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

TEMMUZ–2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET
EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI METOTLAR VE ÇÖZÜMLERİN
SAYISAL ANALİZLERİ**

DOKTORA TEZİ
Bülent KILIÇ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET
EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI METOTLAR VE ÇÖZÜMLERİN
SAYISAL ANALİZLERİ**

DOKTORA TEZİ

Bülent KILIÇ
(07221201)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 27.06.2012

ELAZIĞ–2012

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN
DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI METOTLAR VE ÇÖZÜMLERİN SAYISAL
ANALİZLERİ

DOKTORA TEZİ
Bülent KILIÇ
(07221201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 27.06.2012

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.07.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA (İ.T.İ.C.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Abdülkadir ERTAŞ (S.Ü)

Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. İ. Enam İNAN (F.Ü)

ELAZIĞ-2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Doğan KAYA' ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Doç. Dr. Hasan BULUT, Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN ve Yrd. Doç. Dr. Yavuz UĞURLU' ya da teşekkür ederim.

Bülent KILIÇ
ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanımlar.....	9
2. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR.....	22
2.1. Analitik Metotların Analizi.....	22
2.1.1. Homojen Balans Metot.....	23
2.1.2. Bäcklund Dönüşüm Metot.....	24
2.1.3. Birleştirilmiş Rasyonel Açılım Metot.....	25
2.1.3.1 Jacobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metot.....	29
2.1.3.2 Riccati Rasyonel Açılım Metot.....	29
2.1.4. Kudryashov Metot.....	29
2.1.5. Üstel Fonksiyon Metot.....	31
2.1.6. $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metot.....	31
2.1.7. $\frac{1}{G'}$ -Açılım Metot.....	32
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR.....	33
3.1. CRWP ve KdV Denklemlerine Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması.....	33
3.1.1. CRPW Denkleminde Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması.....	33
3.1.2. 5.mertebeden KdV-like Denklemlerine Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması.....	35
3.1.3. KdV Denkleminde Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması.....	40

3.2. CRWP ve KdV Denklemlerine Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması.....	42
3.2.1. CRWP Denkleminde Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması.....	42
3.2.2. KdV Denkleminde Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması	44
4. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN ALTERNATİF YAKLAŞIMLAR.....	46
4.1. Bäcklund Dönüşüm Metodu için Alternatif Bir Yaklaşım ve Uygulaması.....	46
4.2. Yeni bir Yardımcı Denklem ile Hareket eden Dalga Çözümleri.....	50
5. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BİR YARI ANALİTİK METOT.....	57
5.1. Homotopi Analiz Metodu.....	57
6. HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI.....	59
6.1. CRWP Denkleminde HAM' unun Uygulanması.....	59
6.2. 5. Mertebeden KdV-like Denkleminde HAM' unun Uygulanması.....	60
7. YARI ANALİTİK METOTLARIN SAYISAL SONUÇLARININ İRDELENMESİ.....	63
7.1. Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi.....	63
8. SONUÇ.....	67
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	76

ÖZET

Bu çalışma sekiz Bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci Bölümde temel tanımlar verilmiştir.

İkinci Bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri için kullanılan bazı analitik metotlar verilmiştir.

Üçüncü Bölümde, ikinci Bölümde analizleri yapılan metotlardan Bäcklund Dönüşümü ve Jakobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metotları ile CRWP ve KdV denklemlerinin çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü Bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri için alternatif yaklaşımlar verilmiştir.

Beşinci Bölümde, lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir yarı analitik metot verilmiştir.

Altıncı Bölümde, beşinci Bölümde verilen yarı analitik metot kullanılarak CRWP ve 5. Mertebeden KdV-like denklemleri için seri çözümler elde edilmiştir.

Yedinci Bölümde, altıncı Bölümde elde edilen seri çözümlerin sayısal sonuçları irdelenmiştir.

Sekizinci Bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde bulunan çalışmalar ile desteklenerek genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgalar, Solitonlar, Jakobi eliptik fonksiyon, Dengeleme terimi, Analitik çözüm, hareket eden dalga çözüm, Homojen balans, Bäcklund Dönüşümü, Rasyonel Açılım metot, Jakobi eliptik fonksiyon metot, Kudryashov metot, Üstel fonksiyon metot, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metot, CRWP denklemi, KdV denklemi, Yarı analitik metotlar, Seri çözüm, Homotopi analiz metot.

SUMMARY

This study is constructed in eight Chapters.

In Chapter one, some fundamental definitions are given.

In Chapter two, it is given some analytical methods to obtain travelling wave solutions of nonlinear partial differential equations.

In Chapter three, it is obtained solutions of CRWP and KdV equations by using the Bäcklund transform and Jacobi elliptic function rational expansion methods from that analysis is made in Chapter two.

In Chapter four, it is given alternative approximations for travelling wave solutions of nonlinear partial differential equations.

In Chapter five, it is given of one semi analytical method which is used to solve linear and nonlinear equations.

In Chapter six, it is obtained series solutions for CRWP and 5.Ordered KdV-like equations which are considered in third chapter by using semi analytical method which is given in chapter five.

In Chapter seven, it is discussed numerical results of series solutions which are obtained in Chapter six.

In Chapter eight, it is made a generalized assessment by supporting results which are obtained in this study with some studies in literature.

Keywords: Solitary waves, Solitons, Jacobi elliptic function, Balance term, Analytical solution, travelling wave solution, Bäcklund transform, Homogen balance, Rational expansion method, Jacobi elliptic function method, Kudryashov method, Exp-function method, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method, CRWP equation, KdV equation, Semi analytical methods, Series solution, Homotopy analyze method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1. Hareket eden, enine ilerleyen dalga.....	11
Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi.....	12
Şekil 3. Bir solitary dalga.....	12
Şekil 4. İki soliton etkileşimi.....	13
Şekil 5. (5) eşitliğinin $t + \tau$ zamanındaki x konumunda bulunan bir molekülün sıçrama davranışı.....	16
Şekil 6. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.1) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = 0.01, k = 0)$	35
Şekil 7. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.2) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(b_0 = 10^3, b_1 = 10^{-3})$	37
Şekil 8. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.3) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c_0 = 10^3, c_1 = 10^{-3})$	40
Şekil 9. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.3) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c_0 = 10^3, c_1 = 10^{-3})$	42
Şekil 10. Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metodu kullanılarak (3.1) denklemi için elde edilen (3.53) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(\mu_2 = 1, c = 1)$	44
Şekil 11. Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metodu kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (3.57) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = 1)$	45
Şekil 12. Bäcklund dönüşüm metoduna alternatif yaklaşım kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.6) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü $(u_0 = -1, c = 1, A = 1)$	48
Şekil 13. Bäcklund dönüşüm metoduna alternatif yaklaşım kullanılarak (3.3) denklemi için elde edilen (4.12) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(b = -1)$	50
Şekil 14. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.22) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = -1)$	53
Şekil 15. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.23) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = -1)$	53

Şekil 16. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.24) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = -1)$	54
Şekil 17. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.29) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = -1, \mu_2 = 2)$	56
Şekil 18. HAM kullanılarak (3.2) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu görünümü $(c = 0.01)$	60
Şekil 19. HAM kullanılarak (3.2) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu görünümü $(b_0 = 10^3, b_1 = 10^{-3})$	62
Şekil 20. a) Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.1) denkleminin analitik çözümü için üç boyutlu görünümü, b) HAM kullanılarak (3.1) denkleminin yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü $(h = 1)$ c) Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.2) denkleminin analitik çözümü için üç boyutlu görünümü d) HAM kullanılarak (3.2) denkleminin yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü $(h = 1)$	63
Şekil 21. 3.1 denklemi için h eğrisinin grafiği.....	65
Şekil 22. 3.2 denklemi için h eğrisinin grafiği.....	65

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. HAM kullanılarak (3.1) denkleminin yaklaşık çözümünün Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak elde edilen analitik çözüm arasındaki mutlak hata $(h = 1, c = 10^{-3})$	64
Tablo 2. HAM kullanılarak (3.2) denkleminin yaklaşık çözümünün Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak elde edilen analitik çözüm arasındaki mutlak hata $(h = 1, b_0 = 10^3, b_1 = 10^{-3})$	64
Tablo 3. h keyfi parametresinin farklı değerleri için (3.1) denkleminin mutlak hatası $c = 0.001, x = 0.1$	65
Tablo 4. h keyfi parametresinin farklı değerleri için (3.2) denkleminin mutlak hatası $c = 0.001, x = 0.1$	65

SİMGELER LİSTESİ

- M : Dengeleme terimi
 L : Lineer Operatör
 L^{-1} : İntegral Operatörü
 ϕ_n, φ_n : n – terim yaklaşımı
 h : Keyfi bir parametre
 $H(x, t)$: Keyfi bir fonksiyon
 p : Küçük bir parametre

KISALTMALAR

CRWP: Clannish random walker’s parabolic

KdV : Korteveg de Vries

HAM : Homotopi Analiz Metot

D : Boyut

$$u_{3x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$u_{5x} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}$$

1. GİRİŞ

Bu Bölümde öncelikle genel olarak diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonlarına karşılık gelen dalga hakkında genel bilgi verilmiş daha sonra ise çalışmamızın temel konularını teşkil eden tanımlara yer verilerek tezimizde kullanılan kısmi diferensiyel denklemler tanıtılmıştır.

Tarih içerisinde insanlar su kenarlarında, su birikintisine attıkları çakıl taşları sayesinde oluşturdukları dalga hareketini gözlemlemiştir. Birbirlerine seslenirken ya da tabiat kaynaklı oluşan dalga hareketini işitmişlerdir. Güneşten gelen ve yedi rengin birleşmesi ile oluşan dalga hareketini gözlemlemiştir. İlk ateşin bulunması ile beraber, ateşin çıkardığı ışık ve kızılötesi dalga olan ısı hissedilmiştir.

Dalga ifadesinin fizikte önemli bir yere gelmesi 19. yüzyıldan itibaren gerçekleşmiş olup, konu ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır. Dalga ifadesinin ilk tespiti ses dalgaları ile olmuştur. Sesin bir engele çarpıp geri dönmesi, yani yansıma olayı sesin dalga hareketi olduğuna dair güzel bir örneği oluşturmuştur.

Bilindiği üzere madde atomlardan oluşmaktadır. Dalga denilince, bir atom düzeneği üzerinde hareket eden enerji düzeneği akla gelmektedir. Nasıl ki, su kenarında duran bir kişi suya taş attığında su haleleri oluşur; işte oluşan bu su haleleri birbirine çarparak hareket eden dalga hareketidir. Yani iç içe geçmiş su halelerinin her birisi diğer su halesinin hareketinin etkisi sonucu oluşmuştur. Bu harekete dalga hareketi adı verilir.

Ses denilen dalga hareketi de su dalgaları gibi birbiri içerisinde haleler oluşturmaktadır. Hareket için bir merkez ve bu merkezden yayılacak dalgaların hareket edeceği atom kütleleri, yani maddeye ihtiyaç duyulmaktadır. Uzay denilen ve madde parçacıklarının çok az olduğu bir ortamda, ses dalgası hareketinin ilerlemesi için yeterli madde bulunmadığı için karşı tarafa iletilemeyecektir. Ama maddenin olduğu bir ortamda ses oluşunca, parçacıklar arasında sesin ilerlediği fark edilecektir. Bu dalga hareketi fizikte basit olarak osiloskop yardımıyla da görülebilir.

Tek dalga tiplmesi ses olmayıp; geniş bir spektrumda yer alan ve adına elektromanyetik spektrum denilen değişik dalga tipleri bulunmaktadır. Bunlardan bazıları ise radyo dalgaları, arada görünen dalgalar ve ötesinde mor ötesi adı verilen ışınlar, röntgen ışınları, kozmik ışınlar gibi ışınların içerisinde yer aldığı ışınlar da bulunmaktadır.

Görünen ışınların dalga ya da tanecik olduğu konusu çok tartışılmış ve sonunda hem dalga ve hem de tanecik olduğu ifadesi kullanılmıştır. Yapılan deneyler, görünen ışınların yerine göre dalga ve yerine göre tanecik yapısı gösterdiğini ispatlamıştır.

Görünen ışıklardan daha büyük dalga boyuna sahip dalgalara ise kızılötesi dalgalar adı verilmiş ve bu dalgaların içerisinde radyo dalgaları ile televizyon dalgalarının bulunduğu tespit edilmiştir. Görünen ışıklardan daha küçük dalga boyuna sahip olan dalgalara ise mor ötesi ışınlar adı verilmiş ve bu ışınların içerisinde röntgen ışınları ile kozmik ışınların bulunduğu tespit edilmiştir

Genel olarak gerçek su dalgası olayı karmaşıktır ve doğrusal olmadıklarından, modellenmesi üç boyutlu karakterli ve görünen rastgele davranışından dolayı zordur. Bununla birlikte iki klasik teori vardır. Bunlardan biri Airy (1845) tarafından, diğeri Stokes (1880) tarafından basit dalgaları tarif etmek için geliştirilmiştir. Airy ve Stokes teorileri genel olarak su derinliğinin dalga uzunluğuna bağlı ve çok küçük olmadığı durumda dalga hareketini daha iyi açıklarlar. Sığ su için bir Cnoidal dalga teorisi, basit dalgaları kabul edilebilir bir yaklaşımla sağlar. Kırılma bölgesinin yakınındaki çok sığ su için, solitary dalga teorisi, dalga hareketinin belli özelliklerini tatmin edici olarak sağlar. Bu teoriler dalga hareketini tarif eden matematiksel denklemlerle beraber başlıca karakteristiklerine göre tarif edilir. Bazı özel durumlar için literatürde birçok dalga teorisi bulunmaktadır.

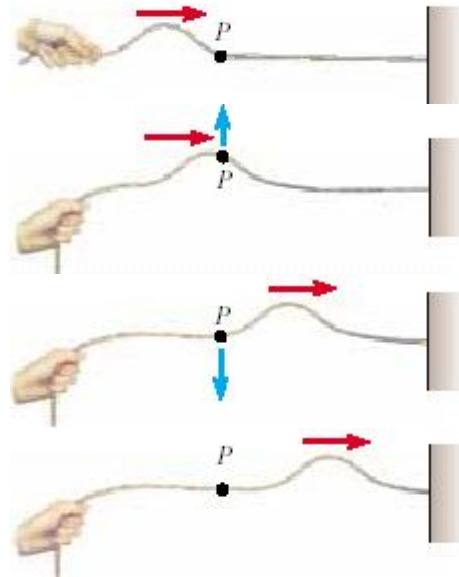
İlk dalga teorisi küçük genlikli veya lineer dalga teorisi olarak isimlendirilip Airy (1845) tarafından geliştirilmiştir. Sadece kolay uygulanabilir olmasından değil, bütün dalga rejimlerinin geniş bir bölümü üzerinde güvenilir olmasından dolayı da, bu dalga teorisinin esas olarak önemi vardır. Matematiksel olarak Airy teorisi dalga hareketinin komple teorik tarifinin ilk yaklaşımı olarak düşünülebilir. Dalgaların daha komple teorik tanımı, serilerdeki her bir ilave terimin önceki terimlere bir düzeltme olduğu, sonsuz sayıdaki başarılı yaklaşımların toplamı olarak elde edilebilir. Bazı durumlar için dalgalar, sonlu genlikli teoriler olarak isimlendirilen, bu tür teoriler tarafından daha iyi tarif edilir.

Trochoidal teori olarak bilinen ilk sonlu genlik teorisi Gerstner (1802) tarafından geliştirilmiştir. Dalga profilinin bir trochoid olmasından ya da serbest yüzeyinden dolayı bu isim verilmiştir. Sadece klasik ilgisinden dolayı bu teoriden bahsedilmiştir. Açıklanan su parçacığı hareketinin gerçek doğada gözlenenden farklı olduğundan uygulama için tavsiye edilmez. Trochoidal teori dalga profilini oldukça hassas bir şekilde açıklar. Stokes (1880) trochoidal teoriden çok daha tatmin edici olan bir sonlu genlikli teori geliştirmiştir. Sığ su bölgeleri için Korteweg ve de Vries (1895) tarafından orijinal olarak geliştirilen

cnoidal dalga teorisi bazı şartlar için dalga formunu ve birleşik hareketlerin oldukça güvenilir bir açıklamasını sağlar. Bununla birlikte cnoidal dalga teorisi, mühendislik problemlerinin çözümünde, gerçek uygulamaları dikkate almıştır. Bu, hesaplardaki zorluklara bağlı olabilir. Son zamanlarda cnoidal dalga teorisinin kullanılmasını gerektiren işler, fonksiyonların tablo ve grafiksel tanımı ile azalmıştır (Wiegel, 1960; Masch ve Wiegel, 1961); fakat teorisinin uygulaması hala karmaşıktır. Cnoidal dalga teorisi sınırında dalga hareketinin görüşü solitary dalga teorisi tarafından tatmin edici bir şekilde açıklanabilir. Cnoidal dalga teorisine benzemeyen solitary dalga teorisini kullanmak, özel tablolara gerek kalmaksızın elde edilebilen fonksiyonlara indirgenebildiğinden dolayı kullanılması kolaydır.

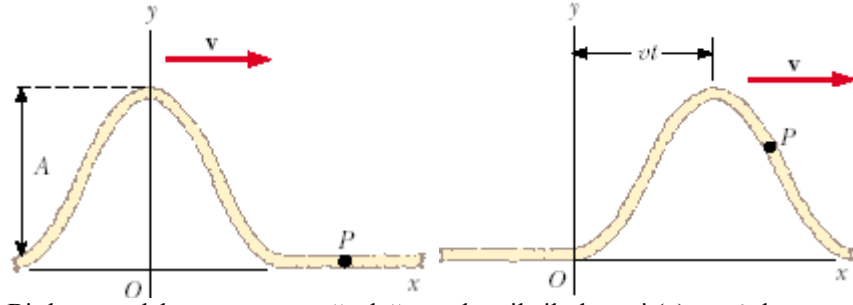
Dalga Esasları ve Dalgaların Sınıflandırılması:

Su dalgasının uygun fiziksel bir tanımı hem onun yüzey formunu hem de dalganın altındaki akışkan hareketini içerir. Basit matematik terimlerle ifade edilebilen dalgaya "basit dalga" denir. Birkaç bileşenden oluşan ve form ya da hareket olarak tanımı zor olan dalgalara "kompleks dalgalar" denir. "Sinüzoidal " veya " basit harmonik dalgalar" yüzey profilinin sadece bir sinüs ya da cosinüs fonksiyonu ile tanımlenebildiği "basit dalgalar" örnektir. Hareketi ve yüzey profili eşit zaman aralıkları ile tekrarlanıyorsa dalga "periyodiktir". Sabit bir noktaya bağlı olarak hareket eden dalga formuna "ilerleyen dalga" denir.



Şekil 1. Hareket eden, enine ilerleyen dalga

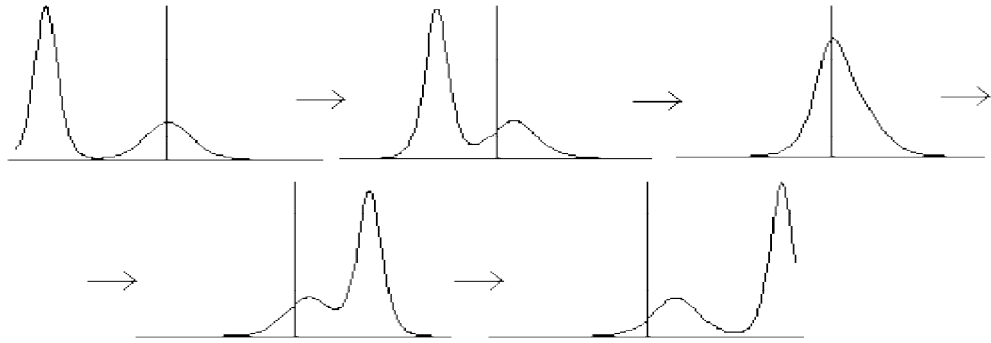
Dalganın hareket ettiği yön "dalga yayılma yönü" olarak ifade edilir.



Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi (a) $t = 0$ da atmanın ifadesi (b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir

Eğer bir dalga formu sabit bir pozisyonda sadece yukarı aşağı hareket ediyorsa buna "komple sürekli dalga" ya da "clapotis" denir. İlerleyen dalga serbest yüzey konfigürasyonunda herhangi bir değişikliğe uğramadan yayılıyorsa "sürekli formun" dalgası olarak bilinir. Şeklini ve genliğini muhafaza eden bu solitary dalgalara Zabusky ve Kruskal solitonlar demiştir. Araştırmacılar, soliton kavramını dünya çapında bilimsel alanın değişik dallarına yaymışlardır. Soliton kavramı plazma fiziği, astrofizik, akışkanlar dinamiği gibi bilimin değişik alanlarındaki rolünden dolayı çalışmaların büyük bir kısmını etkilemiştir. Soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir.

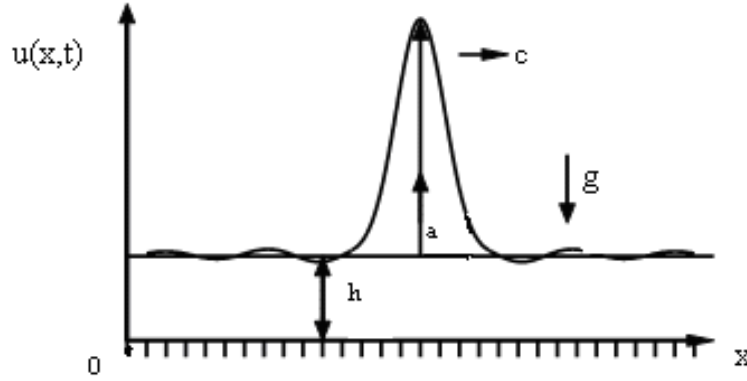
- i) Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.
- ii) Çözüm sınırlandırılır, yani; çözüm üstel olarak sıfıra doğru bozulur veya sonsuzda bir sabite yakınsar.
- iii) Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.



Şekil 3. İki soliton etkileşimi

Eğer su parçacıkları hareketi her bir dalga periyodu için kapalı ve yakın olan yörüngeler tarafından tarif ediliyor ise su dalgaları "titreşimli" veya "hemen hemen titreşimli" olarak düşünülür. Lineer veya Airy teorisi sadece titreşimli dalgaları tarif eder.

Sonlu genlikli dalga teorileri başarılı her dalga tarafından dalga yönünde küçük bir miktar hareket eden akışkan olduğundan hemen hemen titreşimli dalgaları tarif ederler. Bu hareket, dalgaların "kütle transportu" olarak tarif edilir. Su parçacıkları dalga ile beraber ilerliyor ve orijinal pozisyonlarına dönmüyorsa bu dalgaya "çevrinti dalgası" denir. Solitary dalga buna (çevrinti dalgasına) bir örnektir.



Şekil 4. Bir solitary dalga

Yukarıda bahsi geçen Lineer Dalga Teorisi(Airy Dalga Teorisi), iki boyutlu ideal akışkan kavramları kullanılarak ifade edilebilir. Bu teori; dalgaların uzun mesafeler boyunca önemli bir enerji kaybına uğramadan ilerlemesinden ve ne yüzeysel gerilme etkisinin ne de viskozite etkisinin önemli olmamasından dolayı potansiyel akım kabulü yapılarak geliştirilmiştir.

Genel olarak tez içerisinde solitary dalgaların buraya kadar belirtilen önemine binaen hareket eden dalga çözümleri elde etmek amacıyla ikinci Bölümde verilecek analitik metotlar içerisinde Bäcklund dönüşüm ve birleştirilmiş rasyonel açılım metotlarla genel ifadeleri verilecek lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler çözülecektir. Bu denklemlerin çözümlerine, bu metotlarda karşılaşılan bazı durumlar için çözüme daha kolay ulaşılabilecek alternatif yaklaşımlar ele alınarak benzer çözümlere ulaşılmaya çalışılacaktır. Ayrıca çokça ifade edilecek Homojen balans metoduna alternatif yeni bir tanım ortaya konularak literatürde var olan analitik metotlarda karşılaşılan yardımcı diferansiyel denklem kavramının en yüksek dereceli teriminin derecesinin ikiden farklı olduğu durumlar için karşılaşılan zorluklar ortadan kaldırılmaya çalışılacaktır.

KdV denklemi

1844 yılında John Scott Russell tarafından yapılan deneyler ve gözlemlerin detaylı bir şekilde incelenerek rapor edilmesi ile solitary dalgalarla ilgili yeni çalışmaların ve deneylerin kapısı aralanmış olur. Başlangıçta John Scott Russell'ın çalışmaları birçok bilim

insanı tarafından tartışma konusu olmuştur. Tutulan bu raporların bazı çelişkiler taşımış olduğu iddia edilmiş olsa da 1870 yılında Boussinesq ve Rayleigh tarafından yapılan teorik çalışma ile Korteweg ve de Vries tarafından 1895 yılında yayınlanan makale John Scott Russell'ın çalışmalarının doğru olduğu gösterilmiştir. 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries, KdV denklemi olarak bilinen ve solitary dalgaların varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi türetmişlerdir. Ortaya atılan bu KdV denklemi birçok bilim insanının çalışma sahası olmuş ve bu çalışmalar karanlıkta kalan birçok fiziksel olayın aydınlanmasına vesile olmuştur. En basit bir biçimde tanımlanan KdV denklemi

$$u_t + 6uu_x + u_{3x} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada uu_x terimi non-lineerliği ve u_{3x} terimi ise lineer dağılımı temsil eder. KdV denklemi fizik ve mühendisliğin pek çok dalında zayıf bir şekilde lineer olmayan uzun dalgaların tarifi için bir paradigma olarak yaygın bir şekilde bilinir. Bu denklem pek çok sıvı akışı durumu için uygun bir model olarak kullanılır. Burada; $u(x, t)$ dalga genliğini tanımlayan uygun alan değişkenini, t zamanı, x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını göstermektedir. KdV denkleminin

$$u(x, t) = d \operatorname{sech}^2(\delta(x - vt)), \quad V = 2d = 4\delta^2$$

şeklinde solitary dalga çözümlerinin ailesi tarafından formüle edilir. Burada verilen analitik çözümde, δ dalga sayısını, V dalganın hızını, d dalganın genliğini göstermektedir.

Clannish random walker's parabolik denklemi

Fiziko kimya alanında camsı polimerlerdeki difüzyon, Fick yasasına uymayan “II. durum difüzyon” olarak bilinmektedir. “II. durum difüzyon” adı altında sınıflandırılmasına temel teşkil eden bazı deneysel gerçekler, üç ana yapıdadır.

-hareket eden dalgaların oluşturduğu olası yoğunluk (konsantrasyon) profilleri,

-kinetik izoterm soğurma eğrisinin S -yapısı $\frac{M_t}{M_\infty} \rightarrow \sqrt{t}$

-sürecin başlangıç zamanlarındaki $\frac{M_t}{M_\infty} \rightarrow t$ nin çizgisel yapısı

II. durum difüzyon'un bahsedilen özelliklerini oluşturan, rastlantısal hareket sürecinden kısmi diferansiyel denkleme geçişin nasıl olduğunu gösteren bir yol net olarak

ortaya konulamamıştır. Ancak listelenen özelliklerde ilk sırada yer alan hareket eden dalgalar çözümü üzerine bazı tahminlerde bulunabilir.

Bilindiği gibi, var olan uygun rastlantısal hareket süreçte en az üç sınıf denklem vardır:

1. Smoluchowski denklemi

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c \frac{\partial p}{\partial x} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

veya

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [c(x)p] + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1.2)$$

2. Quasi-linear difüzyon denklemi

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (1.3)$$

3. Hiperbolik Smoluchowski denklemi (İndirgenmiş dalga denklemi)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(.) \frac{\partial p}{\partial x} \right], \quad (1.4)$$

burada p olası yoğunluk, $D(.)$ ise D , $D(t)$ veya $D(x)$ hareket eden dalgalar sürecindeki çözümlerdir.

Bu analiz, sınır koşullarına bağlı olarak membran içinde olası yoğunluk gradientinin ortaya çıktığı, camsı polimer membranlardaki bir boyutlu difüzyona uygulanabilir. Ayrıca nanopor'lar gibi sınırlandırılmış 1D geometrilere de uygulanabilir. Yüksek boyutlu uzayda, olası yoğunluk gradientinin yönüne göre bakıldığında enine olacak bir şekilde yerel bir denge olduğundan sınırlandırılmış geometrilere 2D/3D problemi, 1D difüzyon problemine indirgenebildiğinden bahsedilmektedir.

Yukarıda bahsi geçen rastlantısal hareketten, kısmi diferansiyel denklemlere geçişi göstermek için aşağıdaki yol izlenmiştir.

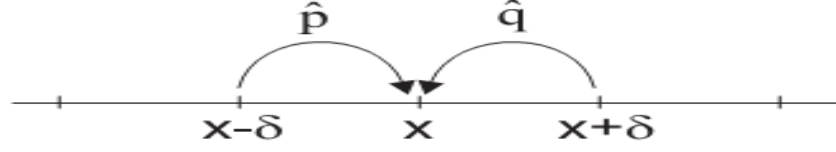
“ Random walk ” tan kısmi diferansiyel denklemlere geçiş

(i) Çarpışan moleküllerin sabit sıçrama olasılıkları

Moleküllerin hareketinde saptanan rastlantısallık, her çarpışmanın birbirinden bağımsız olarak her parçacığı olası $\hat{p}$ ile sağa veya olası $\hat{q}$ ile sola hareket ettirdiği kabul edilerek karakterize edilebilir (burada $\hat{p} + \hat{q} = 1$ dir).

Eğer parçacığın t zamanında bulunduğu olası x konumunu $p(x,t)$ gibi fonksiyonla ifade edecek olursak;

$$p(x \pm \delta, t) = p(x, t) \pm \delta p_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 p_{xx}(x, t) + O(\delta^3) \quad (1.5)$$



Şekil 5. (1.5) eşitliği için $t + \tau$ zamanındaki x konumunda bulunan bir molekülün sıçrama davranışı. (1.5) ile verilen eşitlikteki tüm terimler “artık terimleri” ile beraber Taylor serisine açılırsa,

$$\begin{cases} p(x \pm \delta, t) = p(x, t) \pm \delta p_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 p_{xx}(x, t) + O(\delta^3) \\ p(x, t + \tau) = p(x, t) + \tau p_t(x, t) + O(\tau^2) \end{cases} \quad (1.6)$$

elde edilir.

(1.6) eşitliği (1.5) denkleminde yerine yazılır ve $\delta \rightarrow 0$ ve $\tau \rightarrow 0$ için limiti alınır

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c \frac{\partial p}{\partial x} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1.7)$$

şeklinde Smoluchowski denklemi elde edilir.

(ii) Konuma bağlı sıçrama olasılıkları

Önceki bölümde ortaya çıkan sonuçlar genişletilirse, rastlantısal hareket sürecinde parçacığın saptanan x konumundan olası sağa doğru hareketindeki i . adımı

$$P(x_i = -\delta) = \hat{p}(x) = \frac{1}{2} [1 - b(x) \delta] \quad (1.8)$$

ve olası sola doğru hareketi

$$P(x_i = \delta) = \hat{q}(x) = \frac{1}{2} [1 + b(x) \delta] \quad (1.9)$$

şeklindedir. Herhangi bir $b(x)$ için $\hat{p} + \hat{q} = 1$ olduğu açıktır. (1.8) ve (1.9) denklemlerinden (1.5) eşitliği

$$p(x, t + \tau) = \hat{p}(x - \delta, t) p(x - \delta, t) + \hat{q}(x + \delta, t) p(x + \delta, t) \quad (1.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D(b(x)) + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (1.11)$$

kısmi diferensiyel denklemi elde edilir.

Dikkat edilirse $b(x)$ sabit olarak alınırsa (1.11) eşitliği ile ifade edilen heterojenik drift tanımı, II. hal difüzyon'daki indüklenmiş streslerin aktivitesini (1.7) ile verilen denklemdeki tanıma nazaran daha iyi yansıtmaktadır. Yani, yoğunlaşma profilinin şekil ve konumu üzerindeki bazı deneysel kanıtlar $b(x)$ fonksiyonu ile hesaba katılabilir.

Beklenildiği gibi, lineer olmayan difüzyon durumunda, rastgele hareketin sağa p veya sola q gitme olasılıkları konsantrasyona (olası yoğunluğa) bağlıdır.

(iii) Clannish random walk

Eş zamanlı olarak 1D rastlantısal hareket sergileyen, A ve B olmak üzere iki tür rastlantısal harekete sahip bir nüfus olduğu kabul edilsin. Bu rastlantısal hareket, çok sayıda hücrelere bölünmüş bir yatay çizgide gerçekleşirken her bir hücrenin uzunluğunu a ve her türün sabit yoğunluğunu ise ρ denirse, her hücredeki hareketlerin toplam sayısı $N = \rho a$ ile ifade edilir.

α parametresiyle karakterize edilmiş bir klanlaşma eğilimi, bir hücrede yer alan ve ρ yoğunluğuna sahip A türünün sağa doğru hareket etme olasılığı ile ifade edilirse, sağa doğru iken

$$\hat{p} + \alpha(1 - p) \quad (1.12)$$

sola doğru iken

$$\hat{q} - \alpha(1 - p) \quad (1.13)$$

ve yukarıdan açıkça $p + q = 1$ olduğu görülmektedir. Son olarak

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D(b(x)) + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

dir. Burada $D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{\tau} \right)$, $P = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{a(2\hat{p}-1)}{\tau} \right)$ ve $\psi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{2\alpha}{\tau} \right)$ şeklindedir. (1.14)

denklemini daha basit hale getirmek için $\phi = P + \psi$ ve $r = \frac{p\phi}{\psi}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial r}{\partial x} - \psi r(1-r) \right] \quad (1.15)$$

klan rastlantısal hareket (Clannish Random walk) denklemi elde edilir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1. 1 Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferensiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferensiyel denkleme *adi diferensiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferensiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.16)$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferensiyel denkleme *kısmi diferensiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (1.17)$$

olarak yazılır.

Tanım 1. 2 Bir diferensiyel denklem lineer veya lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferensiyel denkleme *lineer diferensiyel denklem* denir. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferensiyel denklemlere *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1. 3 Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk *n. mertebeden türeve sahip fonksiyonu*

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \quad (1.18)$$

ise Φ fonksiyonuna (1.16) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir. Bir adi diferensiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* ile tanımlanır. Bir diferensiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, sınır şartları ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.19)$$

(1.16) ve (1.19) ile birlikte verilen bir problem başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir. Diğer taraftan

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \dots, y(x_n) = y_n, \quad (1.20)$$

(1.19) ve (1.20) ile birlikte verilen denkleme sınır değer problemi denir.

Diferensiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması açısından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemin genel hali;

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \quad (1.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b, c, d, e, f ve g sabitler ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

$\Delta = 0$ ise denklem Parabolik (Difüzyon Denklemi),

$\Delta > 0$ ise denklem Hiperbolik (Dalga Denklemi),

$\Delta < 0$ ise denklem Eliptik (Laplace Denklemi),

olarak sınıflandırılmaktadır. Örnek olarak; parabolik tipteki bir kısmi diferensiyel denkleme difüzyon (ısı) denklemi, hiperbolik tipteki bir kısmi diferensiyel denkleme dalga denklemi, eliptik tipteki bir kısmi diferensiyel denkleme ise Laplace denklemi verilebilir.

$$u_t + c^2 u_{xx} = 0 \text{ Difüzyon Denklemi,}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ Dalga Denklemi,}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ Laplace Denklemi}$$

dir. Örneğin;

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.22)$$

denklemini göz önüne alalım. (1.22) ile verilen Laplace denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. Yukarıda göz önüne alınan (1.22) denklemi

$$u(x, 0) = f(x) \text{ ve } u_x(x, 0) = g(x), \quad (1.23)$$

başlangıç şartları ile verilmiş ise probleme *Cauchy problemi*,

$$u(0, t) = p(t) \text{ ve } u(\ell, t) = q(t), \quad (1.24)$$

şartları ile verildiğinde, probleme *Dirichlet Problemi*, eğer çözüm bölgesinin dışında dış normal boyunca çözüm aranıyorsa yani;

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(t), \quad (1.25)$$

şartı ile verilen (1.22) denkleme ise *Neumann Problemi* denir.

Tanım 1. 4 $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. k pozitif bir reel sayı olmak üzere $\forall x \in A$ için

$$f(x+k) = f(x),$$

eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna *periyodiktir* denir ve k ya da f fonksiyonunun periyodudur denir.

Tanım 1. 5 Kompleks düzlemde iki yönde periyodik olan fonksiyonlara *eliptik fonksiyon* denir. Eliptik fonksiyon, eliptik integrallerin ters fonksiyonları olarak da tanımlanabilir. w herhangi bir kompleks sayı olmak üzere kompleks düzlemdeki bütün z sayıları için $f(z+w) = f(z)$ olacak şekilde f fonksiyonuna periyodiktir denir ve w ise f fonksiyonunun periyodu olarak adlandırılır. a ve b iki esas periyot olmak üzere $w = ma + nb$ olarak yazılabilir. Böylece her eliptik fonksiyon bir çift esas periyoda sahiptir.

Tanım 1. 6 Jakobi eliptik fonksiyonlar eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(u, m)$, $dn(u, m)$, $sn(u, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < m^2 < 1 \quad (1.26)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar. Burada $m = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(u, m) = am(u)$ olmak üzere Jakobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(u, m) = am(u, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(u, m)) = sn(u, m), \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(am(u, m)) = cn(u, m), \\ \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\varphi)} &= \sqrt{1 - m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m) \end{aligned} \quad (1.28)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned} sn(u, 0) &= \sin(u), & sn(u, 1) &= \tanh(u), \\ cn(u, 0) &= \cos(u), & cn(u, 1) &= \operatorname{sech}(u), \\ dn(u, 0) &= 1, & dn(u, 1) &= \operatorname{sech}(u) \end{aligned} \quad (1.29)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jakobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türev

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(sn(u)) &= cn(u)dn(u), \\ \frac{d}{du}(cn(u)) &= -sn(u)dn(u), \\ \frac{d}{du}(dn(u)) &= -m^2 sn(u)cn(u) \end{aligned} \quad (1.30)$$

eşitlikleri ile açıklanır. Jakobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanı sıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1, \quad (1.31)$$

$$m^2 sn(u) + dn^2(u) = 1$$

bağıntıları vardır.

Tanım 1.7 Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim

$u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir.

Tanım 1.8 X ve Y iki uzay ve $I\{t|0 \leq t \leq 1\}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $\phi: X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x, 0) = f(x)$ ve $\phi(x, 1) = g(x)$ oluyor ise $f, g: X \rightarrow Y$ dönüşümlerine *homotopiktirler* denir ve $f \approx g$ ile gösterilir. $\phi: f \rightarrow g$ ise ϕ, f 'den g 'ye bir *homotopi* kurar şeklinde ifade edilir.

2. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Evulasyon ve dalga denklemleri zamana bağlı türevler içeren kısmi diferensiyel denklemlerdir. Bu tür denklemlerin çözümlerinin aranması son yıllarda matematikçiler tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bazı bilgisayar paket programları özellikle Maple veya Mathematica kullanılmasıyla evulasyon ve dalga denklemlerinin çözümleri daha kolay bir hal almıştır. Bu tür denklemler fiziksel olayların matematiksel modelleri olduğundan, çözümleri fiziksel olayların daha iyi yorumlanması adına fizikçilere ve mühendislere yardımcı olabildiğinden, denklemlerin çözümü için birçok metot geliştirilmiştir.

Bu bölümde kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bazı analitik metotlar verilecektir.

2.1. Analitik Metotların Analizi

Tabiat olaylarının matematiksel modellemesi genellikle lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler ile açıklanabildiğinden bu denklemlerin analitik çözümleri büyük bir öneme sahiptir. Çünkü bu çözümler o denklemin yapısı, karakteri ve mekanizması hakkında bilgi vermektedir. Son yıllarda kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri ve periyodik dalga çözümlerine olan ilgi artmıştır. Bu çözümleri elde etmek için birçok metot geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları şöyle sıralanabilir: Genelleştirilmiş Miura dönüşümü [4], benzerlik indirgeme metodu [11], sine-cosine metodu [12], Hirota'nın bağımlı değişken metodu [14], ters saçılma metodu [15], Darboux dönüşümü [16], Painleve açılım metodu [17], homojen balans metodu [19-22], Bäcklund dönüşümü [24-29], Jakobi eliptik fonksiyon metodu [30-35], Kudryashov metod [36-43], Hirota bilinear form metodu [44], Cole-hopf dönüşümü [45], tanh fonksiyon açılım metotları [10,46-54], üstel fonksiyon açılım metodu [55-58], $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu [59-62] gibi analitik metotların yanı sıra bazı yarı analitik metotlar da, Adomian Decomposition metod [63-66], Homotopi analiz ve perturbasyon metodları [67-81].

2.1.1 Homojen Balans metodu

Wang [19] tarafından literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için

$$\psi(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

denkleminde $w = w(x, t)$ fonksiyonu (2.1) in yaklaşık çözümü kabul edilir. Ancak, (2.1) deki fonksiyonların uygun bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılan ve sadece bir değişkene bağlı olan f fonksiyonu (2.1) denkleminin gerçek bir çözümüdür. f dönüşümü kullanılarak (2.1) denklemini

$$\psi(1, f(w), f(w)_t, f(w)_x, f(w)_{xx}, f(w)_{xt}, f(w)_{tt}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. Burada f ve w fonksiyonlarının bulunuşu ve (2.1) deki fonksiyona uygun bir lineer kombinasyonlarının yaklaşık çözümünün oluşturulması için üç durum söz konusudur.

(i) (2.1) denklemindeki fonksiyonun uygun bir lineer kombinasyonu seçilerek katsayılar hesaplanır. Yani, verilen denkleminin en yüksek mertebeden lineer terimi ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim için uygun bir lineer kombinasyon kullanılır. f ve w fonksiyonlarının gerekli türevleri kullanılarak (2.1) denklemini polinom şekline dönüşür. Burada oluşturulan en yüksek derecedeki eşitlikler önemlidir.

Örneğin, verilen bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleminin en yüksek lineer olmayan terimi uu_x ve en yüksek mertebeden lineer olan terimi u_{xxx} olsun. (2.2) ifadesindeki fonksiyonların bir birleşimi

$$u = \frac{\partial^{m+n} f(w)}{\partial x^m \partial t^n} + f(w)$$

şeklinde olsun. (2.2) de $(m+n)$ mertebeden daha düşük tüm terimler

$$u = f^{(m+n)} w_x^m w_t^n + w(x, t) \quad (2.3)$$

eşitliğindeki mevcut kısmi türevlerin $(m+n)$ inci ($m \geq 0, n \geq 0$) mertebesinden daha düşük tüm terimleri şeklinde olsun. Bu durumda (2.3) kullanılırsa

$$uu_x = f^{(m+n)} f^{(m+n+1)} w_x^{2m+1} w_t^{2n} + w(x, t) \quad (2.4)$$

eşitliğin mevcut kısmi türevlerinin $2(m+n)+1$ mertebesinden daha düşük tüm terimleri

$$u_{xxx} = f^{(m+n+3)} w_x^{m+3} w_t^n + w(x, t) \quad (2.5)$$

eşitliğinin mevcut kısmi türevlerinin $m+n+3$ mertebesinden daha düşük terimleri (2.4)

ve (2.5) teki w fonksiyonunun en yüksek mertebeden kısmi türevlerine eşitlenirse $2m+1=m+3$ ve $2n=n$ olur. Buradan $m=2$ ve $n=0$ bulunur. (2.3) de bu değerler yerine yazılırsa

$$u = \frac{\partial^2 f(w)}{\partial x^2} + w(x,t) \quad (2.6)$$

elde edilir.

(ii) Birinci basamakta seçilen lineer kombinasyon (2.1) de yerine yazılarak w nin en yüksek mertebeden türevleri ile bütün terimler bir araya getirilerek sıfıra eşitlenir. Daha sonra f fonksiyonu için adi diferensiyel denklem haline gelir ve bu denklem çözülür. Burada birçok fonksiyon logaritmik fonksiyondur.

(iii) f fonksiyonunun çeşitli türevlerine ait lineer olmayan terimler f fonksiyonunun daha yüksek mertebeli türevlerine dönüştürülür. Bu işlemten sonra f fonksiyonunun aynı mertebeli türevleri bir araya getirilir ve aynı mertebeli türevlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek w fonksiyonu için denklem dizisi elde edilir. Bu denklem dizisinin sol tarafları w fonksiyonunu ve türevlerini içerir. Burada w fonksiyonu homojen denklemin çözümü olan bazı sabitlerinin bulunması gereken üstel bir fonksiyon olarak kabul edilir. Buradan cebirsel denklemler elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel denklemler için çözüm mevcutsa w fonksiyonu ve (i) de seçilen lineer kombinasyonların katsayıları hesaplanmış olur.

2.1.2. Bäcklund Dönüşüm Metodu

Tarihsel olarak Bäcklund dönüşümü diferensiyel geometride ve diferensiyel denklemler ile ilgili olan teorilerdeki çalışmalar yardımı ile 19. yüzyılın sonlarında ortaya çıkmıştır. Herhangi bir uzayın bir noktasında sürekli ve türevlenebilir bir yüzeyi başka bir yüzeye dönüştüren dönüşümlerin bir genellemesidir. İlk olarak Bäcklund dönüşümü Sine-Gordon ($u_{xt} = \sin u$) denkleminde uygulanmıştır. Bäcklund (1874), Bianchi (1879) ve Lie (1888, 1890, 1893) Sine-Gordon denkleminin var olan çözümü dışında yeni çözümler elde etmiştir. Clarin (1903) te bu dönüşümü Bäcklund dönüşümü olarak adlandırmıştır. Bu dönüşümler üzerine çalışmalar 1970 de solitonların keşfine kadar pek etkin olarak kullanılmamıştır. Solitonların gelişimi ile beraber Bäcklund dönüşümü üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri de Fan (2000) tarafından yapılan çalışmadır.

Fan [20,21] tarafından literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için.

$$u_t = H(u, u_x, u_{xx}, \dots) \quad (2.7)$$

kısmi diferensiyel denkleminin homojen balans dönüşümüne göre Bäcklund dönüşümü

$$u = \frac{\partial^a}{\partial x^a} f + u_0 \quad (2.8)$$

şeklindedir. Burada $f = f(w)$ ve $w = w(x, t)$ şeklindedir ve de u ile u_0 fonksiyonları (2.7) denkleminin iki çözümüdür. a , u fonksiyonunun en yüksek mertebeden türevli lineer terimi ile en yüksek mertebeli lineer olmayan teriminin dengelenmesi ile tespit edilir. (2.8), (2.7) denkleminde yerine yazılırsa elde edilen denklem en yüksek kuvvetten w_x parantezine alınır, parantezin içinde f fonksiyonuna bağlı bir adi diferensiyel denklem elde edilir ve bu denklem çözülerek f fonksiyonu bulunur. Bulunan bu f fonksiyonundan yararlanarak diğer bütün f ye bağlı olan türevler $f', f'', \dots$ şeklinde ifade edilir ve son denklem $f', f'', \dots$ parantezine alınır. Daha sonra parantez içinde bulunan w fonksiyonuna bağlı türevler birlikte yazılarak w fonksiyonu hesaplanır. Hesaplanan bu f ve w fonksiyonları yerlerine yazılarak dönüşüm bulunur ve u çözüm fonksiyonu bulunmuş olur. Bulunan bu u fonksiyonu (2.7) denkleminin solitary dalga çözümüdür.

2.1.3. Birleştirilmiş Rasyonel Açılım Metot

2004 yılında Chen, Wang, Li [34] genelleştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metodunda

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.9)$$

kısmi diferensiyel denklemini $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx + wt$ dönüşümü ile

$$Q'(u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.10)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem haline getirmiş ve (2.9) denkleminin periyodik dalga çözümlerini bulmak için

$$(F')^2 = A + BF^2 + CF^4, \quad (2.11)$$

diferensiyel denklemini baz almıştır. Burada $F' = \frac{dF}{d\xi}$ dir ve A, B, C de sabittir. (2.9)

diferensiyel denklemi için

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{i=1}^m [a_i F^i(\xi) + b_i F^{-i}(\xi)], \quad (2.12)$$

formunda bir çözüm aramıştır. Burada m sayısı (2.10) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesi sonucu bulunan sabit bir sayıdır. Bu çözüm üzerinden gerekli türevler alınarak (2.10) diferensiyel denkleminde yerine yazılır. Daha sonra elde edilen denklemde F^i ve F^{-i} terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi yazılır. Elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek a_0, a_i, b_i sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler, (2.11) eliptik diferensiyel denklemin çözümleri olarak bilinen ve Chen ve Zhang [32] tarafından hesaplanan

$$i) \begin{cases} A = 1 \\ B = -(1+m^2) \\ C = m^2 \end{cases}, \quad F(\xi) = sn\xi, cd\xi, \quad (2.13)$$

$$ii) \begin{cases} A = 1-m^2 \\ B = 2m^2-1 \\ C = -m^2 \end{cases}, \quad F(\xi) = cn\xi, \quad (2.14)$$

$$iii) \begin{cases} A = m^2-1 \\ B = 2-m^2 \\ C = -1 \end{cases}, \quad F(\xi) = dn\xi, \quad (2.15)$$

$$iv) \begin{cases} A = -m^2(1-m^2) \\ B = 2m^2-1 \\ C = 1 \end{cases}, \quad F(\xi) = ds\xi, \quad (2.16)$$

$$v) \begin{cases} A = 1-m^2 \\ B = 2-m^2 \\ C = 1 \end{cases}, \quad F(\xi) = cs\xi, \quad (2.17)$$

$$vi) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2-2}{2} \\ C = \frac{m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{sn\xi}{1 \pm dn\xi}, \quad (2.18)$$

$$vii) \begin{cases} A = \frac{m^2}{4} \\ B = \frac{m^2 - 2}{2} \\ C = \frac{m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = sn\xi \pm icn\xi, \quad \frac{dn\xi}{i\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm cn\xi}, \quad (2.19)$$

$$viii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1-2m^2}{2} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{dn\xi}{mcn\xi \pm i\sqrt{1-m^2}}, \quad msn\xi \pm idn\xi, \quad \frac{sn\xi}{1 \pm cn\xi}, \quad \frac{cn\xi}{\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm dn\xi}, \quad (2.20)$$

$$ix) \begin{cases} A = \frac{m^2 - 1}{4} \\ B = \frac{m^2 + 1}{2} \\ C = \frac{m^2 - 1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{dn\xi}{1 \pm msn\xi}, \quad (2.21)$$

$$x) \begin{cases} A = \frac{1-m^2}{4} \\ B = \frac{m^2 + 1}{2} \\ C = \frac{1-m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn\xi}{1 \pm sn\xi}, \quad (2.22)$$

$$xi) \begin{cases} A = -\frac{(1-m^2)^2}{4} \\ B = \frac{m^2 + 1}{2} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = mcn\xi \pm dn\xi, \quad (2.23)$$

$$xii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2 + 1}{2} \\ C = \frac{(1-m^2)^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{sn\xi}{dn\xi \pm cn\xi}, \quad (2.24)$$

$$xiii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2 - 2}{2} \\ C = \frac{m^4}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn}{\sqrt{1 - m^2} \pm dn\xi} \quad (2.25)$$

ifadeleri ele alınan yardımcı denklemin çözüm fonksiyonları olarak yerlerine yazılarak (2.9) diferensiyel denklemi için dalga çözümleri elde etmişlerdir.

Chen, Wang, Li [34,35] yukarıda ifade edilen eliptik fonksiyon metotları üzerine çalışmalar yaparak 2004 yılında *Jakobi eliptik rasyonel açılım metot*'u geliştirmiş ve 2006 yılında *Birleştirilmiş rasyonel açılım metot*' u literatüre kazandırmıştır. Bu metodu açıklamak için (2.9) ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi göz önüne alalım. (2.9) denklemi $u(x,t) = u(\xi)$, $\xi = kx + wt$ dönüşümü ile (2.10) şeklinde adi diferensiyel denklem haline dönüşür. Böylece (2.9) denkleminin aranan çözümü,

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{r_1+r_2=j} a^j_{r_1 r_2} F^{r_1}(\xi) G^{r_2}(\xi)}{(\mu_1 F(\xi) + \mu_2 G(\xi) + 1)^j} \quad (2.26)$$

dir. Burada a_0 , $a^j_{r_1 r_2}$, μ_1 ve μ_2 ($i = 1, 2, \dots$) ileride hesaplanacak sabitlerdir. $F = F(\xi)$ ve $G = G(\xi)$, $\frac{dF}{d\xi} = K_1(F, G)$, $\frac{dG}{d\xi} = K_2(F, G)$ türevlerini sağlayan K_1 ve K_2 polinomlarına sahip fonksiyonlardır. m pozitif tam sayısı (2.10) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesiyle belirlenir. Daha sonra u çözüm fonksiyonu ve gerekli türevleri (2.10) denkleminde yerlerine yazılarak $F^p(\xi)G^q(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir ($p = 1, 2, \dots$ ve $q = 0, 1$). Bu denklemde $F^p(\xi)G^q(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklem sisteminin çözülmesi ile a_0 , $a^j_{r_1 r_2}$, μ_1 ve μ_2 sabitleri bulunur. Rasyonel açılım metodunda çözüm fonksiyonuna bağlı olarak iki tip çözüm aranmaktadır.

2.1.3.1. Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metod

Birleştirilmiş rasyonel açılım metodunda, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem için çözüm formunun rasyonel Jacobi eliptik fonksiyon çözüm formunda arandığı bir uygulamadır.

Burada aranılan çözüm formu;

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{a_j sn^j(\xi) + b_j sn^{j-1}(\xi) cn(\xi)}{(\mu_1 sn(\xi) + \mu_2 cn(\xi))^j} \quad (2.27)$$

dir.

2.1.3.2. Riccati rasyonel açılım metot

Birleştirilmiş rasyonel açılım metodunda, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için çözüm formunun Riccati denkleminin çözüm fonksiyonu formunda arandığı bir uygulamadır. F ve G Riccati denkleminin çözümleri içinde sınırlandırılırsa aranılan çözüm formu;

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i F^i(\xi) + b_i F^{i-1}(\xi) \sqrt{R + F^2(\xi)}}{(\mu_1 F(\xi) + \mu_2 \sqrt{R + F^2(\xi)} + 1)^i}, \quad (2.28)$$

dır. Burada $F' = R + F^2$ Riccati denklemi olmak üzere, $F = F(\xi)$ fonksiyonu Riccati denkleminin çözümüdür. Dolayısıyla Riccati diferansiyel denkleminin çözümleri olarak elde edilen

$$\begin{cases} F = -\sqrt{-b} \tanh \sqrt{-b} \xi \\ F = -\sqrt{-b} \coth \sqrt{-b} \xi \end{cases}, \quad b < 0 \text{ ise} \quad (2.29)$$

$$F = -\frac{1}{\xi}, \quad b = 0 \text{ ise} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} F = \sqrt{b} \tan \sqrt{b} \xi \\ F = -\sqrt{b} \cot \sqrt{b} \xi \end{cases} \quad b > 0 \text{ ise} \quad (2.31)$$

fonksiyonları yardımıyla (2.9) denkleminin hareket eden dalga çözümleri elde edilir.

2.1.4. Kudryashov Metot

Kudryashov [40] tarafından 2004 yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için (2.9) ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alınırsa (2.9) denklemini $u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile

$$Q_1(-cy_\xi, y_\xi, c^2 y_{\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (2.32)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem haline dönüşür. (2.9) denkleminin çözümü

$$y(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i Q^i(\xi)$$

formunda aranır. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots$ ileride hesaplanacak sabitlerdir ve $Q = Q(\xi) = \frac{1}{1+e^\xi}$

$Q_\xi = Q^2 - Q$ denklemini sağlayan fonksiyondur. m pozitif tam sayısını yani dengeleme terimini hesaplarken (2.32) denkleminde $y = z^p$ yazılarak tüm terimlerin dereceleri karşılaştırılarak en küçük dereceli iki veya daha fazla terim seçilir. p nin minimum değeri (2.32) denkleminin çözümünün kutbu olarak tanımlanır. Daha sonra y çözümü ve gerekli

$$y_\xi = \sum_{i=1}^m a_i i(Q-1)Q^i, y_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^m a_i i((i+1)Q^2 - (2i+1)Q + i)Q^i \quad (2.33)$$

türevleri (2.9) denkleminde yerlerine yazılarak $Q(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $Q(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile $a_0, a_1, a_2, \dots$ sabitleri bulunur.

2.1.5. Üstel Fonksiyon Metot

He [55] tarafından 2006 yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için (2.9) ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (2.9) denklemini $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (2.10) şeklinde adi diferansiyel denklem haline dönüştür. (2.10) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)}, \quad (2.34)$$

formunda kabul edilir. Burada c, d, p ve q daha sonra belirlenecek pozitif tamsayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabitlerdir. (2.10) denkleminin çözümü olarak kabul edilen (2.34) eşitliği daha açık olarak

$$u(\xi) = \frac{a_c \exp(c\xi) + \dots + a_{-d} \exp(-d\xi)}{a_p \exp(p\xi) + \dots + a_{-q} \exp(-q\xi)}, \quad (2.35)$$

şeklinde yazılabilir. Burada p, c, d ve q pozitif tam sayıları (2.10) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesiyle belirlenebilir. Daha sonra (2.34) çözümü ve gerekli türevleri (2.10) denkleminde yerlerine yazılarak $\exp(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $\exp(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile a_n ve b_m sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler (2.34) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (2.9) denkleminin hareket eden dalga çözümleri bulunmuş olur.

2.1.6. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metot

2008 yılında ilk olarak Wang [59] ve arkadaşları tarafından sunulan metodun yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarından farklı olan tarafı Riccati diferensiyel denkleminin yerine $G = G(\xi)$ olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (2.36)$$

şeklinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferensiyel denklemin seçilebilmesidir. Ayrıca (2.9) denklemini için aranan çözüm

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m \left(\frac{G'}{G}\right)^m \quad (2.37)$$

olacak şekilde aranır. (2.37) çözümü yazılırken $\left(\frac{G'}{G}\right)$ fonksiyonunun değeri (2.36)

denkleminin çözümünde hesaplanan G çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilir.

Bu metot üzerine çalışmalar yapılarak 2010 yılında Guo ve Zhou [60] tarafından

genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metot ve arkasından Lü ve arkadaşları [61] tarafından

genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metot literatüre kazandırılmıştır.

2.1.7. $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -Açılım Metot

2011 yılında Yokuş [82], $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodundan esinlenerek $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -açılım metodun geliştirmiş ve tezinde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu kullanılarak çözümlerinin elde edilemediği bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünü $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -açılım metodu ile elde etmiştir. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodundan farklı olarak yardımcı denklem

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0 \quad (2.38)$$

olarak ele almıştır.

3. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN UYGULAMALAR

Bu Bölümde bir önceki Bölümde analizleri yapılan ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini veren metotlardan Bäcklund dönüşüm ve Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metotları ile

$$u_t - u_x + 2uu_x + u_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

$$u_t - uu_x + uu_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (3.2)$$

$$u_t - u^2 u_x + u^2 u_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (3.3)$$

$$u_t + 6uu_x + u_{3x} = 0 \quad (3.4)$$

denklemleri ile tanımlı sırasıyla CRWP, 5. Mertebeden KdV-like denklemleri ve KdV denklemi için hareket eden dalga çözümleri elde edilecektir.

3.1. CRWP ve KdV Denklemlerine Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması

3.1.1 CRPW Denkleminde Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması

Homojen balans [21] metoduna göre (3.1) denklemi için Bäcklund dönüşümü aranacak olursa; verilen denklemde en yüksek mertebeden lineer olmayan terim uu_x ile en yüksek mertebeden lineer terim u_{xx} dengelenirse (2.8) dönüşümünde $a = 1$ olur. Böylece

$$u = \frac{\partial}{\partial x} f(w) + u_0 = f'w_x + u_0 \quad (3.5)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $f = f(w)$, $w = w(x, t)$ ve $u_0 = u_0(x)$ dir. (3.5) ifadesi (3.1) de yerine yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned} & (2ff'' - f''')w_x^3 + (f''w_t w_x - f''w_x^2 - 2f''w_x w_{xx} + f'^2 w_x w_{xx} + f''w_x^2 u_0) + \\ & - f'w_{xxx} + f'w_{xt} + f'w_x(u_0)_x + f'w_{xx}u_0 - f'w_{xx} + (u_0)_x + (u_0)_t + u_0(u_0)_x = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. (3.6) eşitliğinde w_x^3 in katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$2ff'' - f''' = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklem elde edilir. (3.7) denkleminde

$$f = -\ln w, \quad (3.8)$$

bulunur ve buradan dönüşüm için gerekli olan

$$f'^2 = f'' \quad (3.9)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.9), (3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(2ff'' - f''')w_x^3 + (f''w_t w_x - f''w_x^2 - 2f''w_x w_{xx} + f''w_x w_{xx} + f''w_x^2 u_0) - \quad (3.10)$$

$$f'w_{xxx} + f'w_{xt} + f'w_x(u_0)_x + f'w_{xx}u_0 - f'w_{xx} + (u_0)_x + u_0(u_0)_x = 0$$

olur. f' ve f'' parantezine alınarak

$$(2ff'' - f''')w_x^3 + f''(w_t w_x - w_x^2 - 2w_x w_{xx} + w_x w_{xx} + w_x^2 u_0) + \quad (3.11)$$

$$f'(-w_{xxx} + w_{xt} + w_x(u_0)_x + w_{xx}u_0 - w_{xx}) + ((u_0)_x + u_0(u_0)_x) = 0$$

elde edilir. Burada katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} w_t w_x - w_x^2 - 2w_x w_{xx} + w_x w_{xx} + w_x^2 u_0 &= 0, \\ -w_{xxx} + w_{xt} + w_x(u_0)_x + w_{xx}u_0 - w_{xx} &= 0, \\ (u_0)_x(u_0 + 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12) ifadesine dikkat edilecek olursa son eşitlikte $u_0 = k$ (k sabit) olur. $u_0 = k$ için ilk iki eşitlik

$$\begin{aligned} w_t w_x - w_x^2 - w_x w_{xx} + k w_x^2 &= 0, \\ -w_{xxx} + w_{xt} + k w_{xx} - w_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

halini alır. Bu son eşitlik

$$\begin{aligned} w_x(w_t - w_x(1-k) - w_{xx}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(w_t - w_x(1-k) - w_{xx}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

denklem sistemi haline gelir ve

$$w_t - w_x(1-k) - w_{xx} = 0, \quad (3.15)$$

denklemini elde edilir. (3.15) denklemini CRWP denkleminin Bäcklund dönüşümü ile elde edilen yeni formudur. Yani Bäcklund dönüşümü ile ele alınan denklem yeni forma dönüştürülüp çözüm elde edilmektedir. Bu da çözüm çeşitliliği adına önemlilik arz etmektedir. Bu yeni elde edilen denklemin lineer olması temel alınarak a_0, a_1, a_2 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$w = a_0 + a_1 \exp[a_2(x - ct)], \quad (3.16)$$

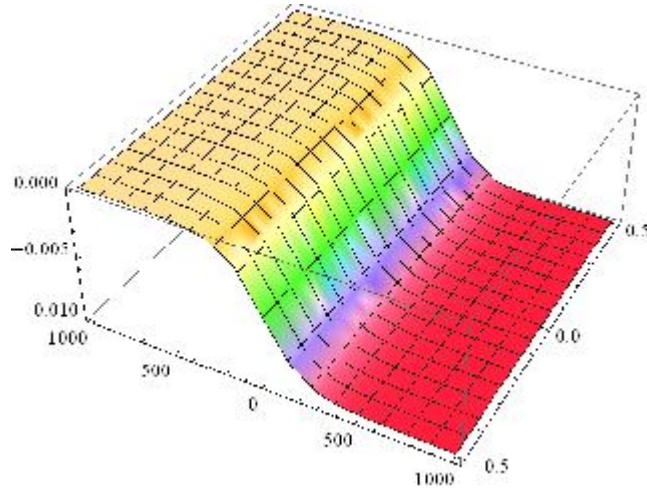
şeklinde (3.15) denkleminin çözümü aranırsa;

$$w = 1 + \exp[cx + (c^2 + (1-k)c)t] \quad (3.17)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. (3.17) eşitliği (3.8) eşitliğinde ve (3.8) eşitliği de (3.5) eşitliğinde de yerine yazılırsa (3.1) denkleminin

$$\begin{aligned} u(x,t) &= k - \frac{c \exp[cx + (c^2 + (1-k)c)t]}{1 + \exp[cx + (c^2 + (1-k)c)t]} \\ &= k - \frac{c \left(\cosh[cx + (c^2 + (1-k)c)t] + \sinh[cx + (c^2 + (1-k)c)t] \right)}{1 + c \left(\cosh[cx + (c^2 + (1-k)c)t] + \sinh[cx + (c^2 + (1-k)c)t] \right)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde solitary dalga çözümünü elde edilir.



Şekil 6. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.1) denklemini için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = 0.01, k = 0)$

3.1.2. 5. Mertebeden KdV-like Denklemlerine Bäcklund Dönüşüm Metodun Uygulanması

Öncelikle (3.2) ile verilen 5. Mertebeden KdV-like denklemini incelenecek olursa; uu_{3x} ile u_{5x} terimleri dengelenmesiyle, dengeleme teriminin 2 olduğu görülür ve bu (2.8) ile tanımlı Bäcklund dönüşümünde yerine yazılırsa

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(w) + u_0 = f''w_x^2 + f'w_{xx} + u_0, \quad (3.19)$$

elde edilir ve (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(2f^{(5)} + f^{(7)}\right)w_x^7 + f''w_t w_{xx} + w_x^5(-f^{(3)} + 10ff^{(4)}w_{xx} + ff^{(5)}w_{xx} + \\
& 21f^{(6)}w_{xx}) + f'w_{xt} - f'^2w_{xx}w_{3x} + 10ff''w_{xx}^2w_{3x} + 105f^{(3)}w_{xx}^2w_{3x} + \\
& w_x^4(10ff^{(3)}w_{3x} + 35f^{(5)}w_{xx}) + 35f''w_{3x}w_{4x} + w_x^3(-3f''^2w_{xx} - ff^{(3)}w_{xx} + 15ff^{(3)}w_{xx}^2 + \\
& 10ff^{(4)}w_{xx}^2 + 105f^{(5)}w_{xx}^2 + 5f''^2w_{4x} + 35f^{(4)}w_{4x}) + f'^2w_{xx}w_{5x} + 21f''w_{xx}w_{5x} + \\
& w_x^2(f^{(3)}w_t - ff''w_{3x} + 10f''^2w_{xx}w_{3x} + 10ff^{(3)}w_{xx}w_{3x} + 210f^{(4)}w_{xx}w_{3x} + \\
& ff''w_{5x} + 21f^{(3)}w_{5x}) + w_x(2f''w_{xt} - 3ff''w_{xx}^2 + 15ff^{(3)}w_{xx}^3 + \\
& 105f^{(4)}w_{xx}^3 + 70f^{(3)}w_{3x}^2 + 5ff''w_{xx}w_{4x} + 105f^{(3)}w_{xx}w_{4x} + 7f''w_{6x}) + f'w_{7x} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinde w_x^7 in katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$2ff^{(5)} + f^{(7)} = 0, \tag{3.21}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklem elde edilir. (3.21) denkleminde

$$f = 30 \ln w, \tag{3.22}$$

bulunur ve buradan dönüşüm için gerekli olan

$$\begin{aligned}
ff''' &= -\frac{5}{2}f^{(5)}, \quad ff^{(4)} = -\frac{3}{2}f^{(6)}, \quad ff^{(5)} = -6f^{(6)}, \quad ff'' = -15f''', \\
f'^2 &= -30f'', \quad ff''' = -10f^{(4)}, \quad f''^2 = -5f^{(4)}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitlikleri elde edilerek (3.20) de yerlerine yazılıp f' , f'' , ... parantezine alınarak katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
& w_{xt} + w_{7x} - u_0w_{3x} + u_0w_{5x} = 0, \\
& w_t w_{xx} + 30w_{xx}w_{3x} + 35w_{3x}w_{4x} - 9w_{xx}w_{5x} + \\
& w_x(2w_{xt} + 7w_{6x}) - 3u_0w_x w_{xx} + 10u_0w_{xx}w_{3x} + 5u_0w_x w_{4x} = 0, \\
& -45w_{xx}^2w_{3x} + 5w_x(9w_{xx}^2 + 14w_{3x}^2 + 6w_{xx}w_{4x}) + \\
& w_x^2(w_x + 15w_{3x} + 6w_{5x}) - u_0w_x^3 + 15u_0w_x w_{xx}^2 + 10u_0w_x^2w_{3x} = 0, \\
& -45w_x w_{xx}^3 + 60w_x^2w_{xx}w_{3x} + 5w_x^3(5w_{xx} + 2w_{4x}) - 10u_0w_x^3w_{xx} = 0, \\
& \frac{5}{2}w_x^5 - \frac{15}{2}w_x^3w_{xx}^2 + 10w_x^4w_{3x} + u_0w_x^5 = 0, \\
& (u_0)_t - u_0(u_0)_x + u_0(u_0)_{3x} + (u_0)_{5x} = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

denklem sistemi elde edilir. Dikkat edilecek olursa bu sistemdeki eşitlikler CRWP denkleminin çözümünde olduğu gibi gözle görülebilir bir biçimde birbirine kolaylıkla benzetilebilir değildir. Bu sistemde son eşitlik olan

$$(u_0)_t - u_0(u_0)_x + u_0(u_0)_{3x} + (u_0)_{5x} = 0$$

denkleminde, u_0 herhangi bir keyfi sabit olarak alınabilir ve buna bağlı olarak da (3.24) sistemindeki ilk eşitlik olan

$$w_{xxt} + w_{7x} - u_0 w_{3x} + u_0 w_{5x} = 0$$

denkleminin lineer olması temel alınarak b_0, b_1, b_2 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$w = b_0 + b_1 \exp[b_2(x - ct)], \quad (3.25)$$

şeklinde (3.24) sisteminin ortak bir çözümü aranırsa;

$$\begin{aligned} b_1 b_2^3 (b_2^4 - c - u_0 + b_2^2 u_0) &= 0, \\ 3b_1^2 b_2^3 (10b_2^2 + 11b_2^4 - c - u_0 + 5b_2^2 u_0) &= 0, \\ b_1^3 b_2^3 (60b_2^2 + 61b_2^4 - c - u_0 + 25b_2^2 u_0) &= 0, \\ 25b_1^4 b_2^5 (1 + b_2^2 - 10u_0) &= 0, \\ \frac{1}{2} b_1^5 b_2^5 (5 + 5b_2^2 + 2u_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

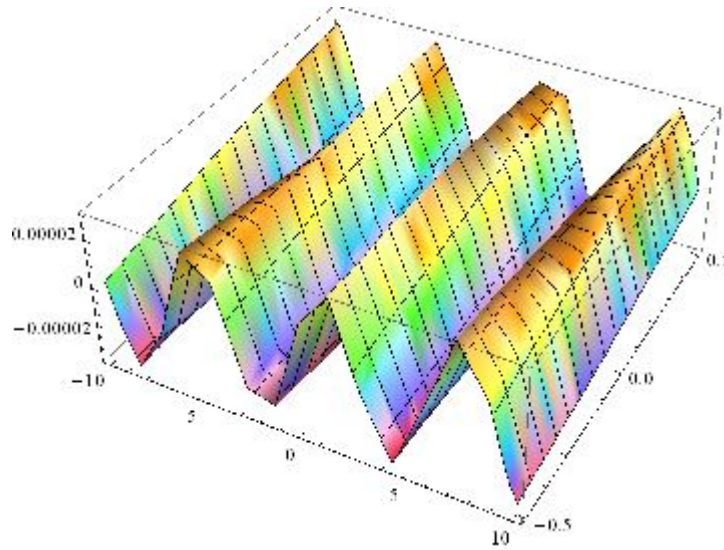
denklemler sistemi elde edilir ve çözümünden

$$u_0 = 0, b_0 = b_0, b_1 = b_1, b_2 = \pm i \text{ ve } c = 1 \quad (3.27)$$

katsayıları elde edilir ve bu katsayılar (3.25) ifadesinde, (3.25) ifadesi de (3.26) ifadesinde ve son olarak da (3.26) ifadesi (3.19) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 30 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln(b_0 + b_1 \exp[i(x - t)])) \\ &= -\frac{30b_1 \exp[i(x + t)]}{b_0 + b_1 \exp[i(x + t)]} + \frac{30b_1^2 \exp[2i(x + t)]}{(b_0 + b_1 \exp[i(x + t)])^2} \\ &= -\frac{30b_1 (\cos(t - x) + i \sin(t - x))}{b_0 + b_1 (\cos(t - x) + i \sin(t - x))} + \frac{30b_1^2 (\cos[2(t - x)] + i \sin[2(t - x)])}{(b_0 + b_1 (\cos[t - x] + i \sin[t - x]))^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

eşitliği ile (3.2) denkleminin bir çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 7. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.2) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(b_0 = 10^3, b_1 = 10^{-3})$

Aynı şekilde (3.3) denklemi için Bäcklund dönüşümü uygulanarak çözüm aranırsa $u^2 u_{3x}$ ile u_{5x} terimlerinin dengelenmesi ile dengeleme terimi 1 olarak bulunur ve (2.8) ifadesinde yerine yazılırsa (3.5) dönüşümü elde eldir. (3.5) dönüşümü (3.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (-2f'^2 f^{(4)} + f^{(6)})w_x^6 + (u_0)_t + u_0^2 (u_0)_x - 4u_0 f f^{(4)} w_x^5 + f w_{xt} + u_0^2 f w_{xx} - \\
& 6u_0^2 f w_{xx}^2 + 15f^{(3)} w_{xx}^3 + w_x^4 (f'^2 f'' - 2u_0^2 f^{(4)} - 12f'^2 f^{(3)} w_{xx} + 15f^{(5)} w_{xx}) + \\
& 2u_0^2 (u_0)_{3x} + 10f w_{3x}^2 + 10f w_{3x}^2 + w_x^3 (-\sqrt{10}u_0 f^{(3)} + 8\sqrt{10}u_0 f^{(4)} w_{xx} - \\
& 8\frac{5}{3} f^{(4)} w_{3x} + 20f^{(4)} w_{3x}) - 2u_0^2 f w_{4x} + 15f w_{xx} w_{4x} + w_x^2 (u_0^2 f'' + f'^2 (u_0)_x + 5f^{(3)} w_{xx} - \\
& 12u_0^2 f^{(3)} w_{xx} - 10f^{(4)} w_{xx}^2 + 45f^{(4)} w_{xx}^2 - 16u_0 f f'' w_{3x} - 2f'^3 w_{4x} + 15f^{(3)} w_{4x}) + \\
& w_x (f w_t + 2u_0 f' (u_0)_x - 2\sqrt{10}u_0 f w_{xx} + 6\sqrt{10}u_0 f^{(3)} w_{xx}^2 - 8u_0^2 f w_{3x} + 60f^{(3)} w_{xx} w_{3x} + \\
& 4\sqrt{10}u_0 f w_{4x} + 6f w_{5x}) + f w_{6x} = 0
\end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. (3.29) eşitliğinde w_x^6 in katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$(-2f'^2 f^{(4)} + f^{(6)}) = 0 \quad (3.30)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklem elde edilir. (3.30) denkleminde

$$f = \sqrt{10} \ln w, \quad (3.31)$$

bulunur ve buradan dönüşüm için gerekli olan

$$\begin{aligned}
f f''' &= -\frac{\sqrt{10}}{3} f^{(4)}, \quad f f^{(4)} = -\frac{\sqrt{10}}{4} f^{(5)}, \quad f f'' = -\frac{\sqrt{10}}{2} f''', \\
f'^2 &= -\sqrt{10} f'', \quad f'^3 = 5f''', \quad f'^2 f'' = \frac{5}{3} f^{(4)}, \quad f'^2 f''' = \frac{5}{6} f^{(5)}
\end{aligned} \quad (3.32)$$

eşitlikleri elde edilerek (3.29) da yerlerine yazılıp f' , f'' , ... parantezine alınarak katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
& (2u_0 (u_0)_x w_x + w_{xt} + u_0^2 w_{xx} - 2u_0^2 w_{4x} + w_{6x}) = 0, \\
& (u_0^2 w_x^2 - \sqrt{10} (u_0)_x w_x^2 - 6u_0^2 w_{xx}^2 + 10w_{xxx}^2 + 15w_{xx} w_{4x} + \\
& w_x (w_t - 8u_0^2 w_{xxx} - 2\sqrt{10}u_0 (w_{xx} - 2w_{4x}) + 6w_{5x})) = 0, \\
& (-\sqrt{10}u_0 w_x^3 - 12u_0^2 w_x^2 w_{xx} + 6\sqrt{10}u_0 w_x w_{xx}^2 + 15w_{xx}^3 + \\
& 8\sqrt{10}u_0 w_x^2 w_{xxx} + 60w_x w_{xx} w_{xxx} - 10w_x^2 w_{4x} + 5w_x^2 (w_{xx} + 3w_{4x})) = 0,
\end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{3}(5-6u_0^2)w_x^4 + 8\sqrt{10}u_0w_x^3w_{xx} + 35w_x^2w_{xx}^2 + \frac{20}{3}w_x^3w_{3x} = 0,$$

$$\sqrt{10}u_0w_x^5 + 5w_x^4w_{xx} = 0,$$

$$(u_0)_t + u_0^2(u_0)_x = 0.$$

denklem sistemi elde edilir. (3.33) sistemindeki son eşitlik

$$(u_0)_t + u_0^2(u_0)_x = 0$$

denkleminde u_0 herhangi bir keyfi sabit olarak alınabilir ve yine buna bağlı olarak da

(3.33) sistemindeki

$$2u_0(u_0)_x w_x + w_{xt} + u_0^2 w_{xx} - 2u_0^2 w_{4x} + w_{6x} = 0,$$

denkleminin lineer olması temel alınarak c_0, c_1, c_2 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$w = c_0 + c_1 \exp[c_2(x - ct)], \quad (3.34)$$

şeklinde (3.33) sisteminin ortak bir çözümü aranır;

$$\begin{aligned} c_1 c_2^6 - c_1 c_2^2 c + c_1 c_2^2 u_0^2 - 2c_1 c_2^4 u_0^2 &= 0, \\ 31c_1^2 c_2^6 - c_1^2 c_2^2 c - 2\sqrt{10}c_1^2 c_2^3 u_0 + 4\sqrt{10}c_1^2 c_2^5 u_0 + c_1^2 c_2^2 u_0^2 - 14c_1^2 c_2^4 u_0^2 &= 0, \\ 5c_1^3 c_2^4 + 80c_1^3 c_2^6 - \sqrt{10}c_1^3 c_2^3 u_0 + 14\sqrt{10}c_1^3 c_2^5 u_0 - 12c_1^3 c_2^4 u_0^2 &= 0, \\ \frac{5c_1^4 c_2^4}{3} + \frac{125c_1^4 c_2^6}{3} + 8\sqrt{10}c_1^4 c_2^5 u_0 - 2c_1^4 c_2^4 u_0^2 &= 0, \\ 5c_1^5 c_2^6 + \sqrt{10}c_1^5 c_2^5 u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

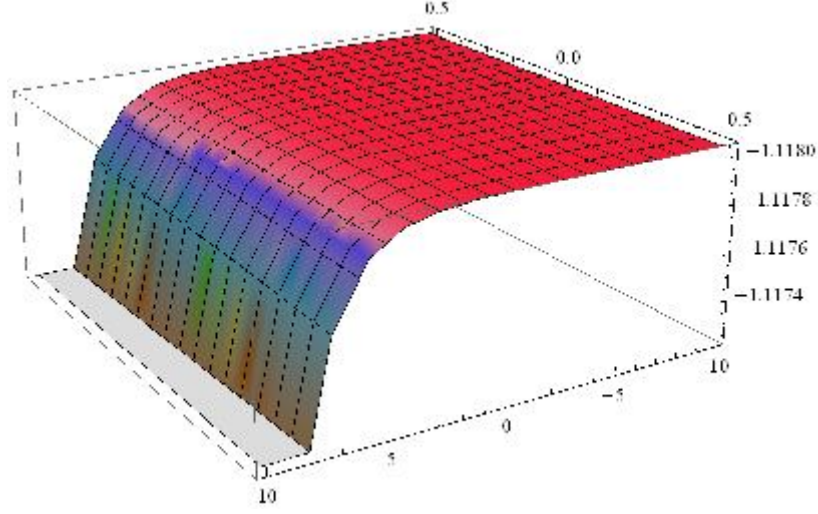
denklem sistemi elde edilir. (3.35) denklem sisteminin çözümünden

$$u_0 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}u_0, \quad c_0 = c_0, \quad c_1 = c_1 \quad \text{ve} \quad c = \frac{1}{4} \quad (3.36)$$

katsayıları elde edilir ve bu katsayılarla bağlı

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{10} \ln \left(c_0 + c_1 \exp \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right] \right) \right) - \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{c_0 - c_1 \exp \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right]}{c_0 + c_1 \exp \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right]} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{c_0 - c_1 \cosh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right] - c_1 \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right]}{c_0 + c_1 \cosh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right] + c_1 \sinh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{t}{4} \right) \right]} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

eşitliği ile (3.3) denkleminin bir çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 8. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.3) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c_0 = 10^3, c_1 = 10^{-3})$

3.1.3. KdV Denkleminin Bäcklund Dönüşüm Metodu Uygulanması

(3.4) ifadesi ile verilen KdV denklemi için uu_x ile u_{3x} terimleri arasında dengeleme yapılırsa dengeleme teriminin 2 olduğu görülür ve bu (2.8) ile tanımlı Bäcklund dönüşümünde yerine yazılırsa (3.19) elde edilir ve KdV denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(6f''^{(3)} + f^{(5)} \right) w_x^5 + f'' w_t w_{xx} + 6f'(u_0)_x w_{xx} \\
& + w_x^3 (6(u_0) f^{(3)} + 18f''^2 w_{xx} + 6ff^{(3)} w_{xx} + 10f^{(4)} w_{xx}) \\
& + f' w_{xt} + 6(u_0) f' w_{3x} + 6f'^2 w_{xx} w_{3x} + 10f'' w_{xx} w_{3x} + \\
& w_x^2 (f^{(3)} w_t + 6f''(u_0)_x + 6ff'' w_{3x} + 10f^{(3)} w_{3x}) \\
& w_x (2f'' w_{xt} + 18(u_0) f'' w_{xx} + 18ff'' w_{xx}^2 + 15f^{(3)} w_{xx}^2 + 5f'' w_{4x}) \\
& + f' w_{5x} + (u_0)_t + 6(u_0)(u_0)_x + (u_0)_{3x} = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) eşitliğinde w_x^5 in katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$2ff^{(5)} + f^{(7)} = 0, \tag{3.39}$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklem elde edilir. (3.39) denkleminde

$$f = 2 \ln w, \tag{3.40}$$

bulunur ve buradan dönüşüm için gerekli olan

$$f''^2 = -\frac{1}{3} f^{(4)}, \quad ff''' = -\frac{2}{3} f^{(4)}, \quad f'^2 = -2f'', \quad ff'' = -f''' \tag{3.41}$$

eşitlikleri elde edilerek (3.38) de yerlerine yazılıp $f', f'', \dots$ parantezine alınarak katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned} 6(u_0)_x w_{xx} + w_{xxt} + 6u_0 w_{3x} + w_{5x} &= 0, \\ 6(u_0)_x w_x^2 + w_t w_{xx} - 2w_{xx} w_{3x} + w_x (2w_{xt} + 18u_0 w_{xx} + 5w_{4x}) &= 0, \\ 6u_0 w_x^3 - 3w_x w_{xx}^2 + w_x^2 (w_t + 4w_{3x}) &= 0, \\ (u_0)_t + 6u_0 (u_0)_x + (u_0)_{3x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki

$$(u_0)_t + 6u_0 (u_0)_x + (u_0)_{3x} = 0$$

denkleminde u_0 herhangi bir keyfi sabit olarak alınabilir ve buna bağlı olarak da yine (3.42) sistemindeki

$$6(u_0)_x w_{xx} + w_{xxt} + 6u_0 w_{3x} + w_{5x} = 0$$

denkleminin lineer olması temel alınarak d_0, d_1, d_2 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$w = d_0 + d_1 \exp[d_2(x - ct)], \quad (3.43)$$

şeklinde (3.42) sisteminin ortak bir çözümü aranır;

$$\begin{aligned} b^2 - bc + 6bu_0 &= 0, \\ 3b^2 - 3bc - 18bcu_0 &= 0, \\ b^2 - c + 6u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

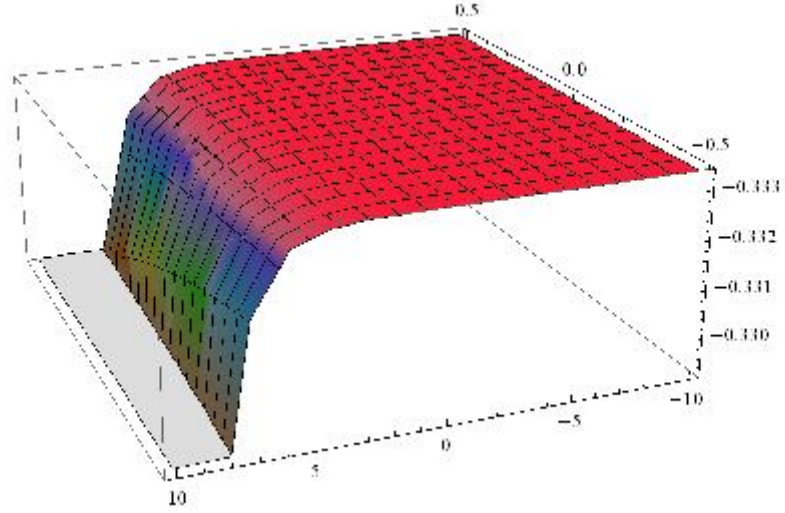
denklem sistemi elde edilir ve çözümünden

$$u_0 = -\frac{1}{3}, d_0 = d_0, d_1 = d_1, d_2 = -1 - 6u_0, c = \pm 1 \quad (3.45)$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayılarla bağlı ifadeler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln(d_0 + d_1 \exp[(x+t)])) - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{2d_1 \exp[(x+t)]}{d_0 + d_1 \exp[(x+t)]} + \frac{2d_1^2 \exp[(x+t)]}{(d_0 + d_1 \exp[(x+t)])^2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2d_0 d_1 (\cosh[(t+x)] + i \sinh[(t+x)])}{(d_0 + d_1 (\cosh[t+x] + i \sinh[t+x]))^2} - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3.46)$$

eşitliği ile KdV denkleminin bir çözümü elde edilmiş olur.



Şekil 9. Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(d_0 = 10^3, d_1 = 10^{-3})$

Önerme 3.1: $u_t = H(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ kısmi diferansiyel denklemi $u(x, t) = u(\xi) = \tau \exp(\xi)$, $\xi = \lambda x + \mu t$ (τ, λ ve μ sıfırdan ve birbirinden farklı keyfi sabitlerdir) dönüşümü altında $\exp(\xi)$ nin aynı dereceden kuvvetlerinin parantezine alınabiliyorsa lineer hale getirilebilir.

3.2. CRWP ve KdV Denklemlerine Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması

3.2.1. CRWP Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması

(3.1) CRWP denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında

$$-cu' - u' + 2uu' - u'' = 0 \quad (3.47)$$

adi diferansiyel denkleminin dönüşür ve uu' ile u'' terimleri arasında dengeleme yapılırsa, dengeleme terimi 1 olarak bulunur. Böylece aranılacak çözüm formu ($m \rightarrow 1$)

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1 \sec(\xi) + b_1 \tan(\xi)}{\mu_1 \sec(\xi) + \mu_2 \tan(\xi) + 1} \quad (3.48)$$

olur. (3.48), (3.47) de yerine yazılır ve $\sec^i(\xi) \tan^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyonunun

kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& 3a_1 - 6a_1b_1 + 3b_1\mu_1 - 6a_0b_1\mu_1 + 3b_1c\mu_1 - 3b_1\mu_1\mu_2 + 3a_1\mu_2^2 = 0 \\
& 2(b_1(1+c-2a_1\mu_1+\mu_1^2+c\mu_1^2-2a_0(1+\mu_1^2)-2\mu_2)+ \\
& a_1(2a_1\mu_2+\mu_1(1+(-1+2a_0-c)\mu_2))) = 0, \\
& (b_1\mu_1(1-2a_0+c-\mu_2)+a_1(-1+2b_1+(-2+4a_0-2c)\mu_2+\mu_2^2)) = 0, \\
& -4a_1^2+4b_1-4b_1^2+2a_1\mu_1-4a_0a_1\mu_1+2a_1c\mu_1-2b_1\mu_1^2+2b_1\mu_2- \\
& 4a_0b_1\mu_2+2b_1c\mu_2+2a_1\mu_1\mu_2 = 0, \\
& a_1-2a_0a_1+a_1c+b_1\mu_1-2b_1^2\mu_1-2a_1\mu_2+2a_1b_1\mu_2+b_1\mu_1\mu_2-2a_0b_1\mu_1\mu_2+ \\
& b_1c\mu_1\mu_2-a_1\mu_2^2+2a_0a_1\mu_2^2-a_1c\mu_2^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayılar ve bu katsayılarla bağlı çözümler;

1. Durum

$$\begin{aligned}
& b_1 = \frac{1}{2}(1+\mu_2^2), a_0 = \frac{1}{2}(1+c-\mu_2), a_1 = \frac{1}{2}(\mu_1\mu_2 \pm \sqrt{1-\mu_1^2+\mu_2^2}), \mu_1 + \mu_1\mu_2^2 \neq 0, \\
& u(x,t) = \frac{1}{2} \left((1+c-\mu_2) + \frac{2a_1 \sec[x-ct] + (1+\mu_2^2) \tan[x-ct]}{\mu_1 \sec[x-ct] + \mu_2 \tan[x-ct] + 1} \right).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

2. Durum

$$\begin{aligned}
& \mu_2 = 0, \mu_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{1+c}{2}, a_1 = \pm \frac{1}{2}, \\
& u(x,t) = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}(1 + \sec[x-ct] + \tan[x-ct]).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

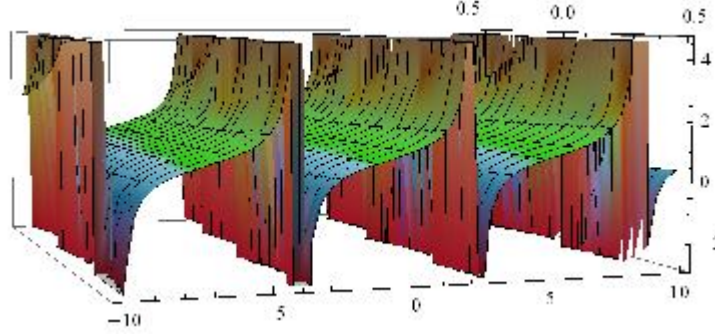
3. Durum

$$\begin{aligned}
& \mu_2 = \pm i, b_1 = 0, a_0 = \frac{1}{2}(1+c-\mu_2), a_1 = \mu_1\mu_2, \mu_1 \neq 0, \\
& u(x,t) = \frac{1}{2}(1+c-i) + \frac{i\mu_1 \sec[x-ct]}{\mu_1 \sec[x-ct] + i \tan[x-ct] + 1}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

4. Durum

$$\begin{aligned}
& \mu_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}(1+\mu_2^2), a_0 = \frac{1}{2}(1+c-\mu_2), a_1 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\mu_2^2}, \mu_2 + \mu_2^3 \neq 0, \\
& u(x,t) = \frac{1}{2}(1+c-\mu_2) + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+\mu_2^2} \sec[ct-x] - \frac{1}{2}(1+\mu_2^2) \tan[ct-x]}{1 - \mu_2 \tan[ct-x]}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

dir.



Şekil 10. Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metodu kullanılarak (3.1) denklemi için elde edilen (3.53) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(\mu_2 = 1, c = 1)$

3.2.2. KdV Denkleminin Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metodunun Uygulanması

(3.4) ile verilen KdV denklemi, $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında

$$-cu' + 6uu' + u''' = 0 \quad (3.54)$$

adi diferansiyel denkleminin dönüşür ve uu' ile u''' terimleri arasında dengeleme yapılırsa, dengeleme terimi 2 olarak bulunur. Böylece aranılacak çözüm formu ($m \rightarrow 1$)

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1 \sec(\xi) + b_1 \tan(\xi)}{\mu_1 \sec(\xi) + \mu_2 \tan(\xi) + 1} + \frac{a_2 \sec^2(\xi) + b_2 \sec(\xi) \tan(\xi)}{(\mu_1 \sec(\xi) + \mu_2 \tan(\xi) + 1)^2} \quad (3.55)$$

olur. (3.55), (3.54) de yerine yazılır ve $\sec^i(\xi) \tan^j(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenirse

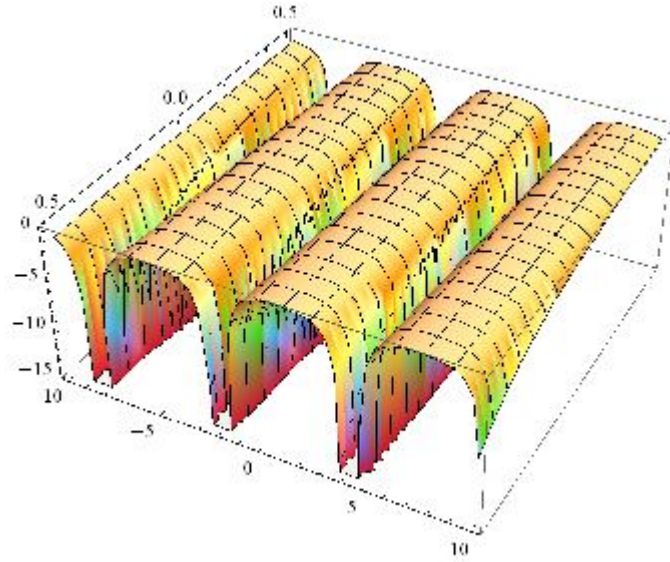
$$\begin{aligned} & 35b_1 + 150a_0b_1 + 90a_1b_1 + 60a_2b_1 + 30b_1^2 + 105b_2 + 90a_0b_2 + 60a_1b_2 + \\ & 60a_2b_2 + 30b_1b_2 - 25b_1c - 15b_2c = 0, \\ & 18a_1^2 + 24a_2^2 - 28b_1 - 102a_0b_1 - 12b_1^2 - 52b_2 - \\ & 48a_0b_2 - 3b_1b_2 + 3b_2^2 + a_1(25 + 30a_0 + 36a_2 - 48b_1 - 24b_2 - 5c) + \\ & 6a_2(14 + 6a_0 - 4b_1 - 2b_2 - c) + 17b_1c + 8b_2c = 0, \\ & 12a_1^2 + a_1(14 + 24a_0 + 18a_2 + 3b_2 - 4c) + \\ & a_2(14 + 24a_0 + 3b_1 + 9b_2 - 4c) + b_1(-7 - 12a_0 + 6b_1 + 9b_2 + 2c) = 0, \\ & -6a_1 - 36a_0a_1 - 12a_1^2 + 16a_2 - 24a_0a_2 + 8b_1 - \\ & 12a_0b_1 - 24b_1^2 - 6b_1b_2 + 6b_2^2 + 6a_1c + 4a_2c + 2b_1c = 0, \\ & b_1 - 6a_0b_1 + 6a_1b_1 - 6b_1^2 - b_2 + 6a_0b_2 + 6b_1b_2 + b_1c - b_2c = 0, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
& 50a_1 + 60a_0a_1 + 36a_1^2 + 168a_2 + 72a_0a_2 + 72a_1a_2 + \\
& 48a_2^2 + 6b_1 + 144a_0b_1 + 84a_1b_1 + 48a_2b_1 + 60b_1^2 - 14b_2 + \\
& 84a_0b_2 + 48a_1b_2 + 78b_1b_2 + 42b_2^2 - 10a_1c - 12a_2c - 24b_1c - 14b_2c = 0, \\
& 2b_1 + 132a_0b_1 + 36a_1b_1 - 12a_2b_1 + 48b_1^2 - 54b_2 + 36a_0b_2 - \\
& 12a_1b_2 - 36a_2b_2 + 48b_1b_2 + 12b_2^2 - 22b_1c - 6b_2c = 0, \\
& 2a_1 - 12a_0a_1 - b_1 + 6a_0b_1 - 6a_1b_1 + b_2 - 6a_0b_2 + 2a_1c - b_1c + b_2c = 0, \\
& -6a_1 - 36a_0a_1 - 12a_1^2 + 16a_2 - 24a_0a_2 - 2b_1 + 48a_0b_1 - \\
& 12a_1b_1 - 24a_2b_1 + 12b_1^2 - 22b_2 - 12a_0b_2 - 24a_1b_2 + 6b_1b_2 - \\
& 6b_2^2 + 6a_1c + 4a_2c - 8b_1c + 2b_2c = 0.
\end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayı ve bu katsayıya bağlı çözüm;

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1+c}{6}, a_1 = -2, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 2, \mu_1 = \mu_2 = 1, \\
u(x,t) &= \frac{1+c}{6} + \frac{-2\sec[x-ct]}{\sec[x-ct] + \tan[x-ct] + 1} + \frac{2\sec[x-ct]\tan[x-ct]}{(\sec[x-ct] + \tan[x-ct] + 1)^2} \quad (3.57)
\end{aligned}$$

ifadesi ile KdV denkleminin bir çözümü elde edilir.



Şekil 11. Jacobi eliptik fonksiyon rasyonel açılım metodu kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (3.57) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($c=1$)

4. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN ALTERNATİF YAKLAŞIMLAR

4.1. Bäcklund Dönüşüm Metodu için Alternatif Bir Yaklaşım ve Uygulaması

Üçüncü bölümde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Bäcklund dönüşümü metodu ile elde edilen çözümler için Bäcklund dönüşümü ve $F' = A + BF + CF^2$ yardımcı denklemi ile lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünün elde edilip edilemeyeceği üzerinde duruldu. Buradan hareket edilerek çözüm formu olarak Bäcklund dönüşümü ele alınıp bu dönüşüm içerisinde aranılan çözüm fonksiyonu olan üstel fonksiyon yerine $F' = A + BF + CF^2$ denkleminde elde edilecek bir çözüm formu ile çözüm elde edilip edilemediği üzerine yoğunlaşıldı. Bunun için öncelikle

$$u(\xi) = u_0 + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} (k \ln F(\xi)) \quad (4.1)$$

dönüşümü ele alındı. $F' = A + BF + CF^2$ diferensiyel denkleminin seçilmesindeki temel sebep A , B ve C katsayılarının durumuna göre çözümün hem Riccati hem de Bernoulli diferensiyel denkleminin bağlı çözüm formunda gelmesi idi.

Bu duruma bağlı çözümün elde edilip edilemeyeceği KdV denklemi üzerinde incelenirse, KdV denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında ele alındığında (3.54) adi diferensiyel denklemi elde edilir. Homojen Balans metoduna göre dengeleme terimi $\alpha = 2$ olduğundan (4.1) de yerine yazılırsa çözüm formu

$$u(\xi) = u_0 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (k \ln F(\xi)) \quad (4.2)$$

şeklinde olacaktır. Bu çözüm formu, (3.54) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 24A^5k - 12A^5k^2 &= 0, 60A^4kB - 30A^4k^2B = 0, \\ 12A^3u_0k + 50A^3kB^2 - 24A^3k^2B^2 + 40A^4kC - 12A^4k^2C - 2A^3kc &= 0, \\ 18A^2u_0kB + 15A^2kB^3 - 6A^2k^2B^3 + 60A^3kBC - 12A^3k^2BC - 3A^2kBc &= 0, \\ 6Au_0kB^2 + AkB^4 + 12A^2u_0kC + 22A^2kB^2C + 16A^3kC^2 - AkB^2c - 2A^2kCc &= 0, \\ 18u_0kBC^2 + 15kB^3C^2 + 6k^2B^3C^2 + 60AkBC^3 + 12Ak^2BC^3 - 3kBC^2c &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12Au_0kBC + 2AkB^3C + 16A^2kBC^2 - 2AkBCc &= 0, \\
6u_0kb^2C + kb^4C + 12Au_0kC^2 + 22Akbb^2C^2 + 16A^2kC^3 - kb^2Cc - 2AkC^2c &= 0, \\
12u_0kC^3 + 50kB^2C^3 + 24k^2B^2C^3 + 40AkC^4 + 12Ak^2C^4 - 2kC^3d &= 0, \\
60kBC^4 + 30k^2BC^4 = 0, 24kC^5 + 12k^2C^5 &= 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin Mathematica yardımı ile çözümünden

$$\begin{aligned}
k = -2, A = 0, B = \pm\sqrt{-6u_0 + c}, \\
k = 2, C = 0, B = \pm\sqrt{-6u_0 + c}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılarla bağlı olarak A , B ve C nin durumuna göre yardımcı denklem olarak seçilen diferensiyel denklemden gelen çözümlere bağlı çözüm aranır;

1. $A = 0, B \neq 0$ ve $C \neq 0$ ise Bernoulli denkleminin çözümünden aranacak çözüm

$$F(\xi) = -\frac{C}{B} + e^{-B\xi} \text{ dir. Buna göre yine } k = -2, A = 0, B = \pm\sqrt{-6u_0 + c} \text{ katsayılarına bağlı}$$

elde edilen çözüm

$$u(x, t) = B + \frac{B^{3/2} \left(\cosh[B(-ct + x)] + \sinh[B(-ct + x)] \right)}{\left(B - C \cosh[B(-ct + x)] - C \sinh[B(-ct + x)] \right)^2} \tag{4.5}$$

dir.

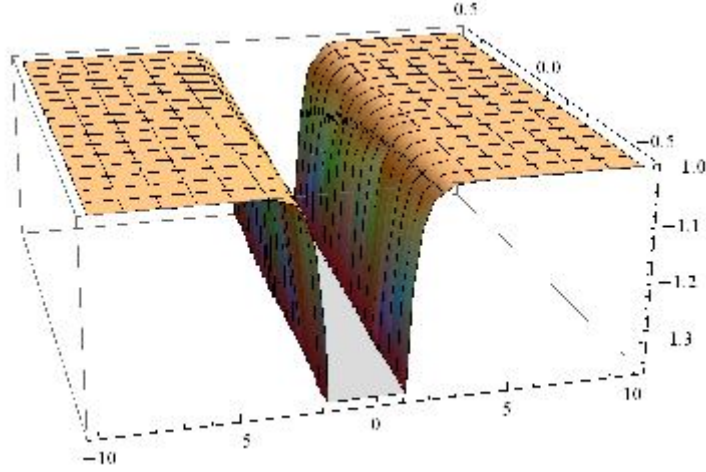
2. $A \neq 0, C = 0$ ve $B \neq 0$ ise lineer diferensiyel denklemin çözümünden aranacak çözüm

$$F(\xi) = -\frac{A}{B} + \frac{1}{B}e^{B\xi} \text{ dir. Buna göre } k = 2, C = 0, B = \pm\sqrt{-6u_0 + c} \text{ katsayılarına bağlı elde}$$

edilen çözüm

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2AB^2 \left(\cosh[B(-ct + x)] + \sinh[B(-ct + x)] \right)}{\left(-A + \cosh[B(-ct + x)] + \sinh[B(-ct + x)] \right)^2} \tag{4.6}$$

dir.



Şekil 12. Bäcklund dönüşüm metoduna alternatif yaklaşım kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.6) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($u_0 = -1, c = 1, A = 1$)

Dikkat edilecek olursa (4.5) ve (4.6) ifadeleri, (3.46) ile ifade edilen KdV denkleminin Bäcklund dönüşümü yardımı ile elde edilen çözüm formları katsayılar dışında aynıdır ve yine dikkat edilecek olursa **Şekil 12** ve **Şekil 11** benzerdir.

Aynı şekilde bu alternatif yaklaşım ile Bäcklund dönüşümü yardımı ile çözümü elde edilebilen başka bir denklem üzerinde çözüm aranır; (3.3) ifadesi ile verilen 5. Mertebeden KdV-like denklem için yine $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında ele alındığında

$$-cu' - u^2u' + u^2u''' + u^{(5)} = 0 \quad (4.7)$$

(4.7) adi diferensiyel denklemi elde edilir. Homojen Balans metoduna göre dengeleme terimi $\alpha = 1$ olduğundan (4.7) de yerine yazılırsa aranacak çözüm formu

$$u(\xi) = u_0 + \frac{\partial}{\partial \xi} (k \ln F(\xi)) \quad (4.8)$$

şeklinde olacaktır ve yine bu çözüm formu, (4.7) adi diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -120A^6k + 12A^6k^3 &= 0, 24A^5u_0k^2 - 360A^5kB + 48A^5k^3B = 0, \\ 12A^4u_0^2k - A^4k^3 + 72A^4u_0k^2B - 390A^4kB^2 + 74A^4k^3B^2 - 240A^5kC + 40A^5k^3C &= 0, \\ -2A^3u_0k^2 + 24A^3u_0^2kB - 3A^3k^3B + 76A^3u_0k^2B^2 - 180A^3kB^3 + 54A^3k^3B^3 + \\ 56A^4u_0k^2C - 480A^4kBC + 120A^4k^3BC &= 0, \\ -A^2u_0^2k - 4A^2u_0k^2B + 14A^2u_0^2kB^2 - 3A^2k^3B^2 + 32A^2u_0k^2B^3 - 31A^2kB^4 + \\ 18A^2k^3B^4 + 16A^3u_0^2kC - 2A^3k^3C + 112A^3u_0k^2BC - 292A^3kB^2C + 124A^3k^3B^2C - \\ 136A^4kC^2 + 44A^4k^3C^2 + A^2kC &= 0, \\ -12u_0^2kC^4 + k^3C^4 - 72u_0k^2BC^4 + 390kB^2C^4 - 74k^3B^2C^4 + 240AkC^5 - 40Ak^3C^5 &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
& -24u_0k^2C^5 + 360kBC^5 - 48k^3BC^5 = 120kC^6 - 12k^3C^6 = 0, \\
& -Au_0^2kB - 2Au_0k^2B^2 + 2Au_0^2kB^3 - Ak^3B^3 + 4Au_0k^2B^4 - AkB^5 + 2Ak^3B^5 - \\
& 2A^2u_0k^2C + 16A^2u_0^2kBC - 3A^2k^3BC + 60A^2u_0k^2B^2C - 52A^2kB^3C + \\
& 46A^2k^3B^3C + 32A^3u_0k^2C^2 - 136A^3kBC^2 + 72A^3k^3BC^2 + AkBc = 0, \\
& u_0^2kBC + 2u_0k^2B^2C - 2u_0^2kB^3C + k^3B^3C - 4u_0k^2B^4C + kB^5C - 2k^3B^5C + \\
& 2Au_0k^2C^2 - 16Au_0^2kBC^2 + 3Ak^3BC^2 - 60Au_0k^2B^2C^2 + 52AkB^3C^2 - \\
& 46Ak^3B^3C^2 - 32A^2u_0k^2C^3 + 136A^2kBC^3 - 72A^2k^3BC^3 - kBCc = 0, \\
& u_0^2kC^2 + 4u_0k^2BC^2 - 14u_0^2kB^2C^2 + 3k^3B^2C^2 - 32u_0k^2B^3C^2 + 31kB^4C^2 - \\
& 18k^3B^4C^2 - 16Au_0^2kC^3 + 2Ak^3C^3 - 112Au_0k^2BC^3 + 292AkB^2C^3 - 124Ak^3B^2C^3 + \\
& 136A^2kC^4 - 44A^2k^3C^4 - kC^2c = 0, \\
& 2u_0k^2C^3 - 24u_0^2kBC^3 + 3k^3BC^3 - 76u_0k^2B^2C^3 + 180kB^3C^3 - 54k^3B^3C^3 - \\
& 56Au_0k^2C^4 + 480AkBC^4 - 120Ak^3BC^4 = 0
\end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminin Mathematica yardımı ile çözümünden

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{4}, u_0 = 0, k = \pm\sqrt{10}, A = 0, B = -\frac{u_0k}{5}, C \neq 0, \\
c &= \frac{1}{4}, u_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, k = \pm\sqrt{10}, A \neq 0, B = -\frac{u_0k}{5}, C = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılarla bağlı olarak yine A , B ve C nin durumuna göre seçilen yardımcı diferensiyelden gelen çözümlere bağlı çözüm aranır;

1. $c = \frac{1}{4}, u_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, k = \pm\sqrt{10}, A = 0, B = -\frac{u_0k}{5}, C \neq 0$ katsayılarına bağlı

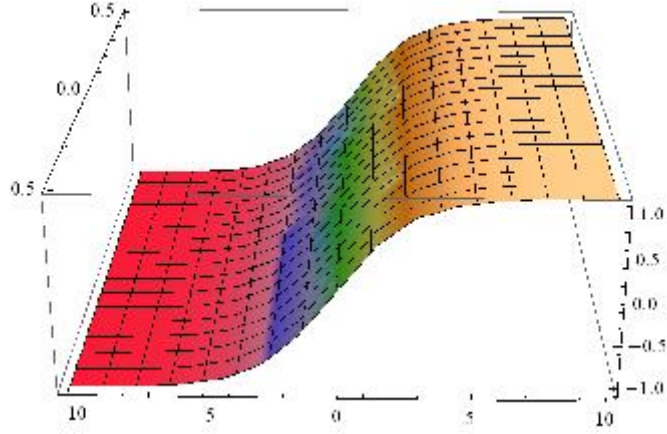
$$u(x,t) = -\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cosh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right] + \sinh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right]}{1 + \cosh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right] + \sinh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right]} \right) \tag{4.11}$$

çözümü elde edilir.

2. $c = \frac{1}{4}, u_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}, k = \pm\sqrt{10}, A \neq 0, B = -\frac{u_0k}{5}, C = 0$ katsayılarına bağlı

$$u(x,t) = -\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cosh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right] + \sinh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right]}{-a + \cosh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right] + \sinh\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t}{4} + x\right)\right]} \right) \tag{4.12}$$

çözümü elde edilir.



Şekil 13. Bäcklund dönüşüm metoda alternatif yaklaşım kullanılarak (3.3) denklemi için elde edilen (4.12) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($b = -1$)

Yine burada da elde edilen (4.11) ve (4.12) ifadeleri (3.37) ile ifade edilen (3.3) 5. Mertebeden KdV-like denkleminin Bäcklund dönüşümü yardımı ile elde edilen çözüm formları katsayılar dışında aynıdır ve yine dikkat edilecek olursa **Şekil 13** ve **Şekil 8** benzerdir.

4.2. Yeni Bir Yardımcı Denklemler ile Hareket Eden Dalga Çözümleri

Literatürde var olan yardımcı denklemlerden farklı olarak yeni bir yardımcı diferensiyel denklem aracılığı ile farklı formda çözümler elde edilebilmektedir. Gerçekten;

$$F' = \frac{A}{F} + BF + CF^3 \quad (4.13)$$

ile ele aldığımız yardımcı diferensiyel denklemin A , B ve C katsayılarına bağlı çözümleri

$$\text{i) } A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2} \text{ ise } F = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\xi) + \sec(\xi)}} \quad (4.14)$$

$$\text{ii) } A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{2}, C = 0 \text{ ise}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + \csc h(\xi) + \coth(\xi)}} \text{ veya } F = \frac{1}{\sqrt{1 + i \sec h(\xi) + \tanh(\xi)}} \quad (4.15)$$

$$\text{iii) } A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 0 \text{ ise } F = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot h(\xi)}} \text{ veya } F = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh(\xi)}} \quad (4.16)$$

şeklindedir. Bu çözümlere bağlı olarak M dengeleme terimi olmak üzere

$$u(x, t) = \lambda \sum_{m=-M}^M a_m F^m \quad (4.17)$$

formunda çözümler aranmıştır. a_m katsayılar ve λ da aşağıda tanımlayacağımız dengeleme katsayısıdır. Burada “ **Tanım 1.7** ” ile verilen tanım dışında dengeleme teriminin bulunmasında genel olarak daha pratik ve dengeleme teriminin genellenmesinde efektif bir dengeleme tanımı ortaya konulursa;

Tanım 4.1: $u_t = H(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denkleme dönüştürüldüğünde bu adi diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden lineer olan terim $u^{(p)}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^q u^{(r)}$ ile verilsin. $F' = k_0 + k_1 F + k_2 F^2 + \dots + k_n F^n$ adi diferensiyel denklemi de lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi çözmeden kullanılan yardımcı denklem ve bu yardımcı denkleme bağlı çözüm fonksiyonu $u(x, t) = \lambda \sum_{i=-m}^m a_i F^i$ olsun. $u \cong \lambda F^m$ ve $F' \cong F^n$ kabulü ile en yüksek mertebeden lineer olan terim $u^{(p)}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^q u^{(r)}$ nun eşitlenmesi ile elde edilen m terimine dengeleme terimi denir. Burada a_i ler ileride hesaplanacak katsayılar ve λ da dengeleme katsayısıdır. ($n \neq 1$)

Örnek 4.1: KdV denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile $-cu' + 6uu' + u''' = 0$ lineer olmayan bir adi diferensiyel denkleme dönüştürülür ve en yüksek mertebeden lineer olan terim u''' ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim uu' arasında dengeleme yapılırsa;

$$\begin{aligned}
 u' &= (\lambda F^m)' = \lambda m F^{m-1} F' = \lambda m F^{m-1} F^n = \lambda m F^{m+n-1} \\
 u'' &= (\lambda m F^{m+n-1})' = \lambda m(m+n-1) F^{m+n-2} F' \\
 &= \lambda m(m+n-1) F^{m+n-2} F^n = \lambda m(m+n-1) F^{m+2n-2} \\
 u''' &= (\lambda m(m+n-1) F^{m+2n-2})' = \lambda m(m+n-1)(m+2n-2) F^{m+2n-3} F' \\
 &= \lambda m(m+n-1)(m+2n-2) F^{m+2n-3} F^n = \lambda m(m+n-1)(m+2n-2) F^{m+3n-3} \\
 uu' &= \lambda F^m \lambda m F^{m+n-1} = \lambda^2 m F^{2m+n-1}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri $uu' = u'''$ ifadesinde yerine yazarsak

$$\lambda^2 m F^{2m+n-1} = \lambda m(m+n-1)(m+2n-2) F^{m+3n-3}$$

$$\lambda = (m+n-1)(m+2n-2) \text{ ve } m = 2(n-1) \quad (4.19)$$

elde edilir.

Burada özel olarak *Tanh* fonksiyon metodunda yardımcı denklem $F' = A + BF + CF^2$ alınır ve bu denklemde $n = 2$ olduğundan (4.19) de yerine yazılırsa dengeleme terimi $m = 2$ olarak bulunur ki bu da “**Tanım 1.7**” yardımı ile bulunan dengeleme terimi ile aynıdır fakat “**Tanım 1.7**” yalnızca yardımcı denklemin en yüksek dereceli teriminin derecesinin 2 olduğu durumda çalışmaktadır. “**Tanım 1.7**” den farklı olarak tanımlanan “**Tanım 4.1**” dengeleme terimi tanımı bu handikabı ortadan kaldırmıştır. Bunu yanında Duran [83] tarafından 2012 yılında yapılan doktora tezinde Kudryashov metodunda kullanılan yardımcı Benoulli diferensiyel denklemi $F' = F^2 - F$ için bir genelleme yapılmış ve buradaki dengeleme ancak “**Tanım 4.1**” ile yapılabilmiştir.

(4.13) ile tanımlı yardımcı denklem ile $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü altında KdV denklemi incelenirse öncelikle (3.54) adi diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim u''' ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim uu' arasında dengeleme yapılırsa, “**Tanım 4.1**” e göre $n = 3$ olduğundan (4.19) ifadesinde n yerine 3 yazılırsa dengeleme terimi $m = 4$ ve dengeleme katsayısı $\lambda = 48$ olarak bulunur. Bulunan m ve λ değerleri (4.17) ifadesinde yerlerine yazıldığında

$$u(x, t) = 48(a_{-4}F^{-4} + a_{-3}F^{-3} + a_{-2}F^{-2} + a_{-1}F^{-1} + a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4) \quad (4.20)$$

ifadesi elde edilir ve (3.54) ifadesinde yerine yazılarak F^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, Mathematica yardımı ile elde edilen katsayılar bağlı çözümler aşağıdaki gibidir.

(4.14) ifadesine göre;

1. Durum

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{288}(-5+c), a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{-1} = a_{-3} = 0, a_{-2} = \frac{1}{48}, a_{-4} = -\frac{1}{96}, \\ u(x, t) &= 48 \left(a_0 + \frac{1}{48} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}} \right)^{-2} - \frac{1}{96} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}} \right)^{-4} \right) \\ &= 48a_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}} \right)^{-2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}} \right)^{-4} \end{aligned} \quad (4.21)$$

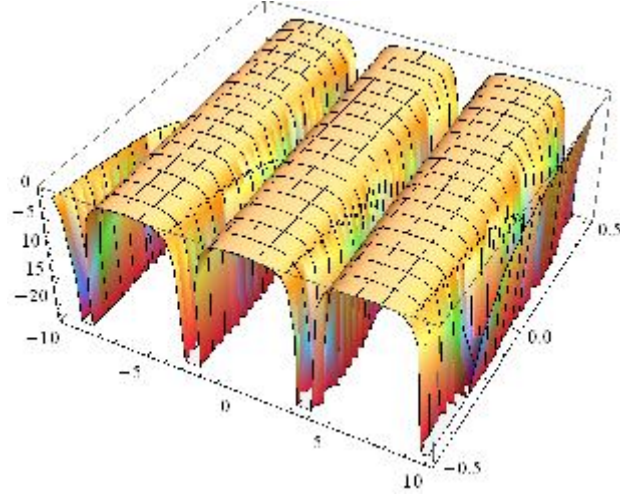
dir.

2. Durum

$$a_0 = \frac{1}{288}(-5+c), k=1, a_1 = a_{-2} = a_3 = a_{-4} = a_{-1} = a_{-3} = 0, a_2 = \frac{1}{24}, a_4 = -\frac{1}{24},$$

$$u(x,t) = 48a_0 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sec[x-ct]+\tan[x-ct]}}\right)^4 \quad (4.22)$$

dir.

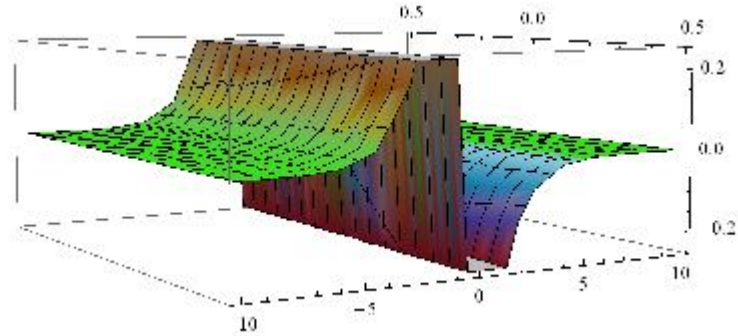


Şekil 14. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemini için elde edilen (4.22) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($c = -1$)

(4.15) ifadesine göre;

$$u(x,t) = \frac{1}{6}(-1+w) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+i\operatorname{sech}[x-\alpha]+\tanh[x-\alpha]}}\right)^{-2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+i\operatorname{sech}[x-\alpha]+\tanh[x-\alpha]}}\right)^{-4} \quad (4.23)$$

dir.

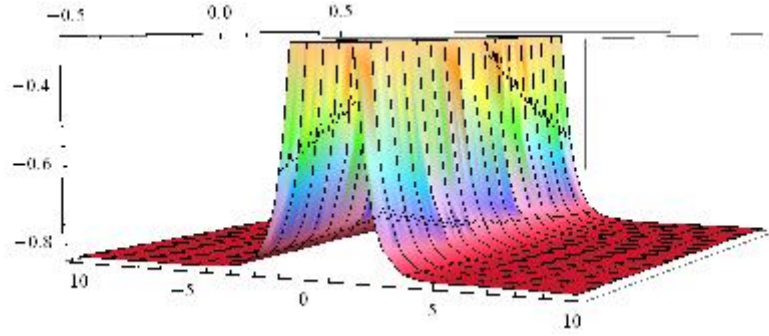


Şekil 15. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemini için elde edilen (4.23) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($c = -1$)

(4.16) ifadesine göre;

$$u(x,t) = \frac{1}{6}(-4+c) + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tanh[x-ct]}} \right)^{-2} - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tanh[x-ct]}} \right)^{-4} \quad (4.24)$$

dir.



Şekil 16. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemi için elde edilen (4.24) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, ($c = -1$)

Yardımcı denklemin (4.13) seçilerek çözümün arandığı yukarıdaki işlemlerde “**Tanım 1.7**” ye göre KdV denklemi dengelenseydi dengeleme terimi 2 bulunacak ve (4.16) da yerine yazıldığında çözüm elde edilemeyecekti.

Ayrıca, “Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım” metodunda yardımcı denklem olarak $(F')^2 = A + BF^2 + CF^4$ eliptik diferensiyel denklemi kullanılmıştır. Bu yardımcı denklemin çözümü için eliptik diferensiyel denklemin çözümleri olarak bilinen, Chen ve Zhang [32] tarafından hesaplanan “Glashier” fonksiyonları tanımlanmış ve ancak bu fonksiyonlar yardımı ile $(F')^2 = A + BF^2 + CF^4$ yardımcı denkleminin çözüm fonksiyonlarına ulaşılabilmektedir. (4.13) yardımcı denklemine bağlı (4.14) durumu ele alındığında $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metoduna benzer bir yaklaşım ile yani yardımcı denklemin çözüm fonksiyonu ve bu çözüm fonksiyonunun türevi beraber kullanılması yaklaşımından esinlenerek “ $F'F$ ” ifadesi çözüm fonksiyonu olarak kabullenilmiş “Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım” metodundaki çözüm formatına benzer bir format elde edilmiştir. Gerçekten

$$F'F = \frac{\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi)}{(\sec(\xi) + \tan(\xi) + 1)^2} \quad (4.25)$$

ifadesi (3.21) ifadesinde $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $a_0 = a_1 = b_1 = 0$ ve $a_2 = b_2 = 1$ katsayıları için aynıdır. Buna bağlı olarak KdV denklemi ele alınarak (4.25) ifadesi katsayılarla bağlı genellenerek çözüm aranırsa;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1 \sec^2(\xi) + b_1 \sec(\xi) \tan(\xi)}{(\mu_1 \sec(\xi) + \mu_2 \tan(\xi) + 1)^2} \quad (4.26)$$

ifadesi elde edilir. (4.26) ifadesi (3.54) ifadesinde yerine yazılır ve $\sec^i(\xi) \tan^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülürse, bulunan katsayılar ve bu katsayılarla bağlı çözümler

1. Durum

$$\mu_2 = \mu_1 = 0, a_0 = \frac{1+c}{6}, a_1 = -1, b_1 = \pm 1;$$

$$u(x, t) = \frac{1+c}{6} - \sec[x-ct]^2 + \sec[x-ct] \tan[x-ct]. \quad (4.27)$$

2. Durum

$$-1 + \mu_2^2 \neq 0, \mu_1 = 0, a_0 = \frac{4+c}{6}, a_1 = \frac{1}{2}(-4 - 4\mu_2^2), b_1 = 0$$

$$u(x, t) = \frac{4+c}{6} + \frac{\frac{1}{2}(-4 - 4\mu_2^2) \sec[x-ct]^2}{(1 + \mu_2 \tan[x-ct])^2} = \frac{4+c}{6} - \frac{2(1 + \mu_2^2) \sec[ct-x]^2}{(1 - \mu_2 \tan[ct-x])^2}. \quad (4.28)$$

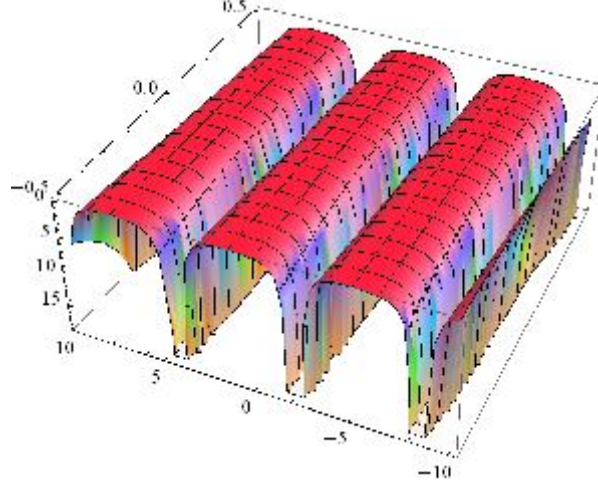
3. Durum

$$1 + \mu_2^2 \neq 0, \mu_1 = \pm \mu_2, a_0 = \frac{1+c}{6}, a_1 = (-1 - \mu_2^2), \mu_2 \neq 0, b_1 = \left(\frac{-\mu_1 - \mu_1 \mu_2^2}{\mu_2} \right)$$

$$u(x, t) = \frac{1+c}{6} + \frac{(-1 - \mu_2^2) \sec[x-ct]^2 + \left(\frac{-\mu_2 - \mu_2 \mu_2^2}{\mu_2} \right) \sec[x-ct] \tan[x-ct]}{(1 + \mu_2 \sec[x-ct] + \mu_2 \tan[x-ct])^2} \quad (4.29)$$

$$= \frac{1+c}{6} - \frac{(1+\mu_2^2)(\sec[x-ct]^2 + \sec[x-ct]\tan[x-ct])}{(1+\mu_2\sec[x-ct]+\mu_2\tan[x-ct])^2}$$

şeklindedir.



Şekil 17. Yeni bir yardımcı denklem kullanılarak (3.4) denklemini için elde edilen (4.29) çözümünün üç boyutlu hareket eden dalga görünümü, $(c = -1, \mu_2 = 2)$

Dikkat edinilecek olursa (4.27)-(4.29) ile elde edilen çözümler ile KdV denklemini için üçüncü bölümde “Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım” metodundan elde edilen çözüm, format olarak katsayılar dışında benzerdir. Ayrıca **Şekil 17** ile **Şekil 11** de benzerlik göstermektedir.

5. LINEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BİR YARI ANALİTİK METOT

Bu Bölümde, lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin seri çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan homotopi analiz metodu (HAM) verilecektir.

5.1. Homotopi Analiz Metodu

Bu metot ilk kez 1992 yılında Liao [66] tarafından doktora tezi olarak sunulurken, 2003 yılında yine Liao tarafından yazılan bir kitapta [67] bu metodun fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları ve diğer analitik teknikler ile arasındaki ilişkileri ortaya konulmuştur. HAM pek çok lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlere [68–70] başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu tekniklerin çoğu Taylor serisine dayanmaktadır. Eğer başlangıç fonksiyonu iyi seçilirse serinin birkaç teriminde çok iyi yaklaşımlar elde edilebilir. Metodu açıklamak için

$$N[u(\xi)] = 0, \xi = \xi(x, t), \quad (5.1)$$

olacak şekilde lineer olmayan bir diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada N hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferensiyel operatör, x, t bağımsız değişkenler ve $u(\xi)$ denklemin çözümüdür. Ayrıca

$$\lim_{p \rightarrow 0} \phi(\xi; p) = u_0(\xi(x, 0)) \quad (5.2)$$

şeklinde bir $\phi(\xi; p)$ fonksiyonu tanımlanır. Burada $p \in [0, 1]$ ve $u_0(\xi)$ ise başlangıç veya sınır şartlarını gerçekleyen tahmini bir başlangıç fonksiyonudur. Eğer genel homotopi tekniği kullanılarak

$$\lim_{p \rightarrow 1} \phi(\xi; p) = u_1(\xi), \quad (5.3)$$

şeklinde bir eşitlik yazılırsa Liao'nun sıfırıncı mertebeden bozulma (deformasyon) denklemi

$$(1-p)L[\phi(\xi; p) - u_0(\xi)] + hpH(\xi)N[\phi(\xi; p)] = 0, \quad (5.4)$$

olarak yazılır. Burada h yakınsaklık aralığını belirlemede kullanılan keyfi bir parametre, $H(x, t)$ keyfi bir fonksiyon, L lineer bir operatördür. HAM' unu diğer sayısal metotlar

arasında önemli bir yere koyan ve geçerli kılan sebep, h parametresinin ve $H(x,t)$ fonksiyonunun araştırmacılar tarafından özgür bir şekilde seçilebilmesidir. Eğer p , 0 dan 1 e artarsa $\phi(\xi; p)$ çözümü $u_0(\xi)$ başlangıç şartı ve $u(\xi)$ çözümü arasında değişir. $\phi(\xi; p)$ fonksiyonunun p ye göre Taylor seri açılımı

$$\phi(\xi; p) = u_0(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\xi) p^m, \quad (5.5)$$

olarak yazılır. Burada

$$u_m(\xi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1} \phi(\xi; p)}{\partial p^{m-1}}, \quad (5.6)$$

şeklinde yazılır. Eğer $p \rightarrow 1$ ise

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\xi), \quad (5.7)$$

olarak yazılır. (4.4) ile verilen sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi p ye göre m kez diferensiyellenir $m!$ ile bölünür ve sonuçta $p = 0$ alınır ise

$$L[u_m(\xi) - \chi_m u_{m-1}(\xi)] = hH(\xi) R_m(u_{m-1}(\xi)), \quad (5.8)$$

olacak şekilde deformasyon denklemi yeniden yazılabilir. Burada

$$R_m(u_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\xi; p)]}{\partial p^{m-1}}, \quad (5.9)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}, \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanır.

6. HOMOTOPI ANALİZ METODUNUN LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu Bölümde, dördüncü Bölümde verilen HAM kullanılarak, CRWP ve 5. Mertebeden KdV denklemlerinin seri çözümleri elde edilecektir.

6.1. CRWP Denkleminde HAM' ın Uygulanması

(3.1) ile verilen CRWP denkleminde HAM' unu uygulamak için (5.8) ile verilen

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = hH(x,t) R_m(u_{m-1}(x,t))$$

n . mertebeden deformasyon denklemi yeniden göz önüne alınır. Burada $R_m[u_{m-1}(x,t)]$ ifadesi (3.1) denklemin için

$$R_m(u_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

olacak şekilde yazılır.

$$u_0 = -\frac{ce^{cx}}{1 + e^{cx}} \quad (6.2)$$

olmak üzere;

$H(x,t) = 1$ ve (4.10)-(6.1) eşitlikleri ile

$$L[u_1(x,t) - u_0(x,t)] = h[R_1(u_0(x,t))], \quad L[u(x,t;p)] = \frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t} \quad \text{ve} \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$$

olacak şekilde L lineer operatörü alınır ve de eşitliğin her iki yanına L^{-1} uygulanırsa, $m = 1$ için

$$u_1 = u_0 + h \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) dt \quad (6.3)$$

olur. $m = 2$ için

$$L[u_2(\xi) - u_1(\xi)] = h[R_2(u_1(\xi))] \\ u_2 = u_1 + h \int_0^t \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) dt \quad (6.4)$$

olarak yazılır. $m = 3$ için

$$L[u_3(\xi) - u_2(\xi)] = h[R_3(u_2(\xi))]$$

$$u_3 = u_2 + h \int_0^t \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) dt \quad (6.5)$$

⋮

$h = 1$ için;

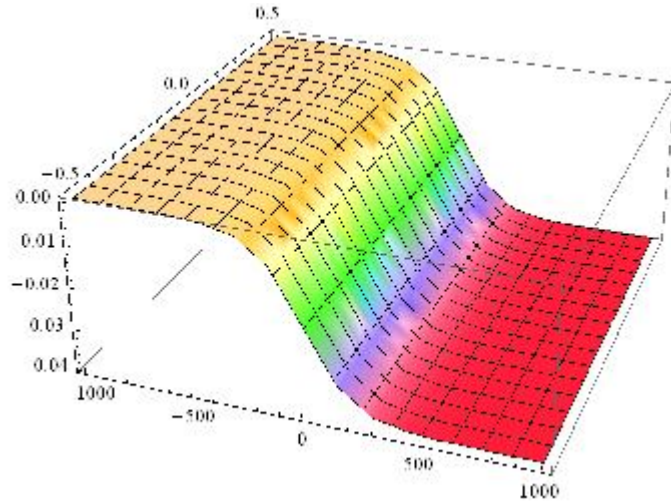
$$u_1 = -\frac{ce^{cx}(1+e^{cx}-ct-c^2t)}{(1+e^{cx})^2}$$

$$u_2 = -\frac{ce^{cx}(2+2e^{2cx}-6ct+c^2(-6+t)t+2c^3t^2+c^4t^2-e^{cx}(-4+6ct+2c^3t^2+c^4t^2+c^2t(10+t)))}{2(1+e^{cx})^3}$$

$$u_3 = \frac{1}{6(1+e^{cx})^5} ce^{cx}$$

$$\begin{aligned} & (-6-6e^{4cx}+42ct+3c^2(14-5t)t+c^3(-30+t)t^2+3c^4(-5+t)t^2+3c^5t^3+ \\ & c^6t^3+e^{3cx}(-24+42ct+3c^5t^3+c^6t^3+15c^2t(6+t)+3c^4t^2(9+t)+c^3t^2(42+t)) - \\ & 3e^{cx}(8-42ct+3c^5t^3+c^6t^3+c^3t^2(18+t)+c^4t^2(17+3t)+c^2t(-58+5t)) - \\ & 3e^{2cx}(12-42ct+c^3(-6+t)t^2+3c^5t^3+c^6t^3+c^4t^2(-5+3t)-c^2t(74+5t))) \\ & \vdots \end{aligned}$$

olacak şekilde $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir. Bulunan $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ değerleri (5.7) eşitliğinde yazılarak (3.1) ile verilen denklem için bir seri çözüm yazılabilir.



Şekil 18. HAM kullanılarak (3.2) denklemi için elde edilen çözümün üç boyutlu görünümü ($c = 0.01$)

6.2. 5. Mertebeden KdV-like Denklemine HAM' unun Uygulanması

HAM' unu (3.2) ile denkleme uygulamak için (5.8) ile verilen

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = hH(x,t) R_m(u_{m-1}(x,t))$$

n . mertebeden deformasyon denklemini yeniden göz önüne alınır. Burada $R_m[u_{m-1}(x,t)]$ ifadesi (3.2) denklemi için

$$R_m(u_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} - \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial^3 u_{m-1-i}}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u_{m-1}}{\partial x^5} \quad (6.6)$$

olacak şekilde (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü yazılabilir.

$$u_0 = -\frac{30b_0b_1 \exp[ix]}{(b_0 + b_1 \exp[ix])^2}, \quad (6.7)$$

olmak üzere;

$H(x,t) = 1$ ve (5.10)-(6.1) eşitlikleri ile

$$L[u_1(\xi) - u_0(\xi)] = h[R_1(u_0)], \quad L[u(x,t;p)] = \frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t} \quad \text{ve} \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad \text{olacak}$$

şekilde L lineer operatörü alınır ve eşitliğin her iki yanına L^{-1} uygulanırsa, $m = 1$ için

$$u_1 = u_0 + h \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} \right) dt \quad (6.8)$$

olur. $m = 2$ için

$$L[u_2(\xi) - u_1(\xi)] = h[R_2(u_1(\xi))]$$

$$u_2 = u_1 + h \int_0^t \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u_1}{\partial x^5} \right) dt \quad (6.9)$$

olarak yazılır. $m = 3$ için

$$L[u_3(\xi) - u_2(\xi)] = h[R_3(u_2(\xi))]$$

$$u_3 = u_2 +$$

$$h \int_0^t \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - (u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}) + (u_0 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + u_2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}) + \frac{\partial^5 u_2}{\partial x^5} \right) dt \quad (6.10)$$

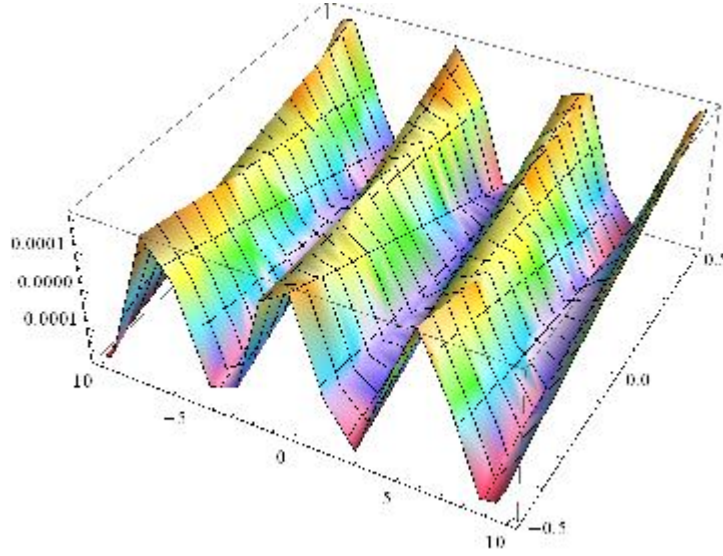
$$\vdots$$

$h = 1$ için;

$$u_1 = -\frac{30b_0b_1 e^{ix}}{(b_0 + b_1 e^{ix})^2} + \frac{30ib_0b_1 e^{ix}(-b_0 + b_1 e^{ix})t}{(b_0 + b_1 e^{ix})^3},$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{15b_0b_1e^{ix}}{(b_0+b_1e^{ix})^7} [b_0^5(-2+t(-6i+t)) + b_1^5e^{5ix}(-2+t(6i+t)) \\
&\quad -b_0b_1^4e^{4ix}(10+t(-138i+t)) - b_0^4b_1e^{ix}(10+t(138i+t)) - \\
&\quad 4b_0^3b_1^2e^{2ix}(5+t(-147i+2t)) - 4b_0^2b_1^3e^{3ix}(5+t(147i+2t))], \\
u_3 &= \frac{5b_0b_1e^{ix}}{(b_0+b_1e^{ix})^{12}} [72b_0^5b_1^5e^{5ix}(-21+455335t^2) + b_1^{10}e^{10ix}(-6+42it+15t^2-it^3) \\
&\quad +4b_0^9b_1e^{ix}(-15-444it+1545t^2-it^3) + b_0^{10}(-6-42it+15t^2+it^3) \\
&\quad +4b_0b_1^9e^{9ix}(-15+444it+1545t^2+it^3) + 24b_0^7b_1^3e^{3ix}(-30+516it+212400t^2-5it^3) \\
&\quad +24b_0^3b_1^7e^{7ix}(-30-516it+212400t^2+5it^3) - 9ib_0^8b_1^2e^{2ix}(-30i+126t-43685it^2+5t^3) \\
&\quad +9ib_0^2b_1^8e^{8ix}(30i+126t+43685it^2+5t^3) - 18ib_0^6b_1^4e^{4ix}(-70i-1182t-1159945it^2+7t^3) \\
&\quad +18ib_0^4b_1^6e^{6ix}(70i-1182t+1159945it^2+7t^3)], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olacak şekilde $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir. Bulunan $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ değerleri yine (5.7) eşitliğinde yazılarak (3.2) ile verilen denklem için bir seri çözüm yazılabilir.



Şekil 19. HAM kullanılarak (3.2) denklemini için elde edilen çözümün üç boyutlu görünümü

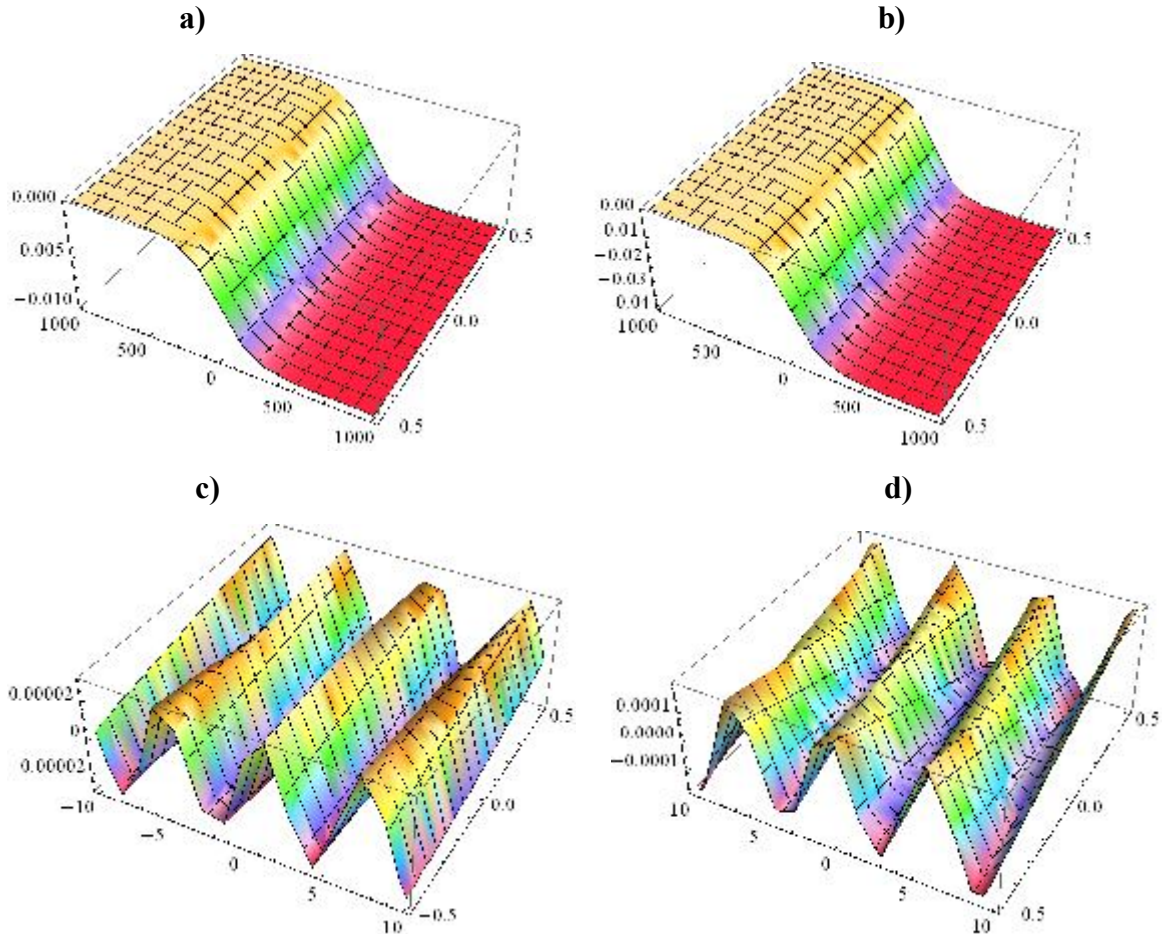
$$(b_0 = 10^3, b_1 = 10^{-3})$$

7. YARI ANALİTİK METODUN SAYISAL SONUÇLARININ İRDELENMESİ

Bu bölümde, CRWP ve 5. Mertebeden KdV-like denklemlerinin Bäcklund dönüşümü ile elde edilen $u(x,t)$ analitik çözümü ile Homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilen seri çözümleri arasındaki mutlak hata verileri tablolar ve grafikler üzerinde verilerek sayısal irdelenmesi yapılmıştır. Daha sonra Homotopi analiz metodunda kullanılan ve elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynayan keyfi h parametresinin grafiği çizilerek yaklaşık çözümler için yakınsaklık aralığı belirlenmiştir. Belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisindeki noktalarda keyfi h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın h parametresinin hangi değerinde olduğu Tablo 3'te gösterilmiştir.

İncelenen denklemlerin analitik çözümleri $u(x,t)$ olmak üzere HAM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serisi $\phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x,t)$, $n \geq 1$ şeklinde ifade edilebilir.

7.1. Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi



Şekil 20. **a)** Bäcklund dönüşüm metodu kullanılarak (3.1) denkleminin analitik çözümü için üç boyutlu görünümü, **b)** HAM kullanılarak (3.1) denkleminin yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h=1$) **c)** Bäcklund dönüşüm metot kullanılarak (3.2) denkleminin analitik çözümü için üç boyutlu görünümü **d)** HAM kullanılarak (3.2) denkleminin yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h=1$)

Tablo 1. HAM kullanılarak (3.1) denkleminin yaklaşık çözümünün Bäcklund dönüşüm metot kullanılarak elde edilen analitik çözüm arasındaki mutlak hata ($h=1, c=10^{-3}$)

$u(x,t) - \phi_4(x,t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.0014997	0.0014994	0.0014991	0.0014988	0.0014985
0.2	0.0014998	0.0014995	0.0014992	0.0014989	0.0014986
0.3	0.0014999	0.0014996	0.0014993	0.0014990	0.0014987
0.4	0.0015	0.0014997	0.0014994	0.0014991	0.0014988
0.5	0.0015	0.0014997	0.0014994	0.0014991	0.0014988

Tablo 2. HAM kullanılarak (3.2) denkleminin yaklaşık çözümünün Bäcklund dönüşüm metot kullanılarak elde edilen analitik çözüm arasındaki mutlak hata ($h=1, b_0=10^3, b_1=10^{-3}$)

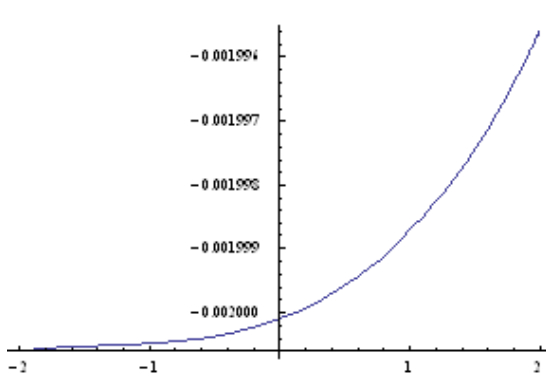
$u(x,t) - \phi_4(x,t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.0000962	0.000108	0.000126	0.000147	0.00017
0.2	0.0000996	0.0001128	0.00013	0.000151	0.000174
0.3	0.0001041	0.0001179	0.000136	0.000157	0.00018
0.4	0.00010946	0.0001235	0.000141	0.000163	0.000186
0.5	0.0001152	0.0001295	0.000147	0.000169	0.000192

Tablo 3. h keyfi parametresinin farklı değerleri için (3.1) denkleminin mutlak hatası $c = 0.001, x = 0.1$

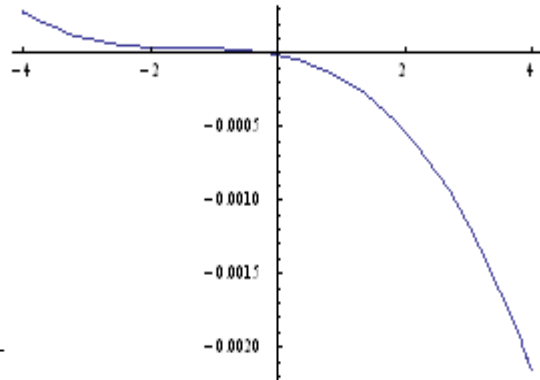
t	$h = -1,8$	$h = -1,4$	$h = -1$	$h = -0.6$	$h = -0.2$	$h = 0.2$
0.1	0.00150044	0.00150043	0.00150043	0.00150041	0.00150038	0.00150038
0.2	0.00150051	0.00150049	0.00150048	0.00150044	0.00150038	0.00150026
0.3	0.00150058	0.00150055	0.00150053	0.00150048	0.00150038	0.00150002
0.4	0.00150064	0.00150061	0.00150058	0.00150051	0.00150038	0.00150014
0.5	0.00150071	0.00150066	0.00150063	0.00150054	0.00150038	0.00150008

Tablo 4. h keyfi parametresinin farklı değerleri için (3.2) denkleminin mutlak hatası $c = 0.001, x = 0.1$

t	$h = -1,8$	$h = -1,4$	$h = -1$	$h = -0.6$	$h = -0.2$	$h = 0.2$
0.1	0.000096	0.0000912	0.00009123	0.0000923	0.0000931	0.0000993
0.2	0.000096	0.0000912	0.00009123	0.0000923	0.0000931	0.0000993
0.3	0.000096	0.0000912	0.00009123	0.0000923	0.0000931	0.0000993
0.4	0.000096	0.0000912	0.00009123	0.0000923	0.0000931	0.0000993
0.5	0.000096	0.0000912	0.00009123	0.0000923	0.0000931	0.0000993



Şekil 21. 3.1 denklemleri için h eğrisinin grafiği



Şekil 22. 3.2 denklemleri için h eğrisinin grafiği

CRWP ve 5.mertebeden KdV-like denklemlerinin HAM ile elde edilen sayısal sonuçları Tablo 1–4 ve Şekil 20-21 de verilmiştir. Tablo 1–4 de görüldüğü ele alınan denklemlerin $u(x,t)$ seri çözümlerinin sadece ilk 4 teriminde gerçek çözüme yakın değerler elde edilmiştir. Burada keyfi parametrelerin daha küçük seçilmesiyle çok daha yakın değerler elde edilebilir. Tablo 1 ve 2 de görüldüğü gibi HAM ile hesaplanan sayısal sonuçlar için $h=1$ ve $H(x,t)=1$ alınmıştır. HAM ile elde edilen seri çözümde gerçek çözüme en iyi yakınsamanın keyfi h parametresinin hangi aralığında olduğu Şekil 20 ve 21 de görülmektedir. Şekil 20 de görüldüğü gibi (3.1) denklemi için seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.8 \leq h \leq -0.8$ aralığındadır. Aynı şekilde Şekil 21 de görüldüğü gibi (3.2) denklemi için seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-2 \leq h \leq -0.2$ aralığındadır. Bu aralıklara göre h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği hesaplanabilir. Bu durum Tablo 3 ve 4 te verilmiştir. Tablo 3 ten anlaşılabacağı üzere göz önüne alınan sabit değerlere karşılık $h = -1.8$ değerinde ve Tablo 4 ten anlaşılabacağı üzere göz önüne alınan sabit değerlere karşılık $h = -1.4$ değerinde gerçek çözüme en iyi yakınsama olduğu görülmüştür

8. SONUÇ

Uygulamalı alanlarda fiziksel olayların yorumlanabilmesi ancak bu olayların modellenebilmesi ile mümkündür. Modellenen bu olayların davranışları, karalılıkları gibi farklı özellikleri hakkında tahmin yürütebilmek çok önemlidir. Örneğin cerrahi müdahalelerde kullanılan ve dalga olarak hareket eden bir lazer ışının, müdahale edilecek noktanın belirlenmesi için kullanılan lazer ışının hareketini modelleyen matematiksel denklemin çözüm fonksiyonunun elde edilmesi tedavi sürecinde hayati öneme sahiptir. Bunun gibi birçok örnek verilebilir. Dolayısıyla matematiksel modelleme ile ortaya çıkan lineer ya da lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü matematikçiler, mühendisler, fizikçiler gibi birçok bilim adamını ilgilendirmektedir.

İkinci Bölümde verilen metotlarda görüldüğü gibi, homojen balans metodu bu metotlar için bir başlangıç teşkil etmektedir. Çünkü homojen balans metodu yardımı ile göz önüne alınan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılması sonucunda dengeleme terimi elde edilir. Bu yüzden homojen balans metodu, bu gibi analitik metotlarda çözüme ulaşmak için önemli bir yere sahiptir. Bu analitik metotlarda, elde edilen dengeleme terimi ve yapılan bir koordinat dönüşümü yardımı ile lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem, lineer olmayan bir adi diferensiyel denkleme indirgenir. Daha sonra yardımcı bir denklem yardımıyla bu adi diferensiyel denklem çözülerek göz önüne alınan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin analitik çözümüne ulaşılır.

Üçüncü Bölümde Bäcklund dönüşüm metodu ve birleştirilmiş rasyonel açılım metot kullanılarak analitik çözümler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde Bäcklund dönüşüm metoduna alternatif bir yaklaşım ile çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlerin katsayılar hariç format olarak Bäcklund dönüşüm metodu ile elde edilen çözümler ile aynı olduğu görülmüştür. Ayrıca alternatif yaklaşım ile Bäcklund dönüşüm metoduna göre benzer çözümlere ulaşmanın işlemsel olarak daha kolay ve pratik olduğu görülmüştür.

Dördüncü Bölümde yeni bir yardımcı denklem aracılığı ile çözümler elde edilmiş ve çözüm formatının diğer metotlar ile elde edilen çözüm formatlarından genel olarak farklı olduğu görülmüştür. Yine bu yardımcı denklem aracılığı ile birleştirilmiş Jacobi eliptik fonksiyon metodunda elde edilen çözümlere, dengeleme terimi iki olan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler için benzer formatta çözümler elde edilmiştir.

Dördüncü Bölümde yeni bir dengeleme terimi tanımı yapılarak “ **Tanım 1.7** ” de verilen dengeleme terimi tanımından daha kullanışlı ve seçilen yardımcı diferensiyel terimin en yüksek dereceli teriminin derecesinin 2 den farklı olduğu durumlarda ele alınan yardımcı denklemler için ele alınan lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin dengelenmesinde daha uygun sonuçlar elde edilmiştir.

Yaptığımız literatür taramasında Uğurlu ve Kaya [79] tarafından CRWP denkleminin *tanh* fonksiyon metodu yardımıyla elde ettikleri analitik çözümler dışında bu denklemin, ikinci Bölümde verilen analitik metotlar ile çözümlerinin daha önceden bulunmadığı sonucuna varılmıştır. Bu nedenle üçüncü Bölümde CRWP denklemi için elde edilen çözümler bu çalışma ile literatüre kazandırılmıştır.

Bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini analitik olarak elde etmek mümkün olmayabilir. Bu durumda dördüncü Bölümde verilen yapılan ve literatürde yarı analitik metotlar olarak bilinen HAM gibi seri çözüm veren metotlar yardımıyla bu denklemlerin seri çözümüne ulaşılabilir. Bu seri çözüm aranırken bir başlangıç şartı ile serinin diğer terimleri elde edilir.

Diğer yarı analitik metotlara göre keyfi bir h parametresi ve keyfi bir $H(x,t)$ fonksiyonu kullanılması HAM’ nin bir avantajı olarak ortaya çıkmaktadır. Çünkü HAM ile elde edilen seri çözümün yakınsaklığı keyfi h parametresine bağlıdır. Bunun için h parametresinin grafiği çizilerek grafikte yatay doğrunun içinde bulunduğu h aralığı seri çözümün yakınsaklık aralığı olarak alınır [63]. HAM’ unun bir başka avantajı da çözüm serisi bulunurken kullanılan L lineer operatörünün farklı seçilebilmesidir [80,81].

KAYNAKLAR

- [1] **Russell, J.S.**, 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.
- [2] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [3] **Bogolubsky, J.L.**, 1977. Some examples of inelastic soliton interaction, *Computer Physics Communications*, **13**, 149-155.
- [4] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [5] **Iskandar, L., Jain, P.C.**, 1980. Numerical solutions of the improved Boussinesq equation, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **89**, 171-181.
- [6] **Soerensen, M.P., Christainsen, P.L. and Lomdahl P.S.**, 1984. Solitary waves on nonlinear elastic rods, *Journal of the Acoustical Society of America*, **76**, 871-879.
- [7] **Hereman, W., Takaoka, M.**, 1990. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4805-4822.
- [8] **Lan, H., Wang, K.**, 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 3923-3928.
- [9] **Lou, S., Huang, G. and Ruan, H.**, 1991. Exact solitary waves in a convecting fluid, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**, L587-L590.
- [10] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.
- [11] **Clarkson, P.A.**, 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.
- [12] **Chuntao, Y.**, 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [13] **Hereman, W., Korpel, A. and Banerjee, P.P.**, 1985. A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions, *Wave Motion*, **7**, 283-289.
- [14] **Hirota, R.**, 1980. Direct methods in soliton theory, In *Solitons* (Bullogh, R.K. and Caudrey, P.J., eds). Springer, Berlin.

- [15] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.**, 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [16] **Matveev, V.B., Salle, M.A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [17] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [18] **Zbigniew J. G., Michalec A.**, 2004. From a Clannish Random Walk to generalized Smoluchovski equation, *Acta Physica Polonica*, **36** , 1597-1598.
- [19] **Wang, M.**, 1996. Exact solutions for a compound KdV-Burgers equations, *Physics Letters A*, **213**, 279-287.
- [20] **Fan, E.G., Zhang, H.Q.**, 1998. A note on the Homogen Balance method, *Physics Letters A*, **246**, 403-406.
- [21] **Fan, E.**, 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.
- [22] **Lei, Y., Fajiang, Z., Yinghai, W.**, 2002. The Homogen Balance method, Lax pairs, Hirota transformation for a general fifth order KdV equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **13**, 337-340.
- [23] **Debnath L.**, 1997. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA.
- [24] **Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C.**, 1984. The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in wronskian form, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 1415-1424.
- [25] **Fan, E.**, 2002. Auto Bäcklund transformation and Similarity Reductions for coupled KdV equations, *Physics Letters A*, **294**, 26-30.
- [26] **Hong, W.**, 2000. On the Bäcklund transformation for a generalized Burgers equation and solitonic solutions, *Physics Letters A*, **268**, 81-84.
- [27] **Hong, W., Jung, D.**, 1999. Auto-Bäcklund transformation and analytic solutions for general variable coefficients of KdV, *Physics Letters A*, **257**, 149-157.
- [28] **Shang, Y.**, 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.
- [29] **Inan I.E., Kaya, D., Ugurlu, Y.**, 2010. Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for coupled Burger's equation, *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 2507–2511.

- [30] **Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q.**, 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [31] **Shen S., Pan, Z.**, 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.
- [32] **Chen, H.T., Hong-Qing, Z.**, 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [33] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.**, 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.
- [34] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.**, 2006. A unified rational expansion method to construct a series of explicit exact solutions to nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, **177**, 396-409.
- [35] **Chen, Y., Yan, Z.**, 2006. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 948-964.
- [36] **Aslan İ.**, 2010. A discrete generalization of the extended simplest equation method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 1967-1973.
- [37] **Nikolay K. V, Zlatinka D. I.**, 2010. Application of the method of simplest equation For obtaining exact traveling-wave solutions for two classes of model PDEs from ecology and population dynamics, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 2836-2845.
- [38] **N. Taghizadeh, M. Mirzazadeh.**, 2012. The simplest equation method to study perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 1493-1499.
- [39] **Jafari H., Kadhoda N., Khalique C.M.**, 2012. Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using the simplest equation method, *Computers & Mathematics with Applications*, in press.
- [40] **Kudryashov, N.A.**, 2005. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**, 1217-1231.
- [41] **Pavel N. R. , Dmitry I. S. , Mark B. K.**, 2011. Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 3965-3972.

- [42] **Kudryashov, N.A.**, 2011. On one of methods for finding exact solutions of nonlinear differential equations, arXiv:1108.3288v1[nlin.SI].
- [43] **Kudryashov, N.A., Louginova N.B.** 2008. Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **205**, 396–402.
- [44] **Hu, X.B. and Ma, W.X.**, 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, **293**, 161-165.
- [45] **Abourabia, A.M., El Horbaty, M.M.**, 2006. On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified Kortweg–de Vries–Burger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 354-364.
- [46] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.
- [47] **Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.**, 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.
- [48] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.**, 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.
- [49] **Xia T., Lü Z. and Zhang H.**, 2004. Symbolic computation and new families of exact soliton-like solutions of Konopelchenko–Dubrovsky equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 561-566.
- [50] **Chen, H., Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.
- [51] **Wazwaz, A.**, 2005. The tanh method: Solitons and periodic solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 55-63.
- [52] **Wazwaz, A.**, 2006. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1162-1167.
- [53] **Wazwaz, A.**, 2007. New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A*, **360**, 588-592.
- [54] **El-Wakil S.A., Abdou M.A.**, 2008. New exact travelling wave solutions of two nonlinear physical models, *Nonlinear Analysis*, **68**, 235–245.
- [55] **He, J.H., Wu, X.H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 700-708.

- [56] **Xu, F.**, 2008. Application of Exp-function method to Symmetric Regularized Long Wave (SRLW) equation, *Physics Letters A*, **372**, 252-257.
- [57] **Chun, C.**, 2008. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method, *Physics Letters A*, **372**, 2760-2766.
- [58] **Wu, X.H., He, J.H.**, 2007. Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method, *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 966–986.
- [59] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.
- [60] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [61] **Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L.**, 2009. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).
- [62] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [63] **Kaya, D., El-Sayed, S.M.**, 2003. An Application of the Decomposition Method for the Generalized KdV and RLW Equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **17**, 869-877.
- [64] **Kaya, D., El-Sayed, S.M.**, 2003. On a Generalized fifth Order KdV Equations, *Physics Letters A*, **310**, 44-51.
- [65] **Kaya, D., Inan, I.**, 2001. On a Solution of a Burgers Like Nonlinear Equation by Decomposition Method, *Menemui Mathematics*, **23**, 17-22.
- [66] **Liao, S.J.**, 1992. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [67] **Liao, S.J.**, 2003. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, Boca Raton: Chapman Hall CRC/Press.

- [68] **Wang, Z., Zou, L. and Zhang, H.,** 2007. Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation, *Physics Letters A*, **369**, 77-84.
- [69] **Abbasbandy, S.,** 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, **360**, 109–113.
- [70] **Motsa, S.S., Sibanda, P. and Shateyi, S.,** 2009. A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (in press).
- [71] **He, J.H.,** 1999. Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257–262.
- [72] **Liao, S.J.,** 1995. An approximate solution technique not depending on small parameters: A special example, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **30**, 371-380.
- [73] **He, J.H.,** 2000. A coupling method of homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **35**, 37–43.
- [74] **Inc, M., Ugurlu, Y.,** 2007. Numerical simulation of the regularized long wave equation by He's homotopy perturbation method; *Physics Letters A*, **369**, 173–179.
- [75] **He J.H.,** 2004. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, *Applied Mathematics and Computation*, **151**, 287–292.
- [76] **Liang, S., Jeffrey, D.J.,** 2009. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 4057-4064.
- [77] **Ellahi, R., Abbasbandy, S., Hayat, T. and Zeeshan, A.,** 2009. On Comparison of Series and Numerical Solutions for Second Painlevé Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (in press).
- [78] **Liao, S.,** 2005. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, **169**, 1186-1194.
- [79] **Ugurlu, Y., Kaya, D.,** 2007. Analytic method for solitary solutions of some partial differential equations, *Physics Letters A*, **370**, 251–259.
- [80] **Odibat, Z., Momani, S. and Xu, H.,** 2010. A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 593-600.
- [81] **Yücel, U.,** 2008. Homotopy analysis method for the sine-Gordon equation with initial conditions, *Applied Mathematics and Computation*, **203**, 387-395.

- [82] **Yokuş, A.**, 2011. Bazı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması, Doktora tezi, Fırat Üni.
- [83] **Duran, S.**, 2012. Bazı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri, Doktora tezi, Fırat Üni.

ÖZGEÇMİŞ

10.07.1979 yılında Gaziantep Nizip'te doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Nizip'te tamamladım. 1998 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2002 yılında mezun oldum. 2004 yılında Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım ve 2007 yılı bahar döneminin sonunda mezun oldum. 2008 yılı bahar döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında doktora başladım. 2002 yılı güz döneminde Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. Halen Elazığ Bilim ve Sanat Merkezinde görevime devam etmekteyim.