

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN STOKASTİK DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hasan BULUT

116 689

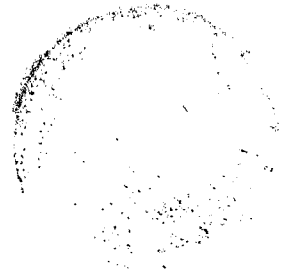
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ

2002

116689



T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN STOKASTİK DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hasan BULUT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez , 28 / 06 / 2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği / Oyçokluğu ile Başarılı / Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.

.....
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Danışman

.....
Prof. Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ

Üye

.....
Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye

.....
Doç. Dr. Necdet BİLDİK

Üye

.....
Doç. Dr. Doğan KAYA

Üye

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN STOKASTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Hasan BULUT

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2002, Sayfa:115

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; Temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde; Ayrışım metodu genel bir şekilde verildi. Ayrıca A_n (Adomian) polinomlarının oluşumu, A_n polinomlarının uygun hesaplama şekilleri, bileşik lineer olmayan durumları ve A_n polinomlarının yeni üretim şekilleri, A_n polinomlarının lineer olmayan durum için yakınsaklıkları bölümler halinde ayrı ayrı incelendi.

Üçüncü bölümde; İkinci mertebeden stokastik diferensiyel denklemlerin çözümünde Green fonksiyonlarının kullanımı, ayrışım metodu ile Green fonksiyonları arasındaki ilişkiler genel olarak incelendi ve bir örnek üzerinde uygulaması verildi.. Ayrıca stokastik teoremin deterministik limiti ile diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri genel olarak incelendi .

Dördüncü ve beşinci bölüm çalışmanın orijinal kısımlarını ihtiva etmektedir.

Dördüncü bölümde; Lineer olmayan stokastik diferensiyel denklemlerin çözümü, lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümü ve lineer olmayan oscillator denkleminin çözümü ayrışım metodu ve farklı metodlarla karşılaştırıldı.

Beşinci bölümde; İki ve üç boyutlu kısmi diferensiyel denklemlerin ayrışım metodu ile çözümü örnek üzerinde gösterildi.

ANAHTAR KELİMELEER: Ayrışım metodu, Adomian polinomları, Green fonksiyonları, Stokastik diferensiyel denklemler, Tek adım metodları, Sonlu farklar metodu , Kesme hatası.

ABSTRACT

Phd Thesis

SOLUTIONS OF LINEAR AND NONLINEAR STOCHASTIC DIFERENTIAL EQUATIONS BY THE DECOMPOSITION METHOD

Hasan BULUT

Firat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics
2002, Page:115

This study has been designed in five chapters.

General definitions have been given in the first chapter.

In the second chapter decomposition method has been defined. In addition, generation of the A_n polynomials, convenient computational forms for the A_n polynomials, calculation of the A_n polynomials for composite nonlinearities and new generating schemes-the accelerated polynomials, convergence of the nonlinear A_n polynomials have been examined seperately.

In chapter three the use of Greens function to solve a second-order stochastic differential equations, relationships between Green's function and the decomposition method for partial differential equations have been investigated in general and the application has been given on an example. Furthermore the determinitic limit of stochastic theory and numerical solutions of differential equations have been examined in general.

Chapter four and Chapter five contain the original division of the study.

In chapter four the solutions of the nonlinear stochastic differential equations, nonlinear hyperbolic differential equations and nonlinear oscillatory equations have been compared by the decomposition method and different methods.

In chapter the five solutions of second and multidimensional partial differential equations by the decomposition method has been applied on examples.

KEY WORDS: Decomposition Method, Adomian Polynomials, Green's Function, Stochastic Diferential Equations, One Step Method, Finite-Difference Method, Truncation Error.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam ; Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu tez çalışmasının her safhasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm değerli hocalarım; Prof. Dr. Etibar PENAHOV, Prof. Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ'a en içten duygularıyla teşekkür ederim.



Hasan BULUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
BÖLÜM 1	
1.1. Temel Kavramlar	1
BÖLÜM 2	
2.1.Giriş	5
2.2. Ayrışım Metodu.....	6
2.3. A_n Polinomlarının Oluşumu.	11
2.4. Lineer Olmayan Diferensiyel Operatorler için A_n Polinomları.....	18
2.5. A_n Polinomlarının Uygun Hesaplama Şekilleri.....	19
2.6. Bileşik Lineer Olmayan Durumlar için A_n Polinomları.....	22
2.7.Yeni Üretim Planları-Hızlandırılmış Polinomlar.....	30
2.8. A_n Polinomlarının Yakınsaması.....	45
2.9. Lineer Olmayan Durum için Yakınsaklık.....	51
BÖLÜM 3	
3.1.İkinci Mertebeden Stokastik Diferensiyel Denklemlerin Çözümünde Green Fonksiyonlarının Kullanımı.	55
3.2. Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Ayrıştırma Metodu ve Green Fonksiyonu İle Arasındaki İlişkiler.....	58
3.3. Green Fonksiyonlarının Yaklaşık Hesaplaması.....	61
3.4. Stokastik Teorinin Deterministik Limiti ile Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü.....	67
3.5. Ayrıştırma Metodu ile Picard Yönteminin Sonuçlarının karşılaştırılması.....	71
BÖLÜM 4	
4.1. Lineer Olmayan Stokastik Diferensiyel Denklemlerin Çözümü için Ayrışım Metodu.	79
4.2. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri ve Lineer Olmayan Hiperbolik Diferensiyel Denklemlere Uygulaması.....	88
4.3. Lineer Olmayan Oscilator Denkleminin Yaklaşık Çözümü için Ayrışım Metodu.....	98
BÖLÜM 5.	
5.1. Üç Boyutlu Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Ayrışım Metodu ile Çözümü.....	103
KAYNAKLAR.....	110

SİMGELER LİSTESİ

L	: Diferensiyel operatör
L^{-1}	: İntegral operatörü
Nu	: lineer olmayan terim
A_n	: Adomian polinomları
ϕ_n	: n -terim yaklaşımı
(Ω, F, μ)	: Olasılık uzayı
Ω	: Örnek uzayı
F	: Ω örnek uzayın alt kümelerinin σ cebiri
μ	: Ω örnek uzayı üzerinde olasılık ölçümü
$L = \sum_{v=0}^n a_v(t, \omega) \frac{d^v}{dt^v}$	: Lineer stokastik operatör
T	: Bağımsız değişken bölgesi
ω	: Elementer olay
$a_v(t, \omega)$	: Olasılık uzayı için stokastik süreç
$x(t, \omega)$	: Tesadüfi değişken
α_v	: Sıfır ortalamalı stokastik süreç



1. BÖLÜM

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içinde bulunduran

bir denkleme diferansiyel denklem denir ve $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ veya genel olarak

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ şeklinde ifade edilir. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız

değişken olup denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğundan bu denklemler adi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer diferansiyel denklem bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişkenin türevlerini içeriyorsa bu denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. Bu çeşit

diferansiyel denklemler $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ veya genel olarak $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

olmak üzere $F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x_1^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x_2^n}\right) = 0$ şeklinde tanımlanır

(Tuncer, 1996).

Tanım 1.1.2. Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere,

$$b_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_1(x) \frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x)$$

veya

$$\sum_{j=1}^n b_j(x) y^{(j)} + b_0(x)y = g(x)$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir (Tuncer, 1996).

Tanım 1.1.3. Bir denklem sistemi iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken ile bu değişkenlerin bir fonksiyonu ve fonksiyonun türevlerini ihtiva ediyorsa bu denklem sistemine kısmi türevli denklem sistemi denir (Çağal, 1989).

Tanım 1.1.4. Bir $f(x)$ fonksiyonunda $h>0$ bir sabit sayı ve k bir tamsayı olmak üzere $x_k = x_0 + kh$ noktalarında tanımlı olsun. Bu durumda

$$\Delta_h^1 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun ileri sonlu farkı denir. Bu farkların ikinci kuvveti ise

$$\Delta_h^2 f(x_0) = \Delta_h^1 \Delta_h^1 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

biçiminde tanımlanır ve genel olarak

$$\Delta_h^n f(x_0) = \Delta_h^1 \Delta_h^{n-1} f(x_0)$$

şeklinde verilir. Ayrıca f fonksiyonunun (x_0, x_n) açık aralığında n -yinci mertebeden türevi varsa bu takdirde öyle bir $\xi \in (x_0, x_n)$ noktası vardır ki ,

$$\Delta_h^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\xi)$$

dır. $\Delta_h^n f(x_0)$ farklarına ileri sonlu farklar denir. Benzer şekilde f fonksiyonu $x'_k = x_0 - kh$ noktalarda tanımlı olmak üzere geri sonlu farklarla tanımlanabilir . Bu farklar $\Delta_{-h}^n f(x_0)$ biçiminde gösterilir ve

$$\begin{aligned} \Delta_{-h}^1 f(x_0) &= f(x_0) - f(x'_1), \\ &\vdots \\ \Delta_{-h}^n f(x_0) &= \Delta_{-h}^1 \Delta_{-h}^{n-1} f(x_0) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Çağal,1989).

Tanım 1.1.5. Bir diferensiyel denklemin çözümü için en basit sayısal metod Euler metodudur. Bu metod bir noktada bağımlı değişken (yani fonksiyon)'un değeri bir önceki noktadan geçen bir doğru boyunca ekstrapolasyon ile elde edilir. Aşağıda birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer problemi için farklı Euler metodları verilmiştir.

Euler Metodu:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Modified Euler Methodu:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2.$$

Improved Euler Methodu:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

Tanım 1.1.6. $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$

başlangıç değeri probleminde h adım uzunluğu olmak üzere

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

denkleminde dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu denir (Çağal, 1989).

Tanım 1.1.7. Sayısal işlemlerde kullanılan sonsuz terimli bir serinin belirli bir yerde

kesilip geri kalan terimlerinin atılması sonucu oluşan hatalara kesme hatası denir.

Kesme hatasının değeri göz önüne alınmayan terimlerin toplamına eşittir (Çağal, 1989).

Tanım 1.1.8. A, B, C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin olan çeşitli fonksiyonel türden ilişkilere deterministik denir.

Örneğin,

$$y = Ax + B$$

(doğrusal ilişki),

$$\log y = \log(Ax + B)$$

(tam logaritmik ilişki),

$$y = A^{Bx+C}$$

(üstel ilişki) ,

ifadeleri birer deterministik ilişkilerdir. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Çünkü serilerden birinin aldığı değer bilindiğinden diğer serinin alabileceği değer kesin olarak hesaplanabilir. Örneğin; bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişki, v.s. hep birer deterministik ilişkidir (Karagöz,1998).

Tanım 1.1.9. Önceden hangi değeri alacağı kesin olarak bilinmeyen, fakat yaklaşık olarak bir eğilim belirleyen, olaylar arasındaki ilişkilerin incelemesine stokastik denir. Bu tür ilişkilere konu olan olayların, hangi sonucu alacağı deney ya da olay gerçekleşmeden bilinemez, ancak yaklaşık olarak belli bir hata payı ile tahmin edilebilir (Karagöz, 1998).

Tanım 1.1.10. x sürekli tesadüfi bir değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna x tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Karagöz, 1998).

$$1) f(x) \geq 0,$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Tanım 1.1.11. x ve y gibi iki tesadüfi değişken arasındaki ilişkinin derecesini veren istatistiksel ölçüye korelasyon denir (Karagöz,1998).

Tanım 1.1.12 L^* adjoint operatörü $(v, Lu) = (L^*v, u)$ eşitliği ile tanımlanır.

Örneğin, $L = \frac{d}{dx}$ olsun. O zaman

$$(v, Lu) = \int_0^1 v(du/dx)dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 u(dv/dx)dx$$

olur. Eğer $uv \Big|_0^1 = 0$ ise bu taktirde

$$(v, Lu) = \int_0^1 u(dv/dx)dx = (L^*v, u)$$

dir. Buradan $L^* = -\frac{d}{dx}$ olur (Adomian,1983).

2.BÖLÜM

2.1.Giriş

Matematiksel fizikte birçok problem adi veya kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilir. Bağımlı veya bağımsız değişkenlerin birbirine sürekli olarak bağlı bulunduğu gerçek fizik sistemlerinde, denklemler olayın meydana geldiği konumda ortamın fiziksel özelliklerini belirten parametrelerle ve uygun başlangıç ve sınır koşulları ile belirtilir. Ayrıca bazı fizik sistemlerde incelenen denklemin katsayıları başlangıç ve sınır koşulları deterministik terimlerle ifade edilemez. Bu nedenle elde edilen denklem stokastik süreç katsayılı, rastgele başlangıç ve sınır şartlı bir stokastik adi veya kısmi diferansiyel denklemdir. Bu tip denklemlere, daha çok mekanik nükleer reaktörler, lazerler ve kontrol sistemlerini kapsayan dinamik sistem problemlerinde rastlanır.

Adomian'ın lineer ve lineer olmayan deterministik veya stokastik denklemler için verdiği ayrışım yöntemi (decomposition metod ya da invers operatör metot) ile fizikte başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematik modelleri olan uzay ve zamana göre çok boyutlu denklemlerinin yaklaşık çözümleri basit bir biçimde elde edilebilir. Ayrışım yöntemi bir yaklaşım yöntemi olup doğrusallaştırma, pertürbasyon ve kesikleme (discretization) teknikleri kullanmadan doğrusal olmayan deterministik veya stokastik denklemler için analitik yaklaşım verir ve bunun çözümü genel olarak sonsuz seridir. Ayrışım yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan pertürbasyon tekniklerine göre daha basit bir biçimde incelenir ve hesaplanabilir olduğundan pertürbasyon teknikleri; $u(t)$ küçüklük parametresi üzerindeki kuvvetli varsayımlara bağlı olmasına karşılık, ayrışım yönteminin lineer olmayan N operatörleri üzerinde daha az koşul gerektirdiğini göstermiştir(Adomian,1983).

Adomian'ın ayrışım yöntemi; polinom, üstel ve trigonometrik tiplerindeki lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve özellikle fizik sistemlerinin geçici davranışlarının incelemesinde başarılı bir biçimde uygulanabilir. Yöntemin uygulamasında N ile gösterilen lineer olmayan terimler analitik parametreleme ile incelenir. A_n ile gösterilen Adomian polinomları lineer olmayan terimler için açılım katsayılarıdır. Bu yöntemle incelenen lineer ve lineer olmayan probleme sürekli analitik yaklaşan bir çözüm elde edilebilmesi için problemin iyi tanımlanmış olması, yani çözümlerin uygun başlangıç veri için mevcut olması, çözümün tek olması ve çözümün

verilen koşullara sũrekli olarak bağlı olması gerekir. Ayrışım metoduyla; bir diferensiyel denklemin çõzũmũne ve genel olarak iyi tanımlanmış sũrekli parametrelere sahip adi, kısmi ve stokastik diferensiyel denklemlerin çõzũmlerine uygulanışını inceleyeceğiz.

Lineer ve lineer olmayan stokastik denklemlerin çõzũmlenmesi ayrışım metodu kullanılarak gerçekteştirilebilmektedir(Adomian,1983-1986). Operatõr denklemin genel formu $F(u) = x(t)$ ya da $Lu + Nu = x(t)$ olarak kabul edilir. Operatõr denklemin çõzũmũ ise $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ bileşenlerinin ayrıştırılması ile elde edilebilir. Burada u_0 başlangıç ve sınır koşulları olan $x(t)$ den ve F nin lineer deterministik kısmının

tersinden tanımlanır. A_n lineer olmayan denklemler için $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$

lineer olmayan bileşenler ile temsil edilir. Burada A_n polinomları Adomian tarafından genel ve özel lineer olmayan durumlar için tanımlanabilmektedir. Adomian,1986 da bunu gõstermesine rağmen, $g(u, u', \dots)$ biçimindeki lineer olmayan terimler ya da lineer olmayan bileşenler için $f(u)$ 'nin analitik bir fonksiyon olduğunu, $Nu = f(u)$ ile sınırlandığını, gözõnũnde bulundurmalıyız. $f(u)$ bir sinũs ve cosinũs Fourier serisine ayrıştırılabildiğinde $f(u)$ 'nin A_n polinomlarının cũmlesinin yakınsaklığının ayrıştırılabildiği Adomian tarafından verilmiştir. Burada $A_n = A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ olup, Pertũrbasyon ya da yaklaşık tahminleri (varsayımlar) olmadan ayrışım çõzũmũ yapabilmek için bu anahtar bir faktõrdür. Herhangi bir lineer olmayan terim A_n terimleri ile ifade edildiğinde u 'nin u_n bileşenlerine ayrışımı ve u_0 tanımlanması bõlũm (2.7) deki tũm terimlerin hesaplanmasını sağlar. Bõylece bir n terimi yaklaşımı için $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ olup bazı n değerleri için u fonksiyonunun istenilen doğrulukta olduğunu gõsterir. Buradaki A_n polinomlarının herbiri $f(u)$ fonksiyonu için tek bir biçimde tanımlanamadığını sõyleyebiliriz. Bu polinomların diğer formũllerini uygun şekilde bulmak geniş bir araştırma sahasını gerektirir. şimdi ayrışım metodu kavramını ačíklayalım ve daha sonra A_n polinomlarının meydana getirilmesini ele alalım. Bazı õnemli sonucları olan bir başka A_n polinomların yorumunu ele alıp inceleyelim.

Sonuç olarak da Ayrışım metodu ile Green fonksiyonları arasındaki ilişkileri, stokastik teoremin deterministik limiti ile diferensiyel denklemlerin sayısal

çözümünü, lineer olmayan stokastik diferensiyel denklemlerin sayısal çözümünü, lineer olmayan hiperbolik denklemlere uygulamasını ve çok boyutlu kısmi diferensiyel denklemlere uygulamasını inceleyelim.

2.2. Ayırışım Metodu

Lineer ve lineer olmayan stokastik diferensiyel denklemlerin ayırışım yöntemi ile çözümünde, diferensiyel operatörün katsayıları ya da dinamik sistemdeki katsayılar stokastik süreçler olarak kabul edilebilir. Lineer ve lineer olmayan terimlerin her ikisini de kapsayan genel bir lineer olmayan adi diferensiyel operatörü F olmak üzere,

$$F u(t) = x(t) \quad (2.2.1)$$

veya

$$L u + R u + N u = x(t)$$

denklemini gözönüne alalım. L deterministik operatör, L^{-1} de L nin tersi olarak alınabilen bir ters operatör ve R de lineer operatörün kalanı olarak alınırsa, bu durumda lineer terimler; $L + R$ şeklinde elde edilir. n -inci mertebeden başlangıç değer problemlerinde L^{-1} ters operatör, n -katlı belirli integraldir. Örneğin; başlangıç değer probleminde L ikinci mertebeden operatör ise L^{-1} de t_0 dan t ye iki katlı integral operatörü olup

$$L^{-1} L u = u(t) - u(x, t_0) - (t - t_0) u_t(x, t_0)$$

dır. Böylece $N u$ lineer olmayan terimleri göstermek üzere, (2.2.1) denklemini

$$L u + R u + N u = x(t) \quad (2.2.2)$$

şeklinde yazabiliriz. $L u$ için çözüm yapılırsa

$$L u = x(t) - R u - N u \quad (2.2.3)$$

olarak bulunur. L deterministik olduğundan

$$L^{-1} L u = L^{-1} x(t) - L^{-1} R u - L^{-1} N u \quad (2.2.4)$$

ifadesi elde edilir. (2.2.4) denklemi u için çözülürse, A ve B sabitler olmak üzere

$$u = A + B t + L^{-1} x(t) - L^{-1} R u - L^{-1} N u \quad (2.2.5)$$

şeklinde elde edilir. A_n ler özel polinomlar olmak üzere, $N u$ lineer olmayan terim,

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ile eşitlenip, u da $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 'e ayrıştırılıp u_0 da $u_0 = A + B t + L^{-1} x(t)$ biçiminde

tanımlanırsa (2.2.5) denklemi



$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n ,$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$u_1 = -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 ,$$

$$u_2 = -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1 ,$$

⋮

$$u_{n+1} = -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n, \quad n \geq 0 \quad (2.2.6)$$

yazılır. A_n polinomları her bir lineer olmayan durum için elde edilir, öyle ki A_0 yalnız u_0 'a, A_1 yalnız u_0 ve u_1 'e, A_2 yalnız u_0 , u_1 ve u_2 ye, A_3 yalnız u_0 , u_1 , u_2 ve u_3 'e bağlı olurlar. Bu şekilde devam edilirse u_n bileşenleri

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (2.2.7)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

olarak da yazılır. Bu durumda u_n bileşenlerinin tümü hesaplanabilir ve çözüm;

$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ formülü ile verilir. (2.2.1) diferensiyel denkleminde $x(t)$ stokastik oluşum ve $a_v(t, \omega)$ stokastik oluşumun katsayıları olduğu durumlarda, yani $x(t, \omega)$, $t \in T, \omega \in (\Omega, F, \mu)$ ihtimali uzayı,

$$L = \sum_{v=0}^n a_v(t, \omega) d^v / dt^v \quad (2.2.8)$$

iken

$$L = \sum_{v=0}^n \langle a_v \rangle \frac{d^v}{dt^v}$$

şeklinde yazılır. Burada $\langle a_v \rangle$ beklenen değerdir ve $R = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v(t, \omega) \frac{d^v}{dt^v}$ ile

$\alpha_v = a_v - \langle a_v \rangle$ tesadüfi operatörüdür. Stokastik durum için (2.2.2) denklemini

$Lu + Ru + \mathfrak{R}u + Nu = x(t)$ biçiminde yazarsak burada $L = \frac{d^n}{dt^n}$, R ile de kalan lineer

deterministik terimleri ve $\mathfrak{R}u$ ile de stokastik oluşumları içeren lineer kısmı ifade

ederiz. Nu 'nun deterministik ve Mu 'nun da stokastik bir terim olduğu durumlarda lineer olmayan terim $Nu = Nu + Mu$ olarak yazılabilir. Ayırışım metodu $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olup A_n polinomlarının toplamı halinde yazılan Nu ve Mu nun bir seri çözümü olan $A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ ile

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\mathfrak{R} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(Nu) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(Mu)$$

yazılır. Burada $A_n(Nu)$ ifadesi A_n polinomunun Nu lineer olmayan terimini ifade etmektedir. Şimdi u_1 terimini yukarıdaki toplamdan

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}\mathfrak{R}u_0 - L^{-1}A_0(Nu) - L^{-1}A_0(Mu)$$

şeklinde tanımlarız. Böylelikle bilinen u_0 terimleri yardımıyla u_1 terimi hesaplanır. Bu şekilde devam edersek en genel hali

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}\mathfrak{R}u_n - L^{-1}A_n(Nu) - L^{-1}A_n(Mu), n \geq 0$$

şeklinde tanımlanır. Böylece u 'nun tüm bileşenleri hesaplanabilir ve $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olarak

yazılır. Deterministik denklemlerde $\mathfrak{R}u$ ve Mu terimleri olmayacağından sadece sıradan seriler kalacaktır. Stokastik durumda bir n terim yaklaşımı için $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ şekline olup sıralı istatistikle elde edebileceğimiz bir stokastik seri oluşur. $u(x, y, z, t)$ 'yi içeren kısmi diferensiyel denklemler için $L_t u, L_x u, L_y u, L_z u$ lineer terimlerini elde edebiliriz ve u çözümünü bulmak için her lineer terimin sırasıyla tersini alarak

çözüme bu dört terimi ekleyip denklem sayısına böleriz. Böylece $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, z, t)$

için A_n polinomlarını kullanarak sıradan bir diferensiyel denklem gibi çözüm yaparız. Ayırışım metodu kolaylıkla diferensiyel ve kısmi diferensiyel denklem sistemine uygulanıp ve daha da genişletilebilir. n -yinci birleştirilmiş diferensiyel denklemler için nu_1 bileşenlerinin hesaplanabildiği terimler için de nu_0 bileşenleri kümesi basit bir biçimde elde edilebilir. Bir n -yinci kısmi diferensiyel denklem sistemi bu düşüncelerin her ikisini de kullanır ve ayırışım metodu geniş bir ölçüde uygulandığı zaman lineer veya deterministik koşulların genel bir uygulamadan özele dönüştüğü görülür (Adomian, 1983).

Eğer $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi çözüme yakınsaksa n -terim toplamı; $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ olup

bu ifade tanım gereğince

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$



olduğundan çözüme yakınsayacaktır. n -terim yaklaşımı olan $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ ifadesi kullanılarak metodun yakınsaklığı;

$$\phi_n = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\phi_{n+1} = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^n A_i = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i - L^{-1} A_n$$

$$|\phi_{n+1} - \phi_n| = |-L^{-1} A_n| = |u_{n+1}| \rightarrow 0$$

şeklinde verilir.

Örnek 2.2.1. Aşağıda verilen denklem daha önce Carrier tarafından bilinen yöntemlerle çözülmüştür (Adomian, 1986).

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + [1 + \varepsilon f(x)] u(x) = 0 \quad (2.2.9)$$

$$u(0) = 1, u'(0) = 0,$$

lineer stokastik Mathieu denklemi verilsin. Bu denklemi ayrışım metodu ile çözelim.

Burada $f(x)$ herhangi bir fonksiyon ve $L = \frac{d^2}{dx^2}$ olsun. L^{-1} de iki katlı integrali göstermek üzere (2.2.9) denklemini

$$\begin{aligned} Lu &= -[1 + \varepsilon f(x)]u \\ L^{-1}Lu &= -L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)]u \\ u - u(0) - xu'(0) &= -L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)]u \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

şeklinde yazarız. Burada $u_0 = u(0) + xu'(0)$ olmak üzere (2.2.10) denklemini

$$u = u_0 - L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)] \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (2.2.11)$$

elde edilir. (2.2.11) den diğer bileşenleri yazarsak,

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= -L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)]u_0 \\ u_2 &= -L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)]u_1 \\ u_3 &= -L^{-1}[1 + \varepsilon f(x)]u_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

şeklinde bulunur. Burada $n \geq 1$ için u_n bir $f(x)$ fonksiyonuna bağlıdır. Eğer u nun yalnız iki terim yaklaşımını kullanırsak, $u = u_0 + u_1$ olup



$$\langle f(x) \rangle = 0 \text{ ve } \langle f(x).f(x') \rangle = \delta(x-x')$$

yüksek kare dalgalanmaların bir yaklaşımını elde ederiz. Böylece

$$\langle u^2 \rangle = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \varepsilon^2 \frac{x^3}{3!}$$

dır. Burada ε parametresi x 'in bir fonksiyonudur.

Bu denklemin çözümünde herhangi bir farklı yaklaşım veya pertürbasyon teorisi kullanılmadı. Fakat ε nun çok küçük değeri yerine $\varepsilon=1$ alınmalıdır. Ayrışım metodu; lineerlik, harmonik dalgalar, wiener oluşumu vb. ile sınırlı değildir. Eğer Ayrışım metodundaki u fonksiyonu (x, y, z, t) ye göre değişirse lineer olmayan stokastik bir denklem, karmaşık bir modelle tanımlanarak ele alınabilir (Adomian,1994).

Örnek 2.2.2.

$$\begin{aligned} y'' - ty &= 0; \\ y(0) &= 1, y'(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

ile tanımlanan Airys denklemini gözönüne alalım (Adomian,1986). Burada $L = \frac{d^2}{dt^2}$, $R = t$, L^{-1} de 0'dan t 'ye iki katlı belirli integrali ile tanımlayalım. (2.2.13)

denkleminin operatör formu $Ly - Ry = 0$ şeklinde olup her iki tarafına L^{-1} operatörünü uygularsak denklemin çözümünü

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + L^{-1}Ry \quad (2.2.14)$$

şeklinde elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} y_0 &= 1+t \\ y_1 &= L^{-1}Ry_0 = L^{-1}t(1+t) = \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^4}{3.4} = \frac{1.t^3}{3!} + \frac{2.t^4}{4!} \\ y_2 &= L^{-1}Ry_1 = \frac{t^6}{2.3.5.6} + \frac{t^7}{3.4.6.7} = \frac{1.4.6.t^6}{6!} + \frac{2.5.t^7}{7!} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{1.4.7...(3n-2)t^{3n}}{(3n)!} + \frac{2.5.8...(3n-1)t^{3n+1}}{(3n+1)!} \end{aligned}$$

olup

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Airys fonksiyonudur.

2.3. A_n Polinomlarının Oluşumu

A_n polinomlarını hesaplamak için $u(t)$ çözümünün bileşenlere ayrışımını $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ ile tanımlayıp, bunu

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(t) \quad (2.3.1)$$

biçiminde parametreleyebiliriz. Daha önceden olduğu gibi lineer olmayan $Nu = f(u)$ terimini şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ olarak gözönüne alalım. Burada $f(u)$ ya da $f(u(\lambda))$, λ için de analitik bir fonksiyondur. A_n ler öyle polinomlar ki A_n sadece u_0 dan u_n e kadar olan $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'e bağlıdır. Buradan $A_0 = A_0(u_0)$, $A_1 = A_1(u_0, u_1)$, $A_2 = A_2(u_0, u_1, u_2)$... vs. şeklinde yazılır. Bundan dolayı ayrışım serilerinde her u_n bileşimi bir önceki u_{n-1} teriminden hesaplanabilir. u_0 terimini, başlangıç yada sınır koşullarından veya lineer operatörün tersi alınabilen kısmından elde edilir. Lineer operatörün tersinin mevcut olması integrallerin çözümünü basitleştirmektedir. Böylece u_{n+1} terimi u_n e bağlıdır ve A_n nın de en yüksek terimi u_n dir.

Şimdi A_n polinomlarının nasıl elde edilebileceğini (2.3.2) den hesaplayalım:

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \right) f(u(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} \quad (2.3.2)$$

verilsin. $D = \frac{d}{d\lambda}$ olmak üzere (2.3.2) denklemini

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) D^n f \Big|_{\lambda=0} \quad (2.3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. $f = f(u)$ ve $u = u(\lambda)$ olduğundan

$$D = \frac{d}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{d}{du} \right) \quad (2.3.4)$$

dır. (2.3.3) de (2.3.4) gözönüne alınırsa

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) D^n f(u) \Big|_{\lambda=0}$$

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) D^n u \Big|_{\lambda=0}$$

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) \frac{d^n u}{d\lambda^n} \Big|_{\lambda=0}$$

bulunur. Burada $A_n \equiv u_n$ olması gözönüne alınırsa,

$$\left(\frac{1}{n!} \frac{d^n u}{d\lambda^n} \right) \Big|_{\lambda=0} = u_n$$

ya da

$$\left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \right) u(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = n! u_n \quad (2.3.5)$$

bulunur. Ayrıca

$$\left(\frac{d^n}{du^n} \right) f(u(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \frac{d^n f}{du^n} = h_n(u_0) \quad (2.3.6)$$

yazılır(Adomian,1983). Burada $\frac{d^n f}{du^n}$, u_0 'ın bir fonksiyonu olup $h_n(u_0)$ olarak yazılır.

$D^n f$ terimlerini $\frac{d^v u}{d\lambda^v}$ polinomlarının katsayıları ile birlikte $v=1...n$ ye kadar $\frac{d^v f}{du^v}$

polinomlarının toplamı olarak yazabiliriz yani, $n > 0$ için $D^n f$ ifadeleri,

$$\begin{aligned} D^1 f &= \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \\ D^2 f &= \left(\frac{d^2 f}{du^2} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2} \right) \\ D^3 f &= \left(\frac{d^3 f}{du^3} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^3 + 3 \left(\frac{d^2 f}{du^2} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2} \right) + \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{d^3 u}{d\lambda^3} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan n-yinci türevi $D^n f$ ile bunlara ait v yinci katsayıları da

$C(v, n)$ ile gösterelim. $F(v) = \frac{d^v f}{du^v}$ olmak üzere, (2.3.7) eşitliği genel olarak

$$D^n f = \sum_{v=1}^n C(v, n) F(v) \quad (2.3.8)$$

şeklinde yazılır. Örneğin, (2.3.8) den $D^2 f$ ifadesi

$$D^2 f = C(1,2)F(1) + C(2,2)F(2) \quad (2.3.9)$$

yazılır. (2.3.9) ifadesini hesaplamak için $1 \leq i, j \leq n$ ise $C(0,0)=1, C(0,1)=C(1,0)=0$ ve $i > j$ için $C(i, j)=0$ olmak üzere

$$C(i, j) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{C(i, j-1)\} + \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \{C(i-1, j-1)\} \quad (2.3.10)$$

şeklinde yazılır (Adomian, 1986). (2.3.10) dan

$$\begin{aligned} C(1,2) &= \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{C(1,1)\} + \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \{C(0,1)\} \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right) + \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \{0\} = \left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2} \right) \\ C(2,2) &= \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{C(2,1)\} + \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \{C(1,1)\} \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{0\} + \left(\frac{du}{d\lambda} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right) = \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

hesaplanır. Bu ifadeler (2.3.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$D^2 f = \left(\frac{d^2 f}{du^2} \right) \left(\frac{du}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{df}{du} \right) \left(\frac{d^2 u}{d\lambda^2} \right)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.3.5) den $D^3 f$ ifadeside

$$\begin{aligned} D^3 f &= C(1,3)F(1) + C(2,3)F(2) + C(3,3)F(3) \\ &= \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \lambda^3} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (2.3.8) eşitliğindeki türev ifadeleri



$$\Psi(i, j) = \left(\frac{d^i u}{d\lambda^i} \right)^j \quad (2.3.11)$$

$$F(i) = \frac{d^i f}{du^i}$$

şeklinde ifade edilebilir (Adomian, 1986). Buradan

$$C(0,0) = \Psi(1,0) = 1 \quad (2.3.12)$$

olarak yazılır. (2.3.12) ve (2.3.10) birlikte gözönüne alınarak, $C(i, j)$ ifadeleri

$\Psi(i, j)$ lere bağlı olarak

$$C(1,1) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{C(1,0)\} + \Psi(1,1) \{C(0,0)\}$$

$$= \left(\frac{d}{d\lambda} \right) \{0\} + \Psi(1,1) \{1\} = \Psi(1,1)$$

$$C(2,2) = \frac{d}{d\lambda} \{C(2,1)\} + \Psi(1,1) \{C(1,1)\} = \frac{d}{d\lambda} \{0\} + \Psi(1,1) \Psi(1,1) = \Psi(1,2)$$

$$C(1,2) = \frac{d}{d\lambda} \{C(1,1)\} + \Psi(1,1) \{C(0,1)\} = \frac{d}{d\lambda} \{\Psi(1,1)\} + \Psi(1,1) \{0\} = \Psi(2,1)$$

$$C(3,3) = \frac{d}{d\lambda} \{C(3,2)\} + \Psi(1,1) \{C(2,2)\} = \Psi(1,1) \Psi(1,2) = \Psi(1,3)$$

$$C(2,3) = \frac{d}{d\lambda} \{C(2,2)\} + \Psi(1,1) \{C(1,2)\} = \frac{d}{d\lambda} \Psi(1,2) + \Psi(1,1) \Psi(2,1)$$

$$= 2\Psi(1,1) \Psi(2,1) + \Psi(1,1) \Psi(2,1) = 3\Psi(1,1) \Psi(2,1)$$

$$C(1,3) = \frac{d}{d\lambda} \{C(1,2)\} = \frac{d}{d\lambda} \Psi(2,1) = \Psi(3,1)$$

elde edilir. Burada $j > 0$ için $C(0, j) = 0$ alındı. Bu değerler (2.3.8) de gözönüne alınırsa,

$$D^3 f = C(1,3)F(1) + C(2,3)F(2) + C(3,3)F(3)$$

ya da

$$D^3 f = \Psi(3,1)F(1) + 3\Psi(1,1)\Psi(2,1)F(2) + \Psi(1,3)F(3)$$

$$= \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \lambda^3} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \right)$$

şeklinde yazılır. Böylece A_n polinomları hızlı bir şekilde türetilbildiği görülebilir. Diğer taraftan (2.3.6),(2.3.3) de gözönüne alınırsa A_n polinomları;

$$A_0 = \left(\frac{1}{0!} \right) D^0 f \Big|_{\lambda=0} = f(u_0) = h_0(u_0)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{1!} \right) D^1 f \Big|_{\lambda=0} = C(1,1)h_1(u_0) = \Psi(1,1)h_1(u_0) = h_1(u_0)u_1$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2!} \right) D^2 f \Big|_{\lambda=0} \tag{2.3.13}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \{ C(1,2)h_1 + C(2,2)h_2 \}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \{ \Psi(2,1)h_1 + \Psi(1,2)h_2 \}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \{ 2u_2h_1 + u_1^2h_2 \}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \{ h_2(u_0)u_1^2 + 2h_1(u_0)u_2 \}$$

$$= h_1(u_0)u_2 + h_2(u_0) \left(\frac{1}{2} \right) u_1^2$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{3!} \right) \{ C(1,3)h_1 + C(2,3)h_2 + C(3,3)h_3 \}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{3!} \right) \{ \Psi(3,1)h_1 + 3\Psi(1,1)\Psi(2,1)h_2 + \Psi(1,3)h_3 \} \\
&= \left(\frac{1}{3!} \right) \{ (3!)u_3h_1 + (3!)u_1u_2h_2 + u_1^3h_3 \} \\
&= \left(\frac{1}{3!} \right) \{ h_3(u_0)u_1^3 + 6h_2(u_0)u_1u_2 + 6h_1(u_0)u_3 \} \\
&= \left\{ h_1(u_0)u_3 + h_2(u_0)u_1u_2 + h_3(u_0)\left(\frac{1}{6}\right)u_1^3 \right\} \\
A_4 &= \left(\frac{1}{4!} \right) \{ h_4(u_0)u_1^4 + 12h_3(u_0)u_1^2u_2 + h_2(u_0)[12u_2^2 + 24u_1u_3] + 24h_1(u_0)u_4 \} \\
&= h_1(u_0)u_4 + h_2(u_0)\left[\left(\frac{1}{2}\right)u_2^2 + u_1u_3 \right] + h_3(u_0)\left[\left(\frac{1}{2}\right)u_1^3u_2 \right] + h_4(u_0)\left(\frac{1}{24}\right)u_1^5 \\
A_5 &= h_1(u_0)u_5 + h_2(u_0)[u_2u_3 + u_1u_4] + h_3(u_0)\left[\left(\frac{1}{2}\right)u_1u_2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)u_1^2u_3 \right] \\
&\quad + h_4(u_0)\left(\frac{1}{6}\right)u_1^3u_2 + h_5(u_0)\left(\frac{1}{120}\right)u_1^5 \\
A_6 &= h_1(u_0)u_6 + h_2(u_0)\left[\left(\frac{1}{2}\right)u_3^2 + u_2u_4 + u_1u_5 \right] \\
&\quad + h_3(u_0)\left[\left(\frac{1}{6}\right)u_2^3 + u_1u_2u_3 + \left(\frac{1}{2}\right)u_1^2u_4 \right] + h_4(u_0)\left[\left(\frac{1}{4}\right)u_1^2u_2^2 + \left(\frac{1}{6}\right)u_1^3u_3 \right] \\
&\quad + h_5(u_0)\left(\frac{1}{24}\right)u_1^4u_2 + h_6(u_0)\left(\frac{1}{720}\right)u_1^6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Lineer durumda $f(u)=u$ olduğunda $A_0 = u_0$, $A_1 = u_1$, $A_2 = u_2, \dots, A_n = u_n$ alınabilir. (2.3.3) de (2.3.1) ve (2.3.5) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_n &= \left(\frac{1}{n!} \right) D^n f(u) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \left(\frac{1}{n!} \right) D^n u \Big|_{\lambda=0} = \left(\frac{1}{n!} \right) \frac{d^n u}{d\lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \left(\frac{1}{n!} \right) (n! u_n) = u_n
\end{aligned}$$

olur. $Lu + Nu = x$ ifadesinde L lineer bir operatör iken $Nu = u$ alınırsa , O zaman

$$Lu + Nu = x$$

$$\Rightarrow Lu + u = x$$

$$\Rightarrow Lu = x - u$$

$$\Rightarrow u = u_0 - L^{-1} \sum A_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

dır. Böylece $u_{n+1} = u_{n+1}(u_n)$ olup lineer durumdaki u_{n+1} sadece kendisini izleyen terime bağlıdır. Lineer olmayan durumda, $u_{n+1} = u_{n+1}(u_0, u_1, \dots, u_n)$ olduğundan $f(u) = u, u^2, u^4, e^4, \sin u, \dots$ veya $f(u, u'), f(u, u', u'') \dots$ gibi terimleri de gözönüne alabiliriz.

2.4. Lineer Olmayan Diferensiyel Operatörler İçin A_n

f analitik bir fonksiyon olmak üzere $Nu = f(u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ lineer olmayan operatörü ele alalım. Burada f fonksiyonu λ ve $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots$ için de analitiktir.

Nu lineer olmayan diferensiyel operatörün iki önemli koşulu;

1) u 'nun zaman türevlerinin lineer olmayan fonksiyonlarının toplamı ile her lineer olmayan fonksiyon tek bir türeve bağlıdır. Dolayısıyla

$$Nu = \sum_{i=0}^n N_i u = \sum f_i(u^{(i)})$$

dır,

2) Lineer olmayan u fonksiyonlarının çarpımlarının toplamının herbiri yalnız bir türeve bağlıdır , şeklinde ifade edilir.

Örneğin, $f(u, u') = u^2(u')^3$ verildiğinde lineer olmayan diferensiyel operatör olan Nu için A_n polinomu ; $u, u', \dots, u^{(n)}$ ler λ nın analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$A_m = \left(\frac{1}{m!} \right) D^m \left\{ f(u, u', \dots, u^{(n)}) \right\} \Big|_{\lambda=0}$$

şeklinde tanımlanır (Adomian,1986).

2.5. A_n Polinomlarının Uygun Hesaplama Şekilleri

Şimdi, $Nu = f(u)$ formundaki lineer olmayan operatörlerini gözönüne alalım.

(2.3.3) ve (2.3.8) ifadelerinin eşitliklerinden

$$A_n = \left(\frac{1}{n!} \right) \sum_{v=1}^n C(v, n) h_v(u_0) \quad (2.5.1)$$

ve (2.3.6) dan da

$$h_v(u_0) = \left(\frac{d^v}{du^v} \right) f(u(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} \quad (2.5.2)$$

yazılır. A_n polinomunu $i = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere u_i formunda da yazabiliriz.

Dolayısıyla $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olmak üzere

$$Nu = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.5.3)$$

olur. (2.5.1), (2.5.2) ve (2.5.3) birlikte gözönüne alınırsa;

$$A_0 = u_0^2,$$

$$A_1 = 2u_0u_1,$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2,$$

$\vdots$

ya da

$$A_0 = u_0u_0,$$

$$A_1 = u_0u_1 + u_1u_0,$$

$$A_2 = u_0u_2 + u_1u_1 + u_2u_0,$$

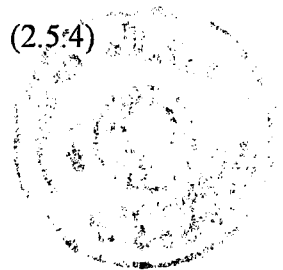
$\vdots$

şeklinde yazılabilir. Burada her terimdeki indislerin toplamı n olmak zorunda olup sıralamada yukarıda verilen eşitlikte olduğu gibidir. (2.5.1) den A_n polinomlarının terimleri

$$A_0 = h_0(u_0)$$

$$A_1 = h_1(u_0)u_1$$

(2.5.4)



$$A_2 = h_1(u_0)u_2 + h_2(u_0)(1/2!)u_1^2$$

$$A_3 = h_1(u_0)u_3 + h_2(u_0)u_1u_2 + h_3(u_0)(1/3!)u_1^3$$

$$A_4 = h_1(u_0)u_4 + h_2(u_0)\left[(1/2!)u_2^2 + u_1u_3\right] + h_3(u_0)(1/2!)u_1^2u_2 + h_4(u_0)(1/4!)u_1^4$$

$$A_5 = h_1(u_0)u_5 + h_2(u_0)[u_2u_3 + u_1u_4] + h_3(u_0)[u_1(1/2!)u_2^2 + (1/2!)u_1^2u_3] \\ + h_4(u_0)(1/3!)u_1^3u_2 + h_5(u_0)(1/5!)u_1^5$$

$$A_6 = h_1(u_0)u_6 + h_2(u_0)\left[(1/2!)u_3^2 + u_2u_4 + u_1u_5\right] + h_3(u_0)\left[(1/3!)u_2^3 + u_1u_2u_3 + (1/2!)u_1^2u_4\right] \\ + h_4(u_0)\left[(1/2!)u_1^2(1/2!)u_2^2 + (1/3!)u_1^3u_3\right] + h_5(u_0)(1/4!)u_1^4u_2 + h_6(u_0)(1/6!)u_1^6$$

$$A_7 = h_1(u_0)u_7 + h_2(u_0)[u_3u_4 + u_2u_5 + u_1u_6] + h_3(u_0)\left[(1/2!)u_2^2u_3 + u_1(1/2!)u_3^2 + u_1u_2u_4 + (1/2!)u_1^2u_5\right] \\ + h_4(u_0)\left[u_1(1/3!)u_2^3 + (1/2!)u_1^2u_2u_3 + (1/3!)u_1^3u_4\right] + h_5(u_0)\left[(1/3!)u_1^3(1/2!)u_2^2 + (1/4!)u_1^4u_3\right] \\ + h_6(u_0)(1/5!)u_1^5u_2 + h_7(u_0)(1/7!)u_1^7$$

$$A_8 = h_1(u_0)u_8 + h_2(u_0)\left[(1/2!)u_4^2 + u_3u_5 + u_2u_6 + u_1u_7\right] \\ + h_3(u_0)\left[u_2(1/2!)u_3^2 + (1/2!)u_2^2u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_2u_5 + (1/2!)u_1^2u_6\right] \\ + h_4(u_0)\left[(1/4!)u_2^4 + u_1(1/2!)u_2^2u_3 + (1/2!)u_1^2(1/2!)u_3^2 + (1/2!)u_1^2u_2u_4 + (1/3!)u_1^3u_5\right] \\ + h_5(u_0)\left[(1/2!)u_1^2(1/3!)u_2^3 + (1/3!)u_1^3u_2u_3 + (1/4!)u_1^4u_4\right] + h_6(u_0)\left[(1/4!)u_1^4(1/2!)u_2^2 + (1/5!)u_1^5u_3\right] \\ + h_7(u_0)\left[(1/6!)u_1^6u_2 + h_8(u_0)(1/8!)u_1^8\right]$$

$$A_9 = h_1(u_0)u_9 + h_2(u_0)[u_4u_5 + u_3u_6 + u_2u_7 + u_1u_8] \\ + h_3(u_0)\left[(1/3!)u_3^3 + u_2u_3u_4 + (1/2!)u_2^2u_5 + u_1(1/2!)u_4^2 + u_1u_3u_5 + u_1u_2u_6 + (1/2!)u_1^2u_7\right] \\ + h_4(u_0)\left[(1/3!)u_2^3(1/2!)u_3^2 + u_1u_2(1/2!)u_2^3 + u_1(1/2!)u_2^2u_4 \right. \\ \left. (1/2!)u_1^2u_5u_4 + (1/2!)u_1^2u_2u_5 + (1/3!)u_1^3u_6 + (1/2!)u_1^2u_3u_5 + (1/2!)u_1^2u_2u_6 + (1/3!)u_1^3u_7 \right] \\ + h_5(u_0)[u_1(1/4!)u_4^2 + (1/2!)u_1^2(1/2!)u_2^2u_3 + (1/3!)u_1^3(1/2!)u_3^2 + (1/3!)u_1^3u_2u_4 + (1/4!)u_1^4u_5 \\ + (1/3!)u_1^3u_3u_4 + (1/3!)u_1^3u_2u_5 + (1/4!)u_1^4u_6] \\ + h_6(u_0)\left[(1/3!)u_1^3(1/3!)u_2^3 + (1/4!)u_1^4u_2u_3 + (1/5!)u_1^5u_4 \right. \\ \left. + h_7(u_0)\left[(1/5!)u_1^5(1/2!)u_2^2 + (1/6!)u_1^6u_3\right] + h_8(u_0)\left[(1/7!)u_1^7u_2\right] + h_9(u_0)\left[(1/9!)u_1^9\right]$$

$$\begin{aligned}
A_{10} = & h_1(u_0)u_{10} + h_2(u_0)\left[(1/2!)u_5^2 + u_4u_6 + u_3u_7 + u_2u_8 + u_1u_9\right] \\
& + h_3(u_0)\left[(1/2!)u_3u_4 + u_2(1/2!)u_4^2 + u_2u_3u_5 + (1/2!)u_2^2u_6\right. \\
& + u_1u_4u_5 + u_1u_3u_6 + u_1u_2u_7 + (1/2!)u_1^2u_8] \\
& + h_4(u_0)\left[(1/2!)u_2^2(1/2!)u_3^2 + (1/3!)u_2^3u_4 + u_1(1/2!)u_3^3\right. \\
& + u_1u_2u_3 + u_1(1/2!)u_2^2u_5 + (1/2!)u_1^2(1/2!)u_4^2 \\
& + (1/2!)u_1^2u_3u_5 + (1+2!)u_1^2u_2u_6 + (1/3!)u_1^3u_7] \\
& + h_5(u_0)\left[(1/5!)u_2^5 + u_1(1/3!)u_2^3u_3 + (1/2!)u_1^2u_2(1/2!)u_3^2 + (1/2!)u_1^2(1/2!)u_2^2u_4\right. \\
& + (1/3!)u_1^3u_3u_4 + (1/3!)u_1^3u_2u_5 + (1/4!)u_1^4u_6] \\
& + h_6(u_0)\left[(1/2!)u_1^2(1/4!)u_2^4 + (1/3!)u_1^3(1/2!)u_2^2u_3 + (1/4!)u_1^4(1/2!)u_3^2\right. \\
& + (1/4!)u_1^4u_2u_4 + (1/5!)u_1^5u_5] \\
& + h_7(u_0)\left[(1/4!)u_1^4(1/3!)u_2^3 + (1/5!)u_1^5u_2u_3 + (1/6!)u_1^6u_4\right] \\
& + h_8(u_0)\left[(1/6!)u_1^6(1/2!)u_2^2 + (1/7!)u_1^7u_3\right] \\
& + h_9(u_0)\left[(1/8!)u_1^8u_2 + h_{10}(u_0)(1/10!)u_1\right]
\end{aligned}$$

⋮

yazılır (Adomian,1986). Son zamanlardaki çalışmalarda bilgisayar algoritmaları kullanılarak A_n polinomunun çok sayıdaki terimleri üretilebilmektedir.



2.6. Bileşik Lineer Olmayan Durumlar İçin A_n Polinomlarının Hesaplanması

N Lineer olmayan bir operatör ve Nx ise ayrışım ile çözülebilen (cebirsel, diferansiyel, kısmi diferansiyel) herhangi bir denklemde lineer olmayan bir terim olsun .

x^2 , e^x veya $\sin x$ gibi basit bir $f(x)$ terimi $u^0 = x$ iken $\tilde{N}_0 x$ veya $N_0 u^0$ sıfırıncı sıradan bileşik lineer olmayan terim olarak alınıp ve A_n polinomlarına genişletilecektir. Özellikle lineer olmayan operatöre bir üst indis ekleyeceğiz. Böylece A_n polinomu

N_0 operatörüne karşılık gelecek ve $N_0 u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde olacaktır. Birinci sıradan

bileşik lineer olmayan $\tilde{N}_1 x = N_0 (N_1 u^1)$ yada basitçe $N_0 N_1 u^1$ olarak yazılır.

Burada $u^1 = x$ ve $u^0 = N_1 u^1$ iken $N_0 u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0$ ve $N_1 u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1$ dir. Örneğin bu terim

$$e^{-x^2} = \tilde{N}x = N_0 N_1 x \quad \text{ve} \quad N_0 u^0 = e^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \quad \text{ve} \quad u^0 = N_1 u^1 = (u^1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1 \quad \text{dir.}$$

Burada $u^1 = x$ şeklinde olup indislerin üs olmadıklarını belirtelim. $N_0 N_1, \dots$ lineer olmayan operatörler için A_n polinomlarını basit bir biçimde tanımlarlar. İkinci sıradan

bileşik lineer olmayan terim $\tilde{N}_2 x = N_0 N_1 N_2 x$ veya $N_0 (N_1 (N_2 x))$ şeklinde yazılır.

Burada $\tilde{N}_2 x$ ifadesinin açık şekli

$$N_0 u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$u^0 = N_1 u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1$$

$$u^1 = N_2 u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$$

$$u^2 = x$$

olup bunları ayrışım metodunda gözönüne alınırsa

$$u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0$$

$$u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1$$

$$u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 .$$

Bir üçüncü sıradan bileşik lineer olmayan terim $\tilde{N}_3 x = N_0(N_1(N_2(N_3 x))) = N_0 N_1 N_2 N_3 x$ şekilde yazılır. Böylece

$$N_0 u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0$$

$$u^0 = N_1 u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1$$

$$u^1 = N_2 u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$$

$$u^2 = N_3 u^3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^3$$

$$u^3 = x .$$

olup bu ise ayrışım metodunda

$$u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0$$

$$u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1$$

$$u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$$

$$u^3 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^3 .$$

Ayrıca

$$u^0 = N_1 u^1$$

$$u^1 = N_2 u^2$$

$$u^2 = N_3 u^3$$

$$u^3 = x$$

alındığında $u^m = x$ ve $u^v = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^v$ olmak üzere $1 \leq v \leq m$ için genel olarak

$$N_v u^v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^v = u^{v-1}$$

dir. A_n polinomunun m . sıradan bileşik lineer olmayan terimi ise

$$\tilde{N}_m(x) = N_0(N_1(N_2(\dots(N_{m-2}(N_{m-1}(N_m(x))))\dots))) = N_0(u^0) = \sum A_n^0$$

$$N_1 u^1 = \sum A_n^1 = u^0$$

$$N_2 u^2 = \sum A_n^2 = u^1$$

$$N_v u^v = \sum A_n^v = u^{v-1}$$

⋮

$$N_{m-1}(u^{(m-1)}) = \sum A_n^{m-1} = u^{m-2}$$

$$N_m(u^{(m)}) = \sum A_n^m = u^{m-1}$$

⋮

$$u^m \equiv x$$

olarak yazılır. Burada u ' lar değişkenlerdir. Benzer biçimde



$$\tilde{N}_m(x) = N_0.N_1.N_2,...,N_{m-1}.N_m(x)$$

de bir operatör birleşimidir. A_n polinomlarını x_n in fonksiyonları olarak ,yani

$$A_n(x_0, x_1,...,x_n) = N_x$$

şeklinde tanımlamak gerekir. Birinci sıralı şartta

$$\begin{aligned} A_n^0 &= A_n^0(x_0, x_1,...,x_n) \\ &= A_n^0(u_0^1,...,u_n^1) \\ &= A_n^0(A_0^1,...,A_n^1) \\ &= A_n^0(A_0^1(x_0),...,A_n^1(x_0,...,x_n)) \end{aligned}$$

dır. İkinci sıralı şartta ise

$$\begin{aligned} A_n^0 &= A_n^0(u_0^0,...,u_n^0) \\ &= A_n^0(A_0^1,...,A_n^1) \\ &= A_n^0(A_0^1(u_0^1),...,A_n^1(u_0^1,...,u_n^1)) \\ &= A_n^0(A_0^1(A_0^2),...,A_n^1(A_0^2,...,A_n^2)) \\ &= A_n^0(A_0^1(A_0^2(x_0)),...,A_n^1(A_0^2(x_0),...,A_n^2(x_0,...,x_n))) \end{aligned}$$

olur. Üçüncü sıralı şartı ise

$$\begin{aligned} A_n^0 &= A_n^0(u_0^0,...,u_n^0) \\ &= A_n^0(A_0^1,...,A_n^1) \\ &= A_n^0(A_0^1(u_0^1),...,A_n^1(u_0^1,...,u_n^1)) \\ &= A_n^0(A_0^1(A_0^2),...,A_n^1(A_0^2,...,A_n^2)) \\ &= A_n^0(A_0^1(A_0^2(u_0^2),...,A_n^1(A_0^2(u_0^2),...,A_n^2(u_0^2,...,u_n^2))) \\ &= A_n^0(A_0^1(A_0^2(A_0^3),...,A_n^1(A_0^2(A_0^3),...,A_n^2(A_0^3,...,A_n^3))) \end{aligned}$$

$$= A_n^0(A_0^1(A_0^2(A_0^3(x_0)))) , \dots , A_n^1(A_0^2(A_0^3(x_0))) , \dots , A_n^2(A_0^3(x_0)) , \dots , A_n^3(x_0, \dots, x_n))$$

yazılır. Böyle lineer olmayan bileşik durumları ele almanın birçok yöntemi vardır, fakat bu yinelenen yaklaşım daha uygundur. Nedeni ise Nx için A_n ' in sınırlı (sıfırıncı sıradan) şartının alt toplamıdır ve daha kolay programlanabilmesidir. m . sıradan bir lineer olmayan bileşke için

$$A_n^0 = A_n^0 (A_0^1(A_0^2(A_0^3(\dots(A_0^v(\dots A_0^m(x_0))\dots))\dots))), \dots,$$

$$A_n^1(A_0^2(A_0^3(\dots(A_0^v(\dots A_0^m(x_0))\dots))\dots))\dots$$

$$A_n^2(A_0^3(\dots(A_0^v(\dots(A_0^m(x_0))\dots))\dots))\dots,$$

$$A_n^3(\dots(A_0^v(\dots(A_0^m(x_0))\dots))\dots)$$

$$A_n^v(\dots(A_0^m(x_0)\dots, A_n^m(x_0 \dots x_n))\dots))\dots))$$

yazılabilir.

Örnek 2.6.1 Birinci dereceden bileşik lineer olmayan durum

$$\tilde{N}_1 x = e^{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = N_0(N_1 x)$$

şeklinde olup

$$N_0 u^0 = e^{-u^0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0(u_0^0 u_1^0, \dots, u_n^0) \text{ ve } N_1 u^1 = \sin\left(\frac{u^1}{2}\right)$$

olsun. Burada $u^1 = x$ ve $u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0 = N_1 x = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ olup $N_0 u^0$ terimi için A_n

polinomları hesaplanırsa

$$A_0^0 = e^{-u_0^0}$$

$$A_1^0 = e^{-u_0^0} (-u_1^0)$$

$$A_2^0 = e^{-u_0^0} (-u_2^0 + \left(\frac{1}{2}\right)(u_1^0)^2)$$

$$A_3^0 = e^{-u_0^0} (-u_3^0 + u_1^0 u_2^0 - \left(\frac{1}{6}\right)(u_1^0)^3)$$

$$\vdots$$

elde edilir. Eğer tanımlayıcı üst indisi çıkarırsak

$$Nu = e^{-u} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

olur. Böylece

$$A_0 = e^{-u_0},$$

$$A_1 = e^{-u_0} (-u_1)$$

$$\vdots$$

şeklinde yazılır. Şimdi $N_1 x$ için A_n^1 i hesaplanırsa

$$A_0^1 = \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_1^1 = \left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_2^1 = \left(\frac{x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{8}\right) \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_3^1 = \left(\frac{x_3}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1 x_2}{4}\right) \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1^3}{48}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$\vdots$$

elde edilir. Burada $N_0 u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0$ ve $u^0 = N_1 x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1$ olduğundan

$u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1$ dir. Dolayısıyla

$$u_0^0 = A_0^1 = \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$u_1^0 = A_1^1 = \left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$u_2^0 = A_2^1 = \left(\frac{x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{8}\right) \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$\vdots$

şeklinde olur. Böylece

$$N_0 u^0 = e^{-u^0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 = A_0^0 + A_1^0 + \dots = e^{-u_0^0} - u_1^0 e^{-u_0^0} + \dots$$

bulunur. Şimdi üst indisler gözönüne alınmaz ise

$$A_0 = e^{-\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)}$$

$$A_1 = -\left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) e^{-\sin\left(\frac{x_0}{2}\right)}$$

şeklinde olup örnekteki $e^{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ lineer olmayan terimi içeren adi ya da kısmi diferensiyel veya cebirsel denklemler ayrışım metodu ile çözümlenir.

Örnek 2.6.2 İkinci dereceden bileşik lineer olmayan durum

$$\tilde{N}_2 x = e^{-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olup

$$N_0 u^0 = e^{-u^0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0,$$

$$N_1 u^1 = (u^1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1 = u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0,$$

$$N_2 u^2 = N_2 x = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1$$

olsun. Burada A_n^0 önceki örnekte nasıl elde edildiği vermişti.

Şimdi A_n^1 ile verilen

$$A_0^1 = (u_0^1)^2$$

$$A_1^1 = 2u_0^1 u_1^1$$

$$A_2^1 = (u_1^1)^2 + 2u_0^1 u_2^1$$

$$A_3^1 = 2u_1^1 u_2^1 + 2u_0^1 u_3^1$$

⋮

şeklinde olup A_n^2 ise bu

$$A_0^2 = \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_1^2 = \left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_2^2 = \left(\frac{x_2}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{8}\right) \sin\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

$$A_3^2 = \left(\frac{x_3}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1 x_2}{4}\right) \sin\left(\frac{x_0}{2}\right) - \left(\frac{x_1^3}{48}\right) \cos\left(\frac{x_0}{2}\right)$$

⋮

şekilde yazılır. Böyle verilen denklemin bileşik lineer olmayan durum incelendi

2.7. Yeni Üretim Planları - Hızlandırılmış Polinomlar

Önceki bölümlerde A_n polinomlarının tek bir şekilde olmadığını belirtmiştik. Belirli terimler ileri ya da geri hareket ettirilerek daha yüksek veya daha düşük n değerleri için bileşim u_n olarak hesaplanmaktadır. n -terimli yaklaşım gözönüne alındığında bu yakınsama oranının etkileri aşağıdaki şekilde olur.

Örneğin ; Eğer $Nu = f(u) = u^2$ ise

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

$$A_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3$$

yazılır. Eğer u_1^2 terimi A_2 den A_1 'e hareket ettirilir ise $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ çözümünü

etkilenmez. Ancak u_2 terimi farklı olacağından yaklaşık çözüm, gerçek çözüme daha yakındır. A_n üretimi için bu plan seçilmiştir. Bu nedenle A_n polinomlarındaki her terimin indis toplamı n olacaktır. Bu matematiksel tanım ile daha önceki verilen Heuristic uygulama arasındaki tutarlılık sağlanmıştır. Şimdi önerilen bu yeni planda tutarlılığı hızlandıran belirli A_n terimleri hareket ettirilmelidir. Böylece hızlandırılmış polinomlar olarak adlandırılır ve A_n ile karşılaştırılması için de $\hat{A}_n$ olarak gösterilir.

Böyle göstermekteki amacımız, hızlı olan bir yakınsamada ilerleme değil, yanlış bir sonuç olan yineleme prosedürü gibi görünecek ayrışım serilerine neden olan parametrelemeyi kaçınmaktır. Bu şekildeki terimleri elimine etmek ise fiziksel bir türev sonucunu bize vermektedir. Bu avantajlara rağmen $\hat{A}_n$ polinomu yerine A_n polinomunu kullanmak yine de bazen cazip gelebilir. A_n kullanırken yakınsayan yaklaşım serilerinin toplamını görmek bazen daha kolaydır. Diferensiyel denklemleri içeren bazı problemlerde de $\hat{A}_n$ ile ilgili zorlukları görülebilir. Bu yüzden bu durum açık problemdir ve hem A_n hem de $\hat{A}_n$ şekilde matematiksel uygulamada da kullanılabilir. Şimdi $\hat{A}_n$ polinomunu elde edelim. Parametrelili ayrışımında $u|_{\lambda=0}$ hesaplanması u_0 ve λ ya göre türevler de u_0 a göre türevlerle yer değiştirmektedir. Önceki bölümlerde verilen A_n formülüne dikkat edilirse;



$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \right) f(u(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}$$

şeklinde ve e^x için serinin n ci terimleri $\frac{x^n}{n!}$ olup ξ_n üstel operatörü

$$\xi_n = e^{u_n(d/du_0)} - 1 = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{u_n^v}{v!} \right) \left(\frac{d^v}{du_0^v} \right) \quad (2.7.1)$$

şeklinde tanımlanabilir(Adomian,1986).

Örnek 2.7.1 Lineer olmayan stokastik operatör denklemlerinde sonlu fark metotlarında kullanılan ileri fark operatörünü şöyle tanımladı (Adomian,1986):

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau^n}{n!} \right) \frac{d^n}{dt^n} .$$

Bu eşitlik (2.7.1) ifadesinde u_0 yerine t , u_n yerine τ ve v yerinede n yazılarak elde edilir. (2.7.1) de ξ_n bir operatördür. ξ terimlerinde bir A_n operatörünü

$$A_0 = 1 \text{ (birim operator)}$$

$$A_n = \xi_n \sum_{v=0}^{n-1} A_v, A_n \geq 1 \quad (2.7.2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \xi_1 A_0 = \xi_1 = e^{u_1(d/du_0)} - 1$$

$$A_2 = \xi_2 (A_0 + A_1) = \xi_2 (1 + \xi_1) = \xi_2 + \xi_2 \xi_1$$

$$A_3 = \xi_3 (A_0 + A_1 + A_2) = \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1))$$

$$A_4 = \xi_4 (A_0 + A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= \xi_4 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1) + \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1)))$$

⋮

olur.



$\hat{A}_0$ ve A_0 durumları polinomların başlangıç değerleri olduğundan, her iki durumda

$\hat{A}_0$ ile A_0 aynı olup $\hat{A}_0 \equiv A_0 = f(u_0)$ dır. $\frac{d}{du_0} = D$ alınırsa;

$$\hat{A}_0 = f(u_0)$$

$$\hat{A}_1 = (e^{u_1 D} - 1)f(u_0)$$

$$\hat{A}_2 = (e^{u_2 D} - 1)f(u_0) + (e^{u_2 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)f(u_0)$$

$$\hat{A}_3 = (e^{u_3 D} - 1)f(u_0) + (e^{u_3 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1)f(u_0)$$

$$+ (e^{u_3 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)f(u_0) + (e^{u_3 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)f(u_0)$$

$$\hat{A}_4 = (e^{u_4 D} - 1) + (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_3 D} - 1) + (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1) \quad (2.7.3)$$

$$+ (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1) + (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_3 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1)$$

$$+ (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_3 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1) + (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)$$

$$+ (e^{u_4 D} - 1)(e^{u_3 D} - 1)(e^{u_2 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)f(u_0)$$

⋮

şeklinde yazılır. Hızlandırılmış $\hat{A}_n$ polinomlarını

$$\hat{A}_n = A_n f(u_0) \quad (2.7.4)$$

(2.7.1) ve (2.7.2) terimlerinden böyle tanımlayabiliriz.

Örnek 2.7.2 $x = k + e^{-x}$ cebirsel denklemini $k = 2$ için çözüm yaparsak denklemde $\hat{A}_n$

polinomunu $Nx = e^{-x}$ alıp



$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = k + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$$

şeklinde yazarız. Şimdi $\hat{A}_n$ ler hesaplanırsa

$$\hat{A}_0 = f(x_0) = e^{-x_0}$$

$$\hat{A}_1 = \xi_1 e^{-x_0} = (e^{x(d/dx_0)} - 1)e^{-x_0} = (e^{-x_1} - 1)e^{-x_0}$$

$$\hat{A}_2 = [\xi_2(1 + \xi_1)]e^{-x_0} = (e^{-x_2} - 1)[1 + (e^{-x_1} - 1)]e^{-x_0}$$

$$\hat{A}_3 = \{(e^{-x_3} - 1)[1 + (e^{-x_1} - 1) + (e^{-x_2} - 1)(1 + (e^{-x_1} - 1))]\}e^{-x_0}$$

⋮

olur. $x_0 = 2.0$ değeri için $x_n = \hat{A}_{n-1}$, $x_n \geq 1$ olduğundan

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 0.1353352832$$

$$x_2 = -0.0171303316$$

$$x_3 = 0.002042333$$

⋮

elde edilir. Burada x değerine bir n – terim yaklaşımı, $\Phi_n = \sum_{v=0}^{n-1} x_v$ ile verildiğinde

$$\Phi_1 = 2.00...$$

$$\Phi_2 = 2.135335283$$

$$\Phi_3 = 2.118204952$$

$$\Phi_4 = 2.120247285$$

⋮

şeklinde bulunur. Gerçek çözüm ise 2.1200028239 dır. Ψ_n ’i n terimlerindeki hatalar % olarak tanımlanırsa

$$\Psi_1 = -5.66 \%$$

$$\Psi_2 = +0.722 \%$$

$$\Psi_3 = -0.08600 \%$$

$$\Psi_4 = +0.01033 \%$$

biçimindedir. $\hat{A}_n$ yerine A_n polinomlarını kullanırsak sonuçlar:

$$\hat{\Psi}_1 = -5.66 \%$$

$$\hat{\Psi}_2 = 0.722 \%$$

$$\hat{\Psi}_3 = -0.142 \%$$

$$\hat{\Psi}_4 = 0.033 \%$$

olup $\hat{A}_n$ hızlandırılmış polinomlarının kullanımının daha hızlı yakınsallıkla sonuçlandığını görürüz. Burada

$$\Psi_m = [(\Phi_m - x)/x](100)$$

ve

$$\hat{\Psi}_m = [(\hat{\Phi}_m - x)/x](100)$$

olup hızlandırma oranını ise

$$\rho_m = [(\Psi_m - \hat{\Psi}_m)/\Psi_m](100)$$

şeklinde tanımlanabilir. Dördüncü terimdeki yakınsama hızı %68.7 dır. Böylece yeni tanımlamanın daha uygun ve daha hızlı yakınsak olduğu görülmektedir. Aynı zamanda daha fizikseldir. Diferensiyellerde λ parametresi yerine fiziksel terim olan u_0 alınır. Bu genel lineer olmayan denklemlerin ayrışım metodu ile çözümlerinde ilk adımdır. Diğer bir şekilde denklem

$$Lu + Nu = g \quad (2.7.5)$$

biçiminde olup L tersi alınabilir bir operatör olmak üzere Lu için çözüm ;

$$Lu = g - Nu$$

şeklindedir. L^{-1} i her iki tarafa uygularsak

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Nu = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

elde edilir. Burada, $u_0 = L^{-1}g$ şeklinde tanımlayıp ve Nu lineer olmayan terim

yerine $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ya da $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ terimlerini yazalım. Böylece u_0 bilindiğinden

$$u_1 = -L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}A_1$$

⋮

şeklinde yazılır. Eğer lineer operatör olan L'nin tersi basit bir şekilde alınamıyorsa o zaman (2.7.5) ifadesinde arta kalan R terimleri de gözönüne alınarak

$$Lu + Ru + Nu = g$$

şeklinde düzenlenerek L'nin tersi bulunabilir.(2.7.5) ifadesindeki hesaplamalara benzer olarak

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1$$

⋮

elde edilir. Bu yöntem ile cebirsel denklemleri, diferensiyel denklemleri, integral-diferensiyel denklemleri, diferensiyel denklem sistemlerini, kısmi diferensiyel denklemleri ve kısmi diferensiyel denklem sistemleri çözülebilecektir.

Örneğin $f(u) = u^2$ ise

$$\hat{A}_0 = f(u_0) = u_0^2$$

$$\hat{A}_1 = (e^{u_1 D} - 1)f(u_0) = (u_1 d/du_0 + (u_1^2/2) d^2/du_0^2 + \dots)u_0^2 = u_1^2 + 2u_1 u_0$$

$$\hat{A}_2 = (e^{u_2 D} - 1)u_0^2 + (e^{u_2 D} - 1)(e^{u_1 D} - 1)u_0^2 = u_2^2 + 2u_2(u_0 + u_1) \quad (2.7.6)$$

⋮

dır.



Buradan genel olarak $\hat{A}_n = u_n^2 + 2u_n \sum_{v=0}^{n-1} u_v$, $\hat{A}_n \geq 1$ yazılır. $u(0) = 1$ başlangıç şartı

ile $du/dt = u^2$ olmak üzere $f(u) = u^2$ diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Ayrıştırma metodu kullanılarak

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$$

yazılır. Böylece $u_0=1$ ve $u_n = L^{-1}(u_{n-1}^2 + 2u_{n-1} \sum_{v=0}^{n-2} u_v)$, $u_n \geq 1$ olmak üzere

$$u_1 = L^{-1}(1) = t$$

$$u_2 = L^{-1}\hat{A}_1 = L^{-1}(t^2 + 2t) = (t^3/3) + t^2$$

$$u_3 = L^{-1}\hat{A}_2 = L^{-1}[(t^6/9) + (2t^5/3) + (t^4) + (2t^4/3) + (2t^3)]$$

$$= (t^7/63) + (t^6/9) + (t^5/3) + (2t^4/3) + (2t^3/3)$$

elde edilir. $t = 0.5$ değeri için

$$u_0=1$$

$$u_1=0.500$$

$$u_2=0.2916567$$

$$u_3=0.1372768$$

elde edilir. Buradan n - terim yaklaşımı

$$\Phi_1 = 1.00$$

$$\Phi_2 = 1.50$$

$$\Phi_3 = 1.7916667$$

$$\Phi_4 = 1.9289435$$

bulunur. Verilen denklemin Gerçek çözümü ise $u(t) = 1/(1-t)$ dir. Burada $u(t) = u(1/2) = 2$

ve $\Phi_n \rightarrow 2$ olur. $\hat{A}_n$ yerine A_n kullandığımızda sonuç daha yavaş yakınsar. Böylece

$$\Phi_1 = 1.00$$

$$\Phi_2 = 1.50$$

$$\Phi_3 = 1.75$$

$$\Phi_4 = 1.875$$

bulunur. $u(t)$ sonucuna geri dönerek ve hızlandırılmış $\hat{A}_n$ polinomlarını kullanarak

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = t$$

$$u_2 = (t^3/3) + t^2 \quad (2.7.7)$$

$$u_3 = (2t^3/3) + (2t^4/3) + (t^5/3) + (t^6/9) + (t^7/63)$$

$\vdots$

olup denklemin çözümü $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dir. Bu durumda (2.7.2) den

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = t$$

$$u_2 = t^2 \quad (2.7.8)$$

$$u_3 = t^3$$

elde edilir. Bu ise bir geometrik seri olup

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1/(1-t)$$

şeklinde yazılır. Burada (2.7.7) ve (2.7.8) ifadeleri gözönüne alınırsa $\hat{A}_n$ nin

terimlerinin A_n terimlerinden daha karmaşık olduğu görülür. Örneğin $f(u) = e^u$ alalım.

$f(u_0) = e^{u_0}$ olup buradan

$$\xi_n e^{u_0} = (e^{u_n d / du_0} - 1) e^{u_0} = (e^{u_n} - 1) e^{u_0}$$



olur. Yani $n \geq 1$ için $\hat{A}_0 = e^{u_0}$ ise $\hat{A}_n = (e^{u_n} - 1)e^{u_0}$ dır. Eğer $f(u) = e^{-u_0}$ olarak alınırsa

$$(d^v / du^v) e^{-u_0} = (-1)^v e^{-u_0}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \xi_m e^{-u_0} &= \sum_{v=1}^{\infty} u_m^v / v! (d^v / du_0^v) e^{-u_0} = \sum_{v=1}^{\infty} u_m^v / v! (-1)^v e^{-u_0} \\ &= e^{-u_0} \left[\sum_{v=1}^{\infty} (u_m^v / v! (-1)^v) \right] = e^{-u_0} (e^{-u_m} - 1) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Eğer $f(u) = e^{-\alpha u}$ ise $f(u_0) = e^{-\alpha u_0}$ ve

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} (u_m^v / v!) (d^v / du_0^v) e^{-\alpha u_0} &= \sum_{v=1}^{\infty} (u_m^v / v!) (-1)^v \alpha^v e^{-\alpha u_0} \\ &= e^{-\alpha u_0} \left(\sum_{v=1}^{\infty} (u_m^v / v!) (-1)^v \alpha^v \right) = e^{-\alpha u_0} (e^{-\alpha u_m} - 1) \end{aligned}$$

olur. $\hat{A}_n$ polinomunu hızlandırılmış bir biçimde yazarsak

$$\hat{A}_0 = f(u_0) \quad (2.7.9)$$

$$\hat{A}_1 = (e^{u_1 d / du_0} - 1) f(u_0)$$

$$\hat{A}_2 = (e^{u_2 d / du_0} - 1) f(u_0) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) f(u_0)$$

$$\hat{A}_3 = (e^{u_3 d / du_0} - 1) f(u_0) + (e^{u_3 d / du_0} - 1)(e^{u_2 d / du_0} - 1) f(u_0)$$

$$+ (e^{u_3 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) f(u_0)$$

$$+ (e^{u_3 d / du_0} - 1)(e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) f(u_0)$$

$\vdots$

ya da

$$\hat{A}_0 = f(u_0)$$

$$\hat{A}_1 = \xi_1 f(u_0)$$

$$\hat{A}_2 = \xi_2 (1 + \xi_1) f(u_0) = (\xi_2 + \xi_2 \xi_1) f(u_0)$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_3 &= \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1)) f(u_0) \\
&= (\xi_3 + \xi_3 \xi_1 + \xi_3 \xi_2 + \xi_3 \xi_2 \xi_1) f(u_0) \\
\hat{A}_4 &= \xi_4 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1) + \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1))) f(u_0) \\
&= (\xi_4 + \xi_4 \xi_1 + \xi_4 \xi_2 + \xi_4 \xi_3 + \xi_4 \xi_2 \xi_1 + \xi_4 \xi_3 \xi_1 + \xi_4 \xi_3 \xi_2 + \xi_4 \xi_3 \xi_2 \xi_1) f(u_0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dır. (2.7.3) ve (2.7.4) ifadelerinden eşdeğer operatör $A_0=1$ iken $\hat{A}_n = A_n f(u_0)$

kullanmak uygun olabilir. Daha önceden verildiği gibi $A_1 = \xi_1$, $A_2 = \xi_2 (1 + \xi_1)$,

$A_3 = \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1))$ iken (2.7.2) eşitliğindeki gibi

$$A_n = \xi_n \sum_{v=0}^{n-1} A_v, \quad A_n \geq 1$$

dir. $f(u) = u^2$ için $\hat{A}_n$ ve A_n sırası ile hesaplanırsa

$$\hat{A}_1 = u_0^2$$

$$\hat{A}_1 = u_1^2 + 2u_0 u_1$$

$$\hat{A}_2 = u_2^2 + 2u_0 u_2 + 2u_1 u_2$$

$$\hat{A}_3 = u_3^2 + 2u_0 u_3 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3$$

$$\hat{A}_4 = u_4^2 + 2u_0 u_4 + 2u_1 u_4 + 2u_2 u_4 + 2u_3 u_4$$

$\vdots$

$$\hat{A}_m = u_m^2 + 2u_m \sum_{v=0}^{m-1} u_v$$

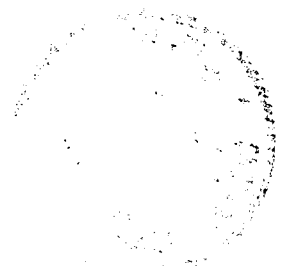
ve

$$A_0 = u_0$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0 u_2$$

$$A_3 = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2$$



$$A_4 = u_2^2 + 2u_0u_4 + 2u_1u_3$$

⋮

elde edilir. Böylece u_n 'i oluşturan terimlerin A_n polinomunda daha geç geldiği görülmektedir, yani $\hat{A}_n$ 'deki terimler A_n deki terimlerden daha hızlıdır. Bunun anlamı ise $\hat{A}_1$ 'deki u_1^2 terimi A_2 de bulunmaktadır. Böylece bu A_2 polinomunda u_1^2 terimi daha geç gelmektedir. Benzer düşünceyle A_3 de ise $2u_1u_2$ terimi daha sonra gelir. Şimdi $\hat{A}_n$ polinomunu $f(u) = u^3$ için hesaplırsak

$$\hat{A}_0 = u_0^3$$

$$\hat{A}_1 = u_1^3 + 3u_0^2u_1 + 3u_1^2u_0$$

$$\hat{A}_2 = u_2^3 + 3u_0^2u_2 + 3u_1^2u_2 + 3u_2^2u_0 + 3u_2^2u_1 + 6u_0u_1u_2$$

$$\hat{A}_3 = u_3^3 + 3u_0^2u_3 + 3u_1^2u_3 + 3u_2^2u_3 + 3u_3^2u_0 + 3u_3^2u_1$$

$$+ 3u_3^2u_2 + 6u_0u_1u_3 + 6u_0u_2u_3 + 6u_1u_2u_3$$

$$\hat{A}_4 = u_4^3 + 3u_0^2u_4 + 3u_1^2u_4 + 3u_2^2u_4 + 3u_3^2u_4 + 3u_4^2u_0 + 3u_4^2u_1$$

$$+ 3u_4^2u_2 + 3u_4^2u_3 + 6u_0u_1u_4 + 6u_0u_2u_4 + 6u_0u_3u_4$$

$$+ 6u_1u_2u_4 + 6u_1u_3u_4 + 6u_2u_3u_4$$

⋮

$$\hat{A}_m = u_m^3 + 3u_m \sum_{v=0}^{m-1} u_v^2 + 3u_m^2 \sum_{v=0}^{m-1} u_v + 6u_m \sum_{\mu=v+1}^{m-1} \sum_{v=0}^{m-2} u_\mu u_v$$

şeklindedir. Benzer şekilde $f(u) = u^4$ için hesaplayalım. Burada $\hat{A}_0 = u^4$ olup ve $m \geq 1$ için aşağıdaki şekilde

$$\hat{A}_m \geq 1 = u_m^4 + 4u_m \sum_{v=0}^{m-1} u_v^3 + 4u_m^3 \sum_{v=0}^{m-1} u_v$$

$$\begin{aligned}
& + 6u_m^2 \sum_{v=0}^{m-1} u_v^2 + 12u_m \sum_{\mu=v+1}^{m-1} u_\mu^2 \sum_{v=0}^{m-2} u_v + 12u_m \sum_{\mu=v+1}^{m-1} u_\mu \sum_{v=0}^{m-2} u_v^2 \\
& + 12u_m^2 \sum_{\mu=v+1}^{m-1} u_\mu \sum_{v=0}^{m-2} u_v + 24u_m \sum_{\mu=v+1}^{m-1} u_\mu \sum_{\mu=\gamma+1}^{m-2} u_\gamma \sum_{\gamma=0}^{m-3} u_\gamma
\end{aligned}$$

yazılır. $f(x)$ için Maclaurin seri açılımı gözönüne alınırsa

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + (x^2/2!)f^{(2)}(0) + (x^3/3!)f^{(3)}(0) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^n / n!) f^{(n)}(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^n / n!) (d^n / dx^n) f(x) \Big|_{x=0}$$

olur. Ayrıca üstel operatör terimi olarak Maclaurin operatörü M alınırsa

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n / n!) (d^n / dx^n) \equiv e^{x(d/dx)}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$M = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n / n!) (d^n / dx^n)$$

olarak yazılır. $\hat{A}_n$ hızlandırılmış polinomlarını A_n polinomu ile karşılaştırmak için

$$M = 1 + (e^{x(d/dx)} - 1)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrışım serileri $Af(u) \Big|_{u=u_0}$ şeklinde olup Maclaurin serileride

$Mf(x) \Big|_{x=0}$ şeklindedir. A_n polinomu $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olup ya

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \xi_1$$

$$A_2 = \xi_2 (1 + \xi_1)$$

$$A_3 = \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1))$$



şeklinde ya da

$$\begin{aligned}
 A_n &= 1 + (e^{u_1 d / du_0} - 1) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(1 + (e^{u_1 d / du_0} - 1)) + \dots \\
 A_n &= 1 + (e^{u_1 d / du_0} - 1) + (e^{u_2 d / du_0} - 1) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) \\
 &+ (e^{u_3 d / du_0} - 1) + (e^{u_3 d / du_0} - 1)(e^{u_2 d / du_0} - 1) \\
 &+ (e^{u_3 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) \\
 &+ (e^{u_3 d / du_0} - 1) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1) + \dots
 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu Maclaurin serilerinden daha da karmaşıktır. Böylece

$$\begin{aligned}
 A_n &= 1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_2 \xi_1 + \xi_3 + \xi_3 \xi_2 \\
 &+ \xi_3 \xi_1 + \xi_3 \xi_2 \xi_1 + \xi_4 + \xi_4 \xi_1 + \xi_4 \xi_2 \\
 &+ \xi_4 \xi_3 + \xi_4 \xi_2 \xi_1 + \xi_4 \xi_3 \xi_1 + \xi_4 \xi_3 \xi_2 + \xi_4 \xi_3 \xi_2 \xi_1 + \dots
 \end{aligned}$$

şeklinde olup $Mf(x)|_{x=0}$ Maclaurin serileri ile $Af(u)|_{u=u_0}$ Adomian serileri için işlemlerin oldukça farklı olduğu görülmektedir. $Af(u)|_{u=u_0}$ ifadesi $u_0, u_1, \dots$ nın bir fonksiyonu iken $Mf(x)|_{x=0}$ de x 'e bağlı fonksiyonlardır. Örneğin $du/dx + f(u) = 0$ şeklindeki diferansiyel denklemin çözümünde λ ayrışım parametremiz diferansiyel denklemlerde görünen bir parametre değildir. Ancak A_n hesaplanmasında kullanılan diferansiyeller λ ya göre yapılır. Bu λ ayrışım parametresi Maclaurin serilerinde görülmez. Şimdi (2.3.2) denkleminde

$$\hat{A}_0 = f(u_0) = h(u_0)$$

olduğundan

$$h_m = d^m / du_0^m f(u_0) = h_m(u_0)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_1 &= (e^{u_1 d / du_0} - 1) f(u_0) \\
 &= [u_1 (d / du_0) + (u_1^2 / 2!)(d^2 / du_0^2) + \dots] f(u_0)
 \end{aligned}$$

$$= u_1 h_1(u_0) + (u_1^2 / 2!)(h_2 u_0) + (1/3!)u_1^3 h_3(u_0) + \dots$$

$$\hat{A}_2 = ((e^{u_2 d / du_0} - 1) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1))f(u_0)$$

$$= u_2 h_1(u_0) + (u_2^2 / 2!)h_2(u_0) + (1/3!)u_2^3 h_3(u_0)$$

$$+ \dots + u_1 u_2 h_2(u_0) + (1/2!)(u_1^2 u_2 h_3(u_0))$$

$$+ \dots + (1/2!)u_2^2 u_1 h_3(u_0) + (1/2!)u_1^2 (1/2!)u_2^2 h_4(u_0)$$

$$+ (1/3!)u_1^3 u_2 h_4(u_0) + (1/3!)u_2^3 u_1 h_4(u_0)$$

$$+ (1/4!)u_1^4 u_2 h_5(u_0) + (1/2!)u_1^2 (1/3!)u_2^3 h_5(u_0) + u_1 (1/4!)(u_2^4 h_5(u_0))$$

şeklinde yazılır. $\hat{A}_2$ deki $((e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1))f(u_0)$ terimi hesaplanırsa

$$(e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1)f(u_0)$$

$$= (\sum_{m=v}^{\infty} u^m / m! (d / du_o)^m - 1)(\sum_{m=v}^{\infty} (u_1^m / m!)(d / du_o)^m - 1)f(u_0)$$

$$= u_1 u_2 h_2(u_0) + [(u_1^2 / 2!)]u_2 + (u_1 u_2^2 / 2!)]h_3(u_0)$$

$$+ [(u_1^3 / 3!)u_2 + (1/2!)u_1^2 (1/2!)u_2^2 + (u_2^3 / 3!)u_1]]h_4(u_0)$$

$$+ [(1/4!)u_1^4 u_2 + (1/3!)u_1^3 (1/2!)u_2^2 + (1/2!)u_1^2 (1/3!)u_2^3 + u_1 (1/4!)u_2^4]h_5(u_0)$$

elde edilir. Böylece

$$\hat{A}_2 = (e^{u_2 d / du_0} - 1)f(u_0) + (e^{u_2 d / du_0} - 1)(e^{u_1 d / du_0} - 1)f(u_0)$$

olduğundan $\hat{A}_n$ hızlandırılmış polinomları daha önce verilen A_n ile karşılaştırılabilir.

Buradan

$$A_1 = u_1 h_1$$

iken

$$\hat{A}_1 = u_1 h_1 + (u_1^2 / 2!)h_2 + (u_1^3 / 3!)h_3$$

dır. Böylece (2.5.2) deki $A_2 = u_2 h_1 + (1/2!)u_1^2 h_2$ ile $\hat{A}_2$ karşılaştırılırsa $\hat{A}_n$ da daha fazla terimlerin elde edildiği görülür. Dolayısıyla $\hat{A}_n$ yi kullanılarak bir n-terim yaklaşımı ile A_n serisinde elde edilen terimlerin daima bir fazla terimi elde edilir.

Örneğin $f(u) = u^2$ alınırsa ,

$$\hat{A}_0 = f(u_0) = u_0^2$$

$$\hat{A}_1 = 2u_0 u_1 + u_1^2$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_2 &= (e^{u_2 d/du_0} - 1)f(u_0) + (e^{u_2 d/du_0} - 1)(e^{u_1 d/du_0} - 1)f(u_0) \\ &= u_2(d/du_0)f(u_0) + u_2^2/2!(d^2/du_0^2)f(u_0) \\ &\quad + [u_2(d/du_0) + (u_2^2/2!)(d^2/du_0^2)][u_1(d/du_0) \\ &\quad + (u_1^2/2!)(d^2/du_0^2)]f(u_0) = 2u_0 u_2 + u_2^2 + 2u_1 u_2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\hat{A}_n$ polinomları A_n polinomlarından daha fazla terim içerirler.

Benzer şekilde

$$\hat{A}_3 = u_3 h_1 + u_1 u_2 h_2 + (1/3!)u_1^3 h_3$$

$$\hat{A}_4 = u_4 h_1 + (1/2!)u_2^2 + u_1 u_3 h_2 + (1/2!)(u_1^2 u_2)h_3 + (1/4!)u_1^4 h_4$$

$$\hat{A}_5 = u_5 h_1 + (u_2 u_3 + u_1 u_4)h_2 + (u_1(1/2!)u_2^2 + (1/2!)u_1^2 u_3)h_3$$

$$+ (1/3!)(u_1^3 u_2)h_4 + (1/5!)u_1^5 h_5$$

$$\hat{A}_6 = u_6 h_1 + ((1/2!)u_3^2 + u_2 u_4 + u_1 u_5)h_2 + (1/3!)(u_2^3 + u_1 u_2 u_3 + (1/2!)u_1^2 u_4)h_3$$

$$+ (1/2!)u_1^2(1/2!)u_2^2 + (1/3!)u_1^3 u_3)h_4 + (1/4!)u_1^4 u_2 h_5 + (1/6!)u_1^6 h_6 \quad \text{v.s}$$

⋮

hesaplanır.



2. 8. A_n Polinomlarının Yakınsaması

$f(u)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyonu olmak üzere,

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$$

şeklinde yazılır. $f(u)$ fonksiyonu verildiğinde daima $f(u_0)$ elde edilir. Böylece

$$\hat{A}_n = A_n f(u_0)$$

olur. Burada $n \geq 1$ için

$$A_0 \equiv 1$$

ve (2.7.1) den

$$\xi_n = e^{u_n(d/du_0)} - 1 = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{u_n^v}{v!} \right) \frac{d^v}{du^v} \equiv \sum_{v=1}^{\infty} C_n^v \quad (2.8.1)$$

olup $C_n^v = (u^v / v!) (d^v / du^v)$ alınırsa o zaman (2.8.1) denklemi yazılacağından

$$\xi_n = \sum_{v=1}^{\infty} C_n^v$$

yazılır. Buradan

$$\hat{A}_n = \xi_n \sum_{v=0}^{n-1} A_v$$

bulunur. Burada A_n ile ξ_n bir operatördür. Şimdi

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \xi_1 A_0 = \xi_1 = e^{u_1 d/du_0} - 1 \quad (2.8.2)$$

$$A_2 = \xi_2 (A_0 + A_1) = \xi_2 (1 + \xi_1) = \xi_2 + \xi_2 \xi_1$$

$$A_3 = \xi_3 (A_0 + A_1 + A_2) = \xi_3 (1 + \xi_1 + \xi_2 (1 + \xi_1))$$

$$A_4 = \xi_4 (A_0 + A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= \xi_4(1 + \xi_1 + \xi_2(1 + \xi_1) + \xi_3(1 + \xi_1 + \xi_2(1 + \xi_1)))$$

$$\vdots$$

olarak yazılır. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n f(u_0) = [1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \xi_i \xi_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{\infty} \xi_i \xi_j \xi_k + \dots] f(u_0) \quad (2.8.3)$$

ya da

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n f(u_0) = f(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (e^{u_i d / du_0} - 1) f(u_0) +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} (e^{u_i d / du_0} - 1)(e^{u_j d / du_0} - 1) f(u_0) + \dots$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = f(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ u_i df(u_0) / du_0 + (u_i^2 / 2!) d^2 f(u_0) / du_0^2 + \dots \right\} + \dots$$

$$= f(u_0) + \{u_1 + u_2 + \dots\} df(u_0) / du_0 + \left\{ (u_1^2 / 2!) + u_1 u_2 + \dots \right\} d^2 f(u_0) / du_0^2 + \dots$$

$$= f(u_0) + (u - u_0) df(u_0) / du_0 + (1 / 2!)(u - u_0)^2 d^2 f(u_0) / du_0^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[((u - u_0)^n / n!) \right] d^n f(u_0) / du_0^n$$

Bu ifade $u_0 = u_0(x)$ civarında $f(u)$ fonksiyonunun taylor açılımıdır. Buradan başlangıç terimi ise sabit bir değer olmayıp bir fonksiyondur. Böylece aşağıdaki sonucun ispatını vermiş oluruz.

Sonuç 2.8.1.

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$$

fonksiyonu $u_0(x)$ in komşuluğunda $\hat{A}_n$ ile tanımlanır.

Eğer Nu lineer olmayan bir polinom ise $n!$ çarpımı ya (2.8.3) ifadesindeki $\xi_i \xi_j$, $\xi_i \xi_j \xi_k$ çarpım terimlerinden ya da aynı ifadedeki ξ_i terimlerinin paydalarından elde edilir. Böylelikle ξ_i terimleri sıfıra $1/n!$ olarak yaklaşır ve çarpım terimleri de sıfıra, çarpımın faktöriyelinin tersi olarak yaklaşır. Böylece A_n veya $\hat{A}_n$ polinomları Nu ile ifade edilen $Lu + Nu = g$ denklemi için sonlu sayıda n tane bileşenlere bağlı seriler olarak elde edilir. Burada A_n polinomu $\hat{A}_n$ ile aynı değildir, fakat

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n \quad (2.8.4)$$

dir.

Örnek 2.8.1. $f(u) = u$ lineer denklemini göz önüne alalım. Burada

$$A_0 u_0 = u_0$$

$$A_1 u_0 = (e^{u_1 d / du_0} - 1) u_0 = (u_1 d / du_0 + \dots) u_0 = u_1$$

$$\begin{aligned} A_2 u_0 &= \xi_2 u_0 + \xi_2 \xi_1 u_0 \\ &= (u_2 d / du_0 + \dots) u_0 + (u_2 d / du_0 + \dots)(u_1 d / du_0 + \dots) u_0 = u_2 \end{aligned}$$

$\vdots$

olduğundan $f(u_0) = u_0$ olup

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f(u_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_0 = A_0 u_0 + A_1 u_0 + \dots$$

şeklinde olacaktır. Böylece

$$f(u) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$$

olur. $\hat{A}_n$ ise $f(u) = u$ lineer durumunda $\hat{A}_n$ ise (2.8.4) den $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olur. $f(u) = u^2$ lineer

olmayan durumu için

$$\hat{A}_0 = A_0 f(u_0) = u_0^2$$



$$\hat{A}_1 = A_1 f(u_0) = (u_1 d / du_0 + \dots) u_0 = 2u_0 u_1 + u_1^2$$

elde ederiz. Buradan u_1^2 terimi A_n polinomunda A_2 de $\hat{A}_n$ polinomunda ise $\hat{A}_1$ da bulunur. Bu nedenle $\hat{A}_n$ serisi hızlı yakınsar. A_n polinomlarını (2.8.1) den faydalanarak ξ_n operatöründen farklı olarak tanımlamak için

$$C_m = u_m d / du_0$$

olmak üzere

$$(C_m)(C_m) = (u_m d / du_0)(u_m d / du_0) = u_m^2 d^2 / du_0^2$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı 2! ile bölünürse

$$C_m^2 = (u_m^2 / 2!)(d^2 / du_0^2)$$

bulunur. Bu işleme devam edilirse

$$C_m^n = (u_m^n / n!) d^n / du_0^n \quad (2.8.5)$$

elde edilir. (2.8.4) ve (2.8.2) eşitliği gözönüne alınırsa;

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = C_1$$

$$A_2 = C_2 + C_1^2$$

$$A_3 = C_3 + C_2 C_1 + C_1^3$$

$$A_4 = C_4 + C_3 C_1 + C_2(C_2 + C_1^2) + C_1^4$$

$$A_5 = C_5 + C_4 C_1 + C_3(C_2 + C_1^2) + C_2(C_2 C_1 + C_1^3) + C_1^5$$

$$A_6 = C_6 + C_5 C_1 + C_4(C_2 + C_1^2) + C_3(C_3 + C_2 C_1 + C_1^3)$$

$$+ C_2(C_2^2 + C_2 C_1^2 + C_1^4) + C_1^6$$

$$A_7 = C_7 + C_6 C_1 + C_5(C_2 + C_1^2) + C_3(C_3 + C_2 C_1 + C_1^3)$$

$$+C_3(C_3C_1^2+C_2+C_2C_1^2+C_1^4)+C_2(C_2^2C_1+C_2C_1^3+C_1^5)C_1^7$$

$$A_8 = C_8 + C_7C_1 + C_6(C_2 + C_1^2) + C_5(C_3 + C_2C_1 + C_1^3)$$

$$+C_4(C_4 + C_3C_1 + C_2^2 + C_2C_1^2 + C_1^4)$$

$$+C_3(C_3C_2 + C_3C_1^2 + C_2^2C_1 + C_2C_1^3 + C_1^5)$$

$$+C_2(C_2^3 + C_2^2C_1^2 + C_2C_1^4 + C_1^6) + C_1^8$$

$$A_9 = C_9 + C_8C_1 + C_7(C_2 + C_1^2) + C_6(C_3 + C_2C_1 + C_1^3)$$

$$+C_5(C_4 + C_3C_1 + C_2^2 + C_2C_1^2 + C_1^4)$$

$$+C_4(C_4C_1 + C_3C_2 + C_3C_1^2 + C_2^2C_1 + C_2C_1^3 + C_1^5)$$

$$+C_3(C_3^2 + C_3C_2C_1 + C_3C_1^3 + C_2^3 + C_2^2C_1^2 + C_2C_1^4 + C_1^6)$$

$$+C_2(C_2^3C_1 + C_2^2C_1^3 + C_2C_1^5 + C_1^7) + C_1^9$$

$$A_{10} = C_{10} + C_9C_1 + C_8(C_2 + C_1^2) + C_7(C_3 + C_2C_1 + C_1^3)$$

$$+C_6(C_4 + C_3C_1 + C_2^2 + C_2C_1^2 + C_1^4)$$

$$+C_5(C_5 + C_4C_1 + C_3C_2 + C_3C_1^2 + C_2^2C_1 + C_2C_1^3 + C_1^5)$$

$$+C_4(C_4C_2 + C_4C_1^2 + C_3^2 + C_3C_2C_1 + C_3C_1^3 + C_2^3 + C_2^2C_1^2 + C_2C_1^4 + C_1^6)$$

$$+C_3(C_3^2C_1 + C_3C_2^2 + C_3C_2C_1^2 + C_3C_1^4 + C_2^3C_1 + C_2^2C_1^3 + C_2C_1^5 + C_1^7)$$

$$+C_2(C_2^4 + C_2^3C_1^2 + C_2^2C_1^4 + C_2C_1^6 + C_1^8) + C_1^{10}$$

bulunur. Burada A_m 'i oluşturan alt polinomlardan A_0 hariç $A_1, A_2, A_3, \dots$ lerin ilk terimi C_m ile başlar ve İkinci terimi ise $C_{m-1}C_1$ olup sonraki bütün terimler $C_{m-1}, C_{m-2}, \dots, C_1$ 'e kadar devam ederken her terim içindeki indislerin toplamı her zaman m olup son terim ise C_1^m dir. Örneğin A_2 alt polinomunun ilk terimi C_2 ve son terimide C_1^2 dir. A_3 polinomunun ilk terimi C_3 ikinci terimi $C_{3-1}C_1 = C_2C_1$ olup son



terimi C_1^3 dir. A_4 polinomunun ilk terimi C_4 ve ikinci terimi $C_{4-1}C_1 = C_3C_1$ olup sonraki terimler ise $m=4$ toplamını koruyacağından $C_{m-2}C_2 = C_2C_2$, $C_{m-3}C_{m-2}C_1 = C_1C_2C_1 = C_2C_1^2$ şeklinde olup son terim ise C_1^4 dir. A_4 ' C_2 terimine ulaştığımızda C_2 veya C_1^2 , m toplamını koruyacağından bu terimleri $C_2(C_2 + C_1^2)$ olarak yazarız. Burada azalan indise eşit ya da daha küçük indisleri de kullanabiliriz. Böylece A_m polinomları daha küçük indisler kullanılarak

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = C_1$$

$$A_2 = C_2 + C_1(C_1)$$

$$A_3 = C_3 + C_2(C_1) + C_1(C_1(C_1))$$

$$A_4 = C_4 + C_3(C_1) + C_2(C_2 + C_1(C_1)) + C_1(C_1(C_1(C_1)))$$

$$\vdots$$

şeklinde de yazılabilir (Adomian,1986). Bu A_m polinomlarının yeni üretim kuralı için çıkarılan sonuç daha önce verilen A_n polinomları için de aynıdır. Bunun önemli bir avantajı hiçbir λ parametresini içermemesi ve başlangıç şartı olan u_0 'a ihtiyaç duyulmamasıdır. Ayrıca (2.3.2) ve (2.8.5) denklemlerinden

$$A_0 = f(u_0) = h(u_0)$$

$$A_1 = C_1 f(u_0) = u_1 (d / du_0) f(u_0)$$

$$= u_1 df(u_0) / du_0 = u_1 f^{(1)}(u_0) = u_1 h_1(u_0)$$

$$A_2 = (C_2 + C_1^2) f(u_0) = u_2 f^{(1)}(u_0) + (1/2!) u_1^2 f^{(2)}(u_0)$$

$$= u_2 h_1(u_0) + (1/2!) u_1^2 h_2(u_0)$$

$$A_3 = (C_3 + C_2 C_1 + C_1^3) f(u_0)$$

$$= u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + (1/3!) u_1^3 f^{(3)}(u_0)$$

$$\begin{aligned}
&= u_3 h_1(u_0) + (u_1 u_2 h_2(u_0) + (1/3!) u_1^3 h_3(u_0)) \\
A_4 &= u_4 f^{(1)}(u_0) + [u_1 u_3 + (1/2!) u_2^2] f^{(2)}(u_0) \\
&+ u_2 (1/2!) u_1^2 f^{(3)}(u_0) + (1/4!) u_1^4 f^{(4)}(u_0) \\
&= u_4 h_1(u_0) + [u_1 u_3 + (1/2!) u_2^2] h_2(u_0) + (1/2!) u_1^2 u_2 h_3(u_0) \\
&+ (1/4!) u_1^4 h_4(u_0)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu başlangıç şartı olan $u_0(x)$ kapsadığından daha kullanışlıdır. Böylece ayrışımın başarılı olmasını sağlayan A_n için bir üretim kuralı elde edilir.

Şimdi $\hat{A}_n$ polinomlarının sonuçlarını yorumlayalım. Burada $\hat{A}_n$ polinomlarının üretilmesi daha kolaydır. $\hat{A}_n$ polinomunda λ parametresi olmadığından λ parametreleri ayrışım metodunu kapsamazlar. $\hat{A}_n$ polinomları daha basit bir yakınsama ispatına dayanırlar ve çok daha hızlı yakınsarlar. $\hat{A}_n$ polinomunun dezavantajı u çözümünü bulmada $\hat{A}_n$ yı kullanırken u nun ayrışım serilerinin toplamı için bir algoritma oluşturmak çok zordur. Bu nedenle, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde algoritma oluştururken L^{-1} operatörü $\sum \hat{A}_n$ üzerinde hareket ettiği için $\hat{A}_n$ yerine A_n alınması tercih edilir.

2.9. Linear Olmayan Durum İçin Yakınsaklık

$$Lu + Nu = x(t) \quad (2.9.1)$$

şeklinde verilen genel formdaki linear olmayan deterministik denklemi ele alalım: Farzedelim ki, $t \in T$ için $|x(t)| < M_1$ ve $t, \tau \in T$ için Green fonksiyonu $|\ell(t, \tau)| < M_2$ olsun. (2.9.1) den

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}x - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

yazılır. A_n nin katsayılarını hesaplamak için (2.3.7) de (2.3.4) gözönüne alınıp ve (2.3.6) daki

$$\Psi(i, j) = \left(\frac{d^i u}{d\lambda^j} \right)^j \quad \text{ve} \quad F(i) = \left(\frac{d^i f}{du^i} \right)$$

formüllerini kullanılırsa ;

$$A_0 = (1/0!) D^0 f|_{\lambda=0} = f(u_0) = h_0(u_0)$$

$$A_1 = (1/1!) D^1 f|_{\lambda=0} = C(1,1)F(1) = \Psi(1,1)F(1) = h_1(u_0)u_1$$



$$A_2 = (1/2!)D^2 f|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}(h_2(u_0)u_1^2 + 2h_1(u_0)u_2)$$

$$A_3 = (1/3!)D^3 f|_{\lambda=0} = \frac{1}{6}(h_3(u_0)u_1^3 + 6h_2(u_0)u_1u_2 + 6h_1(u_0)u_3)$$

$$A_4 = (1/4!)D^4 f|_{\lambda=0} = \frac{1}{24}\{ h_4(u_0)u_1^4 + 12h_3(u_0)u_1^2u_2 + h_2(u_0)[12u_2^2 + 24u_1u_3] + 24h_1(u_0)u_4 \}$$

⋮

şeklinde yazılır. Dolayısıyla

$$A_0 = h_0(u_0)$$

$$A_1 = h_1(u_0)u_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2} h_2(u_0) u_1^2 + h_1(u_0)u_2$$

⋮

dır. Böylece A_n polinomları h_n içeren polinomlar olduğu görülür. Ayrıca

$$(d^n / du^n) f[u(\lambda)]|_{\lambda=0} = (d^n f / du^n)|_{\lambda=0} = h_n(u_0)$$

eşitliği ve $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri u_0 yardımıyla verilebileceğide gözönüne alınırsa o zaman A_n polinomları u_0 da sonlu polinomlar olur. Böylece

$$u_0 = \int_0^t \ell(t, \tau) x(\tau) d\tau \Rightarrow |u_0| = M_2 M_1 \int_0^t d\tau$$

$$u_1 = - \int_0^t \ell(t, \tau) h_0 u_0 d\tau \Rightarrow |u_1| = - \int_0^t M_2 h_0 \left(\int_0^t M_2 M_1 d\tau \right) d\tau$$

$$u_2 = - \int_0^t \ell(t, \tau) h_1(u_0) u_1 d\tau$$

$$= \int_0^t \ell(t, \tau) h_1 \left(\int_0^t \ell(t, \tau) x(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t \ell(t, \tau) h_0 \left(\int_0^t \ell(t, \tau) x(\tau) d\tau \right) d\tau \right) d\tau$$

$$|u_2| = \int_0^t M_2 h_1 \left(\int_0^t M_2 M_1 d\tau \right) \left(\int_0^t M_2 h_0 \left(\int_0^t M_2 M_1 d\tau \right) d\tau \right) d\tau$$

⋮



şeklinde bulunur. Burada $t \in T$ için $\frac{t^n}{n!}$ terimleri tekrarlanan n katlı integralleri gösterir

(Adomian,1984). Özel olarak $Nu = u^2$ 'yi gözönüne alalım. Bu takdirde,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = L^{-1}x - L^{-1}u_0^2 - L^{-1}(2u_0 u_1) - L^{-1}(u_1^2 + 2u_0 u_2) - \dots$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlikten

$$u_0 = L^{-1}x$$

$$u_1 = -L^{-1}(L^{-1}x)(L^{-1}x)$$

$$u_2 = L^{-1}\left\{2(L^{-1}x)\left[L^{-1}(L^{-1}x)(L^{-1}x)\right]\right\}$$

$\vdots$

ve

$$|u_0| = \left| \int_0^t \ell(t, \tau)x(\tau)d\tau \right| = M_2 M_1 t$$

$$|u_1| = \left| -\int_0^t \ell(t, \tau)(L^{-1}x)(L^{-1}x)d\tau \right| = -M_2^3 M_1^2 \frac{t^3}{3!}$$

olur. Buradan görüldüğü gibi u çözümü yakınsaktır. Şimdi u nun çözümünde ϕ_n nin n -terim yaklaşımı ;

$$\phi_n = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-2} A_i$$

ve $n+1$ -terim yaklaşımı da

$$\phi_{n+1} = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-2} A_i - L^{-1} A_{n-1}$$

olmak üzere

$$\phi_{n+1} - \phi_n = -L^{-1} |A_{n-1}|$$

elde edilir. Burada $t \in T$, $n \rightarrow \infty$ için bu çözümün yakınsak olduğu açıktır.

Şimdi u diferensiyel denklem için ϕ_n yaklaşımına bir örnek verelim:

Örnek 2.9.1 $u' + u^2 = t^2 + 1$ diferensiyel denklemi gözönüne alalım. Deterministik

formunda diferensiyel operator $L = \frac{d}{dt}$ ve $Nu = u^2$ lineer olmayan terim olsun. Burada

$x(t) = t^2 + 1$ olmak üzere $Fu = Lu + Nu$ ifadesi $F(u) = x$ şeklinde de yazılabilir.

Böylece ayrışım metodundaki L operatörüne başlangıç şartı eklenirse

$$u = u(0) + L^{-1}x - L^{-1}Nu = u(0) + L^{-1}x - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde yazılır. Burada $A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ polinomlarında $u(0) = 0$ alındığında

$$u_0 = \int_0^t (\tau^2 + 1) d\tau = \frac{t^3}{3} + t$$

$$u_1 = -L^{-1}A_0 = -\int_0^t u_0^2(\tau) d\tau = -\int_0^t \left(\frac{\tau^6}{9} + \tau^2 + \frac{2\tau^4}{3}\right) d\tau = -\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{15} - \frac{t^7}{63}$$

olur. u nun sadece ilk iki terimi için yaklaşım hesaplanırsa o zaman $u \cong u_0 + u_1$ için

$$u \cong \left(\frac{t^3}{3} + t\right) - \left(\frac{t^3}{63} + 2\frac{t^5}{15} + \frac{t^7}{63}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$u' \cong t^2 + 1 - \frac{t^6}{9} - 2\frac{t^4}{3} - t^2 \cong 1 - 2\frac{t^4}{3} - \frac{t^6}{9}$$

olur. Böylece

$$u' + u^2 = 1 - \frac{t^6}{9} - 2\frac{t^4}{3} + \left(\frac{t^3}{3} + t\right)^2 + \dots = t^2 + 1$$

bulunur. Burada u' ilk teriminde yapılan yaklaşımda u^2 yaklaşımı yerine sadece u_0

kullanıldı. Ayrıca $Lu + Nu = x$ denklemi $Lu + \sum_{n=0}^{\infty} A_n = x$ şeklinde yazılır. Buradan da

$u' + \sum_{n=0}^{\infty} A_n = x$ olur. Eğer u' terimi yaklaşık olarak u_1 terimine kadar alınır

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ toplamında u_1 yalnızca A_0 'a bağlı olur. Böylece ;

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i' + \sum_{i=0}^{n-1} A_i = x(t)$$

olup u nun n - terim yaklaşımı için ϕ_n yaklaşımının terimlerini

$$L\phi_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} A_i = x(t)$$

şeklinde yazarız.

3.BÖLÜM

3.1.İkinci Mertebeden Stokastik Diferensiyel Denklemlerin Çözümünde Green Fonksiyonunun Kullanımı

$$d^2y/dt^2 + a_1(t, \omega) dy/dt + a_0(t, \omega)y = x(t, \omega) \quad (3.1.1)$$

denklemini gözönüne alalım . Burada a_0, a_1 ile $x(t, \omega)$, Ω ve T 'nin olasılık değerlerinin bulunmasıyla elde edilen stokastik oluşumlardır. Bu (3.1.1) denklemindeki stokastik katsayılarından dolayı diferensiyel operatör stokastik operatör olarak gözönüne alınacaktır (Adomian, 1983).

Burada $a_0 = 1 + \alpha_0(t, \omega)$ da $\langle \alpha_0 \rangle = 0$ iken $\langle a_0 \rangle = 1$

ve

$$a_1 = \alpha_1(t, \omega) \text{ de } \langle \alpha_1 \rangle = 0 \text{ ise } \langle a_1 \rangle = 0$$

dır. Böylece $a_0=1$ değeri deterministik kısma sahiptir, fakat a_1 için aynı şey söylenemez. $L = (d^2/dt^2) + 1$ ve $\mathfrak{R} = \alpha_1(d/dt) + \alpha_0$ olmak üzere (3.1.1) denklemini

$$Ly + \mathfrak{R}y = x \quad (3.1.2)$$

şeklinde yazılır. L operatörü yardımıyla y çözümü $y = L^{-1}x - L^{-1}\mathfrak{R}y$ elde edilir. (3.1.1) de $L = (d^2/dt^2) + 1$ değeri yerine $\ell(t, \tau)$ Green fonksiyonu yazılıp başlangıç şartları olarak $y(0) = y'(0) = 0$ alınırsa y nin çözümü:

$$y = \int_0^t \ell(t, \tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t \ell(t, \tau)[\alpha_1(\tau, \omega)(d/d\tau) + \alpha_0(\tau, \omega)]y(\tau)d\tau \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılır. (3.1.3) denkleminde $\ell(t, \tau)$ değerini bulmak için (3.1.2) denkleminde

$Ly = 0$ şeklindeki homojen denkleminin çözümünü bulmalıyız. Bu çözüm ise

$$\phi_0(t) = \cos t \text{ ve } \phi_1(t) = \sin t$$

şeklindedir. Buradan $\ell(t, \tau)$ Green fonksiyonu

$$\ell(t, \tau) = -\frac{1}{W(\tau)} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos \tau & \sin \tau \end{vmatrix}$$

şeklinde olup $\ell(t, \tau) = \cos t \sin \tau - \sin t \cos \tau = \sin(\tau - t)$ olarak bulunur. $t \geq \tau$ için Wronskian değeri $W = 1$ dir. Aksi durumlarda sıfırdır. Böylece (3.1.1) denklemini yukarıda verilen $\ell(t, \tau)$ Green fonksiyonu kullanılarak ayrıştırma metoduyla çözülebilir (Adomian, 1983).

O zaman (3.1.3) denklemi

$$y = \int_0^t \ell(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t (d/d\tau) [\ell(t, \tau) \alpha_1(\tau)] y(\tau) d\tau - \int_0^t \ell(t, \tau) \alpha_0(\tau) y(\tau) d\tau$$

şeklinde düzenlenir ve y çözümünü $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ olarak yazılırsa $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i$ yaklaşık

çözümünü elde ederiz. Buradan y_i bileşenleri

$$y_0 = \int_0^t \ell(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (3.1.4)$$

$$y_1 = - \int_0^t \ell(t, \tau) \alpha_1(\tau) y_0(\tau) d\tau - \int_0^t \ell(t, \tau) \alpha_0(\tau) y_0(\tau) d\tau$$

$$y_2 = - \int_0^t \ell(t, \tau) \alpha_1(\tau) y_1(\tau) d\tau - \int_0^t \ell(t, \tau) \alpha_0(\tau) y_1(\tau) d\tau$$

$\vdots$

şeklinde hesaplanır ve böylece ϕ_n yaklaşımını belirleyebiliriz. Dolayısıyla Green fonksiyonunun $L = (d^2/dt^2) + 1$ için hesaplanması da yapılmış olur. (3.1.2) denklemini de L operatörü çözebiliriz. Bunu için $\mathfrak{R}$ ' yi değiştirmeden $L = d^2/dt^2$ ve $L_1 = 1$ alalım.

Böylece daha basit ters fonksiyon ve integraller elde ederiz. (3.1.2) den

$$\begin{aligned} y &= y_0 - L^{-1} L_1 y - L^{-1} \mathfrak{R} y \\ &= y_0 - L^{-1} y - L^{-1} \mathfrak{R} y \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

şeklinde olur. Genel olarak başlangıç değer şartı $y_0 = y(0) + ty'(0) + L^{-1}x$ ya da $L^{-1}x$ olarak alınır. Böylece L^{-1} operatörü çift katlı integral olup,

$$\begin{aligned} y_1 &= -L^{-1} y_0 - L^{-1} \mathfrak{R} y_0 \\ y_2 &= -L^{-1} y_1 - L^{-1} \mathfrak{R} y_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

şeklinde yazılır.

Örnek 3.1.1

(3.1.1) denkleminde $L = (d^2/dt^2)+1$ olmak üzere $y(0)=1$ ve $y'(0)=1$ başlangıç değer şartları altında Green fonksiyonunun değerini hesaplayalım. Ayırışım metodu ile $L = (d^2/dt^2)+1$ çözümünü bulup bu çözümü basite indirgenmiş Green fonksiyonunun çözümünü ile karşılaştıralım. (3.1.1) denkleminde α_0 ve α_1 zaman fonksiyonları olduğundan stokastik oluşumlardır. (3.1.1) de x deterministik fonksiyon olup sonuç itibariyle stokastik değerdir. Eğer (3.1.2) denkleminde $L = d^2/dt^2 + 1$, $x = 0$, $R = 0$ ve başlangıç şartları da $y(0)=1$ ve $y'(0)=1$ ise o zaman bu denklem

$$[d^2/dt^2 + 1] = 0$$

olur. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerinden

$$y_0 = 1 + t$$

$$y_1 = -L^{-1}y_0 = -\int \int (1+t) dt dt = -\int (t + \frac{t^2}{2}) dt = -\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}$$

$\vdots$

$$y = 1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots$$

elde edilir. Böylece y çözümünü oluşturan seriler

$$t - \frac{t^3}{3!} + \dots = \sin t,$$

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \dots = \cos t,$$

dır. Buradan y çözümü

$$y = \sin t + \cos t$$

bulunur. Eğer (3.1.1) denkleminde $a_0 = 1$ ve $a_1 = 0$ ise $L = d^2/dt^2 + 1$ dır. Burada $x \neq 0$ olmak üzere bu denklem

$$d^2y/dt^2 + y = x \quad (3.1.7)$$

şeklinde yazılır. $d^2/dt^2 + 1$ için Green fonksiyonu

$$y = \int_0^t \sin(\tau - t) x(\tau) d\tau \quad (3.1.8)$$

dır. (3.1.7) de $L = d^2/dt^2$ için ayırıştırma metodunu kullanalım. Burada $x = 1$ alıp denklemin çözümünü yaparsak

$$Ly = x - y = 1 - y$$

$$y = L^{-1}(1) - L^{-1}(y)$$

$$\begin{aligned} y &= (t^2/2!) - L^{-1}(y_0 + y_1 + \dots) \\ &= (t^2/2!) - (t^4/4!) + (t^6/6!) - \dots \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.8) deki $\sin(\tau - t)$ nin Taylor açılımı

$$\sin(\tau - t) = (\tau - t) - \frac{(\tau - t)^3}{3!} + \dots$$

dır. Buradan integral alınırsa

$$\int_0^t \sin(\tau - t) d\tau = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \dots \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.10) ile (3.1.9) karşılaştırılırsa, her iki metod ile (3.1.1) denklemini için yapılan çözümün aynı olduğu görülür (Belman ve Adomian, 1983).

3.2. Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Ayrıştırma Metodu ve Green Fonksiyonları İle Arasındaki İlişkiler:

$x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \in [x_1, x_2]$ ve $y \in [y_1, y_2]$ özel sınır değer şartları ile verilen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (3.2.1)$$

denklemini gözönüne alalım. Burada $L_x = \partial^2 / \partial x^2$ ve $L_y = \partial^2 / \partial y^2$ şeklinde tanımlayıp (3.2.1) denkleminde yerine yazarsak

$$(L_x + L_y) u(x, y) = g(x, y) \quad (3.2.2)$$

elde ederiz. Şimdi (3.2.2) denklemini

$$L_x u = g - L_y u \quad (3.2.3)$$

$$L_y u = g - L_x u \quad (3.2.4)$$

şeklinde yazalım. Burada (3.2.3) ve (3.2.4) denklemlerine L_x^{-1} ile L_y^{-1} operatörleri, sırası ile, uygulanırsa

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1} g - L_x^{-1} L_y u$$

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1} [\partial^2 u / \partial x^2] = u - \alpha_1 - \alpha_2 x$$

ile

$$L_y^{-1} L_y u = L_y^{-1} g - L_y^{-1} L_x u$$

$$L_y^{-1} L_y u = u - \beta_1 - \beta_2 y$$

elde edilir. Böylece u çözümü

$$u = \alpha_1 + x\alpha_2 + L_x^{-1} g - L_x^{-1} L_y u \quad (3.2.5)$$

$$u = \beta_1 + y\beta_2 + L_y^{-1} g - L_y^{-1} L_x u \quad (3.2.6)$$

şeklinde bulunur. (3.2.5) ve (3.2.6) denklemlerini taraf tarafa toplayıp sonra ikiye bölersek,

$$u = (1/2) \{ [\alpha_1 + x\alpha_2 + \beta_1 + y\beta_2] + [L_x^{-1} + L_y^{-1}]g - [L_x^{-1} L_y + L_y^{-1} L_x] \} u \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Burada

$$u_0 = (1/2) [\alpha_1 + x\alpha_2 + \beta_1 + y\beta_2] + (1/2) [L_x^{-1} + L_y^{-1}]g$$

şeklinde ifade edelim. Böylece $n \geq 1$ için tüm u_n bileşeni yazılır ve $n \geq 1$ için tüm u_n bileşeni

$$u_n = -(1/2) [L_x^{-1} L_y + L_y^{-1} L_x] u_{n-1} \quad (3.2.8)$$

olarak ifade edilir. (3.2.7) dan (3.2.1) denkleminin çözümü

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} \quad (3.2.9)$$

şeklinde yazılır (Adomian, 1986). Yukarıdaki eşitlikteki u fonksiyonu sınır değer şartlarını sağlamak zorundadır. Adomian tarafından Green fonksiyonunun da benzer şekilde bulunabileceği öne sürülmüştür. Ancak ayrışım metodu adı bir Green fonksiyonunun bulunmasının zor olduğu durumlarda veya bulunan fonksiyonun karmaşık ve hesaplanmasının basit olmadığı halinde kullanılabilir. Eğer verilen fonksiyon $G(x, y, \xi, \eta)$ şeklinde ise homojen olmayan keyfi bir terim için u çözümü

$$u = \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_{y_1}^{y_2} d\eta G(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) \quad (3.2.10)$$

şeklinde yazılır. Buradan u_0 çözümü

$$u_0 = \int_{x_1}^{x_2} d\xi \int_{y_1}^{y_2} d\eta G_0(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) \quad (3.2.11)$$

dır. Burada G ve G_0 , u fonksiyonu üzerindeki sınır şartlarını sağlamak zorundadır. Kısmi diferansiyel denklemler de Green fonksiyonları için

$$\nabla^2 G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta)$$

ifadesinden

$$(L_x + L_y)G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \quad (3.2.12)$$

dır. Buradan

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, y; \xi, \eta) \quad (3.2.13)$$

bulunur. Şimdi (3.2.12) denklemini çözmek için ayrışım metodunu kullanalım. (3.2.12) den $L_x G$ ve $L_y G$ ifadelerini ayrı ayrı invers (ters) operatörlerle işleme tabii tutarak önce taraf tarafa toplayıp ve sonra ikiye bölersek

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) = & (1/2)[\alpha_1 + x\alpha_2 + \beta_1 + y\beta_2] + (1/2)[L_x^{-1} + L_y^{-1}]\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \\ & + (1/2)[L_x^{-1}L_y + L_y^{-1}L_x]G(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

elde edilir. (3.2.14) denkleminde G_0

$$G_0 = (1/2)[\alpha_1 + x\alpha_2 + \beta_1 + y\beta_2] + (1/2)[L_x^{-1} + L_y^{-1}]\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \quad (3.2.15)$$

yazılır. (3.2.15) denkleminde $L_y^{-1}\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$ ve $L_x^{-1}\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$

ifadelerinin integrallerini alıp bunları taraf tarafa toplarsak G_0 ifadesi

$$\begin{aligned} G_0 = & (1/2)[(x - \xi)H(x - \xi)\delta(y - \eta) + (y - \eta)H(y - \eta)\delta(x - \xi)] + \\ & + (1/2)[\alpha_1(\xi) + x\alpha_2(\xi) + \beta_1(\eta) + y\beta_2(\eta)] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada α ve β 'ların değerleri u üzerinde tanımlanmış sınır şartlarının kullanımı ile bulunur. Böylece G_0 ise u_0 'ı belirlemekte kullanılıp buradan u fonksiyonunun bulunmasına imkan sağlar. Ayrıca Green fonksiyonunun tamamen bulunması u çözümünün belirlenmesini gösterir (Belman ve Adomian, 1985).

3.3. Green Fonksiyonlarının Yaklaşık Hesaplaması

$$Ly = x(t) \quad (3.3.1)$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Burada L lineer deterministik adi diferensiyel operatör olmak üzere,

$$L = \sum_{v=0}^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v}$$

şeklinde tanımlanır. a_v ise çalışılan aralık üzerinde olup L'nin bileşenlerini $L_1 + L_2$ şeklinde ifade edelim. Green fonksiyonlarını özel koşullarda belirtmek zor olduğundan L diferensiyel operatörünün ayrışımını, serilerin bileşenleri ile kolayca tanımlayabiliriz. L_1 operatörün inversi biliniyorsa L_1 operatöründen diğer bileşenlerin yaklaşımı da bulunur. L_2 operatöründe ise küçüklük kısıtlaması olmadığından L_2 'nin bulunmasıyla L^{-1} nin toplam inversi seri formunda elde edilir. Burada L_1 'i Green fonksiyonu ile tanımlamak yeterince basittir. Bu durumda, eğer $L_2 = 0$ ise

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (3.3.2)$$

dir. Burada $l(t, \tau)$, L_1 operatörü için Green fonksiyondur. Eğer L ikinci dereceden diferensiyel operatör ise $L_1 = \frac{d^2}{dt^2}$ şeklindedir. L_2 , L'nin arta kalan terimleri olacağından

$$L_2 = \alpha(t) \frac{d}{dt} + \beta(t)$$

şeklinde yazılır. Genel olarak L_1 ve L_2

$$L = \sum_{v=0}^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v}$$

ise

$$L_1 = \frac{d^n}{dt^n} \text{ ve } L_2 = \sum_{v=0}^{n-1} a_v(t) \frac{d^v}{dt^v}$$

olur. Bu son iki ifade (3.3.1) de gözönüne alınırsa



$$Ly = (L_1 + L_2)y = x(t) \quad (3.3.3)$$

$$L_1 y = x(t) - L_2 y$$

$$y = L_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 y \quad (3.3.4)$$

olur. Buradan y çözümü

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \quad (3.3.5)$$

şeklinde elde edilir. Eğer y_0 çözümünü $L_1^{-1}x$ olarak tanımlarsak (3.3.4) denkleminde

$$y = L_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 (y_0 + y_1 + \dots) \quad (3.3.6)$$

yazılır. Böylece (3.3.6) den her bir y_i terimi önceki y_{i-1} terimine göre hesaplanabilir.

Buradan da

$$y = L_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 y_0 - L_1^{-1} L_2 y_1 - L_1^{-1} L_2 y_2 - \dots$$

yada

$$y = L_1^{-1} x - L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x + L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x - \dots \quad (3.3.7)$$

şeklinde yazılır. (3.3.7) dan y çözümü

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (L_1^{-1} L_2)^i L_1^{-1} x \quad (3.3.8)$$

dir. (3.3.8) den ise her y_i terimi

$$y_0 = L_1^{-1} x$$

$$y_1 = -L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x$$

$$y_1 = L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} L_2 L_1^{-1} x \quad (3.3.9)$$

$\vdots$

$$y_i = (-1)^i (L_1^{-1} L_2)^i L_1^{-1} x$$

elde edilir. Burada L diferensiyel operatörünün tersi ,

$$L^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (L_1^{-1} L_2)^i L_1^{-1} \quad (3.3.10)$$

şeklinde tanımlanır. L_1^{-1} 'e ait Green fonksiyonunun terimlerini hesaplamak için (3.3.2) ifadesi (3.3.4) denkleminde gözönüne alınırsa

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t l(t, \tau) L_2 y(\tau) d\tau \quad (3.3.11)$$

$$= \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t L_2^* [l(t, \tau)] y(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{d\tau^i} [l(t, \tau)] d\tau \quad (3.3.12)$$

bulunur. Eğer $L_1 = a_n \frac{d^n}{dt^n}$ ve $L_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$ alınırsa

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{d^i}{d\tau^i} [l(t, \tau) a_i(\tau)] y(\tau) d\tau$$

ya da

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t k(t, \tau) y(\tau) d\tau \quad (3.3.13)$$

elde edilir. Burada

$$k(t, \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{d^i}{d\tau^i} [l(t, \tau) a_i(\tau)] \quad (3.3.14)$$

dir. Şimdi $i = 0$ için $L = L_1 + \alpha(t)$ durumunu inceleyelim. Burada $L_2 = \alpha(t)$ dir.

Dolayısıyla (3.3.7) dan

$$y(t) = L_1^{-1} x - L_1^{-1} \alpha(t) L_1^{-1} x - L_1^{-1} \alpha(t) L_1^{-1} \alpha(t) L_1^{-1} x - \dots$$

yazılır. Böylece (3.3.9) den

$$\begin{aligned} y_0 &= \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau \\ y_1 &= - \int_0^t l(t, \tau) a(\tau) \int_0^{\tau} l(\tau, \gamma) x(\gamma) d\gamma d\tau \\ y_2 &= \int_0^t \int_0^{\tau} \int_0^{\gamma} l(t, \tau) l(\tau, \gamma) l(\gamma, \sigma) a(\tau) a(\gamma) x(\sigma) d\gamma d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

ya da

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau) x(\tau) d\tau - \int_0^t k(t, \tau) y(\tau) d\tau \quad (3.3.16)$$

olarak yazılır. Burada $k(t, \tau) = l(t, \tau) a(\tau)$ alınıp, (3.3.16) de yerine yazılırsa

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t k(t, \tau)y_0(\tau)d\tau + \int_0^t k(t, \tau)y_1(\tau)d\tau + \dots \quad (3.3.17)$$

olur. Eğer $F(t) = L_1^{-1}x = \int_0^t l(t, \tau)x(\tau)d\tau$ ise o zaman (3.3.17) ifadesi

$$\begin{aligned} y(t) = F(t) - \int_0^t k(t, \tau)F(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^\tau k(t, \tau)k(t, \gamma)F(\gamma)d\gamma d\tau \\ - \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\gamma k(t, \tau)k(t, \gamma)k(\gamma, \sigma)F(\sigma)d\sigma d\gamma d\tau + \dots \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

şeklinde yazılır. Eğer L_1 sabit katsayılı ise bu durumda $l(t, \tau) = l(t - \tau)$ dir. L için $G(t, \tau)$ Green fonksiyonu, genel olarak, $LG(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ şeklinde tanımlandığından

$$(L_1 + L_2)G = \delta(t - \tau) \quad (3.3.19)$$

yazılır. Böylece δ fonksiyonu ile x yer değiştirilirse yukarıdaki denklemden G bulunabilir (Belman, 1983; Adomian, 1983).

Örneğin ;

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha \right) G(t, \tau) = \delta(t - \tau) \quad (3.3.20)$$

olsun. (3.2.13) den

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + \dots$$

şeklinde olup $l = 1$, $L_2 = \alpha$, $y = G$, $x = \delta(t - \tau)$ alınır;

$$G_0 = \int_\tau^t \delta(t - \tau)d\tau = 1, \quad t > \tau$$

şeklinde yazılır. $k(t - \tau) = l(t - \tau)\alpha = \alpha$ için

$$G_1 = -\alpha \int_\tau^t d\tau = -\alpha(t - \tau)$$

$$G_2 = \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\gamma \alpha^2 = \alpha^2 (t - \tau)^2 / 2!$$

$\vdots$

dır. Sonuç olarak da

$$G = 1 - \alpha(t - \tau) + \alpha^2 \frac{(t - \tau)^2}{2!} + \dots$$

elde edilir. Buradan

$$G = e^{-\alpha(t-\tau)}$$

bulunur.

Örnek 3.3.1 Aşağıdaki fiziksel denklem, sürtünmeli bir ortamda $f(t)$ dış kuvvetinin etkisi altındaki m kütleli parçacığın hareket denklemi

$$m \frac{dV}{dt} + SV = f(t)$$

ya da

$$(L + \alpha)V = \frac{f(t)}{m}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $L = \frac{d}{dt}$ ve $\alpha = \frac{S}{m}$, ($\alpha = \text{sabit}$) dır. Bu denklemde L için

$G(t, \tau)$ Green fonksiyonu

$$(L + \alpha)G(t, \tau) = \frac{\delta(t - \tau)}{m} \quad (3.3.21)$$

diferensiyel denklemini sağlar. Hareket denklemi sabit katsayılı olduğundan $G(t, \tau) = G(t - \tau)$ dır. $t < \tau$ durumunda cisim hareket etmez. $t > \tau$ durumunda ise Green fonksiyonu (3.3.1) ve (3.3.3) denklemlerinden ayrışım metodu ile bulunur. Böylece (3.3.21) den

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\delta(t - \tau)}{m} - \alpha G(t, \tau) \quad (3.3.22)$$

elde edilir. (3.3.22) denklemine invers operatör uygulanırsa,

$$L^{-1}LG = L^{-1} \frac{\delta(t - \tau)}{m} - L^{-1}\alpha G(t, \tau) \quad (3.3.23)$$

şeklinde yazılır. $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ olduğundan (3.3.23) denkleminin sol tarafı

$$L^{-1}LG = \int_0^t \frac{dG(t, \tau)}{dt} dt = G(t, \tau) - G(0, \tau) = G(t, \tau)$$

olarak yazılır. Bu değer (3.3.23) de gözönüne alınırsa

$$G(t, \tau) = L^{-1} \frac{\delta(t - \tau)}{m} - L^{-1} \alpha G(t, \tau) \quad (3.3.24)$$

bulunur. Diğer taraftan $G(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t, \tau)$ ayrışımı olarak yazılırsa (3.3.24) denklemi

$$G(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t, \tau) = L^{-1} \frac{\delta(t - \tau)}{m} - L^{-1} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t, \tau)$$

olarak elde edilir. Burada $L = \frac{d}{dt}$ için Green fonksiyonu $l(t - \tau) = 1$ dir. $R = \frac{S}{m} = \alpha$,

$V = G(t, \tau)$ ve $f(t) = \frac{\delta(t - \tau)}{m}$ alınırsa (3.3.14) den $k(t - \tau)$ ifadesi

$k(t - \tau) = l(t - \tau)\alpha = \alpha$ olur. Dolayısıyla (3.3.18) denkleminde $G_0, G_1, G_2, \dots, G_n$

bileşenleri

$$G_0 = \int_0^t l(t, \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\delta(t - \tau)}{m} d\tau = 1/m$$

$$G_1 = - \int_0^t l(t, \tau) \alpha(\tau) d\tau \int_0^{\tau} l(t, \gamma) f(\gamma) d\gamma d\tau = -\alpha/m \int_0^t \int_0^{\tau} \delta(\gamma - \tau) d\gamma d\tau = (-\alpha/m)(t - \tau)$$

$$G_2 = - \int_0^t \int_0^{\tau} \int_0^{\gamma} l(t, \tau) l(\tau, \gamma) l(\gamma, \sigma) \alpha(\tau) \alpha(\gamma) f(\sigma) d\gamma d\tau d\sigma = (\alpha^2/m) \frac{(t - \tau)^2}{2}$$

$\vdots$

$$G_n = (-1)^n (\alpha^n / m) \frac{(t - \tau)^n}{n!}$$

şeklinde elde edilir. Buradan Green fonksiyonu

$$G(t, \tau) = \frac{1}{m} - \frac{R}{m^2} (t - \tau) + \frac{R^2}{m^3} \frac{(t - \tau)^2}{2!} - \dots$$

$$G(t, \tau) = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{R}{m} (t - \tau) + \frac{R^2}{m^2} \frac{(t - \tau)^2}{2!} - \dots \right)$$

olarak bulunur. Bulunan bu yaklaşık çözüm ,

$$G(t, \tau) = \frac{1}{m} \exp \left\{ - \frac{R}{m} (t - \tau) \right\}, \quad t > \tau$$

gerçek çözümüne yakınsar.



3.4. Stokastik Teorinin Deterministik Limiti İle Diferensiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Bu yöntem lineer ve lineer olmayan Stokastik diferensiyel denklemler için geliştirildi. Deterministik durum ,stokastik teorinin içinde yer alan sınırlayıcı bir durumdur. Adomian metodunun istatistiki olarak ayrılabilirdiği ve yaklaşımda yakın sonuçlardan kaçınma konusundaki en önemli avantajı denklemin stokastik olmadığı zaman ortadan kalkar. Bununla birlikte deterministik limit hem genel teoriyi doğrulamada hem de deterministik bir teknik olarak işe yaradığı için ele alacağız. Nedeni; stokastik teori hızlı bir gelişim göstermesi ve stokastik kısmi diferensiyel denklemler için genelleştirilmiş olmasıdır. Deterministik kısmi diferensiyel denklemler için yeterli bir teori bulunmadığından bu teori burada deterministik sonuçları kanıtlamak için özellikle önemli olmaktadır.

$0 \leq t \leq \infty$ aralığında $x(t)$ adi bir fonksiyon ve F lineer olmayan deterministik operatör olduğunda, diferensiyel denklemi $Fy = x$ biçiminde yazarız. Fy fonksiyonu lineer ve lineer olmayan kısımlara ayrılabilir olduğunda a_n pozitif bir sabit ve a_n sıradan fonksiyonlar olmak üzere $L = \sum_{v=0}^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v}$ iken $Fy = Ly + Ny$ şeklinde yazılır. Ny lineer olmayan fonksiyon ise y^2 ve y^3 gibi üstel veya $\sin y$ gibi terimleri içerebilir. Bazen L 'yi $L_1 + L_2$ biçiminde ayırtırmak daha uygun olabilir. Bu L operatörü için Green fonksiyonu çok zor olduğunda kullanılır. Genelde stokastik durumda lineer fonksiyonun ayırtırılması deterministik veya rastgele parçaları ayırmak için yapılır. Ayırışım metodunda ise basit bir Green fonksiyonu elde etmek için ayırıştırma yapılır . (Stokastik durumda ise $L = L_1 + L_2 + \mathfrak{R}$ olup ilk terim olan y_0 'ı belirlemek için $L_1 x$ kullanabiliriz.) Bu ayırıştırma çoğu zaman hesaplanması zor olan Green fonksiyonlarını bulmanın sayısal bir yöntemi olur. Böylece $L_1 y + L_2 y + Ny = x$ yazılır. L_1 nun tersi mevcut olduğundan, $l(t, \tau)$ gibi bir Green fonksiyonun mevcut olduğunu kabul ederiz.

Dolayısıyla

$$y = L_1^{-1}x - L_1^{-1}L_2y - L_1^{-1}Ny \quad (3.4.1)$$

ya da

$$y(t) = \int_0^t l(t, \tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t l(t, \tau)L_2(\tau)y(\tau)d\tau - \int_0^t l(t, \tau)N[y(\tau)]d\tau \quad (3.4.2)$$

elde edilir. Şimdi (3.4.1) için $y = F^{-1}x$ çözümünü veren F^{-1} ters operatörü elde edelim.

$$\textbf{Örnek 3.4.1. } dy/dt = \varepsilon y - \sigma y^2, y(0) = 1 \quad (3.4.3)$$

başlangıç şartı ile verilen denklemin gerçek çözümü

$$y = \varepsilon / [\sigma + (\varepsilon - \sigma)e^{-\sigma t}]$$

dir. Şimdi bu denklemi ayrışım metodu ile çözelim. Bunun için $\varepsilon = \sigma = 1$ alınırsa, bu durumda (3.4.3) denklemi

$$dy/dt = y - y^2$$

veya

$$dy/dt - y + y^2 = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $L = d/dt$, $R = -I$ ve $Ny = y^2$ alınırsa denklemin genel formu;

$$Ly + Ry + Ny = x \quad (3.4.4)$$

şeklinde yazılır. y nin çözümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} y &= L^{-1}x - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{-1}x - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \\ &= y(0) + L^{-1}(1)[F_0^{-1}x + F_1^{-1}x + \dots] - L^{-1}[A_0 + A_1 + \dots] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

elde edilir. Ny için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ A_1 &= 2y_0y_1 \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2 \\ A_3 &= 2(y_1y_2 + y_0y_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

olduğu burada gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
y &= 1 + L^{-1}y(0) - L^{-1}A_0 + L^{-1}(F_1^{-1}x) - L^{-1}A_1 + \dots \\
&= 1 + \int_0^t d\tau - L^{-1}y_0^2 + \dots
\end{aligned}$$

bulunur. Tüm n ler için yaklaşım,

$$\phi_n = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1},$$

olup ,böylece

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = t - \int_0^t d\tau = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\phi_n = 1$$

bulunur. Buradan gerçek çözüm $y=1$ olarak elde edilir.

Örnek 3.4. 2. (3.4.3) denkleminde $\varepsilon = 1, \sigma = 2$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
dy/dt &= y - 2y^2, \\
y(0) &= 1
\end{aligned}$$

başlangıç şartı ile verilen denklemin gerçek çözümü ;

$$y = 1/(2 - e^{-t})$$

dir. Buradan $L = d/dt$, $R = -1$ ve $Ny = 2y^2$ olsun. O zaman

$$A_0 = 2y_0^2$$

$$A_1 = 4y_0y_1$$

$$A_2 = 2y_1^2 + 2y_0y_2$$

$$A_3 = 4(y_1y_2 + 4y_0y_3)$$

$$\vdots$$

olduğundan

$$y = 1 + \int_0^t -d\tau - \int_0^t 2y_0^2 d\tau + \dots$$

$$y_0 = 1 = F_0^{-1}x$$

$$y_1 = F_1^{-1}x = t - 2t = -t$$

$$\begin{aligned} y_2 &= L^{-1}F_1^{-1}x - L^{-1}A_1 = \int_0^t (-\tau) d\tau - \int_0^t 4(1)(-\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + 2t^2 = \frac{3}{2}t^2 = F_2^{-1}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= L^{-1}F_2^{-1}x - L^{-1}A_2 = \int_0^t \frac{3}{2}\tau^2 d\tau - \int_0^t (2y_1^2 + 4y_0y_2) d\tau \\ &= \frac{3}{2}(\tau^3/3) - \int_0^t \left[2\tau^2 + 4(1)\frac{3}{2}\tau^2 \right] d\tau = \frac{1}{2}t^3 - \frac{2}{3}t^3 - 2t^3 = -\frac{13}{6}t^3 = F_3^{-1}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= L^{-1}F_3^{-1}x - L^{-1}A_3 = \int_0^t \left(-\frac{13}{6}\tau^3\right) d\tau - \int_0^t \left[4(-\tau)\left(\frac{3}{2}\tau^2\right) + 4(1)\left(-\frac{13}{6}\tau^3\right) \right] d\tau \\ &= -\frac{13}{24}t^4 + \frac{3}{2}t^4 = -\frac{29}{24}t^4 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\phi_4 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ yaklaşımı

$$\phi_4 = 1 - t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{13}{6}t^3 - \frac{29}{24}t^4$$

şeklinde bulunur. Bu durumda ilk beş terim için $t = 0.01$ ile $t = 0.1$ arasındaki yaklaşım değerleri aşağıdaki Tablo1 de verilmiştir.

t	Gerçek çözüm	Adomian çözüm	Hata
0.01	9.901479E-01	9.901478E-01	6.786205E-08
0.02	9.805831E-01	9.805825E-01	6.705791E-07
0.05	9.534974E-01	9.534716E-01	2.705396E-05
0.1	9.131064E-01	9.127125E-01	4.314313 E-04

Tablo 1 . Problem 2 için

Tablo1'deki sonuçlar yaklaşımın oldukça hassas olduğunu göstermektedir. Böylece $dy/dx = f(x,y)$ şeklindeki bir eşitlikte Lipschitz koşuluna ihtiyaç duyulmadığına dikkat çekelim.

Sonuç 3.4.1 Stokastik durumdaki sonuçların lineer ve lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemler için tam ve etkili çözümler sağladığını gördük. Burada stokastik kısmi diferansiyel denklemlere aynı tekniklerin uygulanması problemin başarıyla çözülebileceğini göstermektedir. Dolayısıyla birçok problemin kesin bir şekilde çözülebilmesi için yukarıda izah edilen teorinin varolduğu söylenebilir. Sonuçların nasıl elde edildiğini görebilmek için, çok daha iyi anlaşılan, sınırlı deterministik durumun dikkate alınması gerekir. Diğer bilinen yöntemler daha üstün olsa bile, ayrışım yöntemi stokastik modelleme açısından yine de büyük önem taşımaktadır. Çünkü bu yöntem diğer yöntemlerin aksine, stokastik işlemlerin doğası üzerinde sınırlandırmalar ve yaklaşık sonuçlar gerektirmiyor. Yalnız istatistiki yayılmaların ortaya çıkmadığı deterministik durumda bile, bu yöntemin lineerleştirme gerektiren tekniklerle elde edilen sonuçlardan daha üstün olan lineer olmayan denklemler için kolay hesaplanabilmesi çok ilgi çekicidir. Bu yüzden çoğu modelleme problemlerinin çözümünde ayrışım metodunun önemli bir yeri daima varolacaktır.

3.5. Ayrıştırma Metodu ile Picard Yönteminin Sonuçlarının Karşılaştırılması:

Deterministik ve stokastik sistem teorilerinde Picard yöntemi, verilen denklemin ispat için kullanılır. Örneğin, bu metod ile uygun bir aralıkta $y(x)$ çözümüne yaklaşık bir değer olarak $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$ biçimindeki fonksiyon dizileri elde edilir. Sayısal bir çözümünden ziyade $y(x)$ çözüm fonksiyonuna eşdeğer bir fonksiyon elde etmek istediğimiz durumlar dışında bu yöntem sıkça kullanılmaz.

Burada Picard yöntemini Adomian ayrıştırma yöntemiyle ters (invers) işlem adaptasyonu bakımından karşılaştırmaktayız. Bu karşılaştırma stokastik durum için olup aynı zamanda deterministik durumu da kapsamaktadır.

Deterministik Teori: Şimdi Picard yaklaşık yöntemini (3.5.1) denklemi için inceleyelim.

$$dy/dt = f(t, y); \quad y(a) = b, \quad (3.5.1)$$

şeklindeki determinist başlangıç değer problemini Picard'ın yaklaşık yöntemiyle

$$y(t) = y(a) + \int_a^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$



biçiminde tanımlayalım. Eğer $f(\tau, y_{i-1}(\tau))$ sürekli ise $y(t)$ fonksiyonuna $i \geq 1$ için

i -yinci yaklaşım

$$y_i(t) = y(a) + \int_a^t f(\tau, y_{i-1}(\tau)) d\tau \quad (3.5.2)$$

şeklinde yazılır (Kendall,1978). Bunu aşağıdaki örnek ile açıklayalım:

Örnek 3.5.1. $dy/dt = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$

ile verilen denklemi gözönüne alalım . i -yinci Picard yaklaşımı $y(0) = 1$ iken ,(3.5.2) den

$$y_i(t) = y(0) + \int_0^t [\tau^2 + y_{i-1}^2(\tau)] d\tau, \quad i \geq 1$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + \int_0^t (\tau^2 + 1) d\tau = 1 + t + t^3 / 3 \\ y_2(t) &= y(0) + \int_0^t [\tau^2 + y_1^2(\tau)] d\tau = 1 + \int_0^t [\tau^2 + (1 + \tau + \tau^3 / 3)] d\tau \\ &= 1 + t + t^2 + 2t^3 / 3 + t^4 / 6 + 2t^5 / 15 + t^7 / 63 \\ y_3(t) &= y(0) + \int_0^t [\tau^2 + y_2^2(\tau)] d\tau \\ &= 1 + \int_0^t [\tau^2 + (1 + \tau + \tau^2 + 2\tau^3 / 3 + \tau^4 / 6 + 2\tau^5 / 15 + \tau^7 / 63)^2] d\tau \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

olur. Bu metodla ardışık integraller alındıkça işlemler daha karmaşık hale gelmektedir. Alınan her integral sonucunda bir önceki integrali lineer ve lineer olmayan şekillere dönüştürür. Böylece ardışık hesaplamada her defasında, bir önceki terimlerin değiştiği görülmektedir. Böylelikle yeni bir hesaplama yapıldığında sayısal sonuca yeni bir ondalıklı basamak eklememekte, fakat tahmin edilemeyecek büyüklüklerle sonucu etkilemektedir. Bundan dolayı çözümü bulmak güç olmaktadır.

Şimdi de Ayrıştırma yöntemini inceleyelim:

Ayrıştırma yönteminde y_i , ($i = 0,1,2,3$) yaklaşımı ϕ_4 olup yaklaşımın her aşamasının çok daha basit olarak elde edilebildiği gösterilebilir. Buradan

$$\phi_4 = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \quad (3.5.4)$$

dir . Buradan da görüldüğü gibi ayrışım metodu bütün y_n terimlerini serinin içinde olan bir önceki terime ilave etmektedir. Şimdi verilen,

$$dy/dt = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1 \quad (3.5.5)$$

başlangıç değeri denkleminde ayrıştırma metodunu uygulayalım. (3.5.5) denklemini

$$dy/dt - y^2 = t^2, \quad y(0) = 1 \quad (3.5.6)$$

şeklinde yazalım. Burada $Ny = -y^2$ ve $L = d/dt$ iken $Fy = Ly + Ny = x(t) = t^2$ şeklinde olur. L deterministik operatörün tersi L^{-1} olduğundan veya Green fonksiyonu biçiminde $\int k(t, \tau) f(\tau) d\tau$ iken, (3.5.6) in çözümü;

$$F^{-1}x = L^{-1}x - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.5.7)$$

şeklindedir. A_n katsayıları Ny' nin analitik bir fonksiyon olduğundan uygun ve kesin ayrıştırmalarla elde edilir . O halde

$$F^{-1}x = F_0^{-1}x + F_1^{-1}x + F_2^{-1}x + \dots = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

olup ,buradan

$$\begin{aligned} y_0 &= F_0^{-1}x = y(0) + L^{-1}(t^2) \\ y_1 &= F_1^{-1}x = -L^{-1}A_0 \\ y_2 &= F_1^{-1}x = -L^{-1}(A_0 + A_1) \\ y_3 &= F_3^{-1}x = -L^{-1}(A_0 + A_1 + A_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

yazılır.

$$A_0 = -y_0^2$$

$$A_1 = -2y_0y_1$$

$$A_2 = -y_1^2 - 2y_0y_2$$

$$\vdots$$

iken ϕ_4 yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}\phi_4 &= 1 + L^{-1}(t^2) + 3L^{-1}(1) + 6L^{-1}L^{-1}(1) + L^{-1}[L^{-1}(1)]^2 + 4L^{-1}L^{-1}L^{-1}(1) \\ &= 1 + 3t + 3t^2 + 4t^3/3\end{aligned}\quad (3.5.9)$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu iki metodu karşılaştıralım:

Buradan tam çözüm kolaylıkla elde edilir. A_n değerleri trigonometrik, üslü ve polinom şeklinde olup lineer olmayan fonksiyon değerleri için kolayca hesaplanabilir. Her yaklaşık çözüm, kendisine bir sonraki terim eklenerek elde edilir ve çözüm kesindir. Fakat Picard yaklaşık metodunun sonucu ise kesin değildir.

Adomian metodunun Picard metodundan üstünlüğü, yaklaşık çözüm terimlerinin basit olarak hesaplanmasıdır. Lineer durumda, serilerdeki herbir terimin integrali alınarak bir sonraki terim elde edilir. Lineer olmayan durumda ise sadece A_n polinomunun integralini eklememiz gerekir. Görülüyor ki ayrışım metodu daha kesin ve basit hesaplama yapabilen bir metot olup, stokastik diferansiyel denklemlerde olduğu gibi deterministik diferansiyel denklemlerin çözümleri içinde hesaplamalar benzer olacaktır.

Picard metodu ile stokastik sistem teorisinde yaklaşık çözümler yapıldığında aşağıdaki sakıncaları içerir.

- 1) Belli bir sıranın stokastik oluşumunun dönüştürülmesinin kendi sırasıyla aynı olduğunu göstermek zordur .
- 2) Lipschitz koşuluna eşit koşulları sağlayan ve stokastik sistemin yakınsaklık ispatı yaparken operatör parametrelerinde ve ön koşullarda sağlanan şartlar bulmak zordur.

3) Stokastik sistem teorisinde sistemin karakteristiklerinin istatistiki ölçülere ait terimlerini bulmak zorunda olmasına karşın Picard metodun da bunlara ulaşmak zordur.

Adomian metodunda çözüm yapılırken, bir önceki terimin bütün çözümünden ziyade, sadece bir önceki basamağın son terimi alıp çözüme devam eder. Adomian yönteminde katsayılar seriler ile uygun bir biçimde ifade edilebilir. Böylece ortalama muhtemel yoğunluk fonksiyonları gibi istatistiki ölçüm işlemleri hesaplanabilir. Ancak Picard metodunda ise bir önceki terimin lineer olmayan dönüşümlerini istemekte olup yaklaşık çözümün istatistiki ölçülerinin hesaplanmasını zorlaştırmaktadır.

Şimdi , keyfi başlangıç koşullarla tanımlanan $Ly = x - \Re y - Ny$ şeklindeki stokastik lineer olmayan diferensiyel denklemi ele alalım. Stokastik oluşum katsayısı α olmak üzere yukarıda verilen her iki metodu bir örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek 3.5.2. $dy/dt = t^2 - \alpha y - y^2$, $y(0, \omega) = 1$

şeklinde verilen denklemi Picard metodu ile hesaplayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= y(0) + \int_0^t f(\tau, y(0)) d\tau \\
 &= y(0) + \int_0^t (\tau^2 - \alpha y(0) - y^2(0)) d\tau \\
 &= 1 - t + t^3/3 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \\
 y_2(t) &= y(0) + \int_0^t f(\tau, y_1(\tau)) d\tau \\
 &= 1 + \int_0^t \left\{ \tau^2 - \alpha \left[1 - \tau + \tau^3/3 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right] - \left[1 - \tau + \tau^3/3 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right]^2 \right\} d\tau \\
 &= 1 + t^3/3 - \int_0^t (\alpha + \alpha\tau - \alpha\tau^3/3) d\tau + \int_0^t \int_0^t \alpha\alpha d\tau d\tau + t - t^3/3 + t^2/63 - t^2 + t^4/6 - 2t^5/15 \\
 &\quad + \int_0^t \left[\left(\int_0^t \alpha d\tau \right)^2 - 2 \int_0^t \alpha d\tau + 2\tau \int_0^t \alpha d\tau - (2\tau^3/3) \int_0^t \alpha d\tau \right] d\tau
 \end{aligned}$$

veya

$$y_2(t) = 1 + t - t^2 + t^4/6 - 2t^5/15 + t^7/63 - \int_0^t (\alpha - \alpha\tau - \alpha\tau^3/3) d\tau$$

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= y(0) + \int_0^t f(t, y_2(\tau)) d\tau = y(0) + \int_0^t [\tau^2 - \alpha y_2(\tau) - y_2^2(\tau)] d\tau \\
&= y(0) + \int_0^t \tau^2 d\tau - \int_0^t \alpha y_2(\tau) d\tau - \int_0^t y_2^2(\tau) d\tau \\
&= 1 + \int_0^t \tau^2 d\tau - \int_0^t \alpha \left[1 + \tau - \tau^2 + \tau^4/6 - 2\tau^5/15 + \tau^7/63 - \int_0^t [\alpha + \alpha\tau - \alpha\tau^3/3] d\tau + \int_0^t \left(\int_0^t \alpha d\tau \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^t \alpha d\tau + 2\tau \int_0^t \alpha d\tau - (2\tau^3/3) \int_0^t \alpha d\tau \right] d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t \alpha \alpha d\tau d\tau \Big\} d\tau - \int_0^t \left\{ 1 + \tau - \tau^2 + \tau^4/6 - 2\tau^5/15 + \tau^7/63 - \int_0^t (\alpha + \alpha\tau - \alpha\tau^3/3) \right\} d\tau \\
&\quad + \int_0^t \left[\left(\int_0^t \alpha d\tau \right)^2 - 2 \int_0^t \alpha d\tau + 2\tau \int_0^t \alpha d\tau - (2\tau^3/3) \int_0^t \alpha d\tau \right] d\tau + \int_0^t \int_0^t \alpha \alpha d\tau d\tau \Big\}^2 d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu basamakta y_3 ün yaklaşık çözümünün hesaplanmasının ne kadar zor olduğu görülmektedir. Burada iki güçlük vardır. Birincisi; çözümün genel açılımının elde edilmesi, ikincisi dönüştürülmüş muhtemel yoğunluk fonksiyonunun elde edilmesi güçlüğüdür.

Adomian metodunda hesaplama çok daha kolaydır. y nin istatistiki ölçüleri için ortalama aldığımız stokastik oluşumlar (bu durumda α lar) dönüştürülmemiştir ve dönüştürülmüş muhtemel yoğunlukları hesaplamamıza gerek yoktur. Stokastik sistemin uygun formunu

$$L y = t^2 - \Re y - N y$$

ya da

$$(L + \Re + N)y \equiv Fy = t^2$$

şeklinde yazalım. (3.5.7) eşitliğinden

$$F^{-1}x = L^{-1}x - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\Re F_n^{-1}x + A_n]$$

yazılır. Burada $L = d/dt$, $\Re = \alpha$ ve $Ny = y^2$ olduğundan Ny için A_n polinomları

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0^2 \\
A_1 &= 2y_0y_1 \\
A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.5.8) den

$$\begin{aligned}
y_0 &= F_0^{-1}(x) = L^{-1}x \\
y_1 &= F_1^{-1}(x) = L^{-1}x - L^{-1}\alpha F_0^{-1}x - L^{-1}A_0 \\
&= L^{-1}x - L^{-1}\alpha L^{-1}x - L^{-1}y_0^2 \\
y_2 &= F_2^{-1}(x) = L^{-1}x - L^{-1}[\alpha F_1^{-1}x] - L^{-1}A_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada y_2 bileşeni

$$\begin{aligned}
y_2 &= L^{-1}x - L^{-1}\alpha L^{-1}x - \alpha L^{-1}x + \alpha L^{-1}\alpha L^{-1}x + \alpha L^{-1}y(0) - L^{-1}y(0) \\
&\quad + 2L^{-1}y(0)L^{-1}x - 2L^{-1}y(0)L^{-1}\alpha L^{-1}x - 2L^{-1}y(0)L^{-1}y(0)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece $n=3$ için ϕ_n yaklaşımı

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= y(0) + L^{-1}x \\
\phi_2(t) &= y_0 + y_1 = \phi_1 + y_1 \\
&= y(0) + L^{-1}x + L^{-1}x - L^{-1}\alpha L^{-1}x - L^{-1}y_0^2 \\
&= y(0) + 2L^{-1}x - L^{-1}\alpha L^{-1}x - L^{-1}(L^{-1}x)(L^{-1}x) \\
\phi_3(t) &= y_0 + y_1 + y_2 = \phi_2(t) + y_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yaklaşımlarda α ların sadece bir boyutlu açılımları bulunmaktadır ve muhtemel yoğunluk fonksiyonlarının dönüşümü yoktur. Picard metodunda olduğu gibi ortalamaların sadece doğal olarak ayrıştığı değil, aynı zamanda muhtemel yoğunluk fonksiyonlarının dönüşümünü gerektirmediği yaklaşık çözüm için korelasyon veya

ortalama çözüm bulmak oldukça kolaydır. Örneğin Adomian'ın ϕ_3 yaklaşımı ile sağlanan ortalama çözümü

$$\begin{aligned}\langle \phi_3 \rangle = & y(0) + 3L^{-1}\langle \alpha \rangle - 2L^{-1}\langle \alpha \rangle - 2L^{-1}\langle x \rangle - 2L^{-1}y(0) \\ & - \langle \alpha \rangle L^{-1}\langle x \rangle + \langle \alpha \rangle L^{-1}\langle \alpha \rangle L^{-1}\langle x \rangle + \langle \alpha \rangle L^{-1}y(0) \\ & + 2L^{-1}y(0)L^{-1}\langle x \rangle - 2L^{-1}y(0)L^{-1}\langle \alpha \rangle L^{-1}\langle x \rangle - 2L^{-1}y(0)L^{-1}y(0)\end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıda verilen istatistikler, sadece α ve x in ortalamaları iken ϕ_3 için doğrudan kesin bir değer elde edilir. Ancak $\langle y_2 \rangle$ yi Picard metodu ile hesaplamak için, $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha(t)\alpha(\tau), (\alpha(t)\alpha(\tau))^2, \dots$ gibi muhtemel yoğunluk fonksiyonları içerdiğinden, $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha(t)\alpha(\tau), (\alpha(t)\alpha(\tau))^2, \dots$ ifadelerin bulunması gerekir. Bu da, daha önce söylendiği gibi, muhtemel yoğunluk fonksiyonları için analitik ifadelerin tümünü tanımlamak zorundadır. Böylece Picard metodunun stokastik durum için bir hesaplama metodu olarak alınması uygun değildir.

4. BÖLÜM

4.1 Lineer Olmayan Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Ayırışım Metodu

Seri formunda lineer olmayan stokastik diferansiyel denklemlerin çözümleri benzer çözümlerle ifade edilebilir. Lineer olmayan polinomlar için x stokastik süreç ve L lineer stokastik operatör olmak üzere, $Ly + y''' = x$ şeklindeki denklemleri inceleyelim. α bir sabit olmak üzere

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = \alpha \quad (4.1.1)$$

lineer olmayan başlangıç değer problemini gözönüne alalım. Adi diferansiyel denklemler, fiziksel modelleri için önemlidir. Örneğin; kütle- yay sistemleri, direnç- kapasitor ve induktans devreleri, ışınların kırılması, sakraçlar, kütlenin başka bir cisim çevresinde dönme hareketi v.b. Ayrıca bu denklemlerin ekoloji ve istatistikte de yararlı olduğu gösterilmiştir. Bu yüzden bu denklemlerin çözüm yöntemleri bilim adamları ve mühendisler için çok önemlidir. Bazı önemli diferansiyel denklemler iyi bilinen analitik tekniklerle çözülebilmesine rağmen fiziksel olarak bazı diferansiyel denklemler çözülememektedir. Bu bölümde, Adomian ayırışım metotunu kullanarak bu problemin çözümünü farklı bir şekilde ele alacağız. Ayırışım metodu lineerizasyon ve küçük varsayımlar olmaksızın pek çok cebirsel, diferansiyel ve kısmi diferansiyel problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Ayırışım metodu; lineer olmayan terimlerden oluşan, lineer olmayan diferansiyel denklemleri de içine alan değişik türdeki denklemlere uygulanmaktadır. Son zamanlarda popüler hale gelen ayırışım metodu ve diğer bilinen metodlardan olan Klasik Runge-Kutta metodu tek adım metodu olarak adlandırılır. Tek adım metodlarında x_{k+1} 'deki yaklaşım bir önceki adımdaki x_k yaklaşık değerinin bir fonksiyonudur. Klasik Runge-Kutta metodu ile diğer tek adım metotları şunlardır (Çağal,1989).

1. Euler Metodu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (4.1.2)$$

2. Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta metodu

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (4.1.3)$$

3. Adams Bashforth Metodu

$$y_{n+1} = y_{n-3} + (4h/3)(2f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 2f(x_{n-2}, y_{n-2})) \quad (4.1.4)$$

4.1.1 Ayrışım Metodunun Analizi

Diferensiyel operator $L = \frac{d}{dx}$ olsun. (4.1.1) denkleminde ayrışım metodunu uygulamak için ; L lineer stokastik operator, R de lineer operatörden arta kalanlar, $N(y, y' \dots)$ lineer olmayan terim ve $\phi(x)$ stokastik fonksiyon olmak üzere, operatör formu

$$Ly(x) + Ry(x) + N(y, y' \dots) = \phi(x), \quad y(x_0) = \alpha, \quad (4.1.5)$$

şeklinde yazılır. Şimdi Ly için çözüm yaparsak,

$$Ly(x) = \phi(x) - Ry(x) - N(y, y' \dots). \quad (4.1.6)$$

elde edilir. L nin tersinin mevcut olduğunu farzedelim. Bu durumda

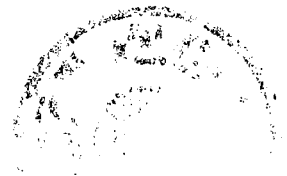
$$L^{-1}Ly(x) = L^{-1}\phi(x) - L^{-1}Ry(x) - L^{-1}N(y, y' \dots). \quad (4.1.7)$$

dir. Böylece L^{-1} in x_0 'dan x 'e tek katlı integral olduğu açıktır. (4.1.7) deki y için çözüm yapılırsa;

$$y(x) = y(x_0) + L^{-1}\phi(x) - L^{-1}Ry(x) - L^{-1}N(y, y' \dots). \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Ayrışım metodu ile bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonunun ayrışım serilerinin bileşenlerinin toplamı,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad (4.1.9)$$



ile elde edilir. Burada

$$y_0 = y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \quad (4.1.10)$$

ve

$$N(y, y', \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

dır. Bu durumda Adomian polinomları için A_n oluşturulduğunda $n \geq 0$ için (4.1.12)

deki y_0 teriminden sonraki bileşenler

$$y_0 = y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \quad (4.1.11)$$

$$y_{n+1} = -L^{-1}(Ry_n) - L^{-1}A_n(y_n), \quad (4.1.12)$$

şeklinde elde edilir. Böylece her terimde bir önceki terim kullanılarak elde edilebilir.

Böylece (4.1.12) ifadesi açılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= -L^{-1}(Ry_0) - L^{-1}A_0(y_0), \\ y_2 &= -L^{-1}(Ry_1) - L^{-1}A_1(y_0, y_1), \\ y_3 &= -L^{-1}(Ry_2) - L^{-1}A_2(y_0, y_1, y_2), \\ &\vdots \\ y_n &= -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}A_{n-1}(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

olur. (4.1.13) den de görüldüğü gibi $y_0, y_1, y_2, \dots$ bileşenleri tanımlanır ve seri çözümünün tamamı elde edilir. Fakat pek çok durumda gerçek çözüm, kapalı formda hemen elde edilebilir. Sayısal sonuçlar için

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) \quad (4.1.14)$$

ve

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \quad (4.1.15)$$

(4.1.14) denklemi n -terim yaklaşımı Adomian çözümü için kullanılabilir. $y(x)$ çözümünde daha iyi yaklaşımlar elde etmek için $y(x)$ in ayrışım çözümünün daha fazla bileşeninin elde edilmesiyle mümkündür (Adomian, 1988).



4.1.2. Benzer Çözümler

İkinci Durum

$N(y, y' \dots) = N(y)$ eşit olduğunu ve hiçbir türevi içermediğini kabul edelim. Örnek 4.4.1 in özel durumuna uygun olarak lineer olmayan terim $N(y) = by^2$ olsun ve bu A_n Adomian polinomlar ile

$$N(y) = by^2 = b \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Şeklinde ifade edilsin(Adomian,1989). Buradan

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ A_1 &= 2y_0y_1 \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2 \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

dır. Burada (4.1.12) ifadesi gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \\ y_1 &= -L^{-1}(Ry_0 + by_0y_0), \\ y_2 &= -L^{-1}(Ry_1 + b(y_0y_1 + y_1y_0)), \\ y_3 &= -L^{-1}(Ry_2 + b(y_0y_2 + y_1y_1 + y_2y_0)), \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= -L^{-1}(Ry_n + b(y_0y_n + y_1y_{n-1} + y_2y_{n-2} + \dots + y_ny_0)), \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

olur.

Üçüncü Durum: $N(y) = by^3$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \\ y_1 &= -L^{-1}(Ry_0 + by_0^3), \\ y_2 &= -L^{-1}(Ry_1 + b(3y_0^2y_1)), \\ y_3 &= -L^{-1}(Ry_2 + b(3y_0^2y_2 + 3y_0y_1^2)), \\ y_4 &= -L^{-1}(Ry_3 + b(y_1^3 + 3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2)), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

yazılır. Burada ilk bakışta by^2 ile benzerlik görmek ya da terimlerin indislenerek yazılması için uygun kurallar türetmek kolay değildir.

Dördüncü Durum: $N(y)=by^4$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \\
 y_1 &= -L^{-1}(Ry_0 + by_0^4), \\
 y_2 &= -L^{-1}(Ry_1 + b(4y_0^3 y_1)), \\
 y_3 &= -L^{-1}(Ry_2 + b(4y_0^3 y_2 + 6y_0^2 y_1^2)), \\
 y_4 &= -L^{-1}(Ry_3 + b(4y_0^3 y_1^3 + 3y_0^3 y_1 + 12y_0^2 y_1 y_2 + y_0^3 y_3)), \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

yazılır. Aşağıdaki kısım son iki durumu daha iyi açıklar.

Polinomların Lineer olmayanlığı : $N(y) = by^m$ olsun. y^m nin daha genel bir durumu

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \\
 y_1 &= -L^{-1}(Ry_0 + bA_0) = -L^{-1}(Ry_0 + by_0^m), \\
 y_2 &= -L^{-1}(Ry_1 + bA_1) = -L^{-1}(Ry_1 + bmy_0^{m-1}y_1), \\
 &\vdots \\
 y_{n+1} &= -L^{-1}(Ry_n + bA_n) \\
 &= -L^{-1}(Ry_n + b((m-(n-1))(y_1/y_0)A_{n-1} + (2m-(n-2))(y_2/y_0)A_{n-2} \\
 &\quad + (3m-(n-3))(y_3/y_0)A_{n-3} + \dots nm(y_n/y_0)A_0)),
 \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

olarak yazılır. Eğer $m=3$ alınırsa

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(x_0) + L^{-1}(\phi(x)) \\
 y_1 &= -L^{-1}(Ry_0 + by_0^3), \\
 y_2 &= -L^{-1}(Ry_1 + b(3y_0^2 y_1)), \\
 &\vdots \\
 y_{n+1} &= -L^{-1}(Ry_n + b((3-(n-1))(y_1/y_0)A_{n-1} + (6-(n-2))(y_2/y_0)A_{n-2} \\
 &\quad + (9-(n-3))(y_3/y_0)A_{n-3} + \dots 3n(y_n/y_0)A_0)),
 \end{aligned}$$

dır. $m=3$ için elde edilen sonuçlar daha önceden verilen sonuçlarla benzer olduğu görülmektedir. $m=4$ için de benzer sonuçları elde edilebilir. A_n için

$$y_{n+1} = L^{-1}(Ry_n + bA_n)$$

eşitliğinin $n=0,1,2,3,\dots$ değerleri için (4.1.11) den A_n nin her terimi elde edilebilir.

$m=3$ için

$$A_0 = y_0 y_0 y_0$$

$$A_1 = y_0 y_0 y_1 + y_0 y_1 y_0 + y_1 y_0 y_0$$

$$A_2 = y_0 y_0 y_2 + y_0 y_2 y_0 + y_2 y_0 y_0 + y_0 y_1 y_1 + y_1 y_0 y_1 + y_1 y_1 y_0$$

⋮

dır. Benzer şekilde $m = 4$ için,

$$A_0 = y_0 y_0 y_0 y_0$$

$$A_1 = y_0 y_0 y_0 y_1 + y_0 y_0 y_1 y_0 + y_0 y_1 y_0 y_0 + y_1 y_0 y_0 y_0$$

$$A_2 = y_0 y_0 y_0 y_2 + y_0 y_0 y_2 y_0 + y_0 y_2 y_0 y_0 + y_2 y_0 y_0 y_0 + y_0 y_0 y_1 y_1 + y_1 y_1 y_0 y_0 + y_0 y_1 y_0 y_1 + y_1 y_0 y_0 y_1 + y_0 y_1 y_1 y_0$$

⋮

yazılır. Eğer $N(y) = b y^m$ ise

$$y_{n+1} = L^{-1}(Ry_n + bA_{m,n}) \quad (4.1.21)$$

dir. Burada $A_{m,n}$ ise

$$A_{m,n} = \sum_{i+j+k+\dots+w=n} y_i y_j y_k \dots y_w \quad (4.1.22)$$

şeklinde verilir. Burada $i+j+k+\dots,w = n$ dir ve çarpım faktörlerinin sayısı m dir. Böylece bütün polinomların lineer olmayanlığı kolaylıkla çözülebilir (Adomian ve Sibul,1981).

4.1.3. Metodun Uygulaması

Bu bölümde analitik çözümler elde etmek için bazı örnek problemleri ve ayrışım metodunu kullanarak bu problemlerin yaklaşık çözümlerini ele alacağız.

Örnek4.1.1. Bir önceki bölümde verdiğimiz teoremin uygulamasını göstermek için lineer olmayan başlangıç değer problemi,

$$y' = -y^2, y(0) = 1 \quad (4.1.23)$$

şeklinde olsun. (4.1.12) den (4.1.23) diferensiyel denkleminin çözümü;

$$y_0 = 1, \quad (4.1.24)$$

$$y_1 = -x, \quad (4.1.25)$$

$$y_2 = x^2, \quad (4.1.26)$$

$$y_3 = -x^3, \quad (4.1.27)$$

$\vdots$

elde edilir. Benzer işlemlerle diğer bileşenlerde elde edilir. (4.1.9) serisi kullanılırsa;

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \dots \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

şeklinde olup, böylece (4.1.23) denkleminin yaklaşık çözümü elde edilir. Burada gerçek çözüm

$$y(x) = \frac{1}{1+x}, \quad (4.1.29)$$

olup, (4.1.28) eşitliğinin (4.1.29) gerçek çözümüne eşdeğer olduğu açıktır.

Örnek 4.1.2

$$y' = x - y^2, \quad y(0) = 0 \quad (4.1.30)$$

denkleminde x stokastik süreç olsun. Ayrışımın tek tek terimlerini belirlemek için (4.1.11) ve (4.1.12) denklemleri kullanılarak;

$$y_0 = \frac{x^2}{2}, \quad (4.1.31)$$

$$y_1 = -\frac{x^3}{6}, \quad (4.1.32)$$

$$y_2 = \frac{x^6}{36}, \quad (4.1.33)$$

$$y_3 = \frac{x^7}{252} + \frac{x^9}{324}, \quad (4.1.34)$$

olur. Diğer bileşenlerde benzer şekilde bulunur. (4.1.12) kullanılarak

$$\begin{aligned} y(x) &\cong y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots \\ &\cong \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^9}{324} \dots \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

bulunur. Buradan (4.1.30) denkleminin yaklaşık çözümünü kolayca elde ederiz.

4.1.4. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde yukarıda verilen iki örnekteki başlangıç değer problemi test edilerek Tablo 2-3 de; Euler, Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta, Adams Bashforth metodları ile (4.1.37) deki ayrışım metodu karşılaştırılarak elde edilen mutlak hatalar ve yaklaşık sonuçları verilmiştir. Sayısal olarak ayrışım metodunun, yukarıda verilen metodlardan daha iyi olduğunu göstermek için ϕ_n yaklaşımını, $y(x)$ fonksiyonunun n -terim yaklaşımında kullanarak yaklaşık çözümü elde edebiliriz. Böylece

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) \quad (4.1.36)$$

ya da

$$\begin{aligned} \phi_1 &= y_0 \\ \phi_2 &= y_0 + y_1 \\ \phi_3 &= y_0 + y_1 + y_2 \\ &\vdots \\ \phi_n &= y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

olarak yazılır. Örnek 1 için sayısal hatalar Tablo 2 de gösterilmiştir. Örnek 1 de (4.1.37) eşitliklerinden ayrışım serilerinin ilk altı terimi gözönüne alınarak denklemin gerçek çözümüne oldukça yakın bir yaklaşım elde edilir.

Ayrıca bu metodun hassaslığını gözlemek için ayrışım serilerinin ilk altı teriminden sonraki ilave olunacak her terim için hataların daha aza indirgendiği görülebilir.

x	Euler	Runge-Kutta	Adomian
0.1	0.9090781 E-02	0.3576279E-06	0.9000000E-07
0.2	0.1433319 E-01	0.4768372E-06	0.5330000E-07
0.3	0.1730669 E-01	0.5364418E-06	0.5608000E-07
0.4	0.1890063 E-01	0.4768372E-06	0.2925700E-07
0.5	0.1963758 E-01	0.4768352E-06	0.1041700E-07

Tablo 2 .Örnek 1 için tam hatalar (h=0.1)

Örnek 2 için sayısal sonuçlar Tablo 3 de verilmiştir. Tablo 3 de (4.1.37) den elde edilen sonuçların ayrışım serilerinin daha fazla terimi kullanılarak sonuçlar karşılaştırılabilir.

x	Adams-Bashfort	Runge-Kutta	Adomian
0.4	0.0795095	0.0794916	0.0794921
0.5	0.1234764	0.1234610	0.1234615
0.6	0.1762245	0.1762135	0.1762142
0.7	0.2369455	0.2369410	0.2369418
0.8	0.3045961	0.3045997	0.3046007

Tablo 3 .Örnek 2 için yaklaşık sonuçlar ($h=0.1$)

Sonuç olarak denilebilir ki: Adomian ayrışım metodu kullanılarak hızlı bir şekilde çözüm elde edilebilir. Var olan geleneksel sayısal metotlar ayrışım metoduyla karşılaştırıldığında ayrışım metodu gerçek çözüme çok yakın sonuçlar ve daha az işlem gerektiren güvenilir bir teknik olduğu açıktır. Ayrışım metodu bazı durumlarda az terim alındığında bile yaklaşım kesin olarak elde edilebilir.

4.2. Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri ve Lineer Olmayan Hiperbolik Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

G. Adomian'ın lineer ve lineer olmayan deterministik veya stokastik diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için verdiği ayrışım metodunu genel olarak ele alalım. Ayrışım metodunun lineer olmayan deterministik hiperbolik denklemlere uygulanmasını bir örnekle verelim. Lineer veya lineer olmayan stokastik diferensiyel denklemlerin ayrışım metoduyla çözümünde diferensiyel operatörün katsayılarının veya sistemdeki katsayıların stokastik süreçler olduğu kabul edilir (Adomian,1983).

F uzay ve zaman değişkenlerine göre lineer ve lineer olmayan terimli diferensiyel operatör olmak üzere

$$Fu(t) = g(t) \quad (4.2.1)$$

veya

$$Lu + N(u, u', \dots) = g(t) \quad (4.2.2)$$

şeklinde verilsin. Şimdi stokastik denklemle tanımlanan dinamik sistemleri gözönüne alalım. (4.2.2) denkleminde L lineer stokastik operatörü (Ω, F, μ) olasılık uzayı

(Ω = örnek uzayı, F = Ω örnek uzayın alt kümelerinin σ cebri, μ = Ω örnek uzayı üzerinde olasılık ölçümü) üzerinde tanımlanmış olup

$$L = \sum_{v=0}^n a_v(t, \omega) \frac{d^v}{dt^v} \quad (4.2.3)$$

şeklinde (Adomian,1983). Burada $t \in T$ (T bağımsız değişken bölgesi) ve $\omega \in (\Omega, F, \mu)$ (ω = elementer olay) ise $a_v(t, \omega)$ olasılık uzayı için stokastik süreçtir.

$L = \langle L \rangle$ 'nin tersinin deterministik operatörü ve $\mathcal{R} = L^{-1} - L$ stokastik olduğu varsayılırsa

$$\mathcal{R} = \sum_{v=0}^m \alpha_v(t, \omega) \frac{d^v}{dt^v}, \quad m \leq n-1 \quad (4.2.4)$$

$$L = \sum_{v=0}^m \langle a_v(t, \omega) \rangle \frac{d^v}{dt^v} \quad (4.2.5)$$

şeklinde yazılır. N lineer olmayan terimi ise $N = N + \mu$ şeklinde olup N deterministik ve μ stokastik bileşenlere sahip olduğunda N terimi genel olarak

$$N = N(u, u', \dots, b_\mu(t), B_\mu(t, \omega)) \quad (4.2.6)$$

dır. μ lineer olmayan stokastik diferansiyel operatör terimi ise

$$\mu = \sum_{\mu}^{m_m} B_{\mu}(t, \omega) \left(\frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}} \right)^{\mu_m} \quad (4.2.7)$$

şeklindedir (Adomian,1983). L lineer ve N lineer olmayan stokastik diferensiyel operatörlerdeki a_v ve b_{μ} katsayıları ise

$$\begin{aligned} a_v(t) &= \langle a_v(t) \rangle + \alpha_v(t, \omega) \\ b_{\mu}(t) &= \langle b_{\mu}(t) \rangle + \beta_{\mu}(t, \omega) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

olarak tanımlanır. (4.2.8) denklemindeki $\langle a_v \rangle$ ile $\langle b_{\mu} \rangle$, T üzerinde sürekli olan deterministik süreç katsayılarıdır. α_v ve β_{μ} n -yinci mertebeden türetilen (yani $C^n(t)$ fonksiyon sınıfına ait, $\omega \in \Omega$ için T üzerinde sürekli olan her katsayıdaki salınımları gösteren $T \times \Omega$ üzerinde tanımlanmış) stokastik süreçlerdir (Onargan,1989). Buradan

$$\left| \frac{\partial^k \alpha_v(t, \omega)}{\partial t^k} \right| < M_1 = \text{sabit}, \quad \left| \frac{\partial^k \beta_{\mu}(t, \omega)}{\partial t^k} \right| < M_2 = \text{sabit}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

olduğu varsayılmıştır. $g(t, \omega)$ fonksiyonunda $T \times \Omega$ üzerinde tanımlanmış stokastik süreçtir ve her $t \in T$ için $|g(t, \omega)| < M_3 = \text{sabittir}$. Böylece bu fonksiyonlar ve $g(t, \omega)$ fonksiyonu sınırlıdır (Adomian,1989).

L deterministik operatörü $\omega \in \Omega$ için L^{-1} ters operatörüne sahip olup n -yinci mertebeden başlangıç-değer problemlerinde L^{-1} ters operatör n katlı belirli integrali, sınır-değer problemlerinde ise belirsiz integrali gösterir. Örneğin başlangıç-değer problemlerinde L ikinci-mertebeden operatörse L^{-1} t_0 'dan t 'ye iki katlı integral operatörüdür ve

$$L^{-1} L u = u - u(x, t_0) - (t - t_0) u_t(x, t_0)$$

dır. (4.2.2) denklemini

$$L u + \mathfrak{R} u + N u = g(t) \quad (4.2.9)$$

şeklinde yazıp $L u$ için çözüm yapılırsa

$$L u = g - \mathfrak{R} u - N u \quad (4.2.10)$$

olarak bulunur. L deterministik olduğundan

$$L^{-1} L u = L^{-1} g - L^{-1} \mathfrak{R} u - L^{-1} N u \quad (4.2.11)$$

elde edilir. (4.2.11) denklemi u için çözülürse; A, B sabitler olmak üzere

$$u = A + B t + L^{-1} g - L^{-1} \mathfrak{R} u - L^{-1} N u \quad (4.2.12)$$

olur. L sınır-değer problemlerinde ikinci mertebeden operatör ise (4.2.12) denklemi

$$u = x\alpha(t) + \beta(t) + L^{-1}g - L^{-1}\mathfrak{R}u - L^{-1}Nu \quad (4.2.13)$$

şeklinde elde edilir. Eğer

$u(t)$ bağımlı değişkeni $t \in T$ için (Ω, F, μ) olasılık uzayı üzerinde stokastik süreç ise (4.2.2) denkleminin çözümü

$$u(t, \omega) = L^{-1}g(t, \omega) - L^{-1}\mathfrak{R}u(t, \omega) - L^{-1}Nu(u, u', \dots) \quad (4.2.14)$$

şeklinde elde edilir. Ayrışım yönteminin uygulanmasında (4.2.14) denklemi ile verilen çözüm ifadesindeki Nu doğrusal olmayan terim ise

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.2.15)$$

dır. Lineer olmayan N deterministik terimler için A_n polinomları λ parametresine göre açılım katsayılarını gösterir. Burada her u_i çözümü yalnız $u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_0$ 'a bağlı olacak şekilde terimleri birleştirmekte kullanılan ifadelerdir. u_0 terimi ikinci mertebeden başlangıç-değer problemleri için $A + Bt + L^{-1}g$ ile sınır-değer problemleri için $x\alpha(t) + \beta(t) + L^{-1}g$ ile tanımlanırsa

$$u = F^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

veya

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$$

şeklinde yazılır. Benzer olarak (4.2.12) eşitliğinden

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}\mathfrak{R} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.2.16)$$

dır. (4.2.16) dan u_n bileşenleri hesaplanabilir ve u çözümü $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ şeklinde yazılır.

Eğer seri yakınsak ise n terim toplamı $\Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$

olduğundan çözüme yakınsayacaktır. n terim yaklaşımı olan $\Phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ kullanılarak

ayrışım metodunun yakınsaklığı

$$\begin{aligned}\Phi_n &= u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \\ \Phi_{n+1} &= u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i = u_0 - L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} A_i - L^{-1} A_n \\ |\Phi_{n+1} - \Phi_n| &= -|u_{n+1}| \rightarrow 0\end{aligned}$$

şeklindedir. Nu lineer olmayan terimi, μu stokastik terimi bulundurması halinde

(4.2.16) denkleminin çözümüne $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B_n$ şeklinde ikinci stokastik analitik açılım ilave

edilmelidir. Bu durumda $u = F^{-1}g$ genel çözümü ya da $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ çözümüne

$u_0 = F_0^{-1}g = L^{-1}g$ homojen çözümün eklenmesi ile

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{-1}g$$

ya da

$$F_{n+1}^{-1}g = -L^{-1}[\mathfrak{A}F_n^{-1}g + A_n + B_n] \quad (4.2.17)$$

şeklinde yazılır. A_n ve B_n sırasıyla Nu lineer olmayan deterministik ve μu lineer olmayan stokastik terimler için λ parametresine göre ifade edilen analitik ifadelerdeki katsayılarıdır. O halde

$$F^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n^{-1}g, \quad (4.2.18)$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

$$\mu u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \lambda^n$$

dır. Şimdi stokastik halde lineer olmayan Vanderpol denklemi

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + \beta u + \gamma \frac{d}{dt}(u^3) = g(t)$$

şeklinde olup (4.2.16) denkleminde

$$Lu = g - \alpha \left(\frac{d}{dt} \right) u - \beta u - \gamma \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u - \eta u - \sigma \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

şeklinde elde edilir. Burada A_n ve B_n toplamı $\left(\frac{d}{dt}\right)u^3$ 'ü gösterip $\varepsilon, \eta, \sigma$ ise (4.2.8)

denklemini gereğince

$$\alpha = \langle \alpha \rangle + \varepsilon, \quad \beta = \langle \beta \rangle + \eta, \quad \gamma = \langle \gamma \rangle + \sigma$$

şeklinde tanımlanan α, β ve γ stokastik salınımlardır. Burada u nun çözümü ise

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

şeklinde olup stokastik seridir (Adomian, 1988). lineer halde N terimi sıfır olacağından (4.2.16) denklemi

$$\begin{aligned} u &= u_0 - L^{-1} \mathcal{R} u_0 - L^{-1} \mathcal{R} u_1 - \dots \\ u &= u_0 - L^{-1} \mathcal{R} u_0 + (L^{-1} \mathcal{R})(L^{-1} \mathcal{R}) u_0 - \dots \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L^{-1} \mathcal{R})^n u_0 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

şeklinde yazılır. Başlangıç ve sınır koşullarının sıfır olması halinde denklemin lineer kısmında elde edilen çözüm $u_0 = L^{-1} g$ olduğundan tam çözüm

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L^{-1} \mathcal{R})^n L^{-1} g \quad (4.2.20)$$

şeklinde yazılır. Lineer halde $Fu = g$ denklemi $u = F^{-1} g$ olur ve F^{-1} ters operatörü

$$F^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (L^{-1} \mathcal{R})^n L^{-1} g$$

dir. $Fu = g$ denkleminin $F = L - N$ ile gösterilen herhangi bir kısmında stokastiklik bulunuyorsa, u çözüm sürecinin beklenen değeri ve istatistiksel ölçümlerin hesaplanması gerekir. Lineer olmayan deterministik denklemler stokastikliğinin sıfır olduğu, bir özel durum olarak incelenir. m – boyutlu problemler için (4.2.16) çözümü

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \left(\frac{1}{m}\right) \sum_{j=i+1}^m \sum_{i=1}^{m-1} \left[L_{x_i}^{-1} L_{x_j} + L_{x_j}^{-1} L_{x_i} \right] u - \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=1}^m L_{x_i}^{-1} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{x_i} \right] u - \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=1}^m L_{x_i}^{-1} \right] \sum_{n=0}^{\infty} A_n ; (i \neq j) \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

şeklinde elde edilir (Adomian, 1989). Buradan u_0 ise

$$u_0 = \left(\frac{1}{m}\right) \left\{ \sum_{i=1}^m \phi_i + \sum_{i=1}^m L_{x_i}^{-1} \cdot g \right\}$$

ile verilir. Burada ϕ_i homojen çözümler olup L_{x_i} ve $L_{x_i}^{-1}$ operatörleri

$$L_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad L_{x_i}^{-1} = \int_0^x [.] dx$$

şeklinde tanımlanır. Stokastiklik içeren problemlerde ayrışımın bileşenleri u_0 teriminden faydalanarak;

$$u_1 = -\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{j=i+1}^m \sum_{i=1}^{m-1} [L^{-1} x_i L x_j + L^{-1} x_j L x_i] u_0 - \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=1}^m L^{-1} x_i \right] \left[\sum_{i=1}^m \Re x_i \right] u_0$$

$$- \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=0}^m L^{-1} x_i \right] A_0 \quad ; \quad (i \neq j) \quad (4.2.22)$$

⋮

$$u_n = -\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{j=i+1}^m \sum_{i=1}^{m-1} [L^{-1} x_i L x_j + L^{-1} x_j L x_i] u_{n-1} - \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=1}^m L^{-1} x_i \right] \left[\sum_{i=1}^m \Re x_i \right] u_{n-1}$$

$$- \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sum_{i=0}^m L^{-1} x_i \right] A_{n-1}$$

şeklinde yazılır.

ÖRNEK 4.2.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + s(x, y) f(u(x, y)) = 0, \quad x, y \in \theta(x, y) \quad (4.2.23)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u(0, y) = \Psi(y) \quad (4.2.24)$$

$$\theta = \{(x, y) \in R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

lineer olmayan deterministik hiperbolik başlangıç-değer problemini ele alalım. (4.2.23) deki S katsayısı ve başlangıç koşulları üzerindeki Varlık ve Teklik ile sürekliliği garanti etmek için s, f, Φ ve Ψ üzerindeki uygun düzgünlük koşullarını verilmiştir (Hsiang ve Kwong, 1982). Burada

- 1) $s: \theta \rightarrow [0, \infty)$ olan sürekli fonksiyondur.
- 2) $f: R \rightarrow R$, $u > 0$ için $f(u) > 0$ ve $f \in [0, \infty)$

içinde sürekli türetilebilir fonksiyon olup

$$\Phi' \leq 0 \text{ ve } \Psi' \leq 0 \text{ ile } \Phi, \Psi: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

sürekli türetilebilir azalan fonksiyonlardır(Onargan,1989). (4.2.23) denkleminde $f(u)$ lineer olmayan fonksiyondur. L lineer deterministik operatör ise ikinci mertebeden $\partial^2 / \partial x \partial y$ kısmi türev operatörü olup (4.2.23) denklemi

$$Lu + sf(u) = 0 \quad (4.2.25)$$

$$Lu = -sf(u) \quad (4.2.26)$$

Şeklinde yazılabilir. L^{-1} ters operatör $[0, x]$ aralığı üzerinde x 'e göre, $[0, y]$ aralığı üzerinde y 'ye göre belirli integral olduğundan

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu &= \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy dx = \int_0^x \left[\int_0^y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^y \right) dx = \int_0^x \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} \right) dx = u(x, y) - u(x, 0) \Big|_0^x \\ &= u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0) \\ u(x, y) &= u(0, y) + u(x, 0) - u(0, 0) \end{aligned}$$

olur . (4.2.26) denkleminde

$$u(x, y) = u(0, y) + u(x, 0) - u(0, 0) - L^{-1}sf(u) \quad (4.2.27)$$

elde edilir. (4.2.23) denkleminde $\mathfrak{R}$ lineer ve μ lineer olmayan stokastik terimler ile g etki fonksiyonu mevcut değildir. Başlangıç koşulları ile tanımlanan çözüm

$$u_0 = u(0, y) + u(x, 0) - u(0, 0)$$

ile gösterilirse (3.2.23) çözümü

$$u(x, y) = u_0 - L^{-1}sf(u) \quad (4.2.28)$$

olarak elde edilir. Buradan yaklaşık çözüm

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

ya da

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n = u_0 - \lambda L^{-1}sf(u) \quad (4.2.29)$$



olarak parametrelendirir (Adomian,1986) . Lineer olmayan deterministik $f(u)$ terimi A_n göre ifade edilir ve λ parametresine göre analitik olduğu varsayılır. λ ayrışım parametresi olup hesaplamalarda $\lambda = 1$ alınır. Lineer olmayan terim $N(u)$ ise

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (4.2.30)$$

şeklinde olup

$$N(u) = f(u) = f(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n, \quad \lambda = 1 \quad (4.2.31)$$

yazılır. Böylece (4.2.26) denkleminin çözümü

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n = u_0 - L^{-1} s(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (4.2.32)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.2.29) çözümü için A_0 yalnız u_0 'a bağlı, A_1 , u_0 ve u_1 'e bağlı ve genel olarak A_n , $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'e bağlı olduğundan (4.2.32) denkleminde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1} s A_0(u_0) \\ u_2 &= -L^{-1} s A_1(u_0, u_1) \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1} s A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

elde edilir. Böylece, $n \geq 0$ için her u_{n+1} yalnız $u_0, u_1, \dots, u_n$ 'e bağlı olarak hesaplanabilir. $s(x, y)$ ve $f(u)$ verildiğinde tam çözüm

$$u = u_0 - L^{-1} s(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} A_n f(u) \quad (4.2.34)$$

şeklinde yazılır. (4.2.34) çözüm ifadesindeki A_n Adomian polinomları (2.5.4) den

$$\begin{aligned} A_0 &= h_0(u_0) \\ A_1 &= h_1(u_0)u_1 \\ A_2 &= h_1(u_0)u_2 + h_2(u_0)\frac{1}{2!}u_1^2 \\ A_3 &= h_1(u_0)u_3 + h_2(u_0)u_1u_2 + h_3(u_0)\frac{1}{3!}u_1^3 \\ A_4 &= h_1(u_0)u_4 + h_2(u_0)\left[\frac{1}{2!}u_2^2 + u_1u_3\right] + h_3(u_0)\frac{1}{2!}u_1^2u_2 + h_4(u_0)\frac{1}{4!}u_1^4 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.24) ve (4.2.25) denklemleri ile verilen lineer olmayan deterministik denklemin çözümünde $s(x, y)$ katsayısının $(1+xy)$, lineer olmayan $f(u)$

teriminin u^2 ve başlangıç koşullarının $u(x,0)=1$; $u(0,y)=1$ ve $u(0,0)=1$ alınması halinde (4.2.26) denkleminin çözümünü elde edelim. (4.2.27) den $u_0 = 1$ olarak elde edilir. u^2 lineer olmayan terim A_n polinomlarında yerine yazılarak diğer bütün bileşenler $n \geq 0$ için;

$$u_{n+1} = -L^{-1}(1+xy)A_n \quad (4.2.35)$$

dır. Burada u^2 lineer olmayanlığı için A_n polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 \\ A_1 &= 2u_0 u_1 \\ A_2 &= u_1^2 + 2u_0 u_2 \\ A_3 &= 2u_1 u_2 + 2u_0 u_3 \\ A_4 &= 2u_0 u_4 + 2u_1 u_3 + u_2^2 \\ A_5 &= 2u_0 u_5 + 2u_1 u_4 + 2u_2 u_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. (4.2.35) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x,0) + u(0,y) - u(0,0) \\ u_1 &= -L^{-1}s(u_0 u_0), \\ u_2 &= -L^{-1}(s(u_0 u_1 + u_1 u_0)), \\ u_3 &= -L^{-1}(s(u_0 u_2 + u_1 u_1 + u_2 u_0)), \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}(s(u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \dots + u_n u_0)), \end{aligned}$$

olur. Buradan u çözümü

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}(1+xy)A_0 \\ &= -L^{-1}(1+xy).1^2 = -\left(xy + \frac{x^2 y^2}{4}\right) \\ u_2 &= -L^{-1}(1+xy)A_1 \\ &= 2\left(\frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x^3 y^3}{3.3.4} + \frac{x^3 y^3}{3.3} + \frac{x^4 y^4}{4.4.4}\right) \\ u_3 &= -L^{-1}(1+xy)A_2 \\ &= -\left(\frac{2x^3 y^3}{9} + \frac{45x^4 y^4}{16.18} + \frac{85x^5 y^5}{25.72} + \frac{x^6 y^6}{8.36}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$



$$u = 1 - \left(xy + \frac{x^2 y^2}{4} \right) + 2 \left(\frac{1}{4} x^2 y^2 + \frac{5}{36} x^3 y^3 + \frac{1}{64} x^4 y^4 \right) - \left(\frac{2}{9} x^3 y^3 + \frac{45}{16.18} x^4 y^4 + \frac{85}{25.72} x^5 y^5 + \frac{1}{8.36} x^6 y^6 \right) + \dots$$

elde edilir. u^3 lineer olmayanlığı için u çözümü ise

$$u_1 = -L^{-1}(1+xy)A_0(u_0)$$

$$u_1 = -L^{-1}(1+xy)(u_0^3) = -L^{-1}(1+xy) = -\left(xy + \frac{x^2 y^2}{4} \right)$$

$$u_2 = -L^{-1}(1+xy)A_1(u_0, u_1)$$

$$u_2 = -L^{-1}(1+xy)(3u_0^2 u_1) = 3 \left(\frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x^3 y^3}{36} + \frac{x^3 y^3}{9} + \frac{x^4 y^4}{64} \right)$$

$\vdots$

$$u = 1 - \left(xy + \frac{x^2 y^2}{4} \right) + 3 \left(\frac{1}{4} x^2 y^2 + \frac{5}{36} x^3 y^3 + \frac{1}{64} x^4 y^4 \right) - \left(\frac{7}{12} x^3 y^3 + \frac{32}{64} x^4 y^4 + \frac{197}{64.125} x^5 y^5 + \frac{21}{36.64} x^6 y^6 \right) + \dots$$

seri olarak elde edilir. Benzer şekilde $f(u) = u^m$ lineer olmayanlığı için (4.2.26) denkleminin genel çözümünü

$$u_0 = u(x,0) + u(0,y) - u(0,0)$$

$$u_1 = -L^{-1}(sA_0) = -L^{-1}(1+xy)u_0^m,$$

$$u_2 = -L^{-1}(sA_1) = -L^{-1}(1+xy)(mu_0^{m-1}u_1),$$

$\vdots$

$$u_{n+1} = -L^{-1}(sA_n)$$

$$= -L^{-1}(s((m-(n-1))(u_1/u_0)A_{n-1} + (2m-(n-2))(u_2/u_0)A_{n-2} + (3m-(n-3))(u_3/u_0)A_{n-3} + \dots + nm(u_n/u_0)A_0),$$

şeklinde yazarız. George Adomian'ın ayrışım yöntemi adi diferansiyel, kısmi diferansiyel denklemleri, kısmi diferansiyel denklem sistemlerini, cebirsel denklemleri içeren stokastik (özel halde deterministik) operatör denklemlere uygulanabilir. Stokastikliğin içermesi halinde bulunan seriler birinci ve ikinci mertebeden istatistiklerle elde edilen rastgele serilerdir.



4.3. Lineer Olmayan Oscillator Denkleminin Yaklaşık Çözümü İçin Ayrışım Metodu

Burada Adomian'nın ayrıştırma metodu kullanılarak $u'' + \omega^2 u = \varepsilon \phi(u, u, \dots)$ lineer olmayan oscillator problemlerinin uygun sayısal çözümü incelendi.

4.3.1. Oscillator Denklemi İçin Ayrışım Metodunun Analizi:

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ formunda diferansiyel operator L olsun. Ayrışım metodunun operator formunu Vanderpol denklemine uygularsak

$$Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) = \phi(t), \quad u(t_0) = \alpha, \quad u'(t_0) = \beta, \quad (4.3.1)$$

şeklinde yazılır. Burada L tersi mevcut olan bir diferensiyel operatör, R de Lineer operatorün kalanları, Nu da lineer olmayan terim ve $\phi(t)$ herhangi bir fonksiyon olsun. Lu için çözüm

$$Lu(t) = \phi(t) - Ru(t) - Nu(t). \quad (4.3.2)$$

şeklindedir. L nin tersi alındığında

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1}\phi(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \quad (4.3.3)$$

elde edilir. Buradan açıktır ki L nin tersi L^{-1} t_0 dan t ye iki katlı integraldir. u için (4.3.3) denkleminin çözümü

$$u(t) = u(0) + L^{-1}\phi(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \quad (4.3.4)$$

olur. Ayrışım metodunda, ayrışım serileri ile tanımlanan bileşenlerin toplamı bilinmeyen $u(t)$ fonksiyonunun ayrışımını oluşturmaktadır. Buradan

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad (4.3.5)$$

şeklinde yazılır. Lineer olmayan terim $Nu = u^3$, A_n Adomian polinomlarının içindedir.

Öyleki, $Nu \equiv u^3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dır. Burada A_n Adomian polinomlarının genel formu 1989 da Adomian tarafından verilmiştir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^3 \\
A_1 &= 3u_0^2 u_1 \\
A_2 &= 3u_0 u_1^2 + 3u_0^2 u_2 \\
A_3 &= u_1^3 + 6u_0 u_1 u_2 + 3u_0^2 u_3 \\
A_4 &= 3u_1^2 u_2 + 3u_0 u_2^2 + 6u_0 u_1 u_3 + 3u_0^2 u_4 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

dır. (4.3.5) ve (4.3.6) denklemlerini (4.3.4) denkleminde yerine yazıp $n \geq 0$ için ,

$$u_0 = u(t_0) + t u'(t_0) + L^{-1}(\phi(t)) \tag{4.3.7}$$

$$u_{n+1} = L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_n - L^{-1} R u_n - L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) A_n$$

elde edilir. A_n , (4.3.6) denklemi üzerinde oluşturulan Adomian polinomlarını temsil etmektedir. Burada $\phi(t)$ fonksiyonu ile başlangıç şartlarından u_0 bileşeni elde edilir. u_0 bileşeni üzerinde tekrarlama bağıntısı kullanılarak u_n kalan bileşenleri ,bir önceki terim yardımıyla herbir terim $n \geq 1$ için tam olarak tanımlanabilir. Bu terimler (4.3.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(t_0) + t u'(t_0) + L^{-1}(\phi(t)) \\
u_1 &= L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_0 - L^{-1} R u_0 - L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) A_0 \\
u_2 &= L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_1 - L^{-1} R u_1 - L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) A_1 \\
u_3 &= L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_2 - L^{-1} R u_2 - L^{-1} \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) A_2 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

şeklinde yazılır. Böylece seri çözümü tümüyle elde edilir. Fakat birçok durumda gerçek çözümün kapalı formu da bulunabilir. Sayısal sonuçlar için yaklaşım

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \tag{4.3.9}$$

dır. Burada Adomian ayrışım metodu için

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t) \tag{4.3.10}$$

kullanılmaktadır. Daha iyi yaklaşımlar $u(t)$ nin ayrışım seri çözümünün fazla bileşenleri kullanılarak elde edebilir. Bu metodun yakınsaklığı önceki bölümlerde vermişti. Stokastik durumda $\phi(t)$ fonksiyonu ya da başlangıç şartları stokastiktir. Buna ilaveten α, β, γ artan ya da azalan stokastik duruma sahip olabilirler. Bunların genel hali

$$\alpha = \langle \alpha \rangle + \varepsilon$$

$$\beta = \langle \beta \rangle + \eta$$

$$\gamma = \langle \gamma \rangle + \sigma$$

dır. Burada $\varepsilon, \eta, \gamma$ tesadufi süreçlerin sıfır ortalamalarıdır. Şimdi $u(t)$ nin çözüm formu için

$$Lu = \phi(t) - \alpha \left(\frac{d}{dt} \right) u - \beta u - \gamma \sum_{n=0}^{\infty} A_n - \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u - \eta u - \sigma \sum_{n=0}^{\infty} A_n ,$$

şeklinde yazılır. Burada Vanderpol denklemi için lineer olmayan $\left(\frac{d}{dt} \right) \frac{u^3}{3}$ terimi A_n olarak ifade edilerek ,

$$u_0 = u(t_0) + t u'(t_0) + L^{-1}(\phi(t)) ,$$

$$u_1 = -\alpha \left(\frac{d}{dt} \right) u_0 - \beta u_0 - \gamma A_0 - \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_0 - \eta u_0 - \sigma A_0 ,$$

$$u_2 = -\alpha \left(\frac{d}{dt} \right) u_1 - \beta u_1 - \gamma A_1 - \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_1 - \eta u_1 - \sigma A_1 ,$$

$$u_3 = -\alpha \left(\frac{d}{dt} \right) u_2 - \beta u_2 - \gamma A_2 - \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \right) u_2 - \eta u_2 - \sigma A_2$$

⋮

olarak yazılır. O halde stokastik seri , $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ elde edilir ki bu da istatistiki

olabilir (Adomian, 1988).

4.3.2. Sayısal Sonuçlar:

Bu kısımda ayrışım metodu kullanılarak Vanderpol denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki örnekle gösterildi.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + u &= \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{dt} , \\ u(0) &= c, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

denklemini gözönüne alalım (Venkatarangan, Rajalakshmi,1989). Ayrışım metodu kullanılarak

$$u_0 = c ,$$

$$u_1 = c \frac{t^2}{2!},$$

$$u_2 = -c\varepsilon(1-c^2)\frac{t^3}{3!} + c\frac{t^4}{4!}, \quad (4.3.12)$$

$$u_3 = -c\varepsilon^2(1-c^2)^2\frac{t^4}{4!} + 2c\varepsilon(1-4c^2)\frac{t^5}{5!} - c\frac{t^6}{6!},$$

$$u_4 = -c\varepsilon^3(1-c^2)^3\frac{t^5}{5!} + c\varepsilon^2(1-32c^2+29c^4)\frac{t^6}{6!} + c\varepsilon(69c^2-3)\frac{t^7}{7!} + c\frac{t^8}{8!}$$

⋮

bulunur. Burada ilk beş terim yaklaşımı

$$\phi_5 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad (4.3.13)$$

olup , yaklaşık çözüm

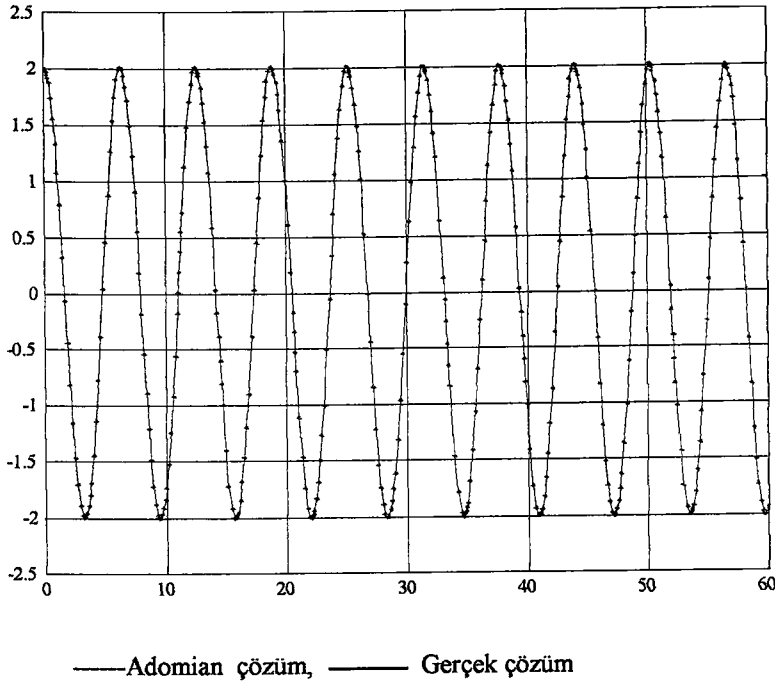
$$u = c \left\{ 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} \right\} + c\varepsilon \left\{ -(1-c^2)\frac{t^3}{3!} + (c-8c^2)\frac{t^5}{5!} + (69c^2-3)\frac{t^7}{7!} \right\} + \dots \quad (4.3.14)$$

dır. Tablo 4 de $c=2.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için gerçek çözüm ile ayrışım metodunun çözümü sayısal olarak karşılaştırıldı.

t	u(gerçek)	u (Adomian)	u (Matlap)	u(hata)
0.0	2.010000	2.010000	2.000000	0.000000E-00
0.015	2. 009998	2.009998	2.000000	5.745399E-08
0.029	2.009992	2.009992	2.000000	5.342985E-08
0.155	1.996608	2.010691	1.986800	7.00403 E-05
0.173	1.978490	2.028974	1.969243	2.48813 E-05

Tablo 4.





Şekil 1

Şekil 1 de görüldüğü gibi ayrışım serilerinin sadece ilk beş terimi kullanılarak iyi bir yaklaşım elde edildiği açıktır. Ayrışım serilerinin ilk beş teriminden sonra birkaçı yaklaşık çözüme ilave edilen her terim için yaklaşımın daha hassas ve hataların çok küçük olduğu görülebilir.

Ayrışım metoduyla yapılan çözümde, çözümü oluşturan ayrışım serilerinin terimleri basitçe hesaplanıp bir seri formunda elde edilmektedir. Bu tip denklemler için ayrışım metodunun çok iyi olduğunu Tablo 4 deki sayısal sonuçlar göstermektedir. Bazı bilinen teknikler ile bu metod karşılaştırıldığında bu yeni yaklaşımın daha kolay ve yüksek derecede hassas olduğu görülmektedir.

5. BÖLÜM

ÇOK -BOYUTLU KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN AYRIŞIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

5.1. 3 –Boyutlu Helmholtz Denkleminin Çözümü:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = F(x, y, z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \pi/2 \quad (5.1.1)$$

şeklinde verilen üç boyutlu Helmholtz denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin sınır değer şartları

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= \alpha(y, z) = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(1, y, z) &= \beta(y, z) = b, \quad b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

olarak tanımlansın

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ ve } L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

olmak üzere (5.1.1) denkleminin operator formu

$$[L_x + L_y + L_z]u + \lambda u = F(x, y, z)$$

dır. Buradan

$$L_x u = F(x, y, z) - \lambda u - [L_y + L_z]u$$

$$L_y u = F(x, y, z) - \lambda u - [L_x + L_z]u$$

$$L_z u = F(x, y, z) - \lambda u - [L_x + L_y]u$$

ifadeleri operator denklemlerdir. Bu operator denklemlerin herbirinin tersi

$$L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx, \quad L_y^{-1} = \int_0^y \int_0^y (.) dy dy, \quad L_z^{-1} = \int_0^z \int_0^z (.) dz dz$$

dır. Herbirine ayrı ayrı invers operatörü uygulanırsa

$$u = c_1 k_1(y, z) + c_2 k_2(y, z)x + L_x^{-1} F(x, y, z) - L_x^{-1} \lambda u - L_x^{-1} [L_y + L_z]u$$

$$u = c_3 k_3(x, z) + c_4 k_4(x, z)y + L_y^{-1} F(x, y, z) - L_y^{-1} \lambda u - L_y^{-1} [L_x + L_z]u$$

$$u = c_5 k_5(x, y) + c_6 k_6(x, y)z + L_z^{-1} F(x, y, z) - L_z^{-1} \lambda u - L_z^{-1} [L_y + L_x]u$$

elde edilir. Buradan herbir denklem için u_0 tanımlanırsa

$$u_0 = c_1 k_1(y, z) + c_2 k_2(y, z)x + L_x^{-1} F(x, y, z) \quad (5.1.3)$$

$$u_0 = c_3 k_3(x, z) + c_4 k_4(x, z)y + L_y^{-1} F(x, y, z) \quad (5.1.4)$$

$$u_0 = c_5 k_5(x, y) + c_6 k_6(x, y)z + L_z^{-1} F(x, y, z) \quad (5.1.5)$$

yazılır. $n \geq 0$ için diğer bileşenler

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -L_x^{-1} \lambda u_n - L_x^{-1} [L_y + L_z] u_n \\ u_{n+1} &= -L_y^{-1} \lambda u_n - L_y^{-1} [L_x + L_z] u_n \\ u_{n+1} &= -L_z^{-1} \lambda u_n - L_z^{-1} [L_y + L_x] u_n \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

şeklinde elde edilir. Ayrışım metodu herbiri için bu denklemlere uygulanırsa

$$\phi_m = \sum_{n=0}^m u_n(x, y, z) \quad (5.1.7)$$

yaklaşımı elde edilir. (5.1.3), (5.1.4) ve (5.1.5), eşitliklerinin hesaplamaları yapılırken x eksenindeki sınır şartları $c_1 k_1$ ve $c_2 k_2$, y eksenindeki sınır şartları $c_3 k_3$ ve $c_4 k_4$, z eksenindeki sınır şartları $c_5 k_5$ ve $c_6 k_6$ olup, bu özel şartlar bilinmeyen fonksiyonlar olarak ifade edilirler. Böylece $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq \pi/2$ aralıkları üzerinde (5.1.1) denkleminin tanımlandığını kabul edelim. Burada x eksenindeki sınır şartları $u(0, y, z) = \alpha(y, z)$ ve $u(1, y, z) = \beta(y, z)$ şeklinde alınıp (5.1.3) denkleminde uygulanırsa, $\phi_1 = u_0$ yaklaşımından

$$\begin{aligned} c_1 k_1(y, z) &= \alpha(y, z) \\ c_2 k_2(y, z) &= \beta(y, z) - \alpha(y, z) - 1 \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde y eksenindeki sınır şartları $u(x, 0, z) = \gamma(x, z)$ ve $u(x, 1, z) = \alpha(x, z)$ şeklinde alınıp (5.1.4) denkleminde uygulanırsa $\phi_1 = u_0$ yaklaşımında

$$\begin{aligned} c_3 k_3(x, z) &= \gamma(x, z) \\ c_4 k_4(x, z) &= \alpha(x, z) - \gamma(y, z) - 1 \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

elde edilir. Bu işlem z eksenindeki sınır şartlarına uygulanırsa (5.1.5) denkleminde $\psi_1 = u_0$ yaklaşımından

$$c_5 k_5(x, y) = \sigma(x, y)$$

$$c_6 k_6(x, y) = \gamma(x, z) - \sigma(y, z) - 1 \quad (5.1.10)$$

bulunur. (5.1.8), (5.1.9) ve (5.1.10) değerleri sırası ile (5.1.3) (5.1.4) (5.1.5) de yerine yazılırsa

$$u_0 = \alpha(y, z) + x[\beta(y, z) - \alpha(y, z) - 1] + L_x^{-1} F(x, y, z)$$

$$u_0 = \gamma(x, z) + y[\alpha(x, z) - \gamma(x, z) - 1] + L_y^{-1} F(x, y, z)$$

$$u_0 = \sigma(x, y) + z[\gamma(x, y) - \sigma(x, y) - 1] + L_z^{-1} F(x, y, z)$$

elde edilir. (5.1.6) dan bileşenler benzer şekilde elde edilir (Adomian, 1988).

Örnek 5.1.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2u = (12x^2 - 4x^4) \sin y \cos z, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \pi/2$$

şeklinde verilen üç boyutlu Helmholtz denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin sınır değer şartları

$$u(0, y, z) = \alpha(y, z) = 0$$

$$u(1, y, z) = \beta(y, z) = 0$$

olarak tanımlansın. Verilen denklemin çözümü için ayrışım metodu kullanılırsa (5.1.3) deki u_0 'bileşeni

$$u_0 = c_1 k_1(y, z) + c_2 k_2(y, z)x + L_x^{-1} F(x, y, z)$$

$$u_0 = u(0, y, z) + [u(1, y, z) - u(0, y, z) - 1]x + \int_0^x \int_0^x ((12x^2 - 4x^4) \sin y \cos z) dx dx$$

$$u_0 = 0 + [1 - 0 - 1]x + (x^4 - \frac{2}{15}x^6) \sin y \cos z$$

$$u_0 = (x^4 - \frac{2}{15}x^6) \sin y \cos z$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde diğer bileşenler (5.1.6) dan ,

$$\begin{aligned}
u_1 &= L_x^{-1} 2u_0 - L_x(L_y + L_z)u_0 \\
&= 2 \int_0^x \int_0^x [(x^4 - \frac{2}{15}x^6) \sin y \cos z] dx dx - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^4 - \frac{2}{15}x^6) \sin y \cos z] dx dx \\
&\quad - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^4 - \frac{2}{15}x^6) \sin y \cos z] dx dx \\
&= (\frac{1}{15}x^6 - \frac{4}{840}x^8) \sin y \cos z + (\frac{1}{15}x^6 - \frac{4}{840}x^8) \sin y \cos z \\
&= (\frac{2}{15}x^6 - \frac{8}{840}x^8) \sin y \cos z \\
&= \frac{2}{15}x^6 - \frac{1}{105}x^8) \sin y \cos z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= L_x^{-1} 2u_1 - L_x(L_y + L_z)u_1 \\
&= 2 \int_0^x \int_0^x [(\frac{2}{15}x^6 - \frac{1}{105}x^8) \sin y \cos z] dx dx - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\frac{2}{15}x^6 - \frac{1}{105}x^8) \sin y \cos z] dx dx \\
&\quad - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\frac{2}{15}x^6 - \frac{1}{105}x^8) \sin y \cos z] dx dx \\
&= (\frac{4}{7.8.15}x^8 - \frac{2}{9.10.105}x^{10}) \sin y \cos z + (\frac{2}{7.8.15}x^8 - \frac{1}{9.10.105}x^{10}) \sin y \cos z \\
&\quad + (\frac{2}{7.8.15}x^8 - \frac{1}{9.10.105}x^{10}) \sin y \cos z \\
&= (\frac{1}{105}x^8 - \frac{4}{9450}x^{10}) \sin y \cos z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= L_x^{-1} 2u_2 - L_x(L_y + L_z)u_2 \\
&= 2 \int_0^x \int_0^x [(\frac{1}{105}x^8 - \frac{4}{9450}x^{10}) \sin y \cos z] dx dx - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\frac{1}{105}x^8 - \frac{4}{9450}x^{10}) \sin y \cos z] dx dx \\
&\quad - \int_0^x \int_0^x [\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\frac{1}{105}x^8 - \frac{4}{9450}x^{10}) \sin y \cos z] dx dx \\
&= (\frac{2}{9450}x^{10} - \frac{8}{11.12.9450}x^{12}) \sin y \cos z + (\frac{2}{9450}x^{10} - \frac{8}{11.12.9450}x^{12}) \sin y \cos z \\
&= (\frac{4}{9450}x^{10} - \frac{16}{11.12.9450}x^{12}) \sin y \cos z \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $u(x,y,z)$ oluşturan bileşenler



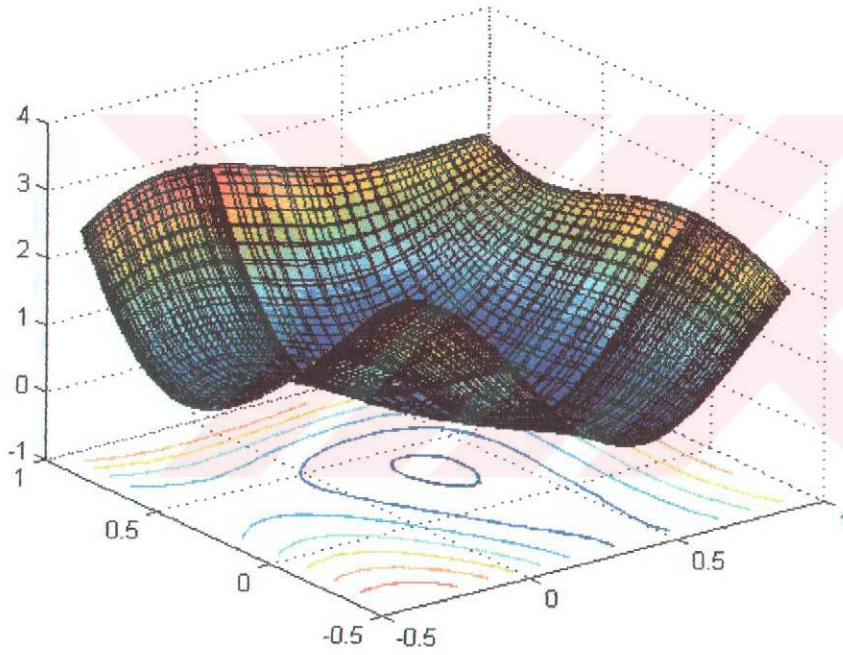
$$u(x, y, z) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

$$u(x, y, z) = \left\{ x^4 - \frac{2x^6}{15} + \frac{2x^6}{15} + \frac{x^8}{105} - \frac{x^8}{105} - \frac{4x^{10}}{9450} + \frac{4x^{10}}{9450} - \frac{16x^{12}}{11.12.9450} + \frac{16x^{12}}{11.12.9450} \dots \right\} \sin y \cos z$$

şeklinde yazılır. (5.1.1) denkleminin çözümü

$$u(x, y, z) = x^4 \sin y \cos z$$

olarak bulunur. $u(x, y, z) = x^4 \sin y \cos z$ çözümünde $x = 1$ alındığında seri çözüm fonksiyonunun grafiği şekil 2. deki gibi elde edilir.



Şekil 2.

Örnek 5.1.2

Sonlu farklar metodu ile Ayrışım metodunun sayısal karşılaştırması için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0 \quad (5.1.11)$$

şeklinde verilen iki boyutlu Helmholtz denklemini gözönüne alalım .Bu denklemin başlangıç şartları

$$u(0, y) = y, \quad u_x = y + \sinh y \quad (5.1.12)$$

olarak tanımlansın (Evans; Ahmad,1986). Bu denklemin çözümü için (5.1.3) deki u_0 bileşeni

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0, y) + u_x(0, y) + L_x^{-1} f(x, y) \\ u_0 &= y + xy + x \sinh(y) = (1+x)y + x \sinh(y) \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

bulunur. Burada diğer kalan bileşenler $u_1, u_2, u_3, \dots$ şeklindedir. (5.1.6) nın kullanılması ile diğer bileşenler;

$$\begin{aligned} u_1 &= L_x^{-1} u_0 - L_x L_y u_0 \\ &= \int_0^x \int_0^x [(1+x)y + x \sinh y] dx dy - \int_0^x \int_0^x \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} ((1+x)y + x \sinh y) \right] dx dy \\ &= y \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \right) + \frac{x^3}{3!} \sinh y - \frac{x^3}{3!} \sinh(y) \\ &= y \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \\ u_2 &= L_x^{-1} u_1 - L_x^{-1} L_y u_1 = y \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) \\ u_3 &= L_x^{-1} u_2 - L_x^{-1} L_y u_2 = y \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \right) \\ u_4 &= L_x^{-1} u_3 - L_x^{-1} L_y u_3 = y \left(\frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} \right) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece $u(x,y)$ nin yaklaşık çözümü :

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \quad (5.1.15)$$

dır. (5.1.14) değerleri (5.1.15) de yerine yazılırsa,

$$u(x, y) = y \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \right\} + x \sinh y$$

elde edilir. Buradan $u(x, y)$ fonksiyonunun çözümü :

$$u(x, y) = y \exp(x) + x \sinh y$$

bulunur. Örnek 5.1.2 nin sayısal karşılaştırması yapılarak; sonlu farklar metodu için hata sonuçları Tablo 5 de, ayrışım metodu için hata sonuçları Tablo 6 da verilmiştir.

y					
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.419443E-02	0.907232 E-02	0.142016E-01	0.186483E-01	0.213323E-01
0.2	0.881512E-02	0.184497 E-01	0.280724E-01	0.360411E-01	0.405275E-01
0.3	0.134029E-01	0.272575 E-01	0.404516E-01	0.507945E-01	0.561697E-01
0.4	0.171185E-01	0.341340 E-01	0.495067E-01	0.610606E-01	0.665037E-01
0.5	0.193252E-01	0.376712 E-01	0.536575E-01	0.651385E-01	0.700204E-01

Tablo 5. Sonlu farklar metodundaki mutlak(tam) hata sonuçları

y					
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.170917E-04	0.341833 E-04	0.512750E-04	0.683667E-04	0.854583E-04
0.2	0.140267E-03	0.280533 E-03	0.420800E-03	0.561066E-03	0.701333E-03
0.3	0.145877E-03	0.971549 E-03	0.145732E-03	0.194310E-03	0.242887E-03
0.4	0.118156E-02	0.236373 E-02	0.354559E-02	0.472746E-02	0.590932E-02
0.5	0.236979E-02	0.473957 E-02	0.710936E-02	0.949715E-02	0.118489E-02

Tablo 6. Ayrışım metodundaki mutlak hata sonuçları.

Ayrışım metodunun yalnızca ilk yedi-terimi kullanılarak denklemin gerçek çözümüne çok yakın bir yaklaşım elde edildi. Sayısal sonuçlarla ayrışım metodunu ilk yedi-terimine yapılacak her ilave terimle hataların daha küçük şekilde elde edilebileceği görülebilir (Kaya ve Bulut,1999).



KAYNAKLAR

Abbaoui,K and Cherruault,Y.,1995, New Ideas For Proving Convergence of Decomposition Methods, **Comput.Math.Applic.**,29(7),103-108 .

Abbaoui,K and Cherruault,Y.,1994, Convergence Of Adomian's Method Applied To Differential Equations, **Comput.Math.Applic.**,28 (5) , 103-109.

Adomian,G.,1963, Linear Stochastic Operators.P.H.D, **University of California,Los Angeles**,187 s.

Adomian,G.,1983, Stochastic Systems , **Academic Press , New York**,325 s.

Adomian,G.and Rach.R.,1983, Inversion Differential Operators, **J.Math.Anal.Appl.**, 91 , 39-46.

Adomian,G.,1984, Convergent Series Solution of Nonlinear Equations, **J.Comp.Appl. Math .11**, 225-230.

Adomian,G.,1984, A New Approach to Non-Linear Partial Differential Equation **J.Math.Anal.Appl.**, 102 , 420-434.

Adomian, G and Sibul,L.H., 1981, Symmetrized Solution for Nonlinear Stochastic Differential Equations, **Int.J.Math and Math Sci.**, 4,529-452.

Adomian ,G and Rach,R.,1983, Nonlinear Stochastic Differential Delay Equations, **J.Math.Anal.Appl.**,101,91-94.

Adomian,G and Rach,R., 1985, Polynomial Non-Linearities In Differential Equations, **J.Math.Anal.Appl.**, 109 , 90-95.

Adomian,G.,1986, Exsistence of The Invers of a linear Stochastic Operators, **J.Math.Anal.Appl**, 114-126.

Adomian,G.,1986, Nonlinear Stochastic System Theory and Applications to Physics,
Kluwer Academic Press,London,219 s.

Adomian,G.,1986, Stochastic Water Reservoir Modelling, **J.Math.Anal.Appl.**,115
,233-234.

Adomian,G.,1988, A Review of The Decomposition Method In Applied Mathematics,
J.Math.Anal.Appl.,135 , 501-544.

Adomian,G and Rach,R., 1988, Coupled Differential Equations and Coupled Boundary
Conditions, **J.Math.Anal.Appl.**, 112 , 112-129.

Adomian,G and Rach,R., 1990, Equality of Partial Solution In The Decomposition
method for linear or non-linear partial differential equations, **Comput.Math.Applic**,19 ,
9-12.

Adomian,G and Rach,R., 1992, Noise Terms in Decomposition Solution Series,
Computers Math.Appl., 24 (11) , 61-64.

Adomian,G and Rach,R., 1993, Analytic Solution Of Non-Linear Boundary-Value
Problems In Several Dimensions By Decomposition, **J.Math.Anal.Appl.**, 174 , 118-
137.

Adomian,G.,1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method,
Kluwer Academic Publishers, Boston,285 s.

Adomian,G.,1997, On KdV Type Equations, **Appl.Math.Comput.**, 88 , 131-135.

Adomian, G.,1997, Explicit Solutions of Non-Linear Partial Differential Equations
Appl. Math.Comput., 88,117-126.

Adomian,G., Cherruault,Y and Abbaoui,K.,1996, A Nonperturbative Analytical Solution of Immune Response with Time-Delays and Possible Generalization, **Math.Comput.Modelling**, **24** (10) 89-96.

Adomian,G and Malakian,K., 1980, Operator-Theoretic Solution of Stochastic Systems, **J.Math.Anal.Appl.**, **76** , 183-201.

Adomian,G., Rach, R.,Meyers,R.E., 1997, Numerical Integration Analytic Continuation And Decomposition, **Appl.Math.Comput.**, **88**,95-116.

Atkinson,Kendall.E.,1978, An Introduction to Numerical Analysis, **John Wiley&Sons,New York**,587 s.

Bellman,R and Adomian,G.,1985, Partial Differential Equations ,New Methods for Their Treatment and Solution, **D.Reidel Publishing Company, Boston** 290 s.

Bellomo,N and Monaco, R.A.,1985, Comparison Between Adomian's Decompositions Methods And Perturbation Techniques For Non-Linear Random Differential Equations, **J.Math.Anal.Appl.**,**110** , 495-502.

Bellomo,N and Sarafyan,D.,1987, On Adomian's Decomposition Method and Some Comparisons with Picard's Iterative Scheme , **J.Math.Anal.Appl.**,**123** , 389-400.

Bildik, N and Bulut,H.,1999, An A-stable Extended Simpson Rule for The Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. **Hadronic Journal Supplement**, **14**,449-457

Bulut, H and Ergüt,M.,2000, Decomposition Method For The Solution Of The Nonlinear Stochastic Differential Equations , **Türk Fizik Derneği 19. Fizik Kongresi** , 26-29 Eylül, Fırat Univ. Elazığ

Bulut, H and Turhan, E., 2000, A New Approach to The Dissipative Wave Equations:An Application of The Decomposition, **Institute of Math Computer Sciences**, 13,291-297.

Bulut,H and İnç,M.,2001, The Decomposition Method for Nonlinear Equations and Coupled Systems.**The first International Conference Nonlinear Analysis and Nonlinear Modelling** 17-23 July , Fethiye/TURKEY

Cherruault,Y., Saccomandi,G and Some,B.,1992, New Results For Convergence Of Adomian's Method Applied To Integral Equations ,**Math.Comput.Modelling**, 16 (2) , 85-93.

Cherruault,Y and Adomian,G.,1993, Decomposition Method:A New Proof of Convergence, **Math.Comput.Modelling**, 18 (12) ,103-106

Çağal, B., 1989, Sayısal Analiz, İstanbul, 568 s.

Datta, B.K., 1989, A New Approach of The Wave Equation-An Approximation of The Decomposition Method, **J. Math. Anal. Appl.**, 142, 6-12.

Datta,B. K., 1990, A Technique For Approximate Solutions To Schrodinger-Like Equations, **Comput. Math.Appl.**,21,61-65.

Ergüt, M and Bulut. H., 2002, The Numerical Solution of Two Dimensional Partial Differential Equations by The Decomposition Method, **Journal of Natural Science Mathematics(basımda)**

Evans,D.J and Ahmad,A.R ,1986, The Numerical Solution Of Multidimensional Partial Differential Equations By The Explicit Alternating Direction Method, **Inter. J. Computer Math**,23,105-111

Evans,D.J and Sahimi,M.S. ,1987, AGE Iterative Method For Solving Parabolic Equations II:3 –Space Dimensional Problems , **Inter. J. Computer Math**,22,117-142

Guellal,S., Grimalt,P and Cherruault,Y.,1997, Numerical Study Of Lorenz's Equation By The Adomian Method, **Comput.Math.Applic.**, **33(3)** , 25-29.

Hsiang, W.T and Kwong,M.K.,1982, On The Oscillation of Nonlinear Hyperbolic Equations, **J.Math.Anal.Appl.**, **85** , 31-45.

Karagöz,M.,1998, İstatistik Yöntemler,Malatya,461s.

Kaya,D.,2000, An Explicit Solution of Coupled Viscous Burger's Equation By The Decomposition Method, **IJMMS.**, **27(11)**, 675-680.

Kaya,D and Bulut,H., 1999, On a Numerical Comparson of Decomposition Method and Finite Difference Method for an Elliptic P.D.E, **Fırat.Ünv. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi**,**11(3)**, 285-294.

Kaya,D and Bulut,H.,2000, On a Numerical Comparson Between Decomposition Method and One –Step Methods For Nonlinear İnitial Value Problems. **Fırat.Ünv. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi.**, **12(1)**,299-305.

Laffez,P and Abbaoui,K.,1996, Modelling of the Thermic Exchanges During a Drilling Resulation with Adomian's Decomposition Method, **Math.Comput.Modelling**, **23(10)** , 11-14.

Onargan,G.,1989,Doğrusal Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri Üzerine, **Dokuz Eylül Ün. Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, İZMİR**

Rafatov, R., Ergüt, M., Bektaş, M., 1998, Laplace Dönüşümlerin Esasları, Diferansiyel ve Fark Denklemlerinin Çözümü, **Fırat Üniversitesi Yayınları**, 202 s.

Sanchez,F.,Abbaoui,K and Cherruault,Y.,2000, Beyond the Thin-Sheet Approximation Adomian's Decomposition, **Optics Com.**, **173** , 397-401.

Sincovec, R.F and Madsen, N.K., 1997, Software for Non-Linear Partial Differential Equations, **ACM Trans.Math.Software**, **1**, 67-75.

Tonning, S. Van., 1995, Adomian's Decomposition Method: A Powerful Technique For Solving Engineering Equations By Computer, **Computers Education J.**, **5 (4)**, 30-34.

Tuncer, T., 1996, Diferansiyel denklemler, **Alfa Basım Yayını Evi**

Venkatarangan, S. N. and Rajalakshmi, K. 1995., A Modification of Adomians Solution For Nonlinear Oscillatory Systems, **Comp. Math. Applic.** **29**, 67-73.

Wazwaz, A.M., 1995, On The Solution Of The Fourth Order Parabolic Equation By The Decomposition Method, **Intern. J.Computer Math.**, **57**, 213-217.

Wazwaz, A.M., 1995, A New Approach To The Nonlinear Advection Problem: An Application Of The Decomposition Method, **Appl.Math.Comput.**, **72**, 175-181.

Wazwaz, A.M., 1995, The Decomposition Method For Approximate Solution of The Goursat Problem, **Appl.Math.Comput.** **69**, 299-311.

Wazwaz, A.M., 1997, Necessary Conditions for the Appearance of Noise Terms in Decomposition Solution Series, **Appl.Math.Comput.**, **5**, 265-274.

Wazwaz, A.M., 1998, A Comparison Between Adomian Decomposition Method And Taylor Series Method In The Series Solutions, **Appl.Math.Comput.**, **97**, 37-44.

Wazwaz, A.M., 1998, A Reliable Technique For Solving The Wave Equation In An Infinite One-Dimensional Medium, **Appl.Math.Comput.**, **92**, 1-7.

Wazwaz, A.M., 1999, A Reliable Modification of Adomian Decomposition Method, **Appl.Math.Comput.**, **102**, 77-86.