



**GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK
DİZİ UZAYLARI VE DUALLERİ**

Eda LAÇO

Yüksek Lisans Tezi

**Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ
TEMMUZ-2017**

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI VE DUALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Eda LAÇO
(141121113)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 4 Temmuz 2017

TEMMUZ-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI VE DUALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eda LAÇO
(141121113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Temmuz 2017
Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Temmuz 2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN (İ.Ü)

TEMMUZ-2017

ÖNSÖZ

ℓ_∞ , c ve c_0 sırası ile sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ dir. Kızmaz $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzaylara ait bazı özellikleri verdi. Sonra Malkowsky $\ell_\infty(u, \Delta)$, $c(u, \Delta)$ ve $c_0(u, \Delta)$ dizi uzaylarını tanımladı. Daha sonra Et ve Çolak pozitif bir m tam sayısı için bu dizi uzaylarını genelleştirerek $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarını tanımladı.

Bu çalışmada ; Bektaş tarafından incelenen $\ell_\infty(u, \Delta^m)$, $c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ dizi uzaylarına ve α -, β -, γ - duallerine yer verildi.

Bu çalışmayı hazırlamamda bana destek olan ve her safhasında yardımını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ' a, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve her konuda desteğini gördüğüm değerli hocam Arş. Gör. Dr. Sinan ERCAN' a ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eda LAÇO

Elazığ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
SEMBOLLER LİSTESİ.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ...	2
3. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYLARI.....	8
4. $\ell_{\infty}(u, \Delta^m)$, $c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ DİZİ UZAYLARI VE DUALLERİ. .	14
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ.....	25

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde; konuya giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; $X; \ell_\infty, c, c_0$ dizi uzaylarından herhangi biri olmak üzere $X, X(\Delta), X(u, \Delta)$, ve $X(\Delta^m)$ dizi uzayları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde; $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ dizi uzayları ve dualleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Fark Dizi Uzayları , $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dualleri.

SUMMARY

Generalized Difference Sequence Spaces and Their Duals

This study includes four parts. In the first part; introduction to the subject was done.

In the second part; basic definitions and theorems are given.

In the third part; sequence spaces X , $X(\Delta)$, $X(u, \Delta)$ and $X(\Delta^m)$ where $X; \ell_\infty, c, c_0$ are defined.

In the fourth part; sequence spaces $\ell_\infty(u, \Delta^m)$, $c(u, \Delta^m)$ and $c_0(u, \Delta^m)$ are defined and given their duals.

Keyword : Difference sequence spaces, α -, β -, γ - duals.

SEMBOLLER LİSTESİ

- $\mathbb{R}$: Reel Sayılar Cümlesi
- $\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Cümlesi
- $\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Cümlesi
- ω : Reel veya Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı
- ℓ_∞ : Sınırlı dizilerin uzayı
- c : Yakınsak dizilerin uzayı
- c_0 : Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
- Δ : Fark operatörü
- X^α : X 'in α – duali
- X^β : X 'in β – duali
- X^γ : X 'in γ – duali

1. GİRİŞ

1981 yılında Kızmaz $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımladı. Bu dizi uzaylarının $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \sup_k |\Delta x_k - \Delta y_k|$ metriği ile tam metrik uzay ve $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer normlu uzay olduklarını verdi [1].

Sonra 1996 yılında Malkowsky $\ell_\infty(u, \Delta)$, $c(u, \Delta)$ ve $c_0(u, \Delta)$ dizi uzaylarını tanımladı. Bu dizi uzaylarının $d(x, y) = |u_1(x_1 - y_1)| + \sup_k |u_k(\Delta x_k - \Delta y_k)|$ metriği ile metrik uzay ve $\|x\| = |u_1 x_1| + \sup_k |u_k \Delta x_k|$ normu ile birer normlu uzay olduklarını verdi [2].

Daha sonra 1995 yılında Et ve Çolak pozitif bir m tam sayısı için bu dizi uzaylarını genelleştirerek $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarını tanımladı. Bu dizi uzaylarının $\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$ normu ile birer normlu uzay olduklarını verdi [3].

Bu çalışmada ; Bektaş tarafından incelenen $\ell_\infty(u, \Delta^m)$, $c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ dizi uzaylarına ve α -, β -, γ - duallerine yer verildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$+: X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \bullet: K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay denir.

$$\text{L1)} \quad x + y = y + x$$

$$\text{L2)} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\text{L3)} \quad \text{Her } x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$\text{L4)} \quad \text{Her bir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$\text{L5)} \quad 1 \cdot x = x$$

$$\text{L6)} \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$\text{L7)} \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$\text{L8)} \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \beta \cdot (\alpha \cdot x) \quad [4].$$

Tanım 2.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y , X 'in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Her $y_1, y_2 \in Y$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ için $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$ olması halinde Y 'ye X uzayının bir lineer alt uzayı denir [1].

Tanım 2.3. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Eğer d aşağıdaki şartları sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$\text{M 1)} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$\text{M 2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M 3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M 4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

dir [5].

Tanım 2.4. X bir reel veya kompleks vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir [6].

Tanım 2.5. Tüm dizilerin cümlesi ω ile gösterilir. Yani

$$\omega = \{z = (z_k): z_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

dir. ω da her $z = (z_k)$ elemanı, x_k ve y_k reel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $z = (x_k + iy_k)_{k=1}^{\infty}$ şeklinde bir dizidir [5].

Teorem 2.6. ω uzayı, $x = (x_k), y = (y_k) \in \omega$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \right)$$

metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [7].

Tanım 2.7. ω bütün $z = (z_k)$ kompleks dizilerinin cümlesi olsun. ω lineer uzayının her bir alt uzayına dizi uzayı denir [4].

Tanım 2.8. X bir normlu uzay, (x_n) de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer X uzayı,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x elemanı içeriyorsa, (x_n) dizisi x 'e yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) şeklinde gösterilir ve x 'e (x_n) dizisinin limiti denir [7].

Tanım 2.9. Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için her $m, n > N$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [7].

Teorem 2.10. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve (x_n) , X 'de yakınsak herhangi bir dizi olsun. Bu takdirde (x_n) bir Cauchy dizisidir [4].

Tanım 2.11. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X 'de her Cauchy dizisi X 'de bir noktaya yakınsıyorsa X 'e tam metrik uzay denir [4].

Tanım 2.12. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise yani X normlu uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir [4].

Tanım 2.13. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{R}^+$ varsa $x = (x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir [7].

Teorem 2.14. (X, d) bir metrik uzay, $M \subset X$ ve $\bar{M}$, M 'nin kapanışını gösterebilir. $x \in \bar{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M 'de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır [7].

Teorem 2.15. Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y 'nin X 'de kapalı olmasıdır [7].

Tanım 2.16. X reel veya kompleks lineer uzay ve $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve tüm α skalerleri için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa g 'ye X de bir paranorm, (X, g) ikilisine de bir paranormlu uzay denir.

$$P1) \ x = \theta \Rightarrow g(x) = 0,$$

$$P2) \ g(-x) = g(x),$$

$$P3) \ g(x + y) \leq g(x) + g(y),$$

P4) (α_n) skaler bir dizi olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ve $x_n, x \in X$ olmak üzere $x_n \rightarrow x$ ise $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$ dir. Başka bir ifadeyle $n \rightarrow \infty$ iken $g(\alpha_n x_n - \alpha x) \rightarrow 0$ dir [5].

Tanım 2.17. X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. Bu takdirde bir $A: X \rightarrow Y$ dönüşümüne lineer operatör denir. Yani her $x, y \in X$ ve her λ, μ skalerleri için

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

ise A 'ya lineer operatör denir [4].

Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ alınırsa A lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X den Y ye tanımlı bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.18. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow \tau_k(x) = x_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümleri sürekli ise X 'e BK - uzayı denir [8].

Tanım 2.19. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alır [9].

Tanım 2.20. Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X den Y 'ye bir lineer izometri vardır [4].

Tanım 2.21. X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten, f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f 'e X 'den Y 'ye bir homeomorfizm denir.

$f: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise, f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denk uzaylar olur [4].

Tanım 2.22. ℓ_1 dizi uzayı

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.23. bs sınırlı serilerin uzayı

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. bs uzayı üzerindeki metrik her $x = (x_k), y = (y_k) \in bs$ için

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n (x_k - y_k) \right|$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.24. cs yakınsak serilerin uzayı

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^n x_k - l \right| = 0, \exists l \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.25. X bir dizi uzayı ise $X^\alpha, X^\beta, X^\gamma$ uzayları

$$X^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X\},$$

$$X^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X\},$$

$$X^\gamma = \{a = (a_k) : \sup_n |\sum_{k=1}^n a_k x_k| < \infty, \forall x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylara sırasıyla X uzayının α -, β - ve γ - dualleri denir. X herhangi bir dizi uzayı ise $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ dir. Eğer $X \subset Y$ ise $\eta = \alpha, \beta, \gamma$ olmak üzere $Y^\eta \subset X^\eta$ dir. Ayrıca $X^{\alpha\alpha} = (X^\alpha)^\alpha$ ve $X^{\beta\beta} = (X^\beta)^\beta$ şeklinde yazılabilir [10].

Tanım 2.26. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$$

şeklinde tanımlanan sayılara binom katsayıları denir. Eğer n ve k birer doğal sayı ise $n \leq k$ için

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)! n!}$$

ve $n > k$ için

$$\binom{k}{n} = 0$$

dir [11].

Tanım 2.27. Bir X dizi uzayı için $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere, eğer $X = X^{\eta\eta}$ ise bu taktirde X' e bir η - uzayı denir. Özel olarak bir α - uzayına Köthe uzayı veya perfect dizi uzayı denir [3].

Lemma 2.28. (p_n) pozitif sayıların monoton artan bir dizisi olsun.

(i) Eğer $\sup_n |\sum_{v=1}^n p_v a_v| < \infty$ ise bu taktirde $\sup_n |p_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| < \infty$ dir.

(ii) Eğer $\sum_k p_k a_k$ yakınsak ise bu taktirde $\lim_n p_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ dir [12].

Tanım 2.29. λ bir dizi uzayı ve $J \subset \mathbb{N}$ olsun. λ_J yi

$$\lambda_J = \{x = (x_i): \forall n_i \in J \text{ için } x_i = y_{n_i} \text{ olacak şekilde bir } (y_i) \in \lambda \text{ vardır}\}$$

Şeklinde tanımlayalım. λ_J 'ye λ 'nın J - basamak uzayı veya J -inci alt uzayı denir [12].

Tanım 2.30. $x_j \in \lambda_J$ olsun. x_j nin kanonik önresmi $\bar{x}_j$ dir. Burada

$$\bar{x}_j = \begin{cases} x_j & , \quad j \in J \\ 0 & , \quad j \notin J \end{cases}$$

dir. ($j = (n_i)$ ve $x_j = (x_{n_i})$ dir)

λ_J dizi uzaylarının kanonik önresmi, λ_J nin elemanlarının kanonik önresimlerini kapsayan $\bar{\lambda}_J$ dir [12].

Tanım 2.31. X bir dizi uzayı olsun. Eğer

(i) $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X 'e perfect,

(ii) En az bir $x \in X$ için $|y_k| \leq |x_k|$, $k \geq 1$ iken $y \in X$ ise X 'e normal,

(iii) X bütün basamak uzaylarının kanonik önresimlerini içerirse X 'e monoton denir [12].

Lemma 2.32. X bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde ,

(i) X perfect $\Rightarrow X$ normal $\Rightarrow X$ monoton

(ii) X normal $\Rightarrow X^\alpha = X^\gamma$

(iii) X monoton $\Rightarrow X^\alpha = X^\beta$

dir [12].

3. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYLARI

Tanım 3.1. $x \in \omega$ olmak üzere sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzayları sırasıyla

$$\ell_{\infty} = \{x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty\},$$

$$c = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut}\},$$

$$c_0 = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 3.2. ℓ_{∞} , c ve c_0 dizi uzayları

$$d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

metriği ile birlikte birer tam metrik uzaydır [13].

Teorem 3.3. ℓ_{∞} , c ve c_0 dizi uzayları

$$\|x\|_{\infty} = \sup_k |x_k|$$

normu ile birlikte birer normlu uzaydır, hatta birer Banach uzaydır [13].

Tanım 3.4. $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_{\infty}(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ fark dizi uzayları

$$\ell_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta x \in \ell_{\infty}\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 3.5. $\ell_{\infty}(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ fark dizi uzayları

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \sup_k |\Delta x_k - \Delta y_k|$$

metriği ile birlikte birer tam metrik uzaydır [1].

Teorem 3.6. $\ell_{\infty}(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$$

normu ile birlikte birer normlu uzaydır, hatta birer Banach uzaydır [1].

Tanım 3.7. Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ olacak şekilde bütün (u_k) dizilerinin cümlesi $\mathcal{U}$ olmak üzere $\ell_{\infty}(u, \Delta)$, $c(u, \Delta)$ ve $c_0(u, \Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_{\infty}(u, \Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (u_k(x_k - x_{k+1}))_{k=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}\},$$

$$c(u, \Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (u_k(x_k - x_{k+1}))_{k=1}^{\infty} \in c\},$$

$$c_0(u, \Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : (u_k(x_k - x_{k+1}))_{k=1}^{\infty} \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 3.8. $\ell_{\infty}(u, \Delta)$, $c(u, \Delta)$ ve $c_0(u, \Delta)$ dizi uzayları

$$d(x, y) = |u_1(x_1 - y_1)| + \sup_k |u_k(\Delta x_k - \Delta y_k)|$$

metriği ile birer metrik uzaydır [2].

Teorem 3.9. $\ell_{\infty}(u, \Delta)$, $c(u, \Delta)$ ve $c_0(u, \Delta)$ dizi uzayları

$$\|x\| = |u_1 x_1| + \sup_k |u_k \Delta x_k|$$

normu ile birlikte birer normlu uzaydır [2].

Tanım 3.10. $\ell_{\infty}(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları, $m \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}),$$

$$\Delta^m x = \Delta^m x_k = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\ell_{\infty}(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta^m x \in \ell_{\infty}\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta^m x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Teorem 3.11. $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer normlu uzaydır [3].

İspat : $X; \ell_\infty(\Delta^m), c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarından birini göstermek üzere $x, y \in X$ ve α bir skaler olsun.

$$N1) \|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty \geq 0 \text{ olduğu aşıkardır.}$$

$$N2) \|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty = 0$$

olsun. Bu taktirde $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir. Buradan $x = \theta$ bulunur.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\|_\Delta = 0$ olduğu aşıkardır.

$$\begin{aligned} N3) \|\alpha x\|_\Delta &= \sum_{i=1}^m |\alpha x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \alpha x_{k+v} \right| \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \right) \\ &= |\alpha| \|x\|_\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N4) \|x + y\|_\Delta &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} + y_{k+v}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| + \sum_{i=1}^m |y_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} y_{k+v} \right| \end{aligned}$$

$$= \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta}$$

Teorem 3.12. $(\ell_{\infty}(\Delta^m), \|\cdot\|_{\Delta})$ bir Banach uzayıdır [3].

İspat : $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots) \in \ell_{\infty}(\Delta^m)$ olmak üzere $(x^s), \ell_{\infty}(\Delta^m)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| + \sup_k |\Delta^m(x_k^s - x_k^t)| \rightarrow 0$$

olur. O halde $k \leq m$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için $|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \rightarrow 0$$

dir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^s - x_{k+m}^t| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^s - x_k^t) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^s - x_{k+m-1}^t) \right| \end{aligned}$$

olması nedeni ile her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^s - x_k^t| \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ her sabit $k = 1, 2, \dots$ için $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan $(x_k^s)_{s=1}^{\infty}$, $\mathbb{C}$ de yakınsaktır. $\lim_s x_k^s = x_k$, $(k = 1, 2, \dots)$ diyelim. (x_k^s) , $\ell_{\infty}(\Delta^m)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq N$ iken $\|x^s - x^t\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| \leq \varepsilon \text{ ve } \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \leq \varepsilon$$

dir. Bu son ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $s \geq N$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i^t| = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| \leq \varepsilon$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_t |\Delta^m(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t)| &= \lim_t \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}^t) \right| \\
&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \\
&= |\Delta^m(x_{k+v}^s - x_{k+v})| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $s \geq N$ için

$$\|x^s - x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i^s - x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^s - x_{k+v}) \right| \leq 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim_s x^s = x$ demektir. Şimdi $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta^m)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
|\Delta^m x_k| &= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| \\
&= \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N) \right| \\
&\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^N - x_{k+v}) \right| + \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}^N \right| \\
&\leq \|x^N\|_\Delta + |\Delta^m x_k^N|
\end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = (x_k) \in \ell_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. O halde $(\ell_\infty(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.13. $(c(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır [3].

İspat : $c(\Delta^m), \ell_\infty(\Delta^m)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan Teorem 2.15 gereğince $c(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.14. $(c_0(\Delta^m), \|\cdot\|_\Delta)$ bir Banach uzayıdır [3].

İspat : $c_0(\Delta^m), \ell_\infty(\Delta^m)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğundan Teorem 2.15 gereğince $c_0(\Delta^m)$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.15. $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_0(\Delta^m)$ dizi uzayları,

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK - uzayıdır [3].

İspat : $\|x^n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Bu taktirde $k \leq m$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| \rightarrow 0$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |x_{k+m}^n - x_{k+m}| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (x_{k+v}^n - x_{k+v}) \right| + \left| \binom{m}{0} (x_k^n - x_k) \right| + \dots \\ &\quad + \left| \binom{m}{m-1} (x_{k+m-1}^n - x_{k+m-1}) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik göz önüne alınırsa her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|x_k^n - x_k| \rightarrow 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ DİZİ UZAYLARI ve DUALLERİ

Bu bölümde $X; \ell_\infty, c, c_0$ olmak üzere $X(u, \Delta^m)$ dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların dualleri verilecektir. Şimdi $u \in U$ verilsin. $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(u, \Delta^m) &= \{x = (x_k) \in \omega : (u_k \Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty\}, \\ c(u, \Delta^m) &= \{x = (x_k) \in \omega : (u_k \Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in c\}, \\ c_0(u, \Delta^m) &= \{x = (x_k) \in \omega : (u_k \Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in c_0\}\end{aligned}\tag{1}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k = 1$ alırsak

$$\begin{aligned}\ell_\infty(u, \Delta^m) &= \ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : (\Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty\}, \\ c(u, \Delta^m) &= c(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : (\Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in c\}, \\ c_0(u, \Delta^m) &= c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in \omega : (\Delta^m x_k)_{k=1}^\infty \in c_0\}\end{aligned}$$

dizi uzayları elde edilir [10].

Bu uzaylar arasında

$$c_0(u, \Delta^m) \subset c(u, \Delta^m) \subset \ell_\infty(u, \Delta^m)$$

kapsama bağıntısı vardır [10].

Teorem 4.1. $u \in U$ olmak üzere $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{\Delta_u} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k |u_k \Delta^m x_k|$$

normu ile birlikte birer BK -uzaylarıdır [12].

İspat : S operatörü

$$S: X(u, \Delta^m) \rightarrow X(u, \Delta^m)$$

$$x \rightarrow Sx = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

şeklinde tanımlanırsa S , $X(u, \Delta^m)$ üzerinde sınırlı lineer bir operatördür ve $\|S\| = 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} SX(u, \Delta^m) &= \{x = (x_k) : x \in X(u, \Delta^m), x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\} \\ &= X(u, \Delta^m) \cap \{x = (x_k) : x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0\} \end{aligned}$$

dir.

Hatırlatma 4.2. $\eta = \alpha, \beta, \gamma$ olmak üzere

$$[SX(u, \Delta^m)]^\eta = [X(u, \Delta^m)]^\eta$$

dir [12].

Teorem 4.3. $u \in U$ ve $q = \left(\frac{1}{|u_k|}\right)_{k=1}^\infty$ olsun.

$$(a) M_\alpha(u) = \left\{ a \in \omega : \sum_{k=1}^\infty |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j < \infty \right\}$$

olmak üzere

$$[c_0(u, \Delta^m)]^\alpha = [c(u, \Delta^m)]^\alpha = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\alpha = M_\alpha(u)$$

dir.

$$(b) M_{\alpha\alpha}(u) = \left\{ a \in \omega : \sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right]^{-1} < \infty \right\},$$

olmak üzere

$$[c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [c(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(u)$$

dir. Burada keyfi y_j ler için

$$\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} y_j = 0 \quad (k - m < 1)$$

almak uygun olacaktır [12].

İspat :

(a) $a \in M_\alpha(u)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j < \infty$$

dir. Verilen $x \in \ell_{\infty}(u, \Delta^m)$ için

$$|\Delta^m x_k| \leq M x_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

olacak şekilde pozitif bir M sabiti vardır.

Diğer yandan

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} x_j \quad (2)$$

yazabiliriz. $k = 2m, 2m+1, \dots$ için

$$\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \geq \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} q_j \quad (3)$$

olduğunu göstermek kolaydır. En az bir sabit N için $|\Delta^{m-j} x_j| \leq N q_j \quad (1 \leq j \leq m)$ olduğundan, $a \in M_{\alpha}(u)$ olması

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty$$

olmasını gerektirir.

Bu taktirde (2) ve (3) den

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} x_j \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$M_{\alpha}(u) \subset [\ell_{\infty}(u, \Delta^m)]^{\alpha}$$

olduğu bulunur.

Tersine $a \notin M_\alpha(u)$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \geq s+1, \quad s = 0, 1, \dots$$

olacak şekilde $1 = k(0) < k(1) < \dots$ tamsayılarının bir $(k(s))_{s=0}^{\infty}$ dizisi mevcuttur. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \sum_{l=1}^{s-1} \frac{1}{l+1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} \binom{k-j-1}{m-1} q_j + \frac{1}{s+1} \sum_{j=k(s)}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j$$

$$(k(s) \leq k \leq k(s+1) - 1; \quad s = 0, 1, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde

$$|u_k \Delta^m x_k| = \frac{1}{s+1}, \quad (k(s) \leq k \leq k(s+1) - 1; \quad s = 0, 1, \dots)$$

yani, $x \in c_0(u, \Delta^m)$ dir.

Diğer yandan $s = 0, 1, \dots$ için

$$\sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k x_k|$$

$$= \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \left(\sum_{l=0}^{s-1} \frac{1}{l+1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} \binom{k-j-1}{m-1} q_j + \frac{1}{s+1} \sum_{j=k(s)}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right)$$

$$\geq \frac{1}{s+1} \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j > 1$$

elde edilir. Böylece $a \notin [c_0(u, \Delta^m)]^\alpha$ olur. Buradan $[c_0(u, \Delta^m)]^\alpha \subset M_\alpha(u)$ bulunur. $c_0(u, \Delta^m) \subset c(u, \Delta^m) \subset \ell_\infty(u, \Delta^m)$ iken $[\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\alpha \subset [c(u, \Delta^m)]^\alpha \subset [c_0(u, \Delta^m)]^\alpha$ olduğundan $[c_0(u, \Delta^m)]^\alpha = [c(u, \Delta^m)]^\alpha = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\alpha = M_\alpha(u)$ elde edilir.

(b) $[c_0(u, \Delta^m)]^\alpha = [c(u, \Delta^m)]^\alpha = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\alpha$ olduğundan $[c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [c(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ dir. Bu nedenle $[c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(u)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \in M_{\alpha\alpha}(u)$ ve $x \in [c_0(u, \Delta^m)]^\alpha = M_\alpha(u)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right]^{-1} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \\
&\leq \left(\sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right]^{-1} \right) \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dir. Yani $M_{\alpha\alpha}(u) \subset [c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ dır.

Tersine $a \notin M_{\alpha\alpha}(u)$ olsun. Bu taktirde

$$\sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right]^{-1} = \infty$$

dir. Buradan

$$|a_{k(s)}| \left[\sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} q_j \right]^{-1} > s^{m+1} \quad (s = m+1, m+2, \dots)$$

olacak şekilde $k(s) \geq m+1$ şartına uyan tamsayıların kesin artan bir $(k(s))$ dizisi mevcuttur. $x = (x_k)$ dizisini $s = m+1, m+2, \dots$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} |a_{k(s)}|^{-1} & , \quad k = k(s) \\ 0 & , \quad k \neq k(s) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j &= \sum_{s=m+1}^{\infty} |a_{k(s)}|^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} q_j \\
&\leq \sum_{s=m+1}^{\infty} s^{-(m+1)} < \infty \quad (m \geq 1)
\end{aligned}$$

olup, buradan $x \in [c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha}$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{s=1}^{\infty} |a_{k(s)}| |a_{k(s)}|^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} 1 = \infty$$

bulunur. Bu $a \notin [c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ olması demektir. O halde $[c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} \subset M_{\alpha\alpha}(u)$ bulunur. Dolayısıyla $[c_0(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [c(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = [\ell_\infty(u, \Delta^m)]^{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}(u)$ elde edilir.

Teorem 4.4. $u \in U$ ve $q = \left(\frac{1}{|u_k|}\right)_{k=1}^\infty$ olsun.

(a) $M_\beta(u)$

$$= \left\{ a \in \omega: \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-1} q_j < \infty \right\}$$

olmak üzere $[S\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\beta = M_\beta(u)$ dir.

Burada $R_k = \sum_{v=k+1}^\infty a_v$ dir.

(b) $M_\gamma(u)$

$$= \left\{ a \in \omega: \sup_n \left| \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right| < \infty, \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m-1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j < \infty \right\}$$

olmak üzere $[S\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\gamma = M_\gamma(u)$ dir [12].

İspat :

(a) Eğer $x \in S\ell_\infty(u, \Delta^m)$ ise bu taktirde

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} u_j^{-1} y_j \quad , \quad y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in \ell_\infty$ mevcuttur.

Yeterince büyük k lar için, örneğin $k > m$ için $a \in M_\beta(u)$ alalım ve $\binom{-1}{-1} = 1$ olduğunu kabul edelim. (Bazı kaynaklarda $k < 0$ için $\binom{r}{k} = 0$ olduğu kabul edilir.) Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^\infty a_k x_k = \sum_{k=1}^\infty a_k \left(\sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} u_j^{-1} y_j \right)$$

$$= (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} u_j^{-1} y_j - R_n x_n$$

dir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} a_j < \infty$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} u_j^{-1} y_j$$

serisi mutlak yakınsak olur. Dahası Lemma 2.28 (ii) den $n \rightarrow \infty$ iken $R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} u_j^{-1} y_j \rightarrow 0$ elde edilir. Buradan her $x \in S\ell_{\infty}(u, \Delta^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsak ve $a \in [S\ell_{\infty}(u, \Delta^m)]^{\beta}$ elde edilir.

$a \in [S\ell_{\infty}(u, \Delta^m)]^{\beta}$ olsun. Bu taktirde her bir $x \in S\ell_{\infty}(u, \Delta^m)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır.

$x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq m \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j & , \quad k > m \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Her $k > m$ için $|u_k \Delta^m x_k| = 1$ olduğundan $x = (x_k) \in S\ell_{\infty}(u, \Delta^m)$ elde ederiz. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

yazabiliriz. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j$ serisi yakınsak olur. Bu da Lemma 2.28 (ii) den $n \rightarrow \infty$ iken

$$R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} q_j \rightarrow 0$$

olması demektir.

Şimdi $a \in [S\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\beta - M_\beta(u)$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j$ ıraksaktır, yani $\sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j = \infty$ dir.

$x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq m \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} & , \quad k > m \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada her k için $a_k > 0$ veya $a_k < 0$ dir. $k > m$ için $|u_k \Delta^m x_k| = 1$ olduğundan $x = (x_k) \in S\ell_\infty(u, \Delta^m)$ olduğu açıktır.

Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^m R_{k-1} \Delta x_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n \quad (4)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left(\left(\sum_{v=1}^{n-1} \text{sgn} R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} q_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} q_j \right)^{-1} \right) \in \ell_\infty$$

olduğundan (4) ün her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak

$$\sum_{k=1}^\infty a_k x_k = - \sum_{k=1}^\infty R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} = \sum_{k=1}^\infty |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} q_j = \infty$$

elde ederiz.

Bu $a \in [S\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\beta$ olması ile çelişir. Buradan $a \in M_\beta(u)$ olur.

(b) Lemma 2.28 (i) kullanılarak yukarıdakine benzer şekilde ispatlanabilir.

Lemma 4.5. $\eta = \beta$ veya γ için $[S\ell_\infty(u, \Delta^m)]^\eta = [Sc(u, \Delta^m)]^\eta$ dir [12].

Aşağıdaki teoremlerde sıfıra yakınsak pozitif dizilerin cümlesini c_0^+ ile göstereceğiz.

Teorem 4.6. $u \in U$ ve $q = \left(\frac{1}{|u_k|}\right)_{k=1}^\infty$ olsun.

$$(a) M_{\beta,0}(u) = \left\{ a \in \omega: \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j v_j \text{ yakınsak ve} \right. \\ \left. \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \right\}$$

olmak üzere $[Sc_0(u, \Delta^m)]^\beta = M_{\beta,0}(u)$ dir. Burada $R_k = \sum_{v=k+1}^\infty a_v$ dir.

$$(b) M_{\gamma,0}(u) = \left\{ a \in \omega: \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j v_j \right| < \infty, \right. \\ \left. \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \right\}$$

olmak üzere $[Sc_0(u, \Delta^m)]^\gamma = M_{\gamma,0}(u)$ dir [12].

İspat : Lemma 2.28 (i) ve (ii) kullanılarak Teorem 4.4 dekine benzer bir yolla ispatlanabilir.

Teorem 4.7. X 'i ℓ_∞ veya c alalım. Bu taktirde

(i) $[X(u, \Delta^m)]^\beta =$

$$\left\{ a \in \omega: \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \text{ yakınsak ve} \sum_{k=1}^\infty |R_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-2} q_j < \infty \right\}$$

dir.

$$(ii) [X(u, \Delta^m)]^\gamma =$$

$$\left\{ a \in \omega : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j \right| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j < \infty \right\}$$

burada $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ dir [12].

İspat : Teorem 4.4, Lemma 4.5 ve Hatırlatma 4.2 kullanılarak ispatlanır.

Teorem 4.8. $u \in U$ ve $q = \left(\frac{1}{|u_k|}\right)_{k=1}^{\infty}$ olsun.

$$(i) [c_0(u, \Delta^m)]^\beta = \left\{ a \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j v_j \text{ yakınsak ve} \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \right\}$$

$$(ii) [c_0(u, \Delta^m)]^\gamma = \left\{ a \in \omega : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} q_j v_j \right| < \infty, \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} q_j v_j < \infty, \quad \forall v \in c_0^+ \right\}$$

dir. Burada $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ dir [12].

İspat : Hatırlatma 4.2 ve Teorem 4.6 kullanılarak ispatlanır.

Teorem 4.3 , Teorem 4.7 , Teorem 4.8 ve Lemma 2.32 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuçlar :

(i) $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ perfect değildir.

(ii) $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ normal değildir.

(iii) $\ell_\infty(u, \Delta^m), c(u, \Delta^m)$ ve $c_0(u, \Delta^m)$ monoton değildir.

KAYNAKLAR

- [1] **Kızmaz, H.**, (1981), On Certain Sequence Spaces, Canadian Math. Bull. 24, 169-176.
- [2] **Malkowsky, E.**, (1996), A note on the Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Sets of Bounded and Convergent Difference Sequences, J.Anal 4, 81-91.
- [3] **Et, M. and Çolak, R.**, (1995), On Some Generalized Difference Sequence Spaces Soochow J. Of Math. 21(4),377-386.
- [4] **Maddox, I. J.**, (1988), Elements of Functional Analysis , Cambridge the University Press, Cambridge.
- [5] **Başar, F.**, (2012), Summability Theory and Its Applications , Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul.
- [6] **Kreyszig, E.**, (1980), Introduction Functional with Applications Analysis, John Willey and Sons, New York.
- [7] **Chandrasekhara, K. Rao.**, (1986), Functional Analysis and Applications, Alpha Sicience International Ltd.,Oxford, U.K.
- [8] **Goes, G. and Goes, S.**, (1970), Sequences of Bounded Variation and Sequences Of Fourier Coefficients I. Math. 21(4), 377-386.
- [9] **Kantorovich, L.V. and Akilov G.P.**, (1982), Functional Analysis , Pergamon Pres, Oxford.
- [10] **Kamphthan, P. K. ve Gupta, M.**, (1981), Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker Inc. New York.
- [11] **Hardy, G.H.**, (1947), Divergent Series,At the clarendon Pres, Oxford
- [12] **Bektaş,Ç.**, (2009), On Some Generalized Difference Sequence Spaces and Köthe-Toeplitz Duals, International Electronic Engineering Mathematical Society,7,61-72.
- [13] **Choudhary B., Nanda S.**, (1987), Function Analysis with Applications, John Wiely &Sons ,New Delhi, India.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümüne yerleştim. 2009 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü tezsiz yüksek lisans öğrenimime başladım ve 2010 yılında mezun oldum. 2010 yılında İstanbul'da Şehit Şerife Bacı Lisesi'nde ücretli öğretmenlik yaptım. 2011 yılında İstanbul'da Fen Eğitim dershanesinde öğretmenlik yaptım. 2012 yılında Hakkari'de Yüksekova Lisesine atandım. 2013 yılında Tunceli'de Atatürk Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesine tayin oldum ve halen bu görevi devam ettirmekteyim. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans öğrenimime başladım.

Eda LAÇO